

輪講 Saulson

理学部物理学科 05-081517 榊原裕介

2010年2月3日

7 THERMAL NOISE

7.7 Dissipation from Internal Friction in Materials

質量をつるしているワイヤーの内部摩擦による散逸を考える。理想的な場合、Hookeの法則

$$F_{\text{spr}} = -k\delta x \quad (7.35)$$

が成り立つが、実際の物質では、外力に対する応答が遅れる anelasticity による散逸がある。これを表すために、周波数領域で

$$F_{\text{spr}} = -k(1 + i\phi(f))\delta x \quad (7.36)$$

と書き、 $\phi(f)$ は anelasticity の程度を表す。 $\phi(f) = 2\pi\beta f$ とすれば、(7.36) の虚部は $-k\beta i2\pi f\delta x = -bv$, ($b \equiv k\beta$) となり、速度に比例する力が導かれる。しかし、実際の物質では、 $\phi(f)$ は f によらない定数であり、典型的な物質では $\phi \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ である。

前と同様に運動方程式

$$F_{\text{ext}} = m\ddot{x} + k(1 + i\phi)x$$

からインピーダンスは

$$Z \equiv \frac{F_{\text{ext}}}{v} = \frac{k\phi}{2\pi f} + i2\pi fm - i\frac{k}{2\pi f}$$

となるので、(7.14) との比較から $b = k\phi/2\pi f$ とすれば以降の議論は前と全く同じになることがわかり、(7.20) は

$$x^2(f) = \frac{4k_B T k \phi}{2\pi f [(k - m(2\pi f)^2)^2 + k^2 \phi^2]} \quad (7.39)$$

となる。高周波数領域では、 $\sim 1/f^4$ ((7.20) の場合) ではなく $\sim 1/f^5$ となる。重力波を観測する周波数領域は共鳴周波数 f_0 よりも高いので、幸運なことにこのノイズは (7.20) の場合よりも小さくなる。

7.8 Special Features of the Pendulum

長さ l のワイヤーが質量 m の物体をつるしているとき、縦方向に物体を支えているのはワイヤーの弾性であり、質量が縦に変位した場合にはワイヤーの伸びに関するばね定数で決まる周波数で振動する。

一方、質量が横に変位した場合には重力による復元力が働き、周波数 $f_0 = (1/2\pi)\sqrt{g/l}$ で振動する。すなわち、重力は実効的なばね定数 $k_{\text{grav}} = mg/l$ を持つ。もちろん、ワイヤーの弾性に関するばね定数

$$k_{\text{el}} = \frac{\sqrt{mgEI}}{2l^2} \quad (7.40)$$

による力も働くが、ワイヤーが十分細ければ $k_{\text{el}} \ll k_{\text{grav}}$ である。

ワイヤーの弾性に関するばね定数と、重力の実効的なばね定数では、前者は散逸があるのに対し、後者は散逸がない。よって、振り子とワイヤーの ϕ の関係は

$$\phi_{\text{pend}} = \phi_{\text{wire}} \frac{k_{\text{el}}}{k_{\text{el}} + k_{\text{grav}}} \quad (7.41)$$

となる。実際振り子は散逸を最も少なくする方法である。このスペクトルを示したものが Figure 7.6 であり、期待されるレーザーパワーでは、

1. 熱雑音は radiation pressure noise より大きい
2. 高周波数では shot noise が、低周波数では熱雑音が支配的である

ことが分かる。

7.9 Thermal Noise of the Pendulum's Internal Modes

振り子の内部の振動モードは、振り子のワイヤーの”violin”モードと、試験質量自体の振動モードの2つに分けることができる。前者の周波数は

$$f_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mg}{nm_w l}} \quad (7.44)$$

であり、この Q 値は振り子のモードと同じオーダーである。

後者は計算が複雑であるが、厚さと直径の比をうまく選んだ鏡の場合

$$f_{\text{int}} = \frac{1}{2} \frac{v_s}{d} \quad (7.45)$$

ただし v_s は鏡の物質中の音速、 d は鏡の直径であり、他にも多くのモードがある。高い Q 値を得るにはよい材質（例、融解石英 fused silica）を見つける必要がある。

熱雑音を小さくする他の方法は共鳴周波数を大きくすることであるが、実際には興味のある重力波の周波数に比べて十分大きくなっている。そこで (7.39) から、共鳴周波数よりも十分小さな周波数における熱雑音は、すべてのモード n （共鳴周波数 f_n ）の和を用いて

$$x(f) \approx \left(\frac{8k_B T}{2\pi f} \sum_n \frac{\phi_n(f)}{m(2\pi f_n)^2} \right)^{1/2} \quad (7.46)$$

とかける。ファクターが 4 ではなく 8なのは表面の変位がモードの平均の運動の 2 倍のオーダーであるためである。これから $h(f)$ を計算しプロットしたものが Figure 7.7 である。Gillespie と Raab によれば、高いモードの寄与のためにこれより約 2 倍大きくなり、100 Hz 付近で shot noise と同程度の大きさになる。