# ノイズスペクトルから球面調和関数係数への変換方法

time-wise approach in frequency domein

正田亜八香

2010.6.

## introduction

time-wise approach によって地球重力場の球面調和関数係数に表れるノイズを計算する．time-wise approach とは，Dynamic simulation とも呼ばれ，地球重力場のシグナルにノイズが乗っている状況をタイムスケールで考慮するものである．つまり，重力場のシグナルはミッションの間に観測された時系列データと考え，球面調和関数の係数を時系列データに焼きなおす事ができる（線形結合の形で書ける）．この時系列データにノイズが乗っていたとして，係数に効いてくる SN 比を考えるものである．

この計算方法は，GOCE の計画書の中での感度見積もりにも用いられている．[1]

## fundamentals

地球重力場は，球面調和関数によって

$$V = \frac{GM}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}\sum_{m=0}^{l}\overline{P}_{lm}(\sin\theta)\left(\overline{C}_{lm}\cos m\lambda + \overline{S}_{lm}\sin m\lambda\right) \tag{1}$$

と展開される．ここで $\overline{P}_{lm}$ は正規ルジャンドル関数，$R$ は地球の半径，$r = R + h$ で $h$ は衛星の高度である．

これを時系列データの形（衛星の軌道に沿った重力場の大きさ）に書きなおすと

$$V = \frac{GM}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}\sum_{m=0}^{l}\sum_{p=0}^{l}\overline{F}_{lmp}(I)\left\{\begin{bmatrix}\overline{C}_{lm}\\-\overline{S}_{lm}\end{bmatrix}_{l-m:odd}^{l-m:even}\cos\psi_{lmp} + \begin{bmatrix}\overline{S}_{lm}\\\overline{C}_{lm}\end{bmatrix}_{l-m:odd}^{l-m:even}\sin\psi_{lmp}\right\} \tag{2}$$

と書ける．[2] ここで，

$$\overline{F}_{lmp}(I) : \text{normalized inclination function} \tag{3}$$

$$\psi_{lmp} = (l-2p)\omega_0 + m\omega_e \tag{4}$$

ただし inclination function は衛星軌道の傾きによって変化するルジャンドル関数や三角関数からの寄与を計算するものである．また，$\omega_0$ は経度方向の回転，$\omega_e$ は緯度方向の回転を表す．更に $k = l - 2p$ と置きなおせば

$$V = \frac{GM}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}\sum_{m=0}^{l}\sum_{k=-l,[2]}^{l}\overline{F}_{lmk}(I)\left\{\begin{bmatrix}\overline{C}_{lm}\\-\overline{S}_{lm}\end{bmatrix}_{l-m:odd}^{l-m:even}\cos\psi_{km} + \begin{bmatrix}\overline{S}_{lm}\\\overline{C}_{lm}\end{bmatrix}_{l-m:odd}^{l-m:even}\sin\psi_{km}\right\} \tag{5}$$

と書ける．

一方，測定器の信号も

$$N = \sum_m \sum_k \left( A_{km} \cos\psi_{km} + B_{km} \sin\psi_{km} \right) \tag{6}$$

と表す事が出来るため，この 5 式と 6 式の同じ周波数の成分同士を比べてやればよいことになる．つまり球面調和関数の係数から測定器データの周波数成分への変換は

$$\begin{aligned} A_{km} &= \frac{GM}{R} \sum_l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \overline{F}_{lmk} \begin{bmatrix} \overline{C}_{lm} \\ -\overline{S}_{lm} \end{bmatrix}_{l-m:odd}^{l-m:even} && (7) \\ B_{km} &= \frac{GM}{R} \sum_l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \overline{F}_{lmk} \begin{bmatrix} \overline{S}_{lm} \\ \overline{C}_{lm} \end{bmatrix}_{l-m:odd}^{l-m:even} && (8) \end{aligned}$$

と書ける事になる．

因みに，FP 干渉計での重力場測定のように重力場の gradient などを観測量とするときは，5 式に微分係数をつける必要がある．[1]

## inclination function

inclination function の導出は，以下の手順で行う．[3]

まず，unit potential function を考える．unit potential function とは，係数をそれぞれ 1 とし，$\omega_e = 0$ としたもの，つまり

$$V_{lm} = P_{lm}(\sin\phi)\left(\cos m\lambda + \sin m\lambda\right) \tag{9}$$

である．(ただし $V = \sum_l \sum_m V_{lm}$) 一方，inclination function を用いて表すと，5 より

$$V_{lm} = \sum_{k=-l,[2]}^{k=l} \overline{F}_{lmk}(I) \left\{ \begin{array}{ll} \sin k\omega_0 + \cos k\omega_0 & l-m: \ even \\ \sin k\omega_0 - \cos k\omega_0 & l-m: \ odd \end{array} \right\} \tag{10}$$

従って，この式を 9 を FFT によって展開した

$$V_{lm} = \sum_{i=0} c_i \cos i\omega_0 + s_i \sin i\omega_0 \tag{11}$$

と比較すれば，inclination function が

$$\begin{array}{rcll} \overline{F}_{l,m,0} &=& c_0 & \text{for even l and even m} \\ \overline{F}_{l,m,0} &=& -c_0 & \text{for even l and odd m} \\ \overline{F}_{l,m,-i} &=& (c_i - s_i)/2 & \text{for l} - \text{m}: \text{ even} \\ \overline{F}_{l,m,i} &=& (c_i + s_i)/2 & \text{for l} - \text{m}: \text{ even} \\ \overline{F}_{l,m,-i} &=& (-c_i - s_i)/2 & \text{for l} - \text{m}: \text{ odd} \\ \overline{F}_{l,m,i} &=& (-c_i + s_i)/2 & \text{for l} - \text{m}: \text{ odd} \end{array} \tag{12}$$

のように求まる．

### the least-squares solution

以上で説明したように，7 式によって測定器の信号と球面調和関数は線形に表される．測定器の信号と測定した信号を $\boldsymbol{\gamma}$，球面調和関数の係数を $\boldsymbol{c}$，ノイズを $\boldsymbol{n}$ とおくと

$$\boldsymbol{\gamma} = A\boldsymbol{c} + \boldsymbol{n} \tag{13}$$

と書ける．ただし，$E\{\boldsymbol{n}\} = 0$ である．（ここで $E$ はアンサンブル平均を表す.）このノイズが最小二乗になる時の解は，priori variance covariance matrix$E\{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T\} = Q_\gamma$ を用いて

$$\boldsymbol{c} = (A^T Q_\gamma^{-1} A)^{-1} A^T Q_\gamma^{-1} \boldsymbol{\gamma} \tag{14}$$

ここで postpriori variance-covariance matrix は

$$Q_c = (A^T Q_\gamma^{-1} A)^{-1} \tag{15}$$

となり，この $Q_c$ の対角成分が分散で，非対角成分が共分散となる．

## 参考文献


[1] ESA, *Report for Assessment: Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Mission*, ESA Publication Division, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, SP-1196(1), 1996.

[2] Rummel, R. et al., *Spherical Harmonic Analysis of Satellite Gradiometry*, Publications on Geodesy, New Series 39, Netherlands Geodetic Commission. 1993.

[3] Schrama, E.J.O., *The Role of Orbit Errors in Processing of Satellite Altimeter Data*, Netherlands Geodetic Commission, New Series, no. 33, 1989