

# 物理学実験 II ブラウン運動

## — 第1日目 —

確率過程について  
抵抗の熱雑音の測定実験

# 確率過程 (1)

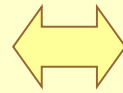
## — 確率分布 —

### ● 確率過程 (ランダムプロセス)

時間とともに不規則に変動する確率事象

ただし…

本実験で扱う確率過程は、  
すべてエルゴートプロセスである



時間平均と集合平均が一致

$$\langle x \rangle = \bar{x}$$

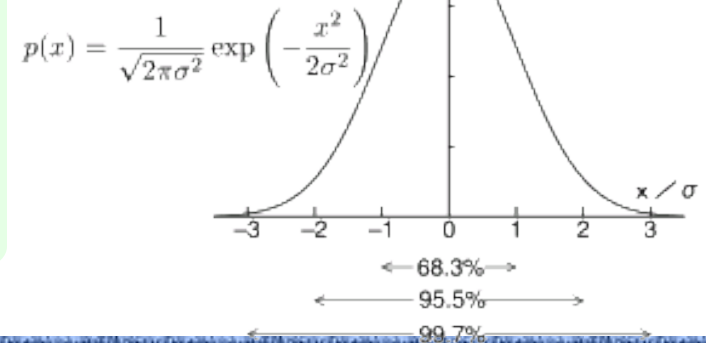
確率過程を調べるには、確率密度関数が大事

確率変数  $x$  が  
 $x$  と  $x + dx$  の間にある確率:  $p(x)dx$

確率の定義から

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad \text{が成り立つ}$$

代表的な  
確率分布:  
ガウス分布



# 確率過程 (2)

## ー ヒストグラム ー

### ● ヒストグラム

長時間の測定を行い、

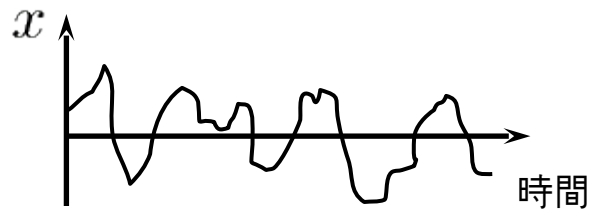
値が  $x$  と  $x + dx$  の間にある頻度を調べる



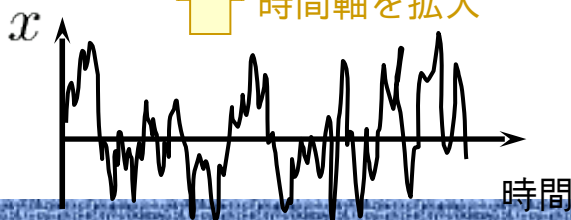
適切な規格化のもとで、

測定時間が十分ならば、**確率密度関数に漸近**

ただし、時間に関する情報は失われる



時間軸を拡大



ヒストグラムは一致

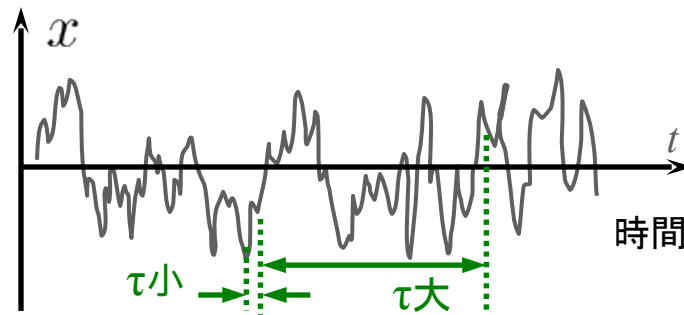
# 確率過程 (3)

## — 自己相関関数 —

### ● 自己相関関数

定義： 時間  $\tau$  だけ後の値との相関

$$C(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$$



有限の応答時間  
→ 相関が残っている

十分な時間が経過  
→ 相関はほとんど無くなる

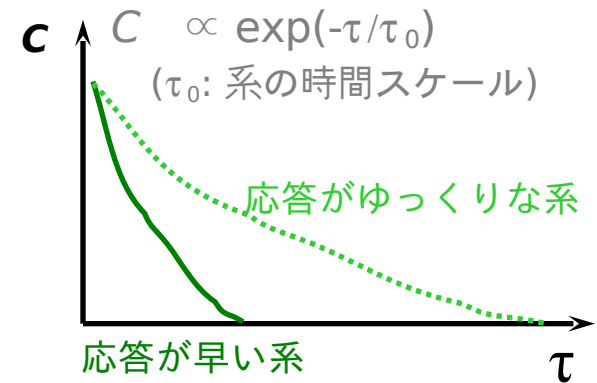
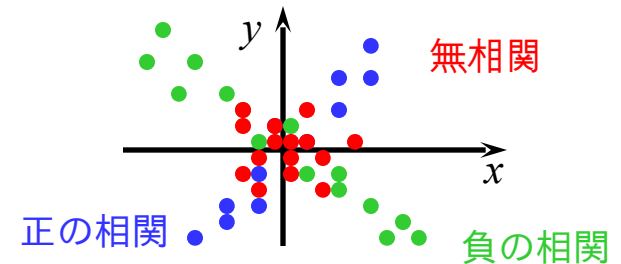


どれくらい時間が経過すると相関が無くなるか  
系の応答の典型的な時間スケールを表す

c.f. 相関関数

$$C_{xy} = \langle x(t)y(t) \rangle$$

→ xとyの相関に強さを表す



# 確率過程 (4)

## ー パワースペクトル ー

### ● パワースペクトル

定義： フーリエスペクトルの2乗平均で  
定義

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi |X_T(\omega)|^2}{T}$$

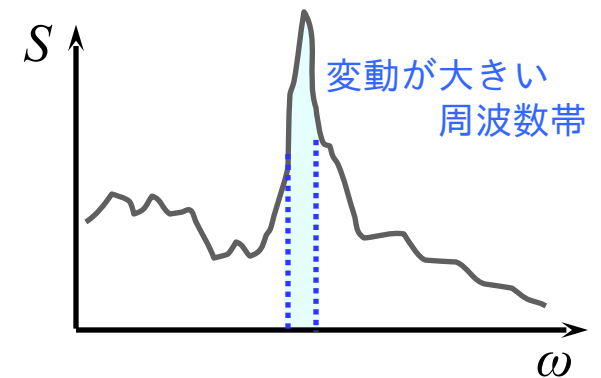
このとき、次式が成り立つ

$$\overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

➡ パワースペクトルは、  
ランダム変動の平均パワーに対する  
各周波数成分の寄与を表す



系の応答の典型的な周波数を表す

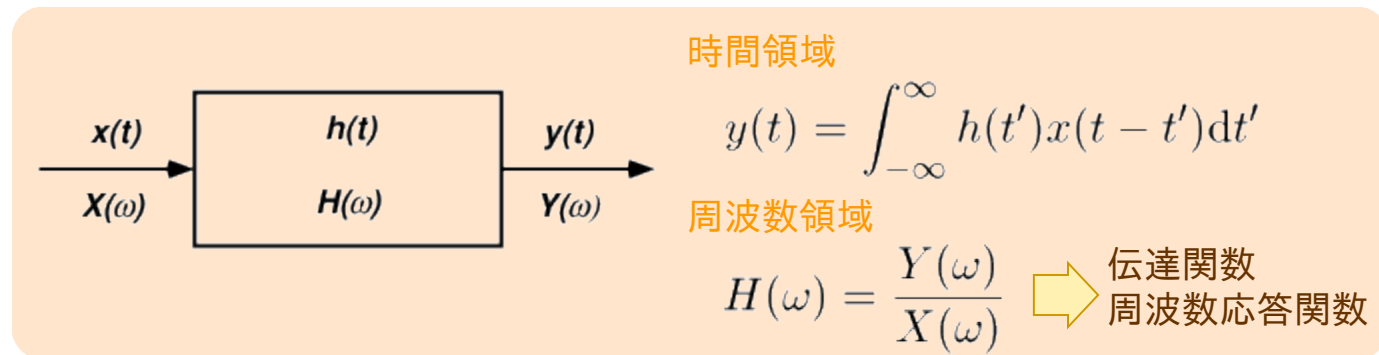


# 確率過程 (5)

## ー 線型システム ー

### ● 線型系

入力と出力が線型関係で結ばれた系



このとき、

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \quad \text{が成り立つ}$$



伝達関数がわかれば、  
出力のパワースペクトルを知ることができる

# 抵抗の熱雑音 (1)

## — 抵抗の熱雑音 —

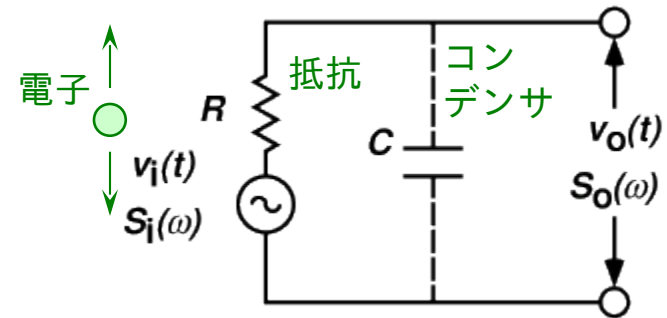
### ● 抵抗の熱雑音 (ジョンソン雑音)

抵抗の両端に生じる雑音

抵抗内の自由電子の熱運動に起因

確率密度関数: ガウス分布

スペクトル: 平坦 (白色雑音)



エネルギー等分配則より、

コンデンサー両端の平均エネルギーは、

$$\frac{\overline{Cv_o^2(t)}}{2} = \frac{kT}{2} \quad \text{となる}$$



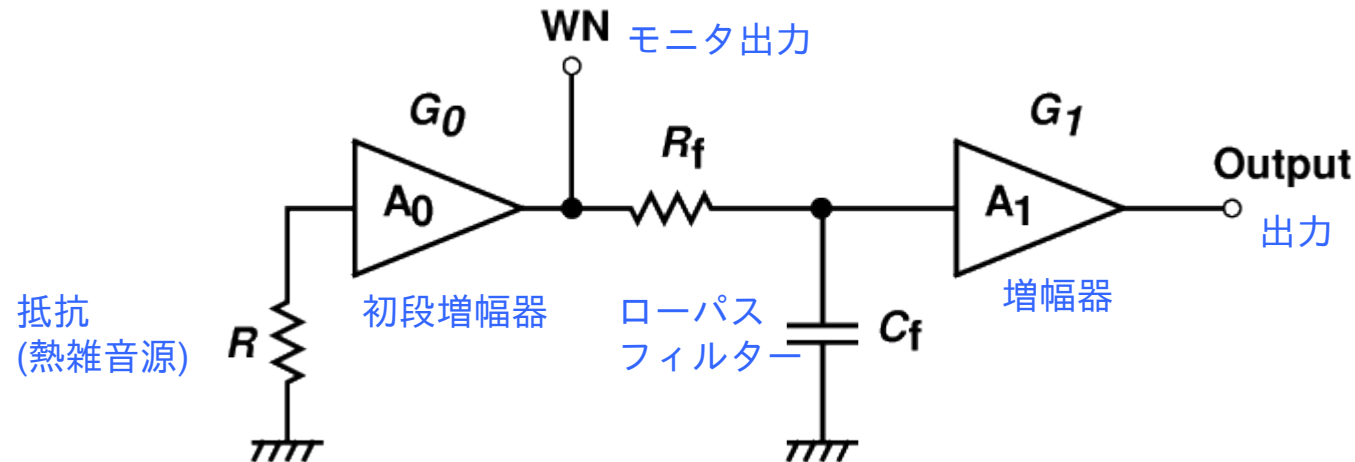
電圧の2乗平均から温度が求められる

# 抵抗の熱雑音 (2)

## ー 測定回路 ー

### ● 測定回路の構成

熱雑音源となる抵抗、増幅器などを含む



抵抗値: 1, 2, 5, 10 M $\Omega$

時定数: 10, 20, 50, 100 msec

(注)

スイッチ切り替え直後は  
出力が安定しないので、  
落ち着くのを待ってから測定すること

➡ 合計16通りの測定を行なう

# 抵抗の熱雑音 (3)

## ー A/Dコンバータ ー

### ● A/Dコンバータ

アナログ信号をデジタル信号に変換

→ コンピュータに記録できるようにする

仕様:  $\pm 10V$ , 16bit → 分解能 約0.3mV

ソフトウェア: FDSAMP で計測, DATDISPで表示・解析

### 注意点

#### 信号の大きさ

ゲイン大 → アナログ回路の飽和, ADCのレンジオーバー

ゲイン小 → 回路の雑音の影響, ADCの量子化誤差

#### サンプリングレート

早い → データ量が増える

遅い → エリアシングの問題

#### 測定データ量

短い → 統計誤差が大きくなる

長い → 測定時間が長くなる

# 抵抗の熱雑音 (4)

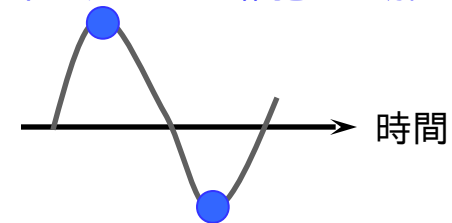
## ー エリアシング ー

### ● 標本化定理とエリアシング

標本化定理の大雑把な理解

#### 標本化定理

アナログ信号をデジタル変換する際、  
サンプリング周波数の半分の周波数  
(ナイキスト周波数) までしか記録できない

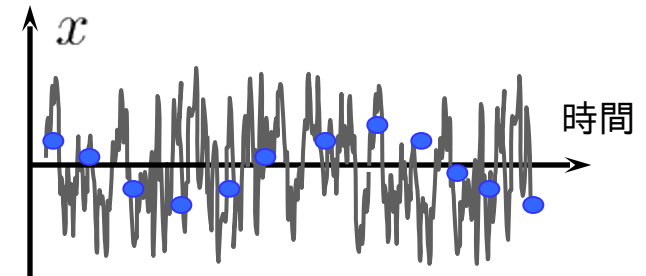


波形を再現するには  
最低2点は必要

#### エリアシング

ナイキスト周波数以上の成分が、  
低周波数成分として現れてしまう

➡ 低周波数帯の測定結果  
も信頼できないものになる



#### アンチ・エリアシング・フィルター

ADC入力前に、ナイキスト周波数以上  
の成分を除去しておくためのLPF

➡ 低周波数帯は  
正確な測定結果が得られる

