

Ando-lab basic lecture. 2020. 5/20

**General Relativity
and
Data Analysis**

本文日本語 ver.

Hiroki Takeda

Abstract

1. Introduction

2. General Relativity

- Gravitational waves
- Signal of gravitational waves

3. Data analysis

- Useful quantity
- Bayesian inference
- Fisher analysis

I. Introduction

I. Introduction

Basic lectureの目的:

- 新しく重力波分野に入ってきた人へのガイド
- 資料を残して更新していくことで受け継げたら楽に

今回のBasic lectureの目的:

- 重力波の生成・伝播・検出の概観
- 重力波検出に関する基本的な量と意味
- ベイズ推定によるデータ解析

I. Introduction 参考

- ・重力波

Maggiore(2007) "Gravitational Waves: Volume I,2".

Creighton(2011) "Gravitational-Wave Physics and Astronomy".

- ・一般相対性理論など重力理論

MTW(1973) "Gravitation".

Wald(1984) "General relativity".

Poisson and Will(2014) "Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic".

Will(2014) "The confrontation between General Relativity and Experiment".

- ・重力波データ解析

Thrane(2019) "An introduction to Bayesian inference in gravitational-wave astronomy".

Veitch *et al.*(2015) "Parameter estimation for compact binaries with ground-based gravitational-wave observations using the LALInference software library".

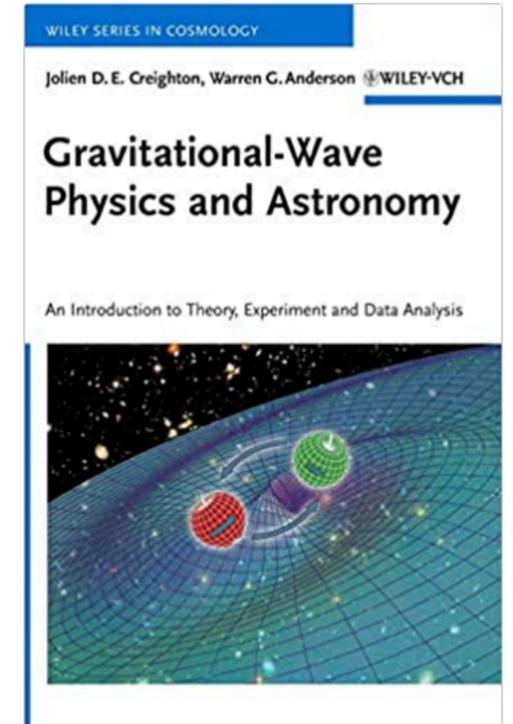
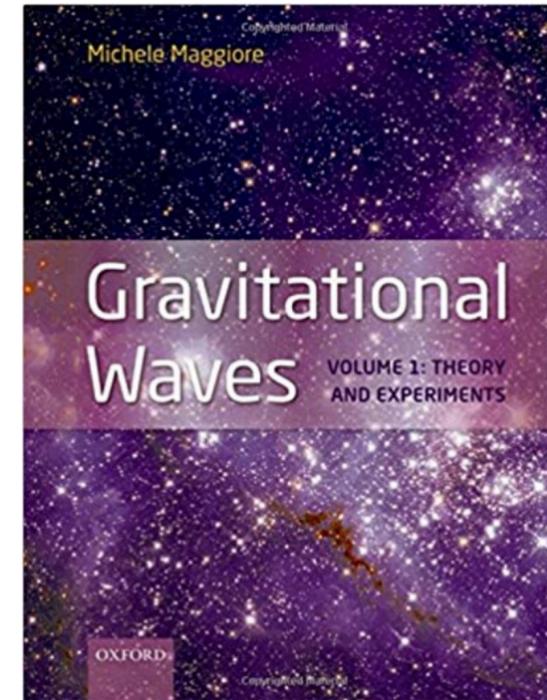
Cutler and Flanagan(1994) "Gravitational waves from merging compact binaries: How accurately can one extract the binary's parameters from the inspiral waveform?"

- ・観測

B. P. Abbott *et al.*, Phys. Rev. Lett. 116, 221101 (2016).

B. P. Abbott *et al.*, Phys. Rev. Lett. 119, 141101 (2017).

B. P. Abbott *et al.*, Phys. Rev. Lett. 123, 011102 (2019).



2. General Relativity

General Relativity

一般相対性理論: アインシュタインによる時空・重力の理論。

-> 時空は事象という要素からなる四次元ローレンツ多様体。

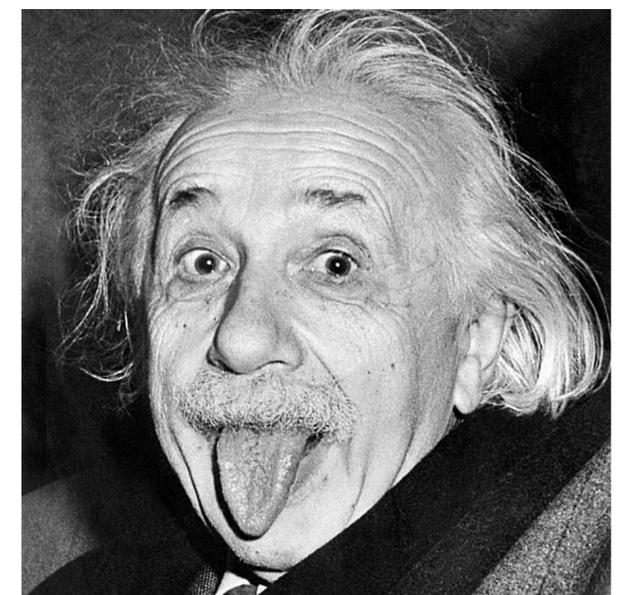
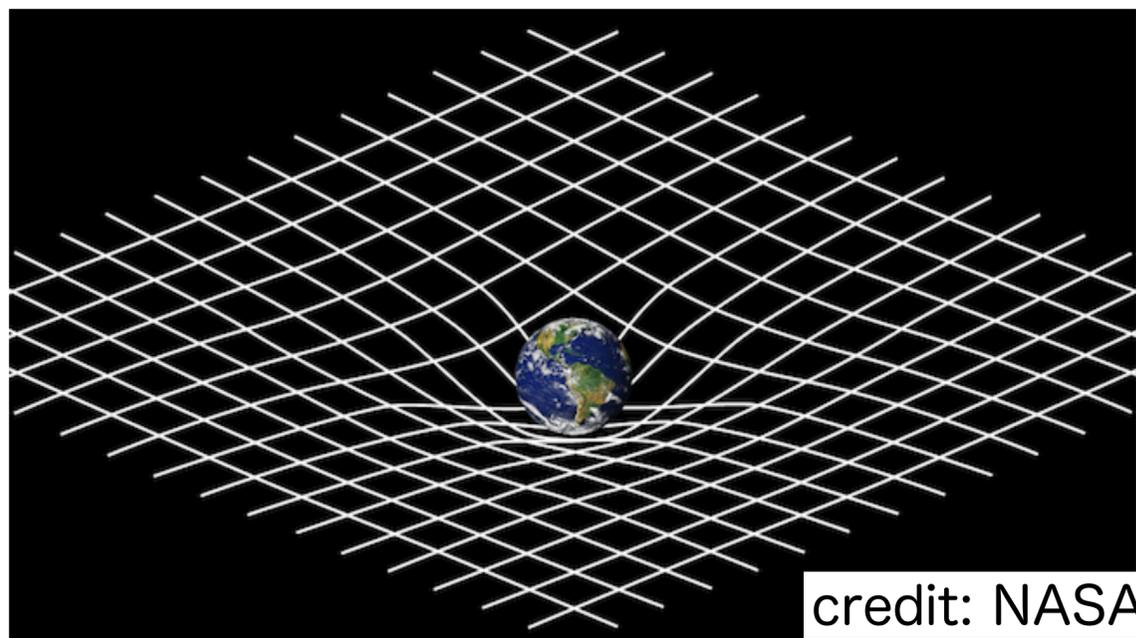
重力は時空の歪みとして導入。

計量: g_{ab} , 接続: Γ_{bc}^a , リーマンテンソル: R^a_{bcd}

->重力ポテンシャル

->重力

->曲率



General Relativity

一般相対性理論の大枠は？

等価原理: 慣性質量と重力質量が一致

- > 特殊相対論の意味で慣性系を設け重力場を測定するのは不可能。
- > 重力は平坦ではない時空構造。

重力下で自由落下する物体は曲がった時空の測地線。

*測地線とは曲がった空間での真っ直ぐな線。

特殊相対論

一般相対論

測地線

$$u_a \partial^a u_b = 0$$

$$u_a \nabla^a u_b = 0$$

$$u_a \partial^a u_b = \frac{q}{m} F^b_c u^c \quad \text{電磁場}$$

重力

General Relativity

一般相対性理論の大枠は？

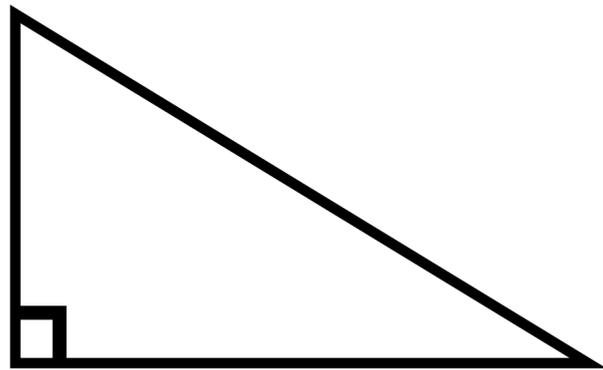
曲がった時空

計量: 距離を定義する関数

参考...

三平方の定理

$$dz^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$



特殊相対論: $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

→ $ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b$

一般相対論: (\mathcal{M}, g_{ab})

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b$$

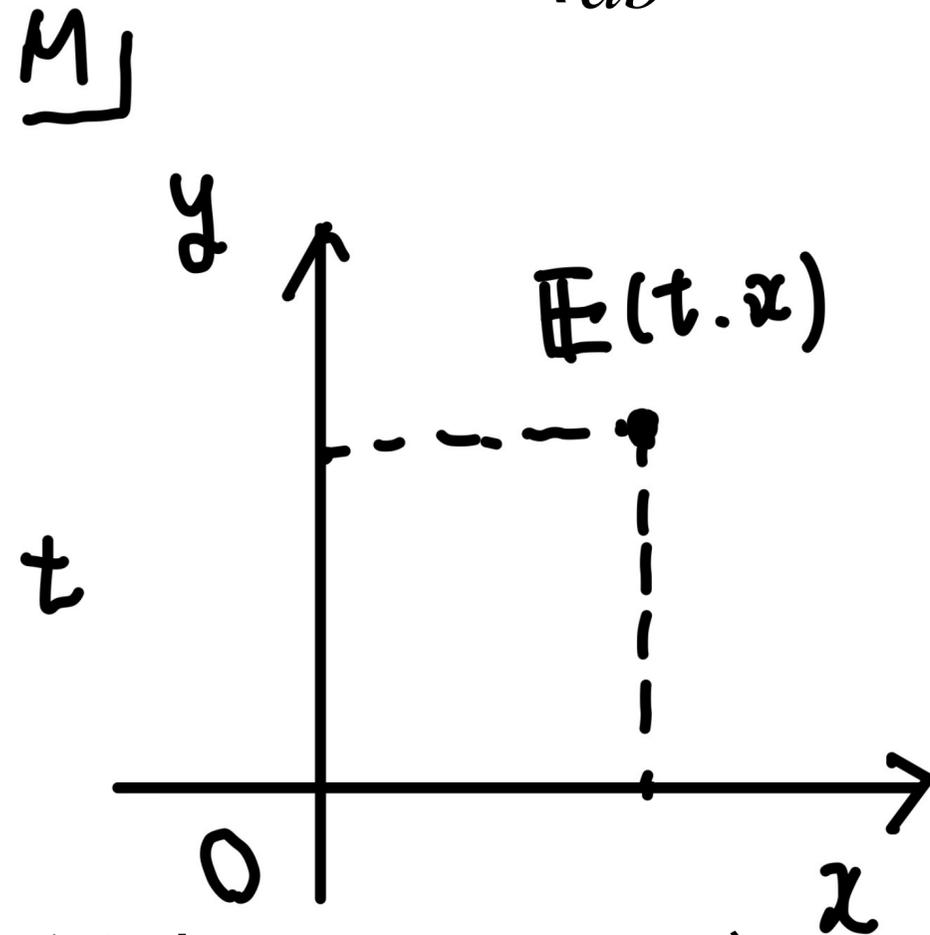
General Relativity

一般相対性理論の大枠は？

曲がった時空

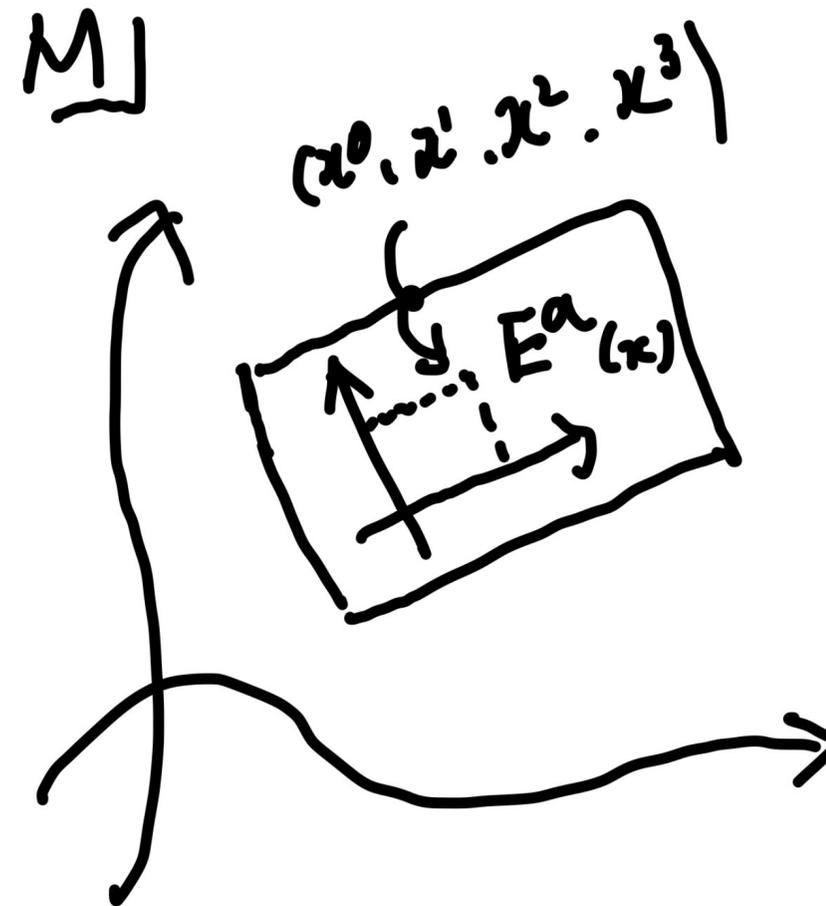
多様体: 局所的に \mathbb{R}^n とみなせる空間。

特殊相対論: $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$



従来のイメージ

一般相対論: (\mathcal{M}, g_{ab})



重力によって曲がっている空間

一般相対論は曲がった時空で重力を記述する理論。

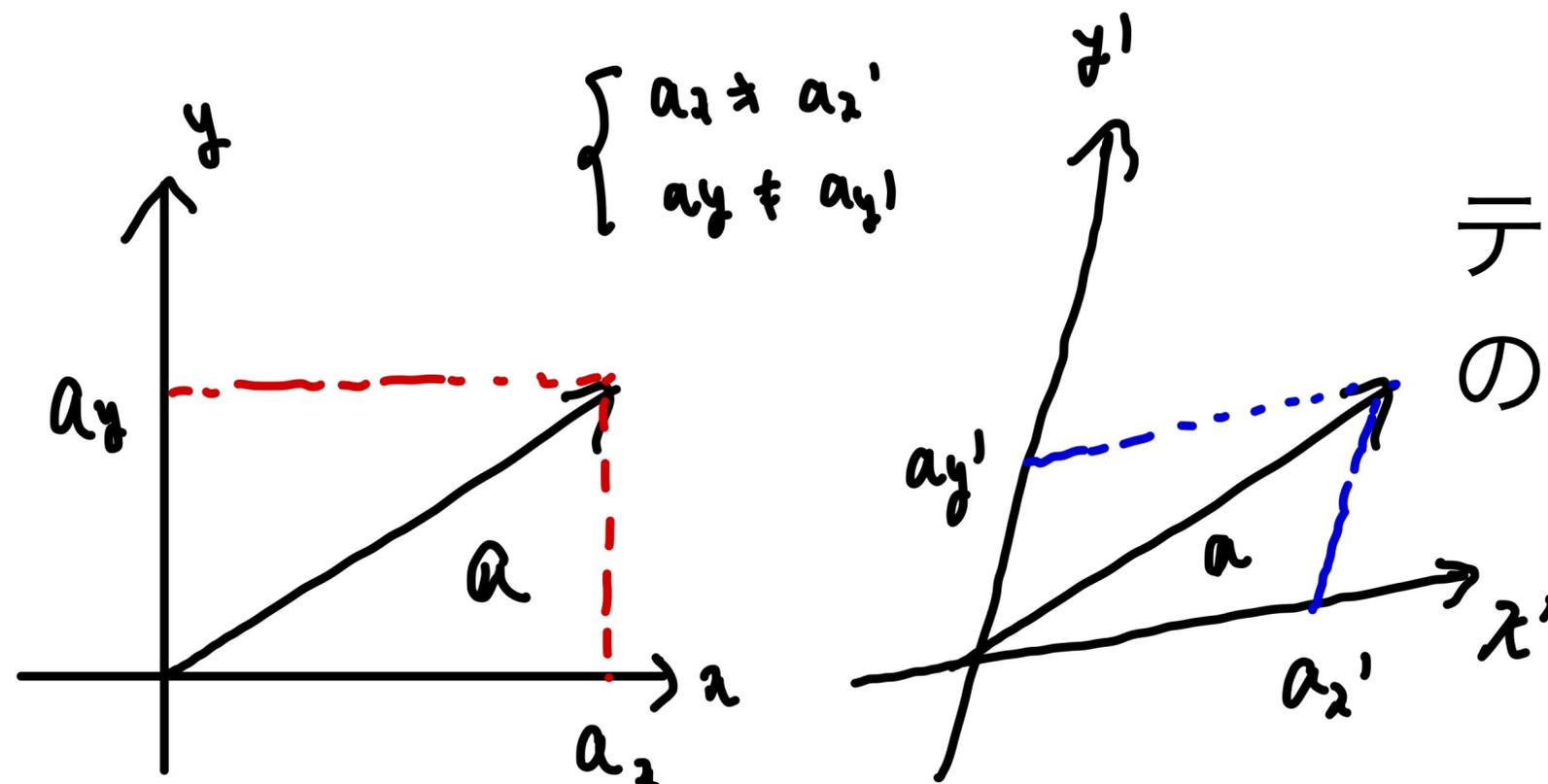
General Relativity

物理法則はどう決める？

一般相対性(共変性)原理: どの座標系から見ても物理法則は不変。

(原理1) 計量とその微分が物理の方程式に現れる時空の量。

(原理2) 特殊相対性理論へ帰着



テンソル(スカラーやベクトルの拡張)の成分は座標系に依存。

テンソル方程式 \rightarrow どの座標系でも同じ形の方程式

$$A_{ab} = B_{ab} \Rightarrow A'_{ab} - B'_{ab} = \frac{\partial x^c}{\partial x^{a'}} \frac{\partial x^d}{\partial x^{b'}} \{A_{cd} - B_{cd}\} = 0$$

General Relativity

重力と時空の曲率の関係？

座標系の取り方で何とでもなる->絶対的な重力波無意味。

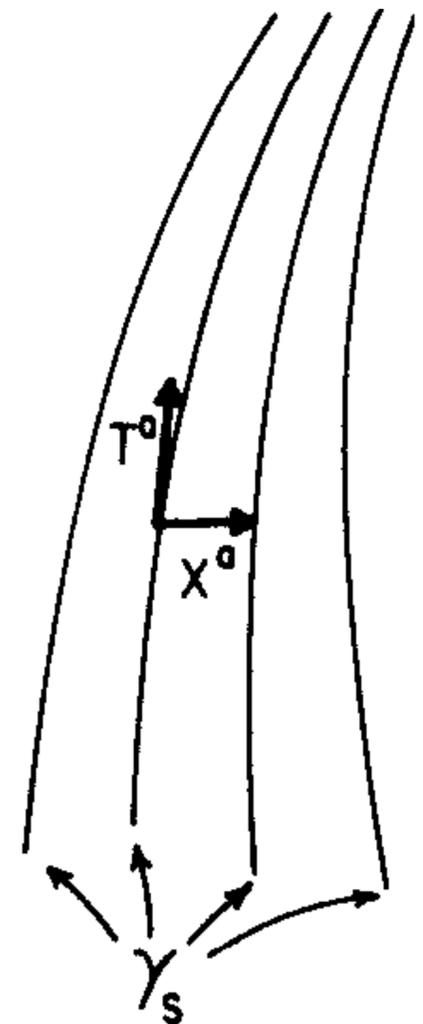
相対重力(加速度)が重要 \Leftrightarrow 曲率(cf. 測地線偏差)

$$a^a = -R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d$$

相対加速度

曲率テンソル

時空の曲率(重力)によって測地線(物体の軌道)が変化。



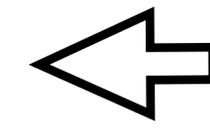
General Relativity

重力場は何で決まる？

一般相対性理論における基礎方程式 -> **時空(重力)と物質場の関係**

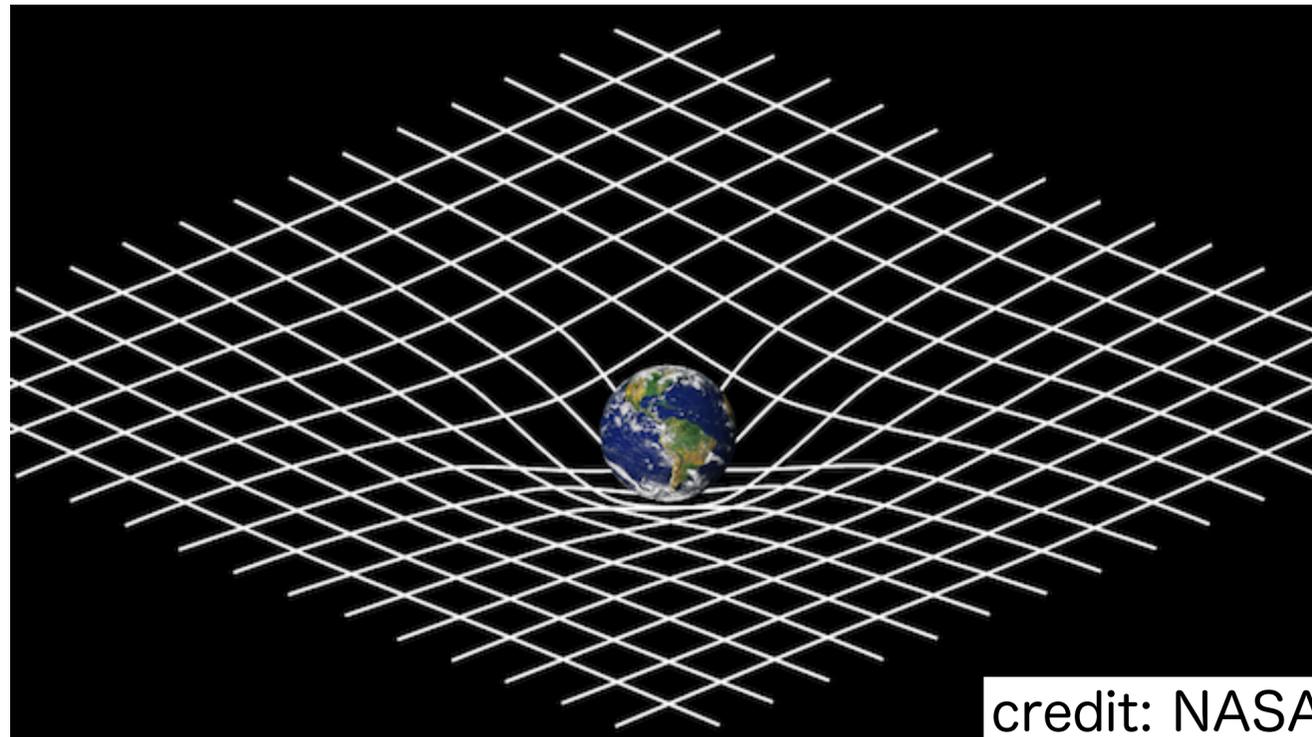
場の方程式
(Einstein 方程式)

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi T_{ab}$$

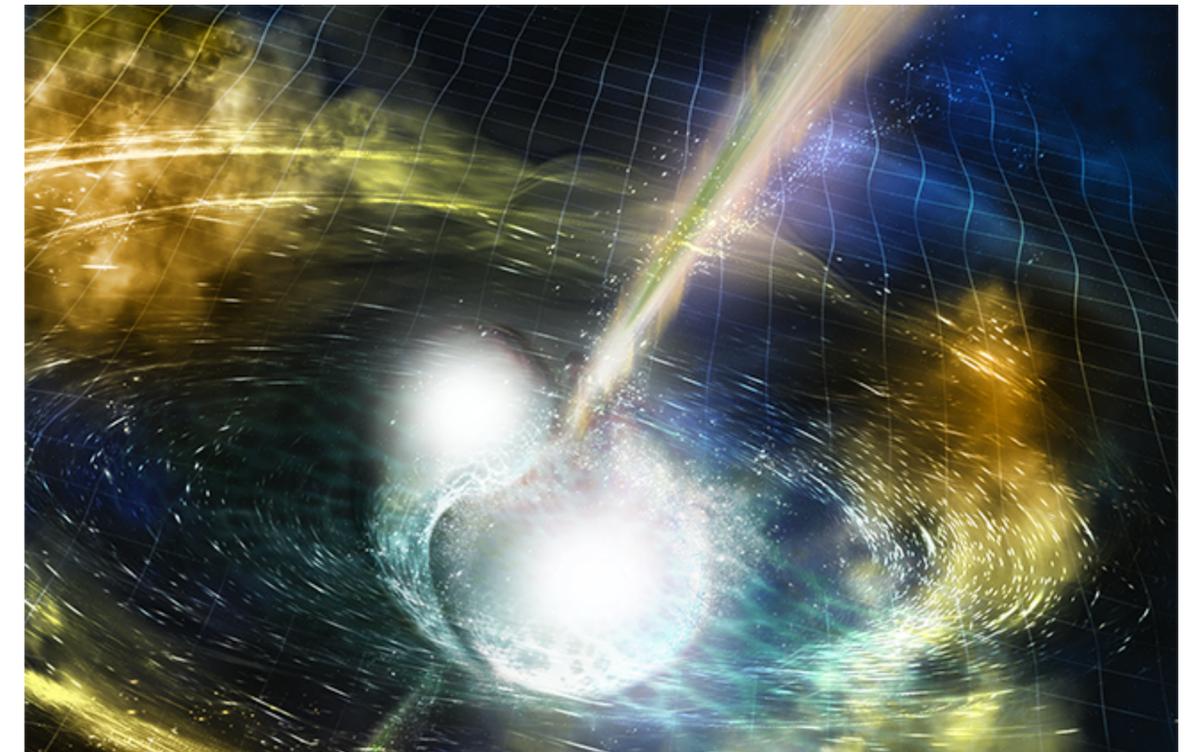


Hilbert 作用
 $\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}R$

計量に依存(時空) 物質に依存



credit: NASA



credit: A. Simonnet, Sonoma State University

Gravitational waves

重力波って？

重力波は計量摂動の波動解 -> 時空の歪みが波として伝播。

場の方程式

(Einstein 方程式)

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi T_{ab}$$

計量に依存(時空)

物質に依存

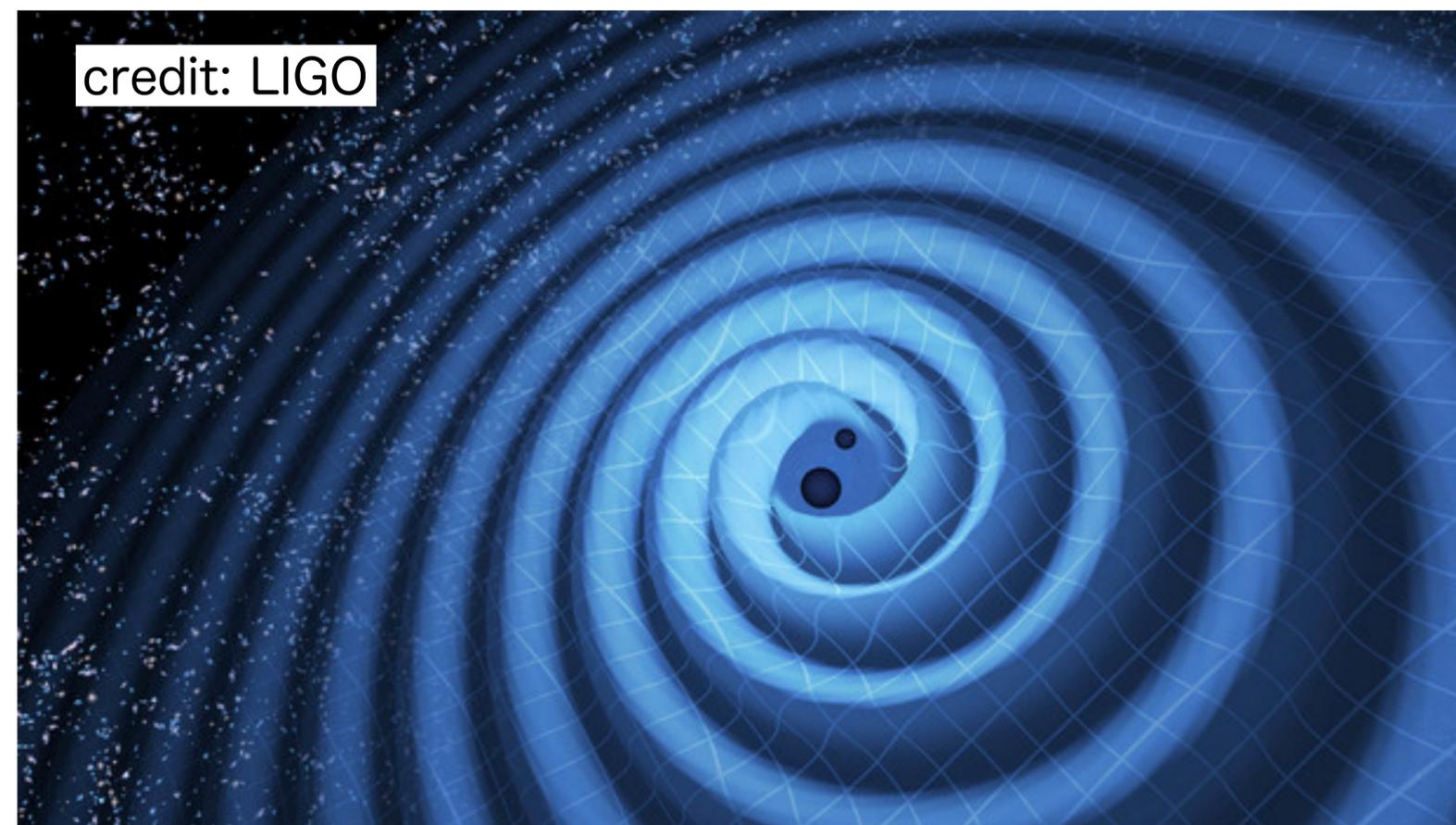
物質場がないところで...
摂動を考える。

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$$

$$\bar{h}_{ab} := h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h$$

波動方程式

$$\partial_c \partial^c \bar{h}_{ab} = 0$$



Gravitational waves

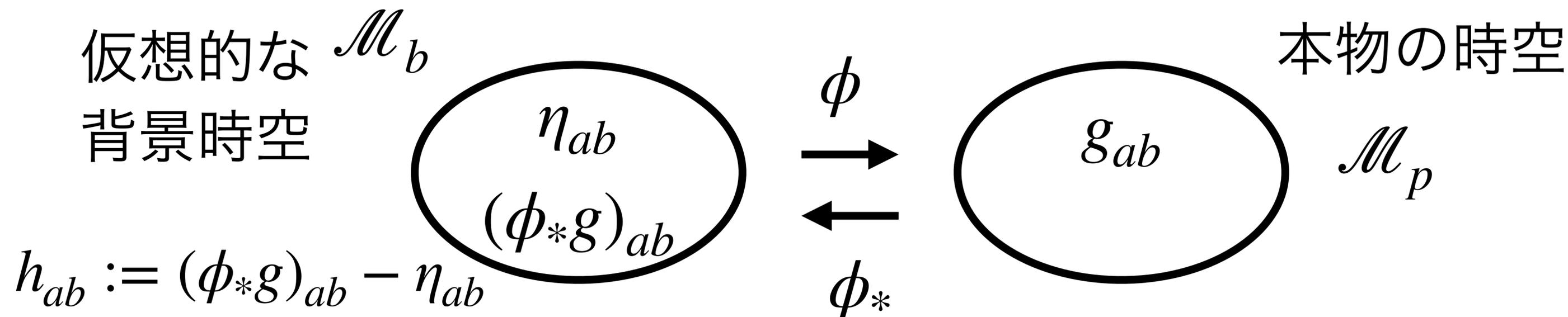
重力波って？

重力波とゲージ。

$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ の分解は一意的ではない。 \rightarrow ゲージの自由度がある。
ゲージの自由度を固定することで、物理的自由度を取り出す。

調和ゲージ: $\partial^b \bar{h}_{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad \square \bar{h}_{ab} = -16\pi T_{ab}$

TTゲージ: $h^{0\mu} = 0, h^i_i = 0, \partial^j h_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{h}_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz)$

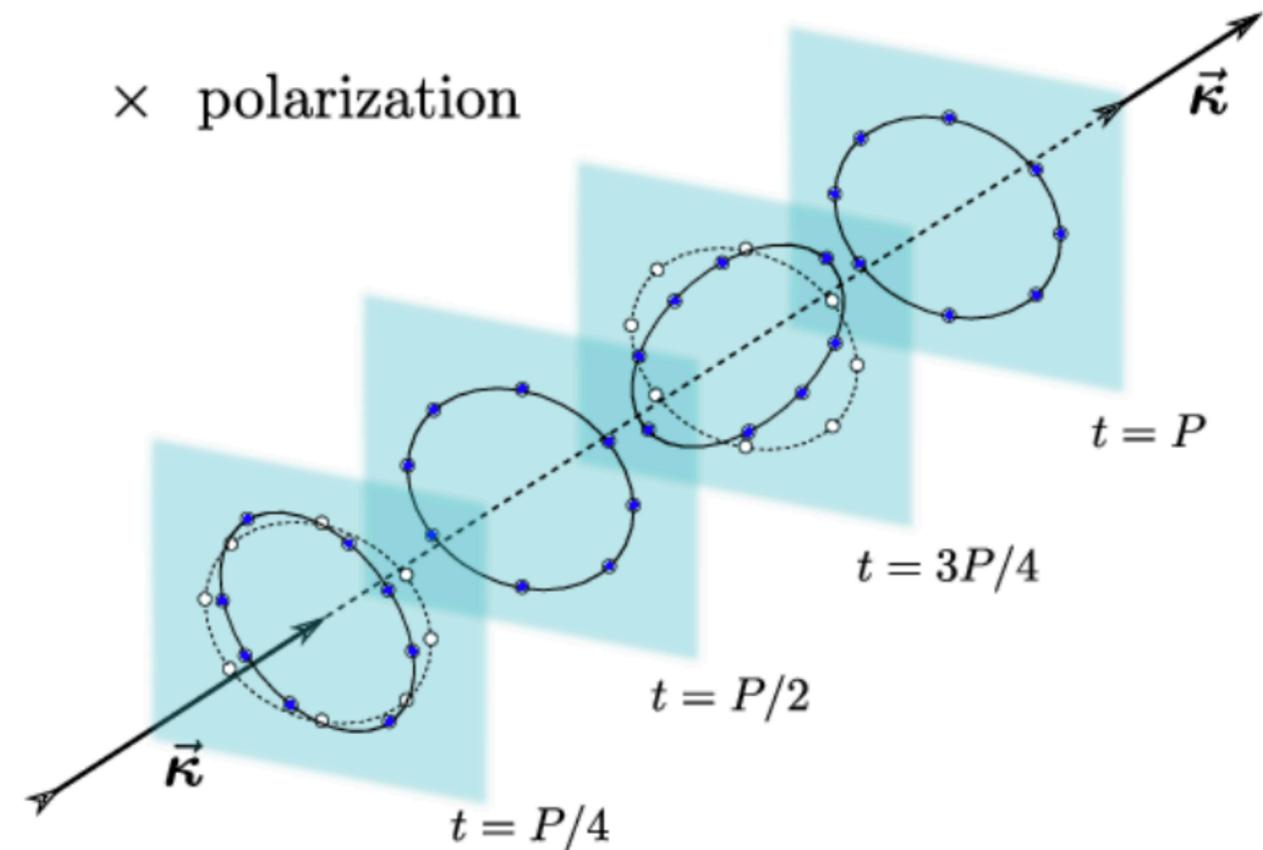
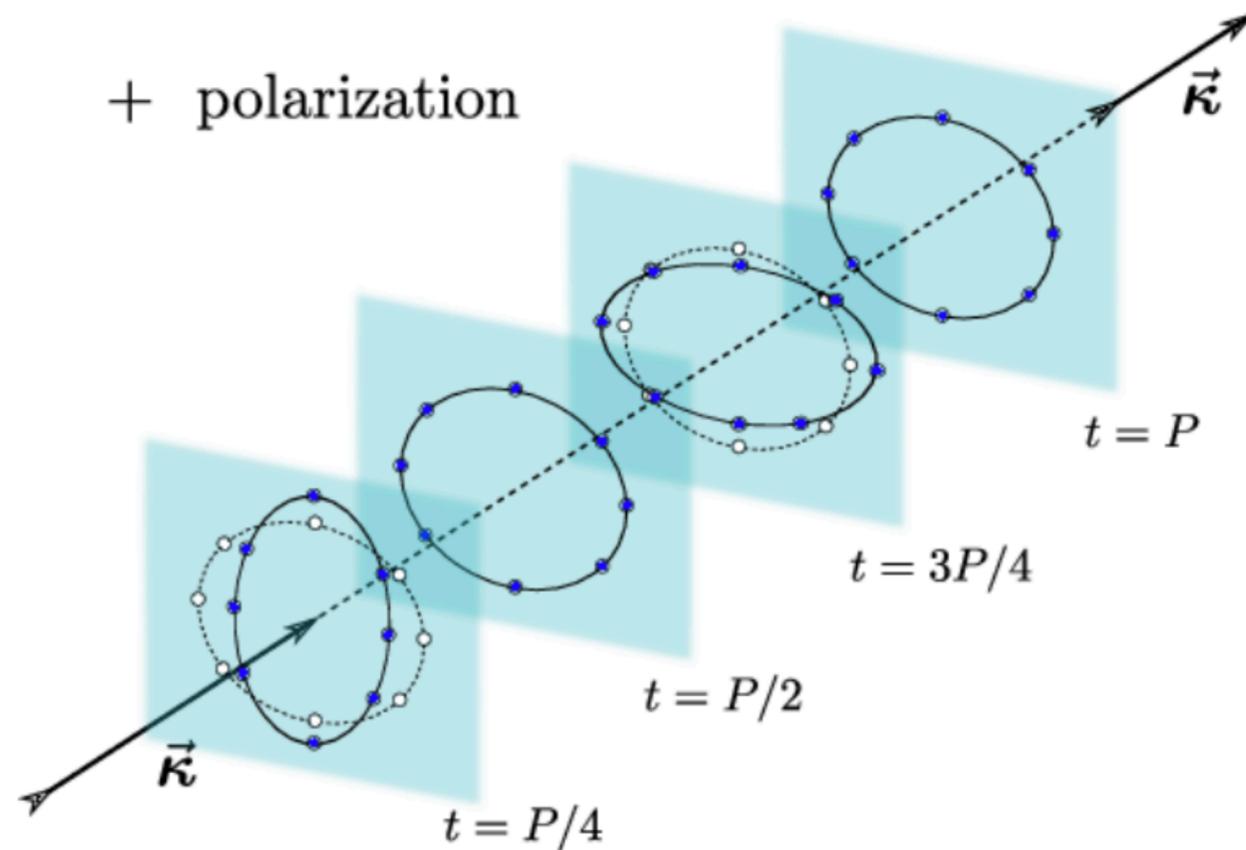


Gravitational waves

重力波って？

重力波とゲージ。

TTゲージ:
$$\bar{h}_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz)$$



Gravitational waves

どうやって検出？

二物体間の変位を見れば良い。

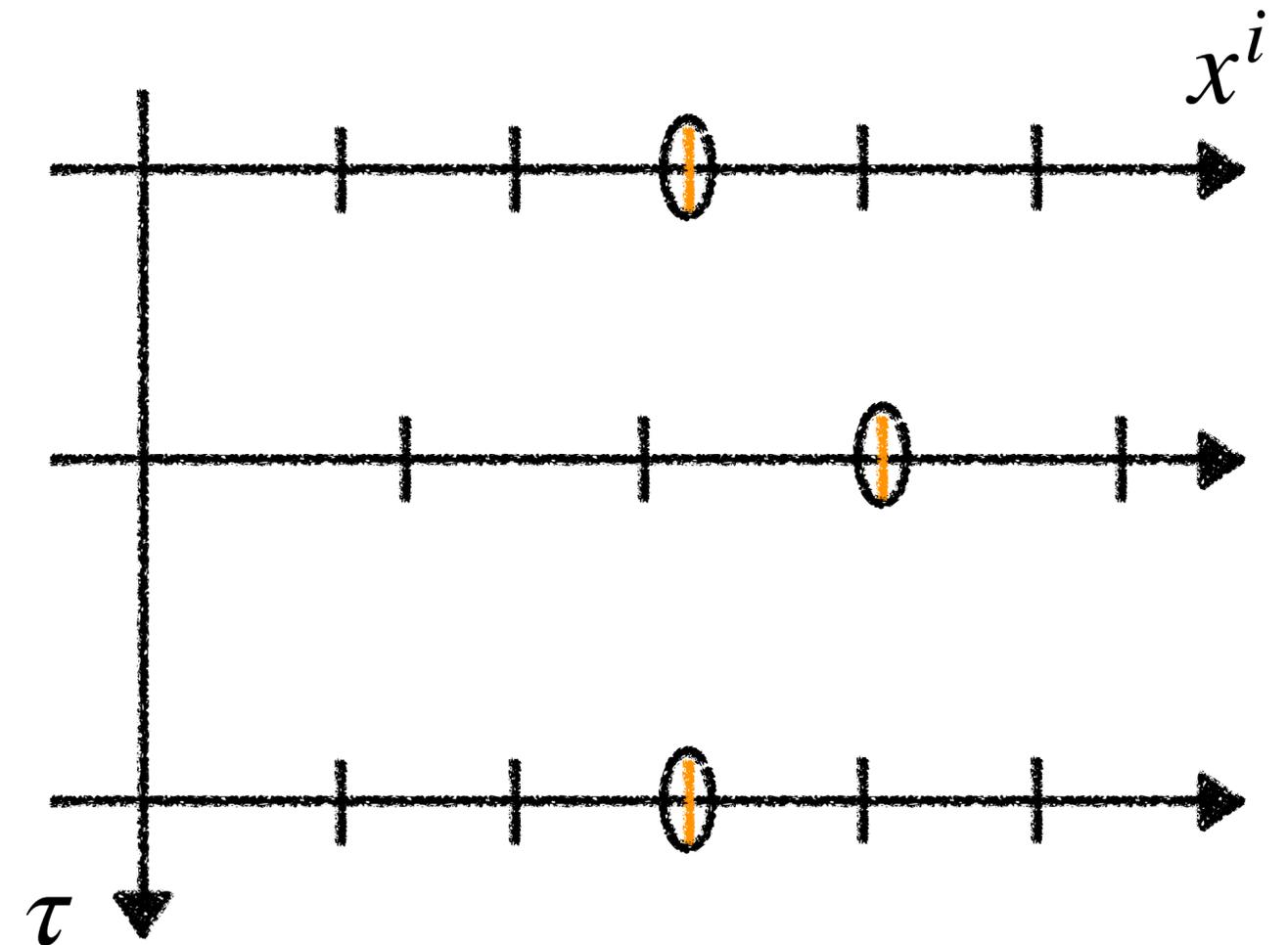
TT frame 重力波の表式が簡単

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}) dx^i dx^j$$

測地線 $\rightarrow \frac{dx^i}{d\tau} = 0$

測地線偏差 $\rightarrow \frac{d\xi^i}{d\tau} = 0$

固有距離 $\rightarrow \dot{s} \simeq \frac{1}{2} \dot{h}_{ij} \frac{L_i L_j}{L}$



重力波到着後も同座標

二点間を光が進む時間を決める。

Gravitational waves

どうやって検出？

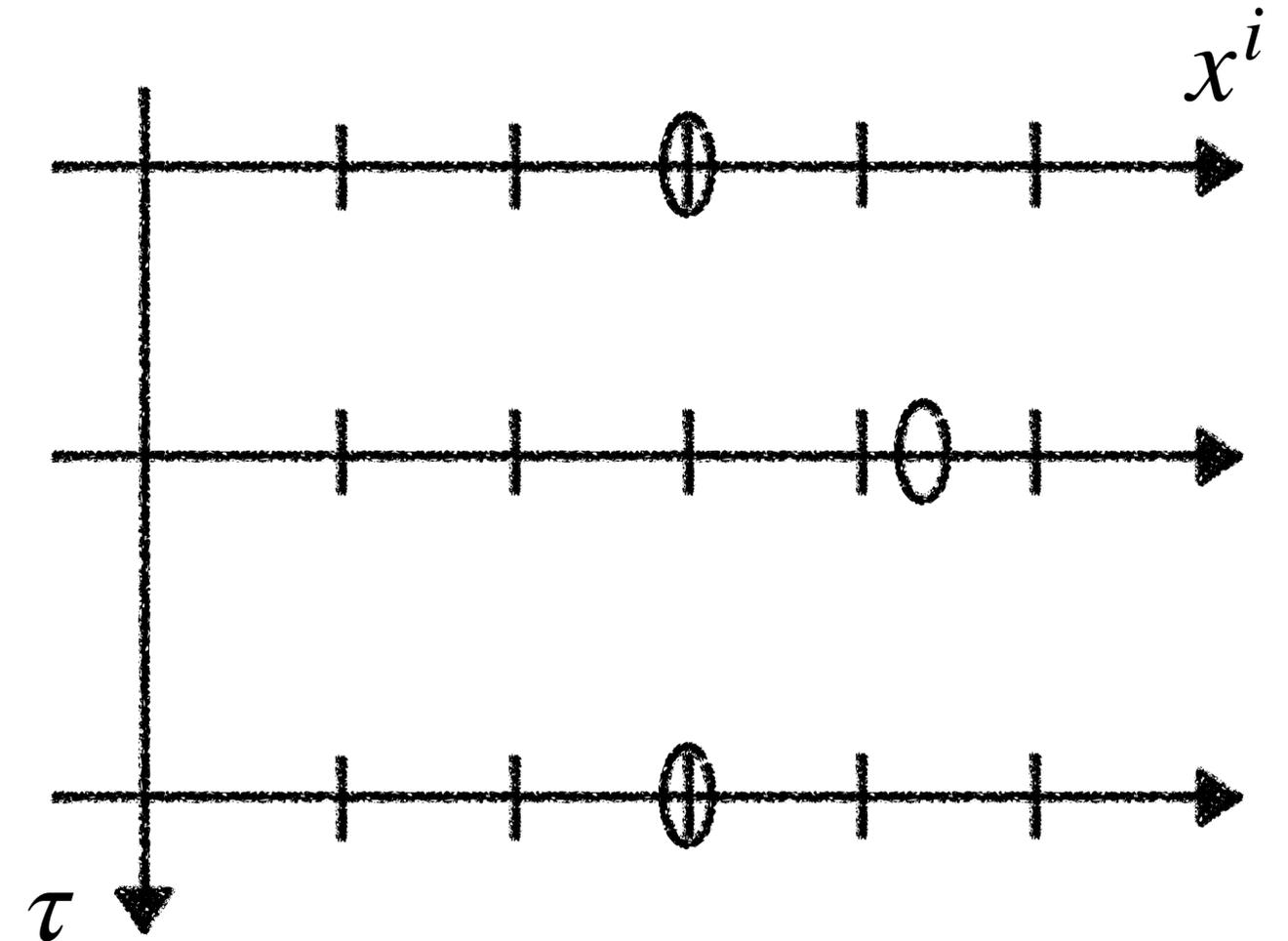
Proper detector frame 実験系の直感的イメージに近い

重力場があっても微小領域では、

$$ds^2 \simeq -c^2 dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j$$

とできる。(cf. Fermi normal coordinate)

$$ds^2 \simeq -c^2 dt^2 [1 + R_{0i0j}] - 2cdt dx^i \left(\frac{2}{3} R_{0jik} x^j x^k \right) + dx^i dx^j \left[\delta_{ij} \frac{1}{3} R_{ikjl} x^k x^l \right]$$



測地線偏差 $\rightarrow \ddot{\xi}^i = -c^2 R^i_{0j0} \xi^j$
 $= \frac{1}{2} \ddot{h}^{TT}_{ij} \xi^j$

$F_i = \frac{m}{2} \ddot{h}^{TT}_{ij} \xi^j$ の力が働く ニュートン重力場のようにみなせる。

Gravitational waves

干渉計の場合

TT frame

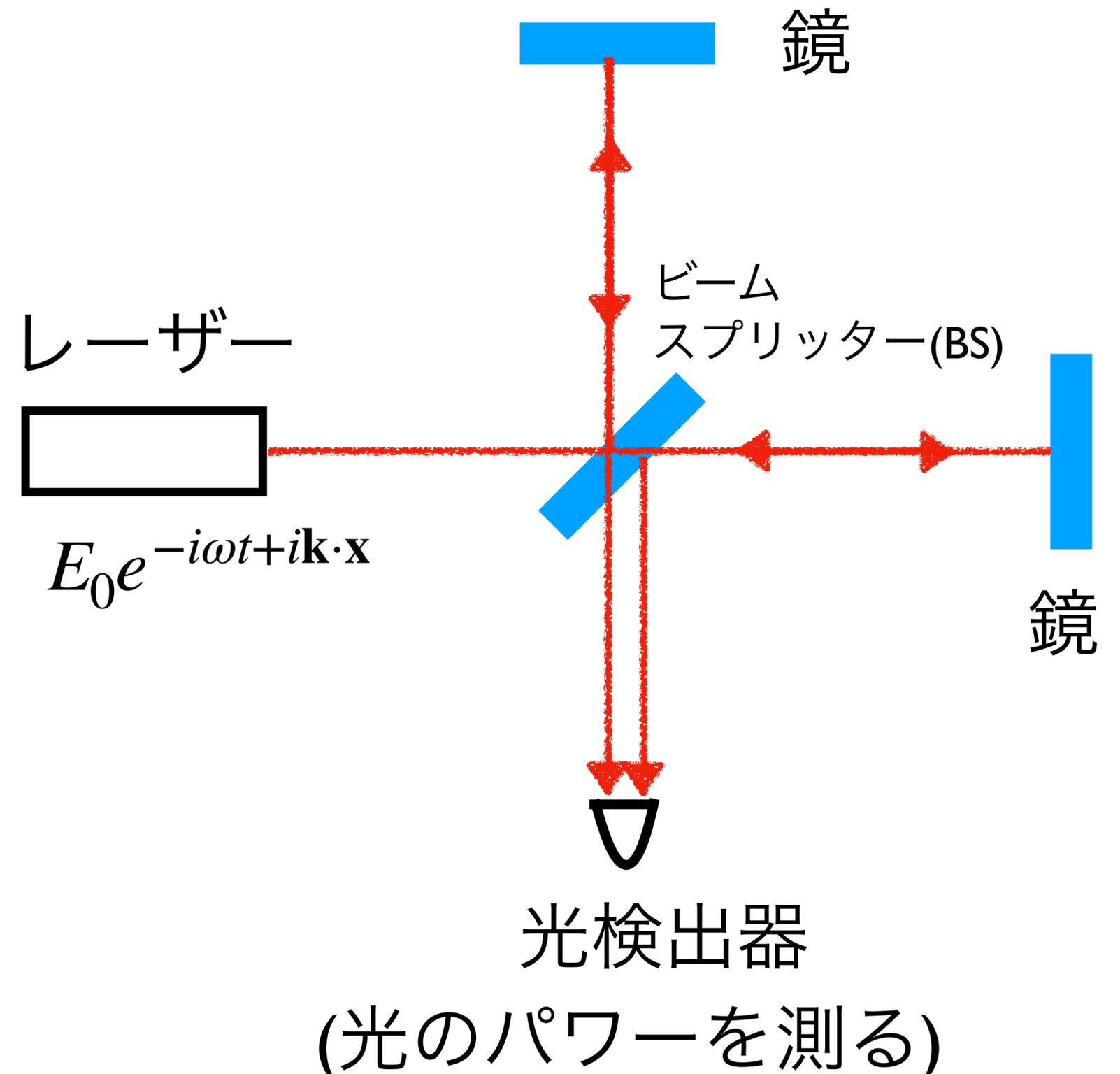
光はヌル測地線 $ds^2 = 0$

例: x方向

$$dx = \pm c dt \left[1 - \frac{1}{2} h_+(t) \right]$$

$$\Rightarrow \Delta t_x \Rightarrow \Delta \phi_x$$

どうやって検出？



Gravitational waves

どうやって作られる？

重力波生成は四重極公式から。

(電磁波は双極子から。対称性を反映。)

$$\bar{h}_{ij}(t, r) = \frac{2}{r} \ddot{Q}_{ij}(t - r/c)$$

$$Q^{ij} = \int d^3x \rho(t, x) \left(x^i x^j - \frac{1}{3} r^2 \delta^{ij} \right)$$

トレースレス

四重極モーメント

- チャープ波(コンパクト連星合体..)
 - バースト(超新星爆発..)
 - 連続波(パルサーからの重力波..)
 - 背景重力波(原始重力波..)
- など

Gravitational waves

チャープ波(コンパクト連星合体)

インスパイラル波形

$$h_{\text{GR}} = \mathcal{A} f^{-7/6} e^{i\Psi(f)}$$

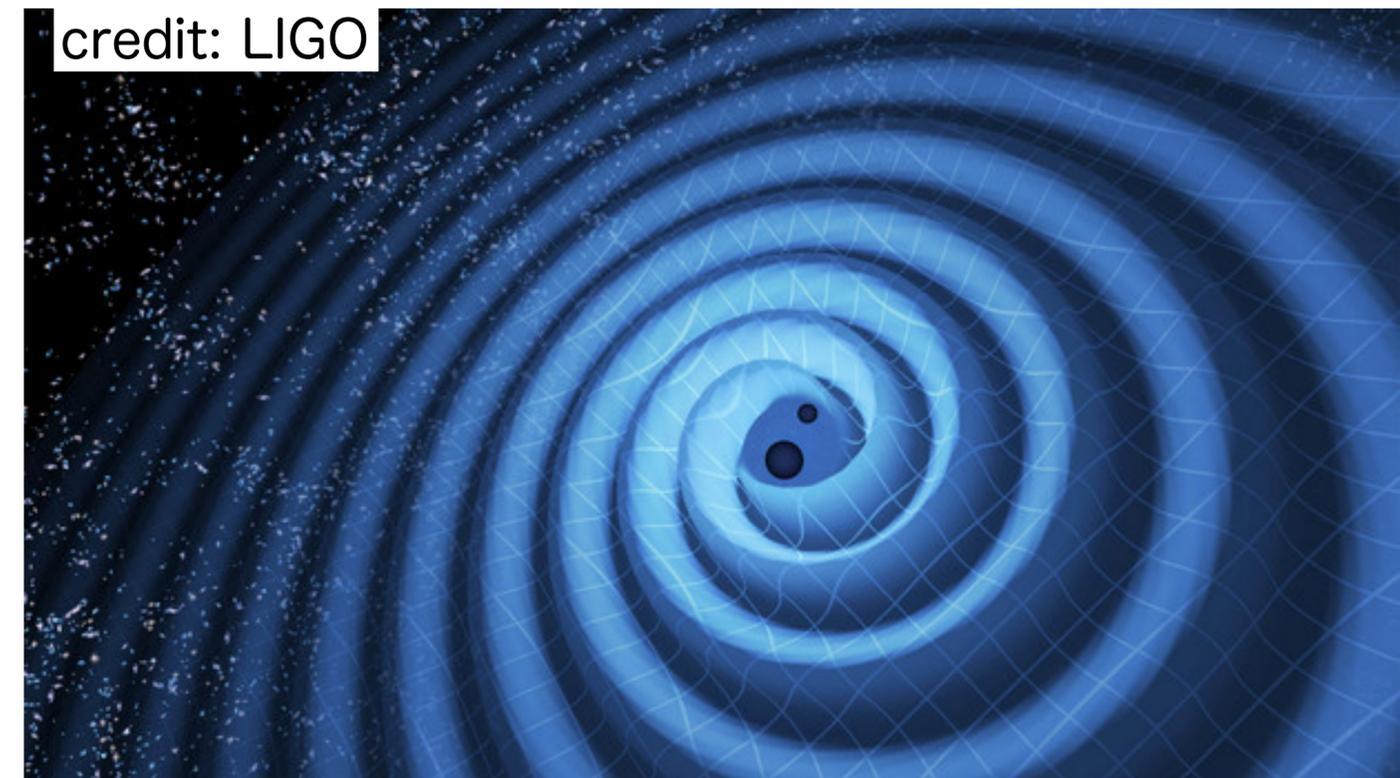
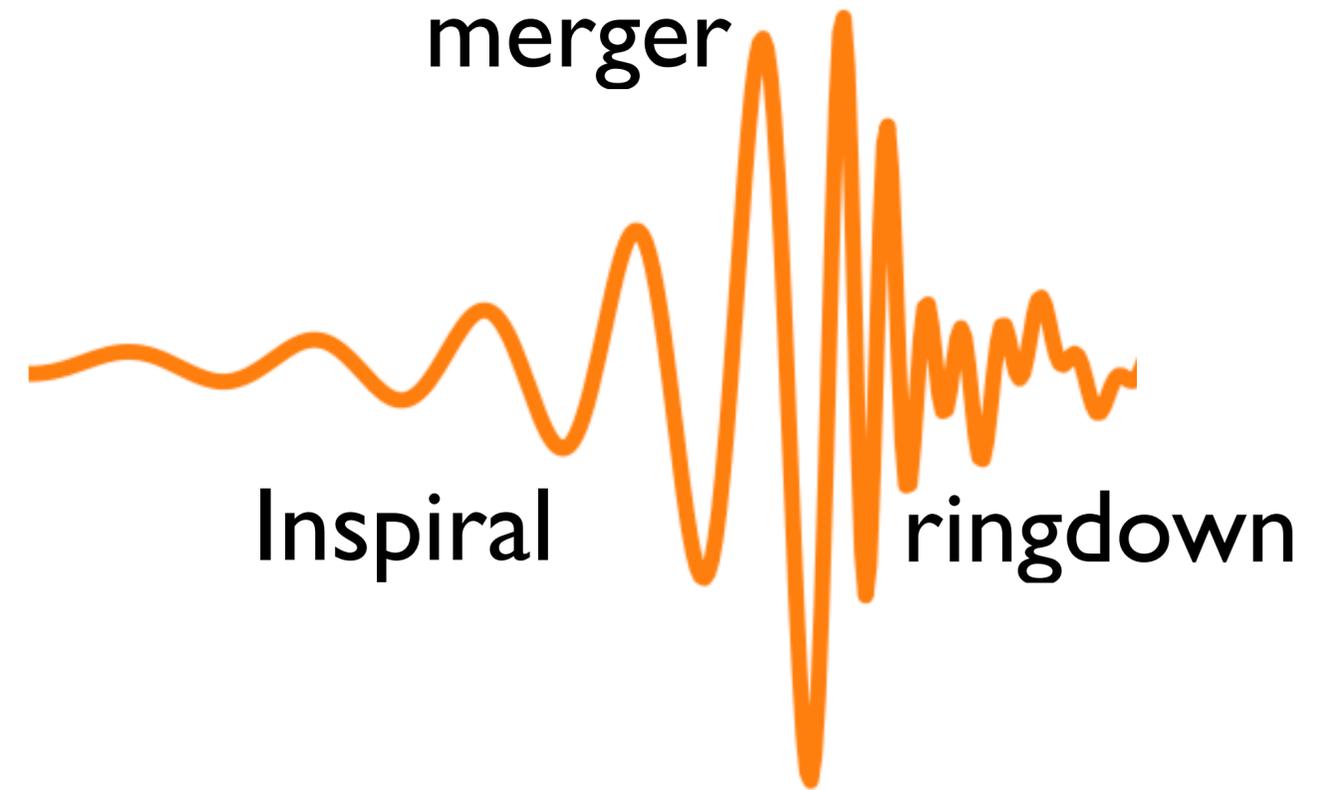
振幅部分

$$\mathcal{A} f^{-7/6} = \frac{1}{\sqrt{30} \pi^{2/3} d_L} \mathcal{M}^{5/6} f^{-7/6}$$

位相部分

$$\Psi(f) = 2\pi f t_c - \phi_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{128} (\pi \mathcal{M} f)^{-5/3} \sum_{i=0}^7 \phi_i (\pi \mathcal{M} f)^{i/3}$$

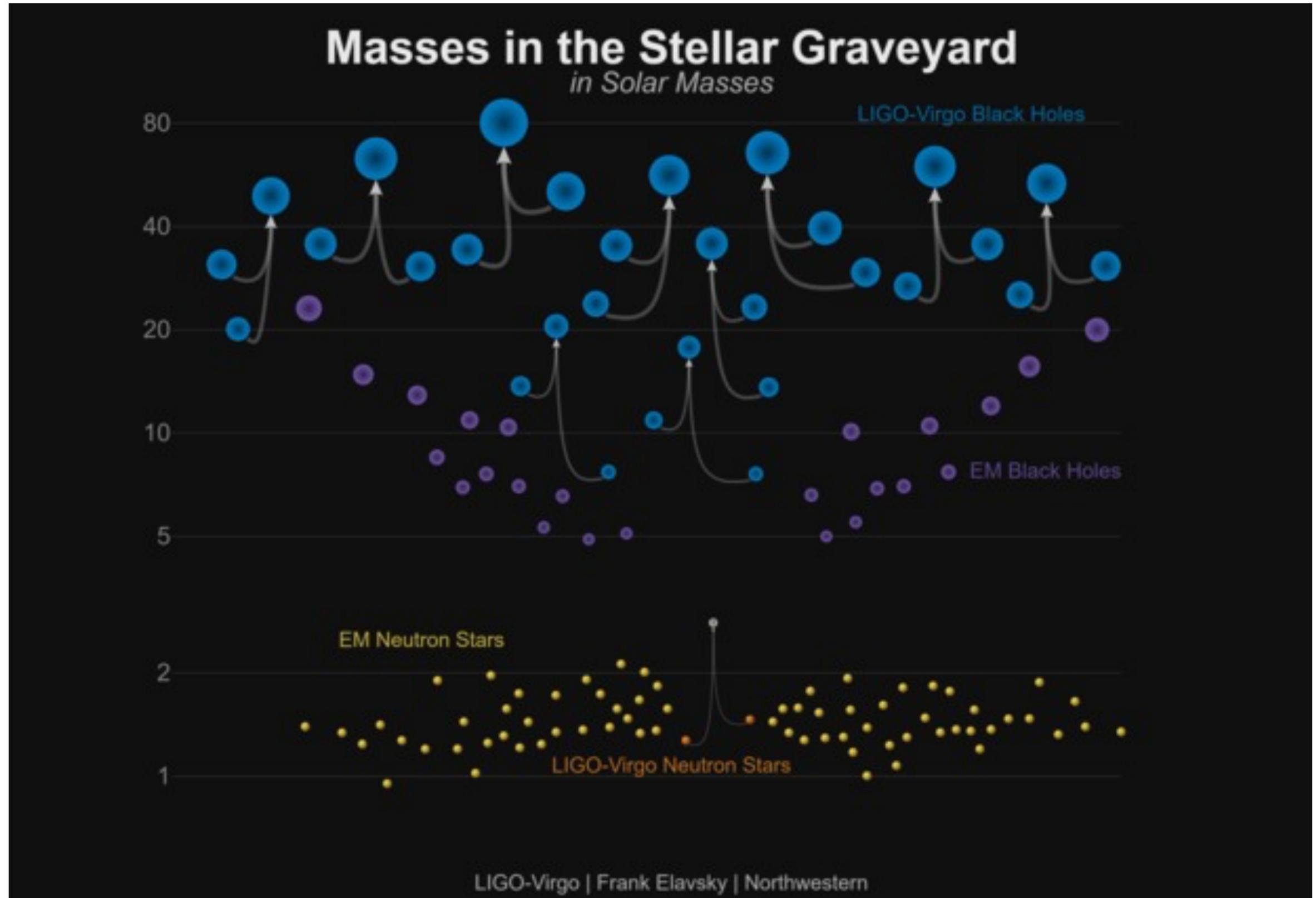
どうやって作られる？



Gravitational waves

どうやって作られる？

これまでの検出
(O1 and O2)



3. Data analysis

Signal

どんな信号？

Calibrationの人たちが頑張ってくれて重力波信号を得る。

重力波

$$h_{ab}(t, \Omega) = h_+(t)e_{ab}^+ + h_\times(t)e_{ab}^\times$$

$$\bar{h}_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

重力波信号

$$h(t, \Omega) = d^{ab}h_{ab}(t, \Omega)$$

$$= F^+(\Omega)h_+(t) + F^\times(\Omega)h_\times(t)$$

アンテナパターン
(検出器の応答)

$$F^A(\Omega) = d^{ab}e_{ab}^A(\Omega)$$

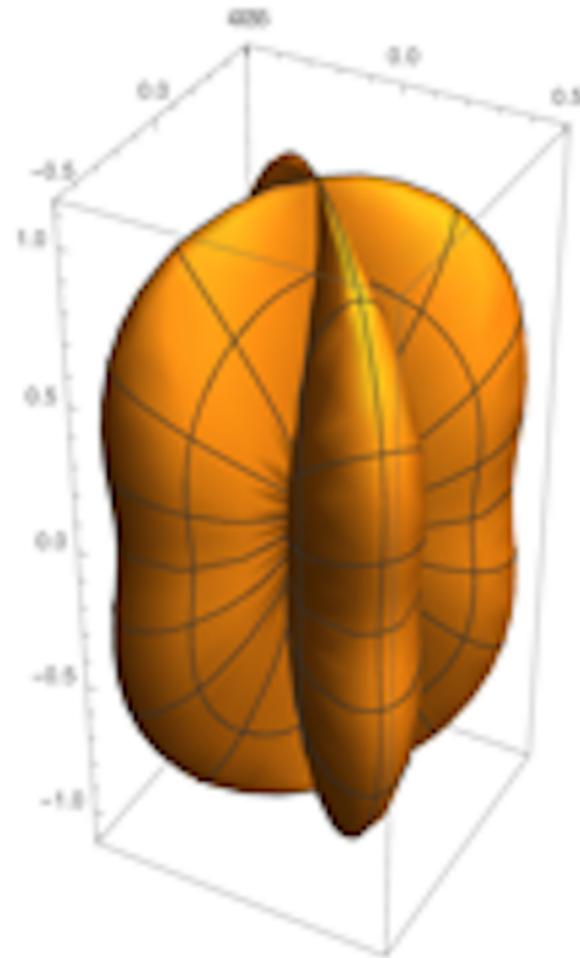
アンテナパターンを係数とする各成分の線型結合の信号。

Signal

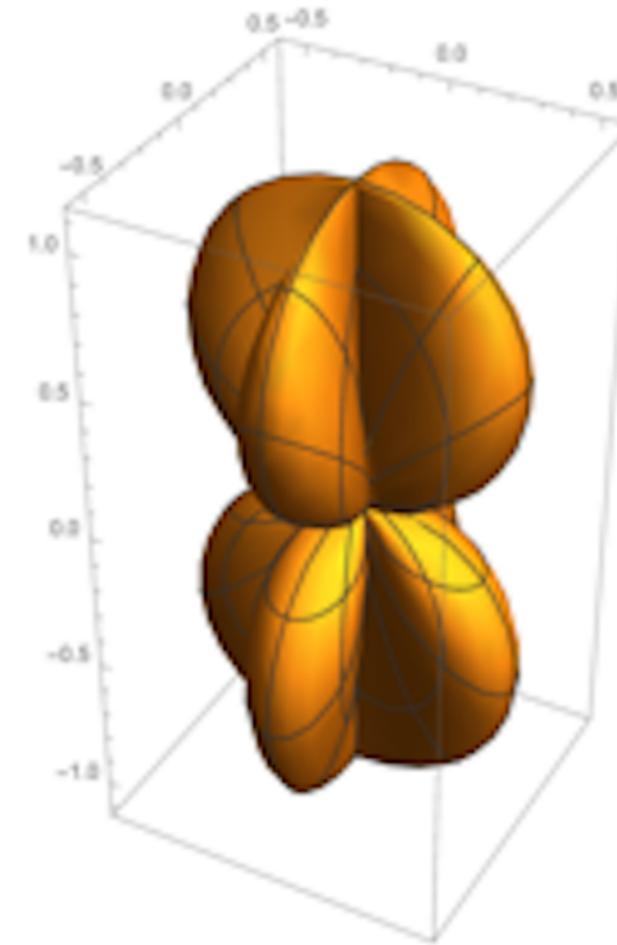
どんな信号？

干渉計の場合

検出器テンソル: $d^{ab} = \frac{1}{2}(\hat{u} \otimes \hat{u} - \hat{v} \otimes \hat{v})$



+ モード



× モード

重力波の方向によって応答が異なる。

Signal

よく使う量の意味

Signal to Noise ratio (SNR)

雑音に対してどれだけ
信号が含まれるか。

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = 4 \int df \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)}$$

Inspirational range

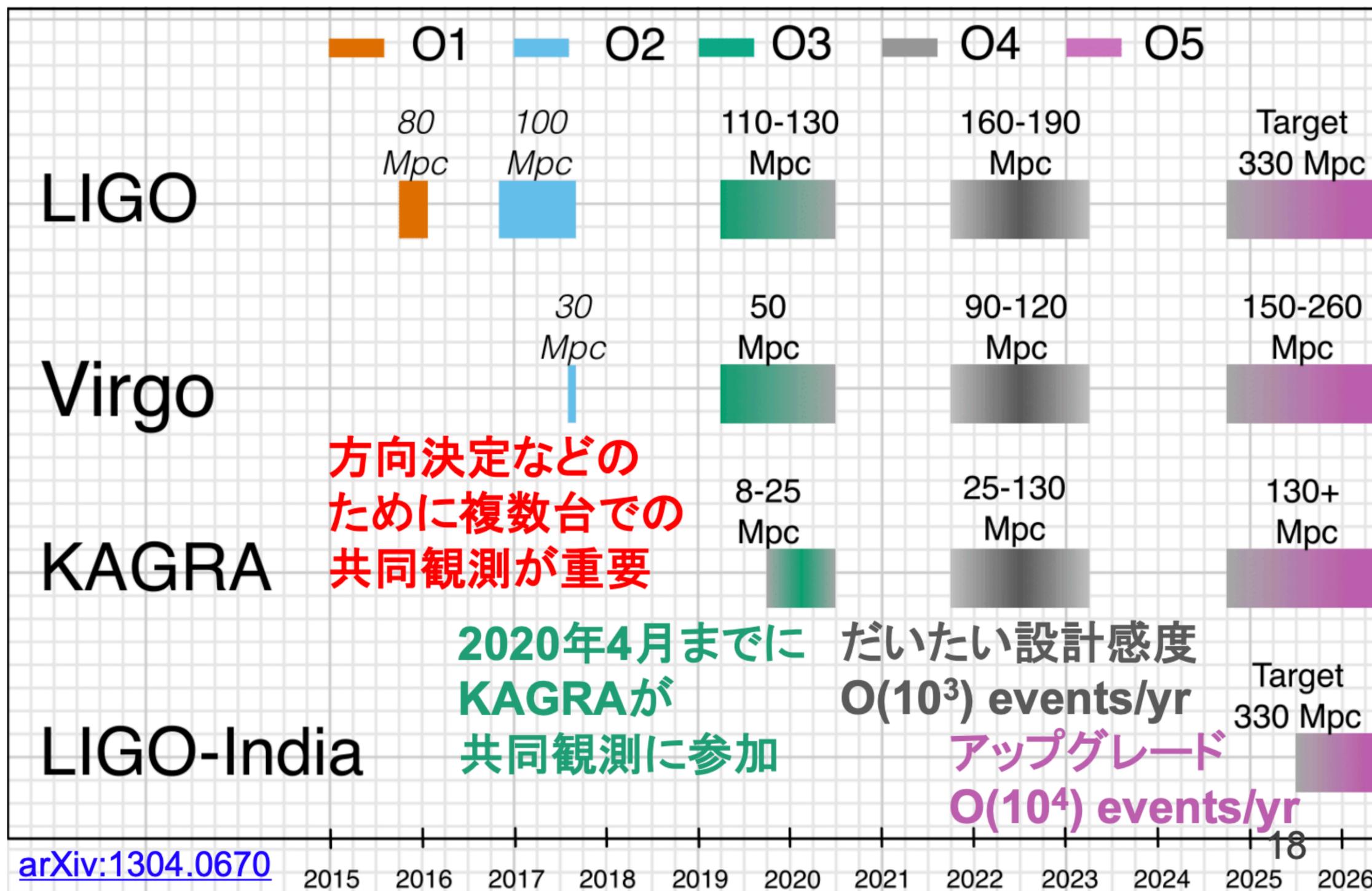
どれくらい離れた
インスパイラルを観測可能か。

最適入射のとき、SNR=8を得る距離。

Signal

よく使う量の意味

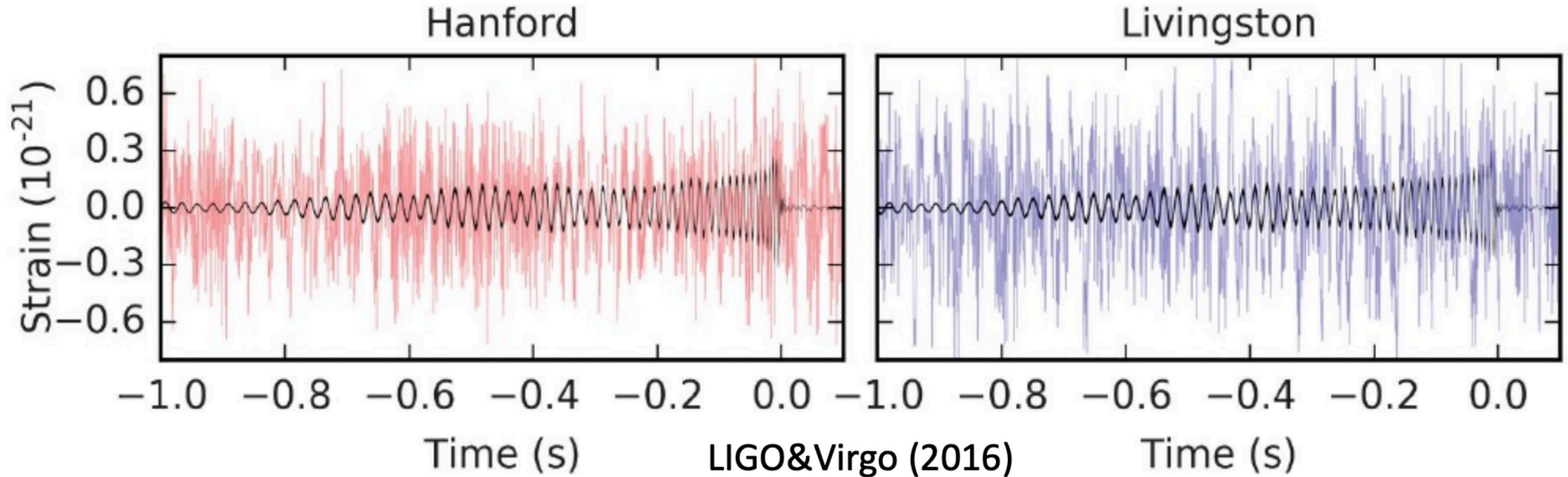
道村さんの輪講スライドより



Bayesian inference

どうやって解析？

例: GW151226



赤や青の信号の中に黒の重力波が混ざっていると言っている。

Bayesian inference

どうやって解析？

重力波は宇宙や天体の情報を運ぶ。

例: GW150914

コンパクト連星合体

距離、質量、時間、
スピン、方向...

どうやって？

GW150914: FACTSHEET			
BACKGROUND IMAGES: TIME-FREQUENCY TRACE (TOP) AND TIME-SERIES (BOTTOM) IN THE TWO LIGO DETECTORS; SIMULATION OF BLACK HOLE HORIZONS (MIDDLE-TOP), BEST FIT WAVEFORM (MIDDLE-BOTTOM)			
first direct detection of gravitational waves (GW) and first direct observation of a black hole binary			
observed by	LIGO L1, H1	duration from 30 Hz	~ 200 ms
source type	black hole (BH) binary	# cycles from 30 Hz	~ 10
date	14 Sept 2015	peak GW strain	1×10^{-21}
time	09:50:45 UTC	peak displacement of interferometers arms	± 0.002 fm
likely distance	0.75 to 1.9 Gly 230 to 570 Mpc	frequency/wavelength at peak GW strain	150 Hz, 2000 km
redshift	0.054 to 0.136	peak speed of BHs	~ 0.6 c
signal-to-noise ratio	24	peak GW luminosity	3.6×10^{36} erg s ⁻¹
false alarm prob.	< 1 in 5 million	radiated GW energy	2.5-3.5 M _⊙
false alarm rate	< 1 in 200,000 yr	remnant ringdown freq.	~ 250 Hz
Source Masses M _⊙		remnant damping time	~ 4 ms
total mass	60 to 70	remnant size, area	180 km, 3.5×10^3 km ²
primary BH	32 to 41	consistent with general relativity?	passes all tests performed
secondary BH	25 to 33	graviton mass bound	< 1.2×10^{-22} eV
remnant BH	58 to 67	coalescence rate of binary black holes	2 to 400 Gpc ⁻³ yr ⁻¹
mass ratio	0.6 to 1	online trigger latency	~ 3 min
primary BH spin	< 0.7	# offline analysis pipelines	5
secondary BH spin	< 0.9	CPU hours consumed	~ 50 million (=20,000 PCs run for 100 days)
remnant BH spin	0.57 to 0.72	papers on Feb 11, 2016	13
signal arrival time delay	arrived in L1 7 ms before H1	# researchers	~ 1000, 80 institutions in 15 countries
likely sky position	Southern Hemisphere		
likely orientation resolved to	face-on/off ~600 sq. deg.		

Detector noise introduces errors in measurement. Parameter ranges correspond to 90% credible bounds.
Acronyms: L1=LIGO Livingston, H1=LIGO Hanford; Gly=giga lightyear= 9.46×10^{12} km; Mpc=mega parsec=3.2 million lightyear, Gpc=10⁹ Mpc, fm=femtometer= 10^{-15} m, M_⊙=1 solar mass= 2×10^{30} kg

おわりです

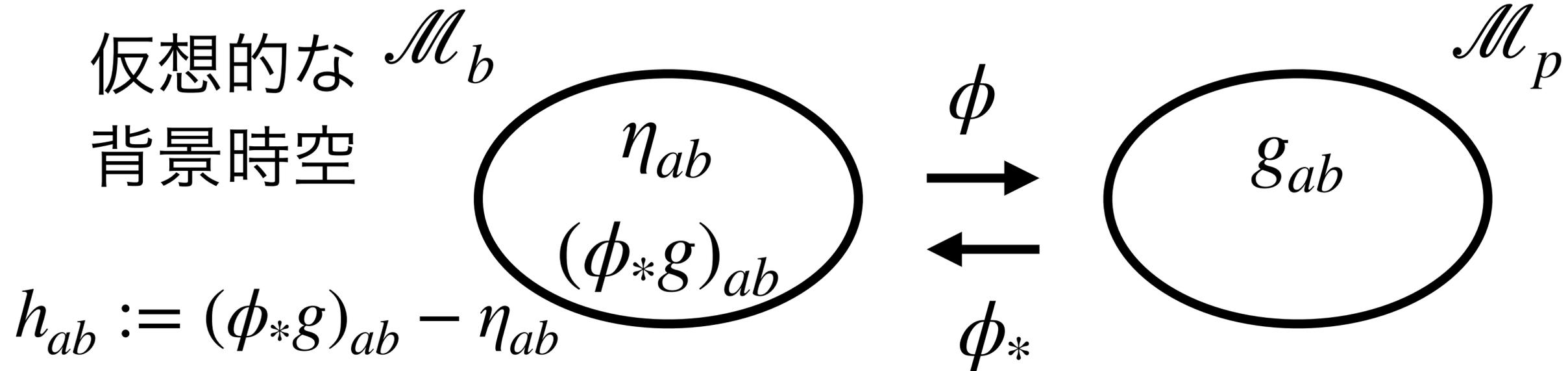
Appendix

Gravitational waves

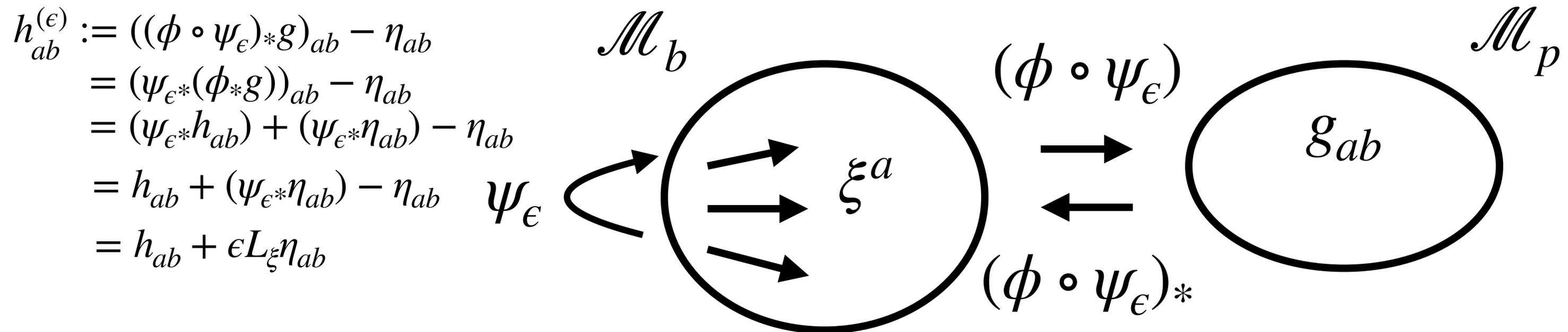
重力波って？

重力波とゲージ。

本物の時空



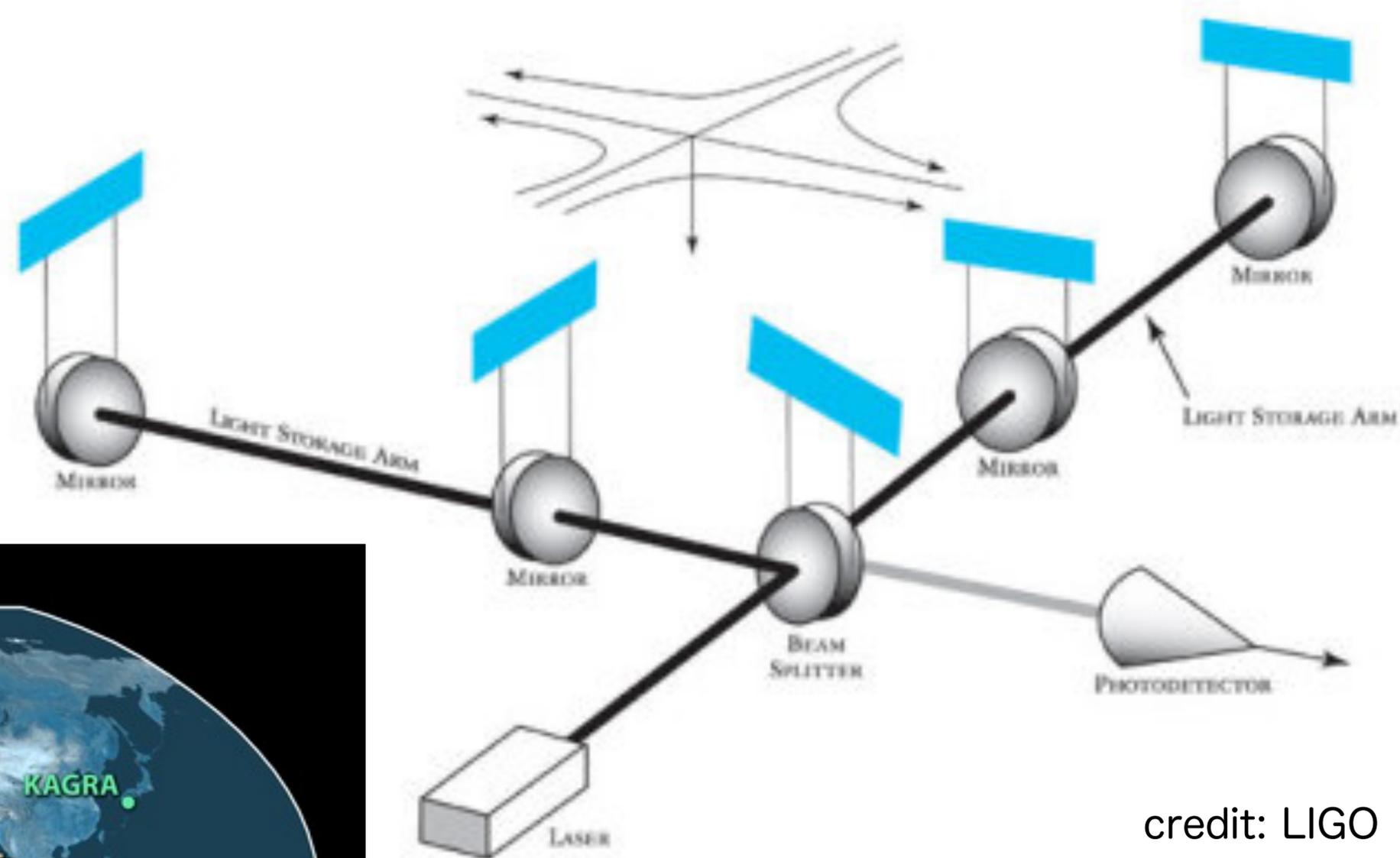
ベクトル場 ξ^a が生成する 1パラメータ変換群 $\psi_\epsilon : M_b \rightarrow M_b$ を考える。



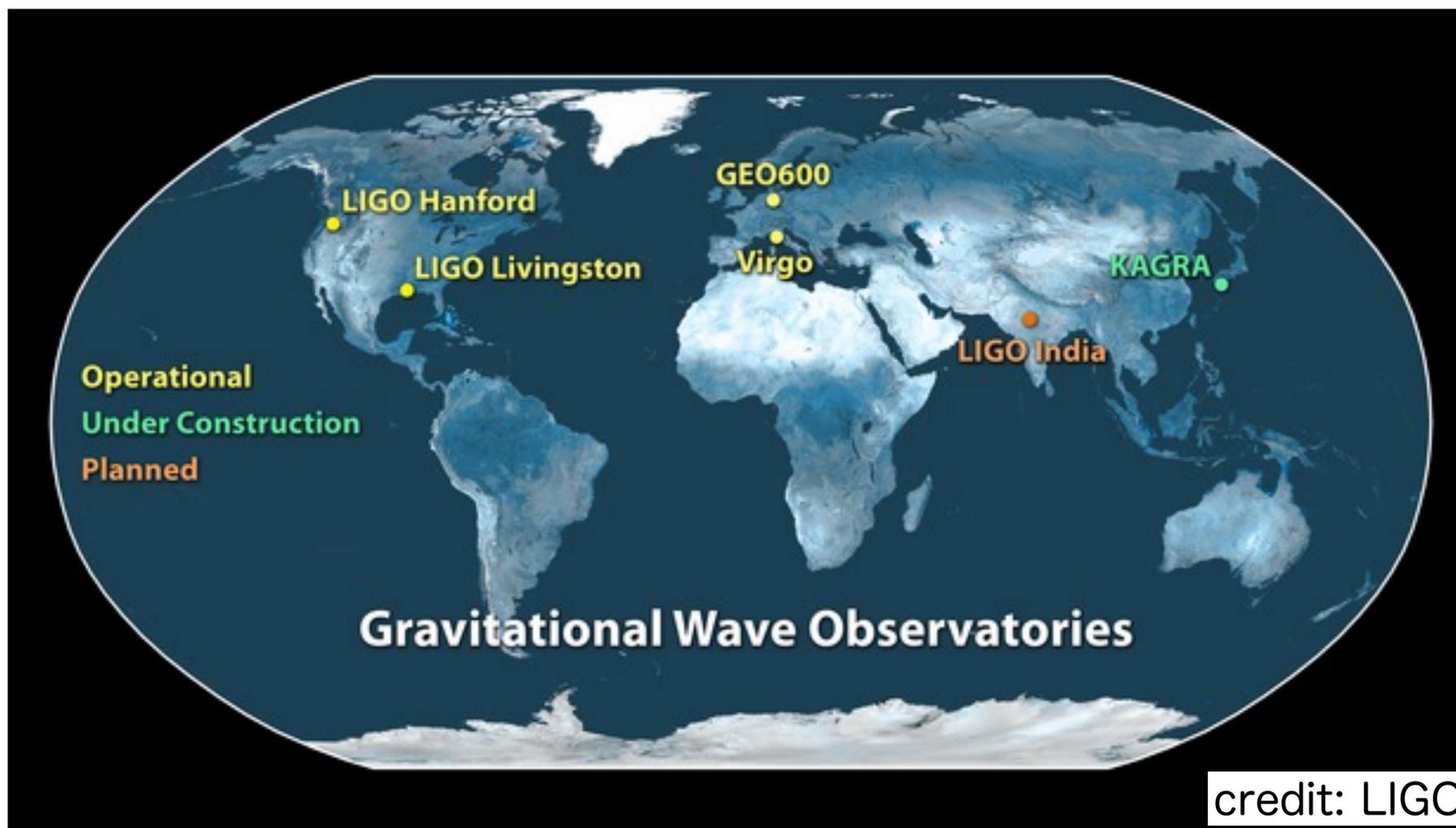
How to detect

距離の変動を光で測って観測

→ 干渉計、共振器



credit: LIGO

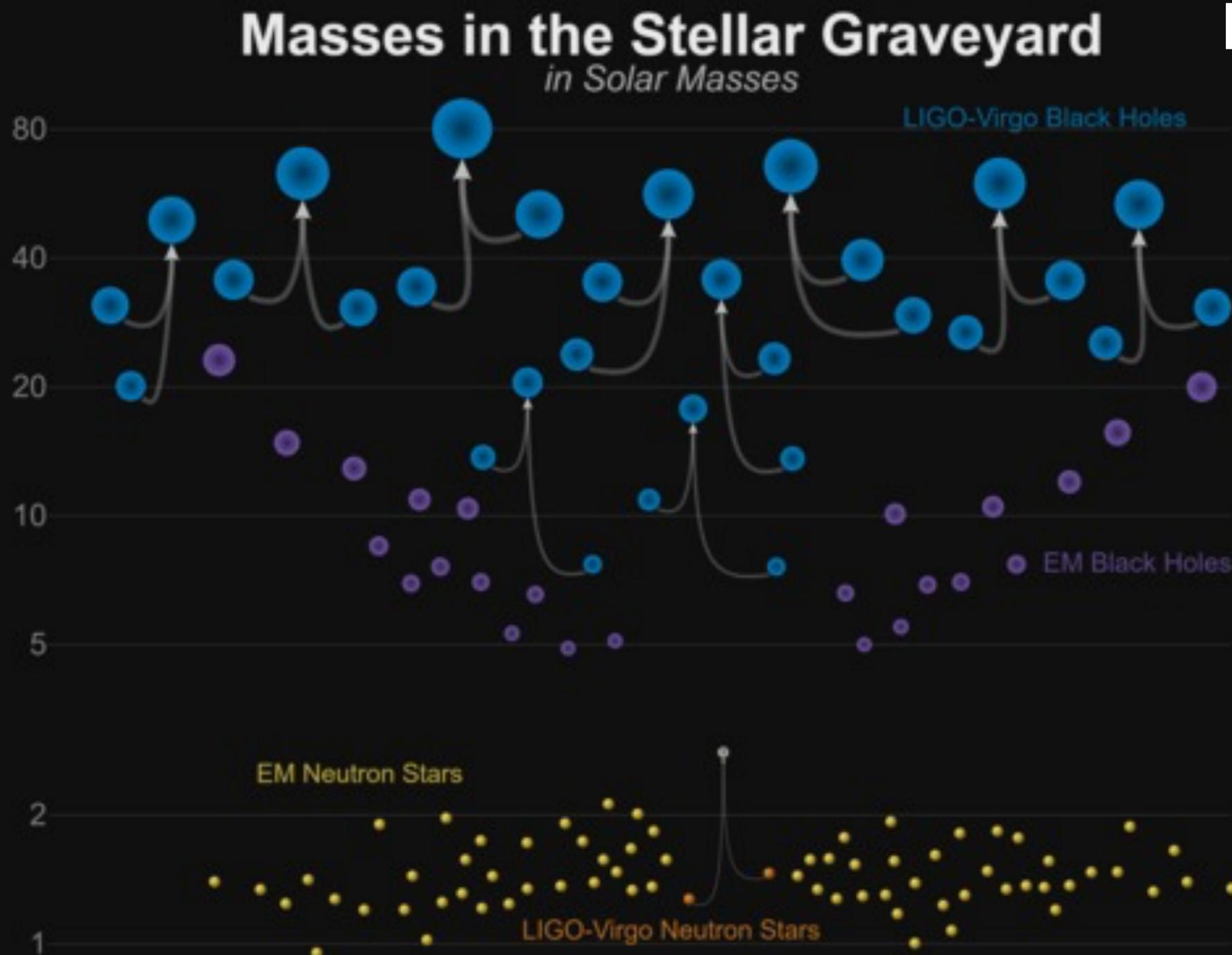


世界中に検出器
次世代や宇宙重力波望遠鏡も

How to detect

重力波天文学による
サイエンス

- 重力理論検証
- 連星進化
- BH分布
- NS 状態方程式
- ハッブル定数測定
などなど...



How to detect

From: GW plotter

