Quantum Optics Chapter 2

理学系研究科 物理学専攻 坪野研究室 修士課程 1 年　道村唯太

2010 年 4 月 30 日

2 Coherent and squeezed states of the radiation field

2.1 Radiation from a classical current

古典的 (演算子でない) 電流分布からの輻射は coherent state

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)|0\rangle \tag{2.1.10}$$

2.2 The coherent state as an eigenstate of the annihilation operator and as a displaced harmonic oscillator state

消滅演算子 a の固有状態 (固有値 α) としても定義できる
coherent state は真空に変位演算子 $D(\alpha)$ を掛けたもの

$$D(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} = e^{|\alpha|^2/2} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \qquad (2.2.5), (2.2.9), (2.2.8)$$

2.3 What is so coherent about coherent states?

まず number state $|n\rangle$ の座標表示を考える → $\phi_n(q)$ (2.3.5)
この uncertainty product は

$$\Delta p \Delta q = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar \tag{2.3.13}$$

最小になるのは $\phi_0(q)$。
$\phi_0(q)$ の位置を q_0 だけずらした波束 $\psi(q,0)$ (2.3.14) は、形を変えずに振動する
　it sticks together or *coheres* (2.3.15)
(2.3.14) を書き換えると (2.3.16) で、これは coherent state の座標表示になっている。

$$\psi(q,0) = \left(\frac{\nu}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\nu}{2\hbar}(q-q_0)^2\right] = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle q|n\rangle = \langle q|\alpha\rangle \qquad (2.3.14), (2.3.16)$$

2.4 Some properties of coherent states

(a) $|\alpha\rangle$ で n 個の光子を見つける確率は Poisson 分布 $p(n)$　(2.4.2)

(b) 不確定性が最小 $\Delta p \Delta q = \frac{\hbar}{2}$　(2.4.3)

(c) 完全性 (2.4.6)

(d) 直交系ではない (2.4.7)　*overcomplete*

2.5 Squeezed state physics

squeezed state の単振動 (simple harmonic oscillator) → Fig 2.3　波束は半周期毎に sharp になる
電場 E 中の、ばねに繋がれた質量 m、電荷 e の SHO を考える。
　一様 (→ a と $a^\dagger$ の 1 次) な電場を掛けて切る → Fig 2.4　coherent state
　x の 2 次の形で表される (→ $(a+a^\dagger)^2$ の形) 電場ポテンシャルをかける → Fig 2.6　squeezed state

2.6 Squeezed states and the uncertainty relation

$X_1 = \frac{1}{2}(a+a^\dagger)$ と $X_2 = \frac{1}{2}(a-a^\dagger)$ を用いて

$$\boldsymbol{E}(t) = \mathscr{E}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(ae^{-i\nu t} + a^\dagger e^{i\nu t}) \quad (2.6.5) \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{E}(t) = 2\mathscr{E}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(X_1 \cos\nu t + X_2 \sin\nu t) \quad (2.6.11)$$

$(\Delta X_i)^2 < \frac{1}{4}$ だったら squeezed state、$\Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{4}$ だったら ideal squeezed state。
squeezed state で X_i のどちらか一方のノイズが減ると振幅か位相のノイズが減る → Fig2.7

2.7 The squeeze operator and the squeezed coherent states

squeeze operator

$$S(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi a^{\dagger 2}\right) \qquad (\xi = re^{i\theta}) \tag{2.7.3}$$

squeezed coherent state

$$|\alpha, \xi\rangle = S(\xi)D(\alpha)|0\rangle \tag{2.7.10}$$

2.7.1 Quadrature variance

X_i ではなく $\theta/2$ 回転させた Y_i を使う。

$$Y_1 + iY_2 = (X_1 + iX_2)e^{-i\theta/2} = ae^{-i\theta/2} \qquad (2.7.8), (2.7.14)$$

coherent state では $(\Delta X_i)^2 = \frac{1}{4}$ だった。squeezed coherent state では

$$(\Delta Y_1)^2 = \frac{1}{4}e^{-2r}, \qquad (\Delta Y_2)^2 = \frac{1}{4}e^{2r} \qquad (2.7.15), (2.7.16)$$

で、ideal squeezed。
r は squeezed 度合いを決めるパラメータになっている。
Fig 2.8: $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$。error ellipse は X_i 軸を $\theta/2$ 回転させた Y_i 軸と平行な軸を持つ。

2.8 Multi-mode squeezing

two-mode squeezing。ν まわりに対称的に位置した 2 つのモードに対する生成消滅演算子から作った演算子

$$S(\xi) = \exp\left(\xi^* a_{\nu+\nu'} a_{\nu-\nu'} - \xi a^\dagger_{\nu+\nu'} a^\dagger_{\nu-\nu'}\right) \tag{2.8.1}$$

を two-mode vacuum にかければよい。

Problems

※順次追加予定

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5 混乱を避けるために

$$|\alpha,\xi\rangle = S(\xi)D(\alpha)|0\rangle, \qquad |\xi,\alpha\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle$$

とする。

$$\langle\xi,\alpha|a|\xi,\alpha\rangle = \langle 0|S^\dagger D^\dagger a D S|0\rangle = \langle 0|S^\dagger(a+\alpha)S|0\rangle = \langle 0|(a\cosh r - a^\dagger e^{i\theta}\sinh r)|0\rangle + \alpha = \alpha$$

以下同様に、$|0\rangle$ ではさむと a や $a^\dagger$ や $a^\dagger a$ の項は残らないことに注意して計算すると

$$\begin{aligned}
\langle\xi,\alpha|a^2|\xi,\alpha\rangle &= \alpha^2 - e^{i\theta}\sinh r\cosh r \\
\langle\xi,\alpha|a^{\dagger 2}|\xi,\alpha\rangle &= \alpha^{*2} - e^{-i\theta}\sinh r\cosh r \\
\langle\xi,\alpha|a^\dagger a|\xi,\alpha\rangle &= |\alpha|^2 + \sinh^2 r
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
(\Delta Y_1)^2 = \langle Y_1^2\rangle - \langle Y_1\rangle^2 &= \frac{1}{4}\langle(ae^{-i\theta/2} + a^\dagger e^{i\theta/2})^2\rangle - \frac{1}{4}\langle ae^{-i\theta/2} + a^\dagger e^{i\theta/2}\rangle^2 \\
&= \frac{1}{4}\left((\alpha^2 - e^{i\theta}\sinh r\cosh r)e^{-i\theta} + 1 + 2(|\alpha|^2 + \sinh^2 r) + (\alpha^{*2} - e^{-i\theta}\sinh r\cosh r)e^{i\theta}\right) \\
&\qquad -\frac{1}{4}(\alpha^2 e^{-i\theta} + \alpha^{*2}e^{i\theta} + |\alpha|^2) \\
&= \frac{1}{4}(1 - 2\sinh r\cosh r + 2\sinh^2 r) \\
&= \frac{1}{4}e^{-2r}
\end{aligned}$$

同様に

$$(\Delta Y_2)^2 = \frac{1}{4}e^{2r}$$

ちなみに、計算があっていれば

$$\begin{aligned}
\langle\alpha,\xi|(Y_1 + iY_2)|\alpha,\xi\rangle &= \mathrm{Re}(\alpha e^{-i\theta/2})e^{-r} + i\mathrm{Im}(\alpha e^{-i\theta/2})e^{r} \\
\langle\xi,\alpha|(Y_1 + iY_2)|\xi,\alpha\rangle &= \mathrm{Re}(\alpha e^{-i\theta/2}) + i\mathrm{Im}(\alpha e^{-i\theta/2}) \\
&= \alpha e^{-i\theta/2} \\
&= \langle\alpha|(Y_1 + iY_2)|\alpha\rangle = \langle\alpha|(X_1 + iX_2)|\alpha\rangle e^{-i\theta/2}
\end{aligned}$$

2.6

2.7

2.8