

テキスト

# 干渉計型重力波検出器とその制御法

宗宮健太郎

# Contents

1	はじめに	4
2	干渉計構成	5
2.1	Fabry-Perot Michelson 干渉計	5
2.2	雑音の振る舞い	7
2.3	Dual Recycling	10
2.4	Detuning	14
2.5	世界の重力波プロジェクト	15
2.6	連星への感度	16
2.6.1	チャープ信号と量子限界	16
2.6.2	Detuned RSE の感度スペクトルと連星に対する SNR	17
3	干渉計の制御	21
3.1	Feedback ループ	21
3.2	変調と復調	22
3.3	Phasor Diagram	23
3.4	Fabry-Perot Michelson 干渉計	24
3.5	Power Recycling Cavity	27
3.6	Signal Recycling Cavity	29
3.6.1	2 周波変調	29
3.6.2	Asymmetry の最適化	32
3.6.3	低周波法と高周波法	33
3.7	変調方式	36
3.8	Double Demodulation	36
3.9	同相信号の分離	39
3.10	ループノイズ	40
3.10.1	Shot-noise-limited control-loop noise	40
4	アライメント制御	43
4.1	ガウシアンビームの展開	43
4.2	Fabry-Perot 共振器のミスアライメント	44
4.3	リサイクリングとミスアライメント	46
4.4	同相雑音除去とミスアライメント	48

4.5	ビームジッタ雑音とアライメント . . . . .	50
4.6	Wave-front sensing . . . . .	52
<b>5</b>	<b>モードマッチング</b>	<b>53</b>
5.1	複素波面係数 . . . . .	53
5.2	共振器からの要求 . . . . .	53
5.3	レンズによる調整 . . . . .	54
<b>6</b>	<b>最後に</b>	<b>56</b>

# Chapter 1

## はじめに

本書は、重力波検出器について初めて学ぶ卒研究生、大学院生を対象に書かれたものである。重力波の研究にはさまざまな知識が必要だが、その中でも光干渉計のふるまいについてまとめている。内容のほとんどは、2004年に執筆された筆者の博士論文を元に、その一部を和訳したものである。4章は「重力波をとらえる」[1]の7-3-5節をコピーしたものである。内容については、今後アップデートしていくつもりである。

## Chapter 2

# 干渉計構成

### 2.1 Fabry-Perot Michelson 干渉計

重力波は時空のさざ波である。地球に到達すると自由質点間の距離を変え、その変化は光の往復時間の変化として測定することができる。重力波は電磁波と同様、2つの偏波を持っており、それらは + モードと  $\times$  モードと呼ばれる。直交座標系  $xyz$  で重力波が  $z$  方向から来るとしよう。ある偏波では、 $x$  方向にある2つの質点間距離は伸び、 $y$  方向にある距離は縮む。もう一つの偏波では、 $x + y$  方向にある2つの質点間距離が伸び、 $x - y$  方向にある距離は縮む。原点にビームスプリッタを、 $x$  および  $y$  方向の端に鏡を持つ Michelson 干渉計は、前者の偏波については差動信号を検出し、後者については何も検出しない (Fig. 2.1)。

振幅  $h$  の重力波は、Michelson 干渉計の長さ  $L$  の腕を  $Lh/2$  だけ変化させる。すなわち腕が長いと信号は大きくなるが、もし腕が長すぎて一往復する間に重力波の影響が相殺するような場合は、信号は減っていき、消えてしまう。もっとも効率的な腕の長さは、重力波の半波長分の長さである。例えば、500 Hz の信号にとって最適な長さは 150 km である。しかしこのような大きさの干渉計を地球上に作るのは現実的ではない。光の腕での滞在時間  $\tau$  を伸ばし、実効的な長さを増やす方法は2つある [2]。1つ目は高反射鏡の上で光を何度も反射させ、折り返す方法である。この方法は Delay-Line 方式と呼ばれ、滞在時間は単純に往復時間に折り返し回数  $N$  をかけたものとなる [3]:

$$\tau_{DL} = N \frac{L}{c}. \quad (2.1)$$

もう1つの方法は Fabry-Perot 共振器を腕に組みこむというものである (Fig. 2.1)。振幅反射率  $r_F$  と  $r_E$  の鏡を腕の前端と後端に配置した干渉計では、滞在時間は

$$\tau_{FP} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \frac{2L}{c}, \quad (2.2)$$

のように増える。このとき、

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{r_F r_E}}{1 - r_F r_E}. \quad (2.3)$$

であり、 $\mathcal{F}$  はフィネスと呼ばれる。フィネスは、Fabry-Perot 共振器における実効的な折り返し回数を表している。現在は Fabry-Perot Michelson 干渉計型の検出器の方が主流となっている。主な理由は、Delay-Line 型だと必要となる鏡のサイズが大きくなるからである。

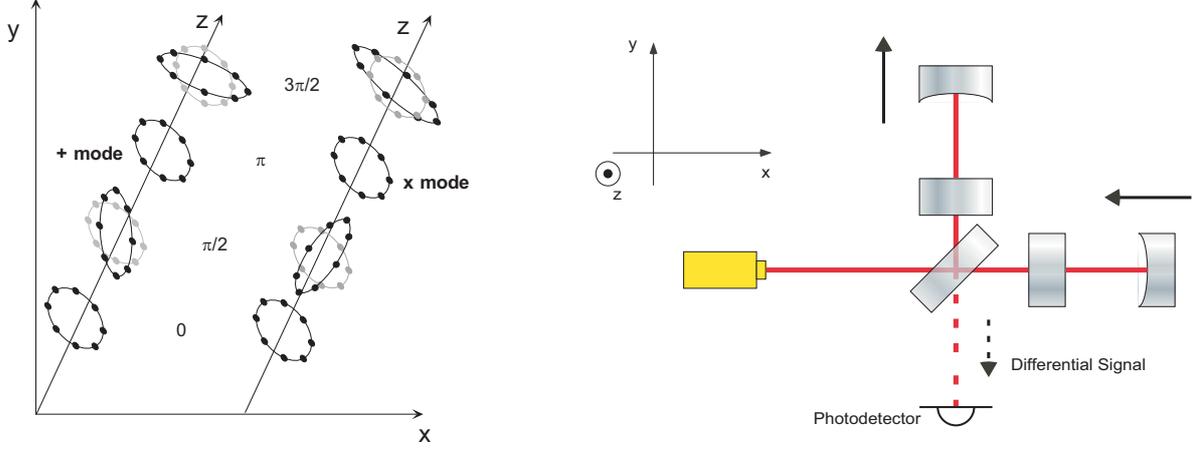


Figure 2.1: Gravitational waves have two polarizations: the + and  $\times$  modes (left). The roundtrip phases of the light in two orthogonal arm cavities become different when gravitational waves perturb the arm length of the interferometer (right).

鏡の強度透過率と強度反射率を  $T$  および  $R$  としよう。鏡の光学損失を無視すると、次式が成り立つ。

$$T + R = 1. \quad (2.4)$$

フィネスの高い共振器にとっては、エンド鏡の反射率はほぼ 1 でなければならず、フィネスはフロント鏡の透過率で決まる:

$$\mathcal{F} \simeq \frac{2\pi}{T} \quad (r_F \ll r_E \simeq 1). \quad (2.5)$$

シンプルな Michelson 干渉計において、エンドミラーが角周波数  $\omega$  で動くと、キャリアと比べて  $e^{\pm i\Lambda}$  だけ位相がシフトしたサイドバンドが生成される。この位相シフトは

$$\Lambda = \frac{L\omega}{c} \quad (2.6)$$

で与えられる。

このような鏡の動きに対する Fabry-Perot 共振器の応答は、キャリアとサイドバンドが 1 往復ごとに受ける位相シフトをそれぞれ次のように計算して求めることができる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_c(\Omega) \\ E_c(\Omega + \omega) \\ E_c(\Omega - \omega) \end{pmatrix} &= r_F r_E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathcal{E} e^{-i\Lambda} & e^{-2i\Lambda} & 0 \\ \mathcal{E} e^{-i\Lambda} & 0 & e^{-2i\Lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_c(\Omega) \\ E_c(\Omega + \omega) \\ E_c(\Omega - \omega) \end{pmatrix} + t_F \begin{pmatrix} E_i(\Omega) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} E_c(\Omega) \\ E_c(\Omega + \omega) \\ E_c(\Omega - \omega) \end{pmatrix} &= t_F \begin{pmatrix} 1 - r_F r_E & 0 & 0 \\ -r_F r_E \mathcal{E} e^{-i\Lambda} & 1 - r_F r_E e^{-2i\Lambda} & 0 \\ r_F r_E \mathcal{E} e^{-i\Lambda} & 0 & 1 - r_F r_E e^{-2i\Lambda} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_i(\Omega) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで、 $E_i$  および  $E_c$  は入射電場と共振器内電場を表し、 $\mathcal{E} = \Delta L \omega / c$  は鏡が  $\Delta L$  だけ動いたときにキャリアが生成するサイドバンドの振幅を表す。簡単のため、 $r_E = 1$  としよう。共振器の反射側における信号

サイドバンドの大きさは、

$$\begin{aligned} E_r(\Omega \pm \omega) &= t_F E_c(\Omega \pm \omega) \\ &= \mathcal{E} E_i \frac{(1 + r_F) e^{-i\Lambda}}{1 - r_F e^{-2i\Lambda}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

となる。共振器がない場合 ( $r_F = 0$ ) のときと比べると、信号増幅率  $G_{\text{cav}}$  は

$$\begin{aligned} G_{\text{cav}} &= \frac{1 + r_F}{1 - r_F e^{-2i\Lambda}} \\ &\simeq \frac{4/T}{1 + i\omega/\gamma} \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる。ここで、 $T = t_F^2$  である。すなわち、シンプルな Michelson 干渉計と比べて実効的な腕の長さは  $4/T$  倍に増えているということである。これらは式 (2.2) および (2.5) からも見取れる。ここで、 $\gamma$  はキャビティポールと呼ばれる量であり、共振器内の信号の 50% が失われ始める角周波数である。

$$\gamma = \frac{Tc}{4L}. \quad (2.10)$$

重力波の影響も、低い周波数ではエンドミラーの動きとほぼ同じである。シンプルな Michelson 干渉計および Fabry-Perot Michelson 干渉計の重力波に対する応答は、重力波から出力電場の位相シフトで表したとして、

$$|H_{\text{MI}}(\omega)| = \frac{2\Omega}{\omega} \sin \frac{L\omega}{c}, \quad (2.11)$$

$$|H_{\text{FP}}(\omega)| = \frac{2\Omega}{\omega} \frac{1 + r_F}{|1 - r_F e^{-2iL\omega/c}|} \sin \frac{L\omega}{c}, \quad (2.12)$$

$$\therefore \left| \frac{H_{\text{FP}}(\omega)}{H_{\text{MI}}(\omega)} \right| = \frac{4}{T} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\gamma)^2}}. \quad (2.13)$$

となる [2]。

図 2.2 は、シンプルな Michelson 干渉計と FPMI の周波数応答およびそれらの比を表している。Michelson 干渉計の基線長は、周波数  $f = c/4L$  のときに合わせて最適化されており、その 2 倍の周波数で信号は相殺する。FPMI の周波数応答は、キャビティポール以下では、 $4/T$  倍に増えている。

効率よく 2 つの腕の差動信号を取得するためには、入射した光が同じ方向へ戻り、差動信号が反対側へ漏れ出るような状況がよい。この状況をダークフリンジと呼ぶ。レーザーのある側 (symmetric port) を bright port と呼び、反対側 (anti-symmetric port) を dark port と呼ぶ。また、この状況下では光や信号を増やすことができるのだが、詳細は Sec. 2.3 で紹介する。

## 2.2 雑音の振る舞い

重力波による長さの変化は、基線長を 3 km としておよそ  $10^{-19}$  m 以下である。これだけ小さな信号を得ようとすると、様々な雑音はその妨げとなる。例えば、レーザーの周波数雑音、制御系の電気雑音、散乱光による非正常雑音、などであるが、ここに挙げたものは、いわゆる技術的な雑音であり、機器の調整によって下げることができる。一方で、機器の調整では下げることのできない原理的な雑音が存在し、それらが干渉計の感度限界を決める。

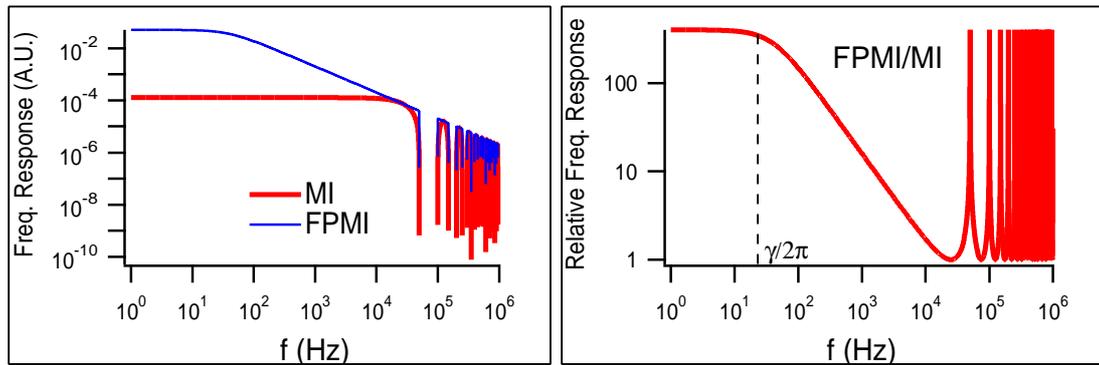


Figure 2.2: Differential components of the reflected light from the 3km-Michelson interferometer and the FPMI with finesse 600 (left). The ratio from MI to FPMI (right).

- 低周波で支配的なのは地面振動雑音である。典型的な地面振動の大きさは、1 Hz で  $10^{-7}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$  であり、1 Hz 以上では  $f^{-2}$  で下がっていく。地面振動雑音は防振系を多段にすることで抑制できるが、それでも 10-100 Hz 以下の感度を制限している。
- 鏡や振り子のブラウン運動は中間帯域の感度を制限する。鏡の内部モードの熱雑音は、100 Hz でおおよそ  $10^{-20}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$  であり、それ以上では  $f^{-1/2}$  で下がっていく。振り子の熱雑音は 100 Hz でおおよそ  $10^{-21}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$  であり、それ以上では  $f^{-5/2}$  で低下する [4]。機会損失の小さな材料で鏡や振り子を作るとは、熱雑音を下げる上で重要である。別の解決策としては、鏡を冷やして熱雑音を軽減するという方法がある。
- 量子雑音はもっとも原理的な雑音である。量子化された光子のランダムな振る舞いはいつ起こるか分からない、すなわち量子揺らぎは周波数依存性のない、いわゆる白色雑音である。量子揺らぎはフォトデテクタで検出されるまで演算子として量子性を保ち、検出の瞬間に期待値を出す。この量子雑音は鏡の動きではなく、読み取り雑音であるから、そのスペクトルは信号の周波数応答 (式 (2.12)) で補正して求める。スペクトルはキャビティポール以下で平坦、それ以上で周波数と共に増える。この量子雑音をショットノイズと呼ぶ。ショットノイズとは別に光子数の揺らぎがレーザーと結合して生み出す、輻射圧雑音と呼ばれる雑音も存在する。

図 2.3 に、原理的な雑音スペクトルと例として連星からの重力波信号の軌跡を示す。雑音レベルより上に現れると重力波信号を検出することができる。表 2.1 にいくつかの重力波源をまとめておく。大きな信号の重力波ほど、その飛来頻度は低いと言える。また、大きな重力波信号は低周波に現れ、地上型重力波検出器ではとらえることができない。低周波重力波については宇宙型重力波検出器に期待するしかないだろう [5][6]。

重力波を検出し、さらにその観測頻度を上げていくには、雑音の除去が必要不可欠である。地面振動雑音と熱雑音はさまざまな先端技術で減らすことが期待される。ショットノイズは、腕共振器内のパワーを上げることで信号を増やし、相対的に量子的な揺らぎを減らすことで改善することができる。共振器内パワーを上げるには 3 つの方法がある。第一に高出力レーザーを用いること。第二にパワーリサイクリング (PR) と呼ばれる技術を使うこと。そして最後に、腕のフィネスを上げた上で Resonant Sideband Extraction (RSE) と呼ばれる先端技術を組み込むことである。第一世代の検出器ではおおよそ 10 W の安定

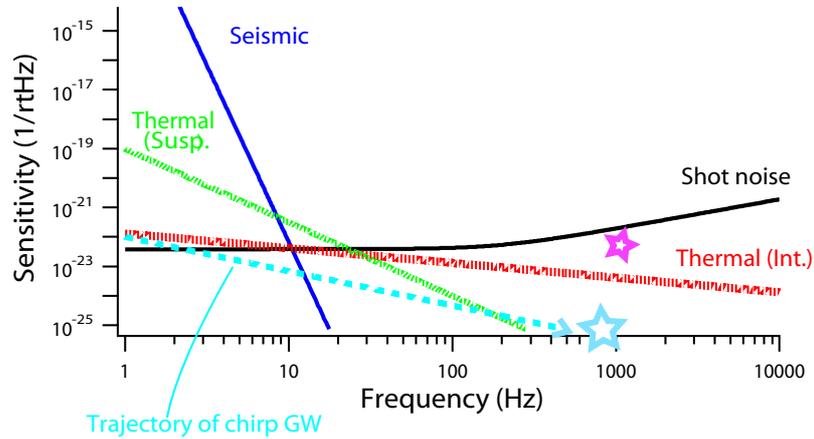


Figure 2.3: Typical noise spectra of a first-generation gravitational-wave detector ( $L=3\text{km}$ ). If gravitational waves arrive from the universe and their signal is larger than the noise level in the detector, one can detect them. The dotted arrow shows a typical expected signal of wave from compact binaries and the big star shows the signal at their coalescence. The small star shows an expected signal of the waves from a supernova explosion in a near galaxy.

Sources	Frequency	Amplitude	Probability
NS-NS Binary Coalescence (200Mpc)	10Hz~1kHz	$10^{-22}$	~ several/year
Supernovae Explosion (Our Galaxy)	~1kHz	$10^{-18}$	~ once/several ten years
Supernovae Explosion (Virgo Cluster)	~1kHz	$10^{-21}$	~ several/year
Black Hole Formation	~1mHz	$10^{-17}$	~ once/year
Pulsar	10Hz~1kHz	$10^{-25}$	Continuous
String	$10^{-7}\text{Hz}$	$10^{-15}$	Background

Table 2.1: Gravitational wave sources. NS = Neutron Star.

化した Nd:YAG 光源が用いられた。波長は 1064 nm である [7]。第二世代では 100 W クラスのレーザーが用いられる予定である。PR と RSE については、次の節で説明する。

## 2.3 Dual Recycling

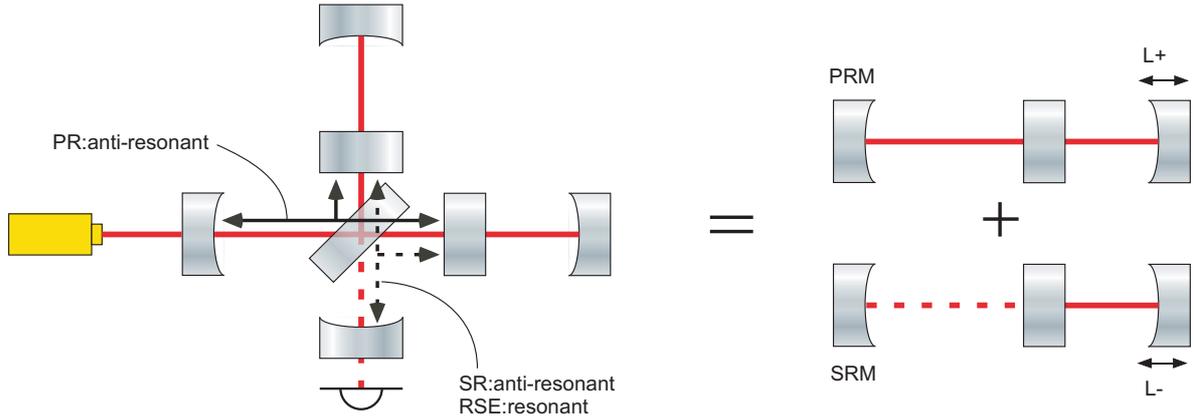


Figure 2.4: Dual Recycling consists of Power Recycling (PR) and Signal Recycling (SR).

干渉計に入射したキャリア光は、重力波によって生成された信号サイドバンドを伴って戻ってくる。信号の位相は互いに 180 度ずれているので、戻ってきた光は同相モードのキャリア光と差動モードの信号光に分かれる。干渉計をダークフリンジに制御した場合、ほとんどの光がレーザー側（ブライトポート）に戻り、差動信号のみがダークポートへ漏れ出すことになる。この状況を利用して、パワーと信号を別々にリサイクルすることが可能となる (Fig. 2.4)。このとき、腕共振器とリサイクリング共振器を一つの複合共振器とみなすことができる。共振器は 1 枚の複合鏡とみなすことができ、その反射率は、共振器を構成する無損失な鏡の振幅反射率を  $r_1$  および  $r_2$  として、以下のように書ける。

$$r_c = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2}{1 - r_1 r_2} = \frac{r_2 - r_1}{1 - r_1 r_2} \quad (\text{resonant condition}), \quad (2.14)$$

$$r_c = -r_1 - \frac{t_1^2 r_2}{1 + r_1 r_2} = -\frac{r_2 + r_1}{1 + r_1 r_2} \quad (\text{anti-resonant condition}). \quad (2.15)$$

光が共振器で共振している場合、共振器の反射率は  $r_1$  単体より下がり、 $r_1 > r_2$  (under-coupling) の場合には反射率の符号は同じであるが、 $r_2 > r_1$  (over-coupling) の場合には符号が反転する。光が共振器で反共振状態にある場合は、共振器の反射率は  $r_1$  単体より上がり、 $r_1$  と  $r_2$  の大小関係に関わらず、反射率の符号は元と同じになる。

パワーリサイクリング共振器 (PRC) は、それ単体でキャリアにとって反共振である。腕共振器で光が共振すると、複合鏡の反射率の符号は元と逆になるので、光は PRC 内で共振することになる。実効的に増幅された光が干渉計に入射される。

同様に、キャリア光がシグナルリサイクリング共振器 (SRC) 内で反共振だと、信号サイドバンドが増幅される。この状況は、Broadband Signal Recycling (BSR) と呼ばれている。PR と BSR を同程度行なうことは、腕のフィネスを上げるのと等価である。ドイツの GEO では、腕に共振器を組み込まず、PR と BSR のゲインを上げることで感度を上げている [8][9]。

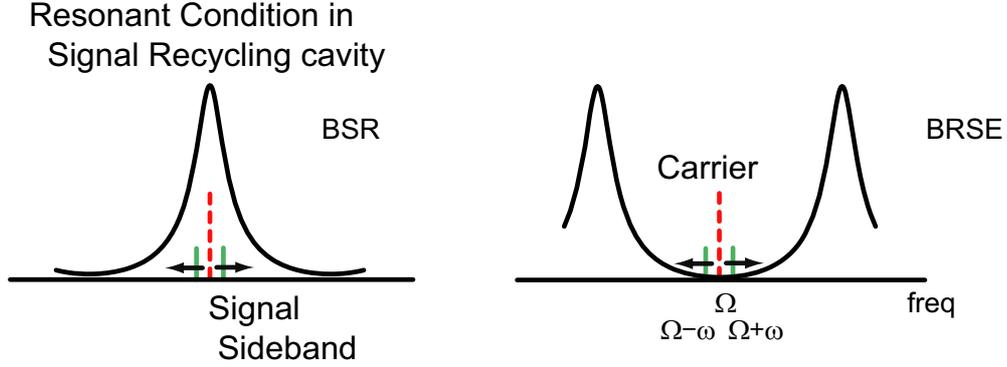


Figure 2.5: Resonant condition of SRC. The carrier light described as a mark does not exist at the dark port indeed.

PR と SR の最大の違いは、PR で共振させるキャリア光は周波数が固定されているのに対して、SR で共振させる信号サイドバンドには周波数依存性があるという点である。SRC においては、DC 成分が反共振で、代わりに高周波成分が共振になるような状況を用意することも可能である。これが、Broadband Resonant Sideband Extraction (BRSE) [10] と呼ばれる状況である。Figure 2.5 が SRC の共振条件を表している。重力波により、角周波数  $\Omega$  のキャリアの周りに、角周波数  $\Omega \pm \omega$  のサイドバンドが生成される:

$$e^{i(\Omega t + h \sin \omega t)} \simeq e^{i\Omega t} + \frac{h}{2} e^{i(\Omega + \omega)t} - \frac{h}{2} e^{i(\Omega - \omega)t} \quad (h \ll 1). \quad (2.16)$$

光検波の後、サイドバンドは角周波数  $\omega$  の信号にダウンコンバートされる。Michelson 干渉計がダークフリンジに制御されているので、SRC にはキャリア成分は存在せず、サイドバンドのみが共振したり反共振したりするのである。

DC 成分が共振となるような状況下では、低周波の信号が増幅され、高周波の信号は減少する (BSR)。DC 成分が反共振となるような状況下では、逆に高周波の信号が増幅され、低周波の信号が減少する (BRSE)。それぞれのゲインは以下のようにして求められる。簡単のため、腕共振器のエンド鏡の反射率は 1 であるとし、フロント鏡と SRM の反射率を  $r$  および  $r_s$  として、

$$\begin{aligned} & \text{(BSR Signal Gain)} \\ G_{\text{BSR}} &= \left| \frac{t_s}{1 - r_s [-r + t^2 e^{i\psi} / (1 - r e^{i\psi})]} \right| \simeq t_s \sqrt{\frac{(1 - r)^2 + r\psi^2}{(1 - r)^2 (1 - r_s)^2 + \psi^2 (1 + r_s)^2}}, \quad (2.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{(BRSE Signal Gain)} \\ G_{\text{BRSE}} &= \left| \frac{t_s e^{i\pi/2}}{1 + r_s [-r + t^2 e^{i\psi} / (1 - r e^{i\psi})]} \right| \simeq t_s \sqrt{\frac{(1 - r)^2 + r\psi^2}{(1 - r)^2 (1 + r_s)^2 + \psi^2 (1 - r_s)^2}} \quad (2.18) \end{aligned}$$

ここで、 $\psi = \frac{L}{c}\omega \ll 1$  は重力波による位相シフトである。位相シフトは、信号の角周波数  $\omega$  に比例している。

BSR の場合 (see Fig. 2.6)、 $\psi$  は小さいとして、

$$\text{Signal Gain} \rightarrow \frac{1 + r_s}{1 - r_s}, \quad (2.19)$$

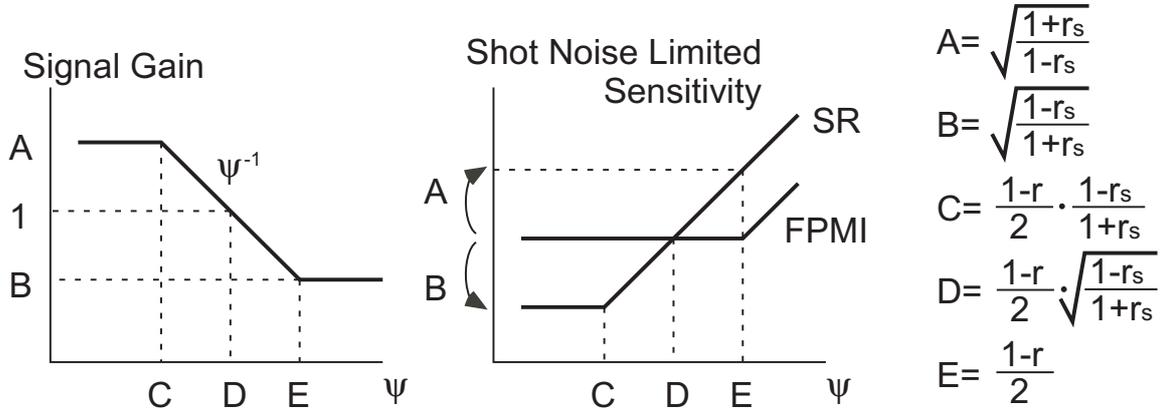


Figure 2.6: Signal gain of BSR.

となり、 $\psi$  が式 (2.17) の分母において支配的となるような状況、すなわち

$$\psi = \frac{(1-r)(1+r_s)}{1-r_s}, \quad (2.20)$$

においては、信号ゲインは  $\psi^{-1}$  に従って落ちていく。また、 $\psi$  が分子で支配的となったとき、すなわち

$$\psi = 1-r, \quad (2.21)$$

においては、信号ゲインは再び一定となる。もし  $\psi$  が十分大きければ、

$$\text{Signal Gain} \rightarrow \frac{1-r_s}{1+r_s}. \quad (2.22)$$

おなる。BRSE の信号ゲインの周波数依存性も同様に求められる (Fig. 2.7)。

パワーリサイクリングゲインを上げるにしても、フィネスを上げるにしても、腕内のパワーは上がる。前者については、全ての周波数においてショットノイズが改善する一方で、後者については、キャビティポール以上の周波数で信号が相殺し始めるので、ショットノイズは高周波では改善しない (Fig. 2.8)。RSE は、信号が相殺し始める前に抽出することで、高周波の信号増幅を実現させており、それが Resonant Sideband Extraction という名前の由来である。

入射パワーを  $n$  倍大きくするのは、フィネスを  $n$  倍にしてかつ RSE により帯域を  $n$  倍に広げたのと同じである。どちらの場合も、キャビティポールは同じで、ショットノイズのフロアレベルが  $\sqrt{n}$  倍だけ改善する。帯域を  $n$  倍にするための SRM 反射率は以下のようにして求められる。

$$\frac{1+r_s}{1-r_s} = n \quad (2.23)$$

すなわち、帯域を  $n$  倍に広げるための、SRM 反射率は、

$$r_s = \frac{n-1}{n+1} \quad (2.24)$$

となる。例えば、10 倍大きなパワーを入射することは、 $r_s = 0.82$ 、すなわち強度反射率で  $R_s = 67\%$  の SRM で RSE をすることと同じであり、100 倍大きなパワーを入射することは、 $R_s = 96\%$  の SRM で RSE

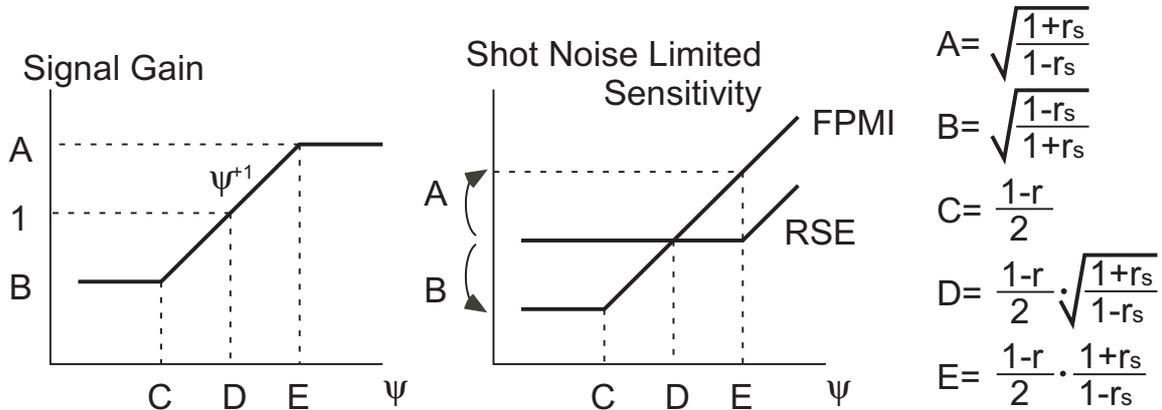


Figure 2.7: Signal gain of BRSE.

をすることと同じである。後者は、Michelson 干渉計部分の光学損失を加味するとなかなか厳しい条件である。RSEを導入するにしても、なるべく強いパワーのレーザーを用意しておくべきであろう。

リサイクリング共振器を腕の内側から見て複合鏡とみなすこともできる。PR については、PRM と ITM で構成される反共振キャビティの反射率が ITM の反射率より高くなるため、DC パワーについてのみフィネスが上昇し、信号のバンド幅は影響を受けない。一方で、RSE(SR) については、SRM と ITM で構成される共振キャビティの反射率は ITM の反射率より低く (高く) なり、キャビティポールが高い (低い) 方へ移動する。実効的な腕共振器のフィネスが、パワーと信号で別々に決められるということである。

SR もしくは Fabry-Perot Michelson 干渉計 (FPMI) と比較すると、RSE はエネルギーの振り分けという点について大きな強みがある [11][12]。ビームスプリッターにおける入射光量を低く抑えつつ、同じショットノイズレベルを実現できるのである。BSR は高いフィネスの腕キャビティを必要としないが、ビームスプリッターにおいて高いパワーを必要とする。FPMI は BSR ほど高い入射パワーを必要としないが、RSE と比べるとまだ高い。RSE は腕共振器内部でパワーを蓄積するので、入射パワーは低くて済み、ビームスプリッターや ITM における熱問題、すなわち熱レンズや冷却限界などの問題を回避できる。

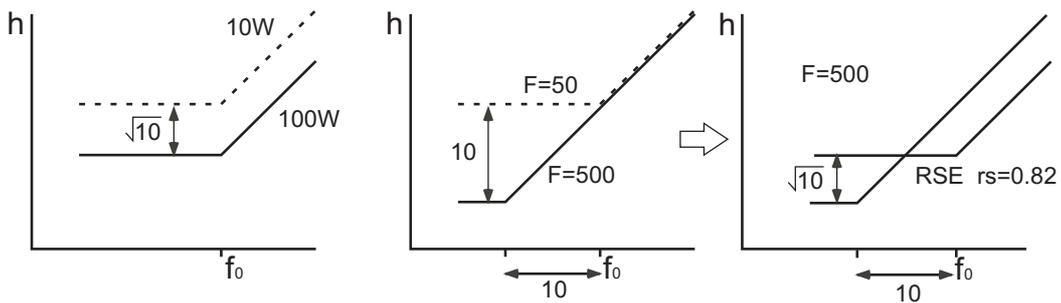


Figure 2.8: Shot noise can be reduced by raising the power (left) and by raising finesse with RSE (right).

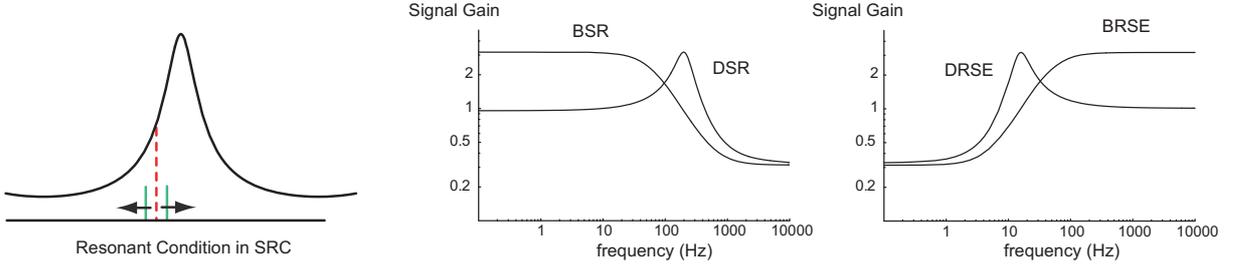


Figure 2.9: Detuning.

## 2.4 Detuning

これまで、SRC について共振もしくは反共振の 2 通りのみを議論してきたが、それらの中間的な状態で干渉計を動作させることも可能である。このような detune 状態では、信号サイドバンドのうち片方が周波数と共に共振に近づき、もう片方は遠ざかる。そして、ある周波数でどちらかの信号サイドバンドが共振し、狭帯域で干渉計感度が改善する (Fig. 2.9)。Detuning は SRC 長を  $\ell_s$  (BSR) からずらして、 $\ell_s + \Delta\ell_s$  とすることで得られる:

$$\frac{\ell_s \Omega}{c} = n\pi \quad (\text{BSR}) \quad (2.25)$$

$$\frac{(\ell_s + \Delta\ell_s) \Omega}{c} = n\pi + \phi, \quad (2.26)$$

ここで、 $\phi$  が detune 位相である。信号ゲインは以下ようになる:

$$G_{\text{DRSE}} = \left| \frac{t_s e^{i\phi}}{1 - r_s e^{2i\phi} [-r + t^2 e^{\pm i\psi} / (1 - r e^{\pm i\psi})]} \right|$$

$$\simeq t_s \sqrt{\frac{(1-r)^2 + r\psi^2}{\psi^2(1+r_s^2 + 2r_s \cos 2\phi) \pm 2\psi r_s(1-r^2) \sin 2\phi + (1-r)^2(1+r_s^2 - 2r_s \cos 2\phi)}}. \quad (2.27)$$

上記の計算では、 $\sin \psi \simeq \psi$ ,  $\cos \psi \simeq 1 - \psi^2/2$  という近似を用いた。また、一部の計算で  $r \simeq 1$  としている。信号ゲインの最大値および最小値は、式 (2.27) を  $\psi$  で微分することで求まる。解は以下のようになる。

$$\psi = \mp(1-r) \tan \phi \quad (\text{Maximum}), \quad (2.28)$$

$$\psi = \pm(1-r) \cot \phi \quad (\text{Minimum}). \quad (2.29)$$

最大値と最小値は、

$$SG_{\text{max}} = \sqrt{\frac{1+r_s}{1-r_s}}, \quad (2.30)$$

$$SG_{\text{min}} = \sqrt{\frac{1-r_s}{1+r_s}} \quad (2.31)$$

となる。最大値は detune 位相に依存せず、フロアレベルは低周波で BSR と、高周波で BRSE と一致することが分かる。なお、この近似は腕のフィネスが高く、SRM 反射率がそこまで高くないこと想定して

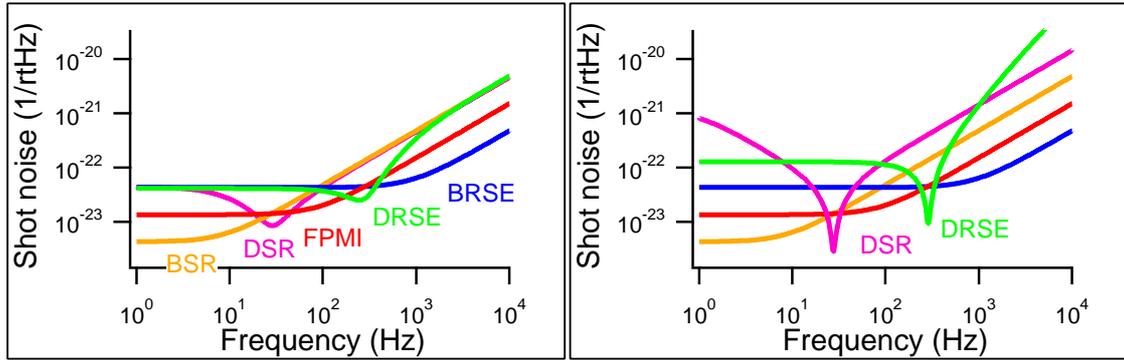


Figure 2.10: Comparison of shot noise spectra with various configurations. The laser power is 50W at the beamsplitter, finesse is 200, arm length is 3km, and the reflectivity of the SR mirror is 67% for any configurations (left) and 96% for the detuned cases (right).

いる。BSR や BRSE の場合は、それぞれ低周波もしくは高周波で、上下の信号サイドバンドが共に共振するが、detune した場合は片方のサイドバンドのみが共振する。共振から外れている方の信号サイドバンドのゲインは、 $\psi = \pm(1-r)\tan\phi$  を式 (2.27) へ代入することで得られる。結果は

$$SG_{\text{alt}} = t_s \sqrt{\frac{1}{1+r_s^2-2r_s\cos 4\phi}}, \quad (2.32)$$

となり、 $SG_{\text{max}}$  と比べるとはるかに小さい。

Figure 2.10 に異なる干渉計構成におけるショットノイズスペクトルを示す。例えばもしターゲットの重力波周波数が 250 Hz であったとすると、detuned RSE がもっともよい構成ということになる。量子的輻射圧雑音を加味すると、特に detuned RSE の場合のスペクトルは形が変わってくる。

## 2.5 世界の重力波プロジェクト

Projects	Configuration	Seismic Noise Reduction	Thermal Noise Reduction
LIGO	4km FPMI	Single Pendulum	Fused Silica Mirrors
Ad-LIGO	4km DRSE	Multiple Pendulum	Mexican-Hat beam, Sapphire Mirrors
TAMA	300m FPMI	Double Pendulum	Fused Silica Mirrors
LCGT	3km RSE	SAS, SPI, Underground	Cryogenic, Sapphire Mirrors

Table 2.2: Comparison of current and future interferometers.

2004 年現在、4 つの重力波検出計画が遂行中である。日本では基線長 300 m の TAMA が運転中であり [13]、米国には 2 km が 1 台と 4 km が 2 台、合計 3 台の干渉計が運転中である [14]。ドイツでは、英国との共同プロジェクトで、基線長 600 m の Dual-Recycled Michelson 干渉計、GEO600 が稼働しており [9]、イタリアでは、フランスとの共同プロジェクトで基線長 3 km の VIRGO が計画中である [15]。

TAMA は、他の干渉計に先駆けて観測を開始し、前節で述べたような原理的雑音以外のさまざまな雑音に関する雑音ハンティングなどで、多くの知見を得た。LIGO は世界最高感度を誇り、その感度はおよそ  $h = 10^{-22}(1/\sqrt{\text{Hz}})$  ほどである。GEO600 は、腕共振器を備えていないが、SRC を detune した干渉計構成での運転に成功している。Virgo は 2004 年現在ではまだ観測段階に至っていないが、数年以内に完成する予定である。重力波信号を非定常雑音と区別するには、世界各地の干渉計による同時観測が不可欠であり、国際協力が非常に重要である。

現在の感度では、頻繁に重力波を観測することは厳しいと考えられているが、近傍銀河で大質量の変動を伴う天体現象が起こった場合は検出が可能なレベルにある。第一世代検出器は感度を向上し、重力波の初検出を目指しているが、同時に第二世代検出器への準備もすでに開始されている。

近い将来に建設が予定されている第二世代検出器は 3 つある。一つ目は米国の Advanced LIGO、二つ目は日本の LCGT、三つ目は欧州で計画されているが名前はまだ決まっていない。表 2.2 に第一世代と第二世代の検出器の比較を示す。

先端技術により地面振動雑音と熱雑音を軽減することで、第二世代検出器の感度は主に量子雑音で制限されると考えられている。上に挙げた第二世代検出器はみな RSE 方式を採用する予定であり、デザイン感度は、およそ  $h = 10^{-24}(1/\sqrt{\text{Hz}})$  ほどである。LCGT が detune 技術を採用するかどうかは現段階で未定であり、今後のプロトタイプ実験の結果を待って決められる。

## 2.6 連星への感度

### 2.6.1 チャープ信号と量子限界

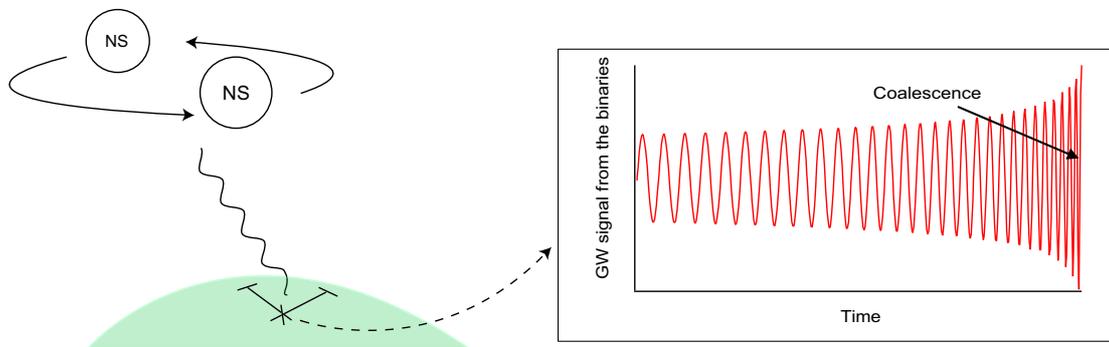


Figure 2.11: Chirp signal from compact binaries.

中性子連星からの重力波は、初検出へ向けてもっとも期待されるターゲットである。その理由は、(1) 地上型検出器の最も感度のよい周波数帯に信号が現れる、(2) 重力波以外の観測結果からイベントレートがおおよそ判明している [19]、(3) 波形がだいたい分かっており、信号と雑音を分離することが可能である、という 3 点である。図 2.11 にチャープ信号の波形を示す。連星の接近と共に、振幅と周波数が上昇する。

チャープに対する信号雑音比 (SNR) は、信号と雑音レベルの比を取り、各周波数での滞在時間をかけ

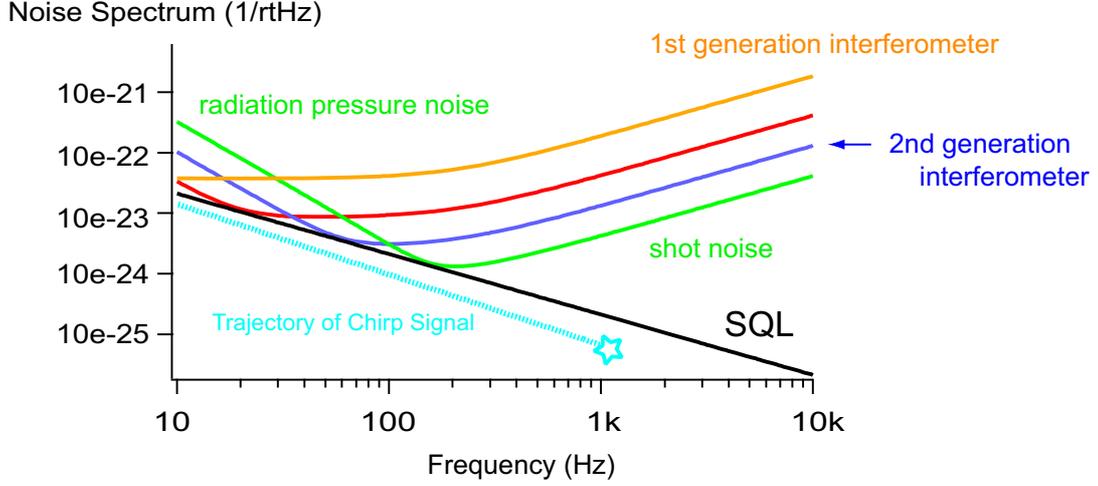


Figure 2.12: SQL and the chirp signal trajectory. The first generation interferometer above is a FPMI with 50 W laser power at the beamsplitter and arm finesse of 100. The second generation interferometer is a BRSE with 1 kW laser power at the beamsplitter, arm finesse of 1000, and RSE gain of 10.

て、合体する周波数まで積分したもので与えられる [20]:

$$\text{SNR} = \frac{T_{\odot} c}{r_D} \left( \frac{5m_1 m_2}{96M_{\odot}(m_1 + m_2)} \right)^{1/2} \left( \frac{m_1 + m_2}{\pi^2 M_{\odot}} \right)^{1/3} T_{\odot}^{-1/6} \cdot \left[ \int \frac{f^{-7/3}}{S_n(f)} df \right]^{-1/2}, \quad (2.33)$$

$$M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33} \text{g}, \quad T_{\odot} = 4.925491 \times 10^{-6} \text{sec.}$$

ここで、 $m_1$  と  $m_2$  は連星を形成する星の質量、 $r_D$  は連星の地球からの距離である。周波数ドメインでのチャープ信号の軌跡は  $f^{-7/6}$  の傾きを持ち、雑音レベルが  $f^{-7/6}$  のラインに沿って改善するほど、SNRは上がる。

ところで、第二世代検出器は数百 kW のパワーを腕内にため込むので、量子的輻射圧雑音が低周波で感度を制限することになる。光子数の量子的な揺らぎが、腕内のパワー揺らぎを生み出し、鏡を輻射圧で揺らすのである。ショットノイズが白色雑音であるのに対し、輻射圧雑音は白色力雑音であり、雑音スペクトルは  $f^{-2}$  の傾きを持つ。ショットノイズと輻射圧雑音の大きさが等しくなる点は、腕内パワーによって異なるが、その軌跡はスペクトル上で  $f^{-1}$  の直線を描く (図 2.12)。この軌跡を標準量子限界 (Standard Quantum Limit; SQL) と呼ぶ。

SQL とチャープ信号の軌跡がほぼ同じ傾きを持つことは大きな問題である。チャープに対する SNR はレーザーパワーを上げてあまり変わらないことになる。

ただし、SQL はいくつかの方法で超えることが可能である。これらの手法は量子非破壊計測 (Quantum Non-Demolition; QND) [21][22] と呼ばれており、SRC の detune もその 1 つである。

## 2.6.2 Detuned RSE の感度スペクトルと連星に対する SNR

ここまで、輻射圧効果を見捨てて detuned RSE の感度を計算してきた。レーザーパワーを上げていくと、輻射圧雑音が低周波で現れるだけでなく、干渉計のダイナミクスが変わり、スペクトルに 2 つのディップが現れる (Fig. 2.13)。高周波のディップは、信号サイドバンドが共振して信号が増加するために生じるも

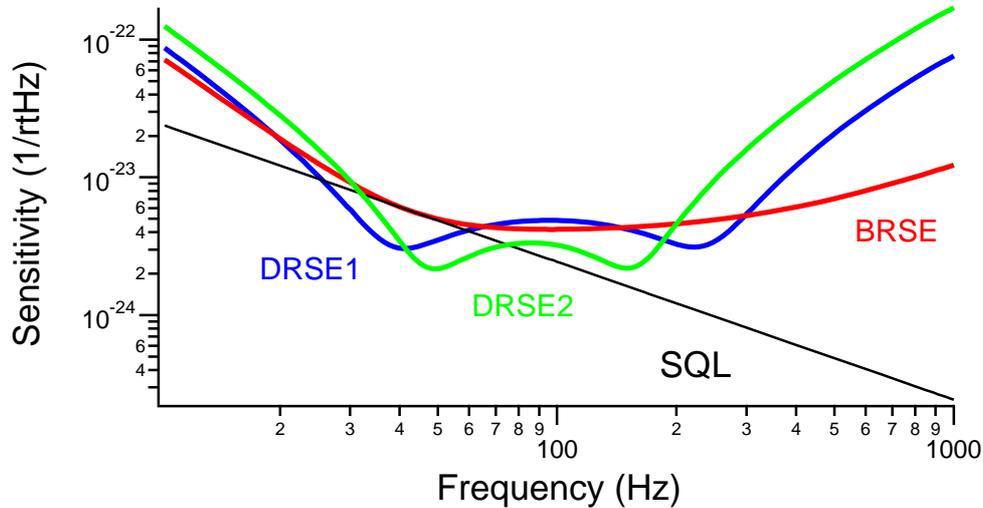


Figure 2.13: Quantum noise spectrum of DRSE including radiation pressure effect.

のであり、低周波のディップは、信号サイドバンドがSRMで反射して入射光と結合し、それが再び信号を生成するというループでバネが形成されるために生じるものである。ダイナミクスが変化しているので、自由質点で定義されたSQLを超えることが可能となっている。

Detuned RSEのスペクトルはdetune位相 $\phi$ などのパラメタによって変わる [23][24]。全てのパラメタを最適化すると、LCGTの中性子連星に対する感度は、およそ25%向上し、イベントレートはおよそ倍になる。

表 2.3 では、入射パワーを変えたときの Broadband RSE 感度を、中性子連星の観測可能レンジで比較している。上段は熱雑音を含まないもの、下段は熱雑音を含んだものである。ショットノイズは入射パワーのルートに反比例して下がっていくが、輻射圧雑音が増えるために、感度はそこまで上がらない。熱雑音を含まない場合、入射パワーを 100 W、1 kW、10 kW、100 kW と上げていくと、SNR は 36 %、21 %、16 % と向上していくが、徐々に改善度合いが下がっていているのが分かる。しかし、detune を導入した場合、SNR は 58 % も向上する (1 kW 入射の場合)。ここで干渉計パラメタは熱雑音を含んだ場合に最適化したもので統一している。下段でも、detune による感度の改善が見られるが、こちらは別の理由である。図 2.14 に示すように、200 Hz 以上の周波数帯では熱雑音が感度の一部を制限しており、チャープ信号の軌跡と SQL の交差周波数がそれより高いと、入射パワーを上げてても観測レンジは上がらない。Detune した場合の感度も同様に熱雑音で制限されるが、200 Hz 以下で感度を改善することができるため、レンジは 25 % 改善する。これは入射パワーを 100 kW まで上げてても到達しないレベルである。なお、地面振動雑音については計算に含まれているが、LCGT の地面振動雑音レベルは低いいため、観測レンジには影響しない。

結論として、detuned RSE は、中性子連星をターゲットとする第二世代検出器にとって最良な干渉計構成である。熱雑音が低くなればなるほど detune による改善は顕著になる。鏡を低温にする LCGT では特に detune が必須であると言えるだろう。

No thermal noise

Laser Power $\times$ PR gain	SNR=10 at
100W	213Mpc
1kW	290Mpc
10kW	350Mpc
100kW	406Mpc

(Detune)  
 $\rightarrow$  459Mpc

Including thermal noise

Laser Power $\times$ PR gain	SNR=10 at
100W	191Mpc
1kW	249Mpc
10kW	258Mpc
100kW	246Mpc

(Detune)  
 $\rightarrow$  311Mpc

Table 2.3: SNR to a chirp signal changes little if the laser power is raised more than enough but it changes significantly by detuning. In the table, pc (parsec) is the unit of distance:  $1\text{pc}=30857\times 10^{12}\text{m}$ . With thermal noise included, detuning makes it possible to see a binary event at 25% further location; the number of candidates is about twice than the broadband case.

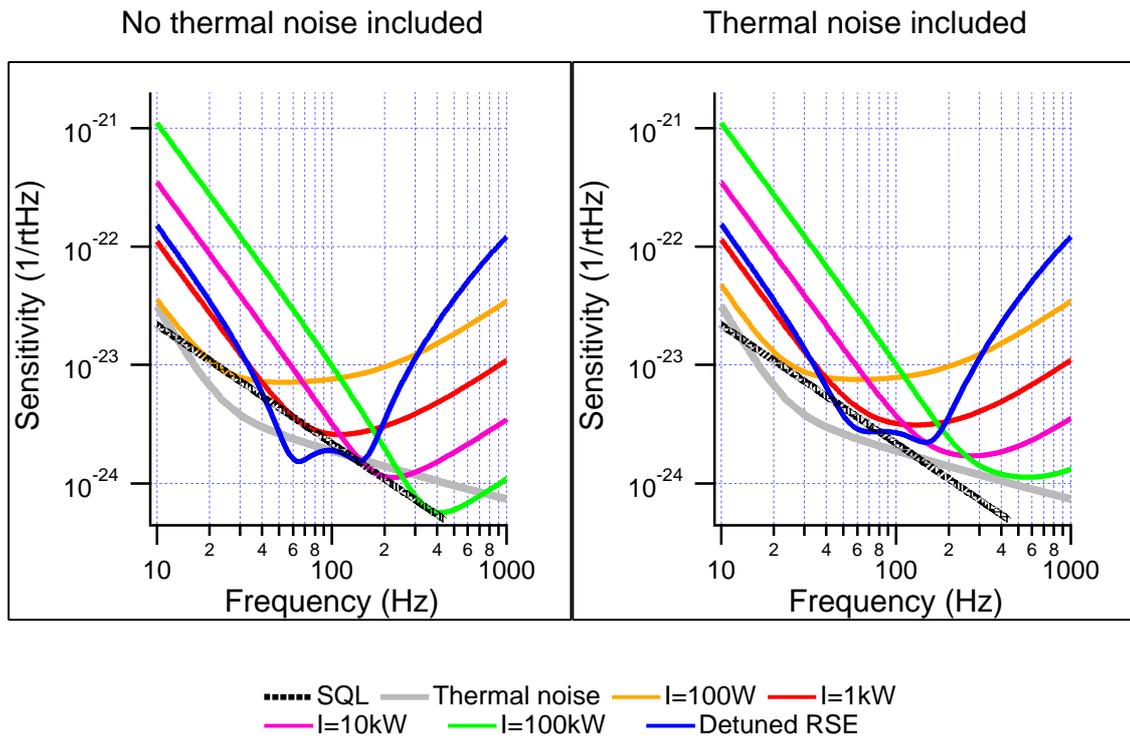


Figure 2.14: Total-noise spectra are limited by the SQL without thermal noise taken into account (left). Total-noise spectra are limited by thermal noise at higher frequency than about 200Hz. As a result, the SNR for chirp signal cannot be improved with a broadband configuration even if the laser power is increased more and more, but is improved with a detuned configuration (right).

## Chapter 3

# 干渉計の制御

### 3.1 Feedback ループ

高い感度を保つため、干渉計は最適な動作点に保持されていなければならない。具体的に言うと、ITM と BS で構成される Michelson 干渉計はダークフリンジに保たれ、2本の腕キャビティはキャリア光の共振状態に保たれ、PRC は反共振に、SRC は特定の非共振状態に保たれていなければならない。図 3.1 に示すようなフィードバック制御は、干渉計をそのような最適状態に保つために必須の技術である。

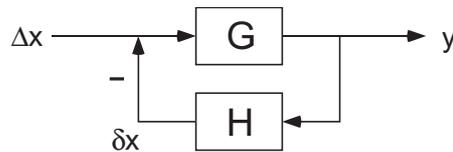


Figure 3.1: Feedback loop.

ここで、 $\Delta x$  は干渉計の鏡の揺らぎ、 $G$  は振り子を含む光学系のゲイン、 $y$  は干渉計の出力である。揺らぎはゲイン  $H$  のサーボを経由して  $\delta x$  としてフィードバックされる。

$$(\Delta x - \delta x)G = y, \quad (3.1)$$

$$\delta x = Hy, \quad (3.2)$$

最終的に鏡をドライブする変位は

$$\Delta x - \delta x = \frac{\Delta x}{1 + GH} \quad (3.3)$$

で与えられる。すなわち鏡への揺動は  $1 + GH$  だけ抑制されている。鏡の動きに対する線形信号が得られれば、フィードバック制御により、干渉計を最適状態に保持できるというわけである。

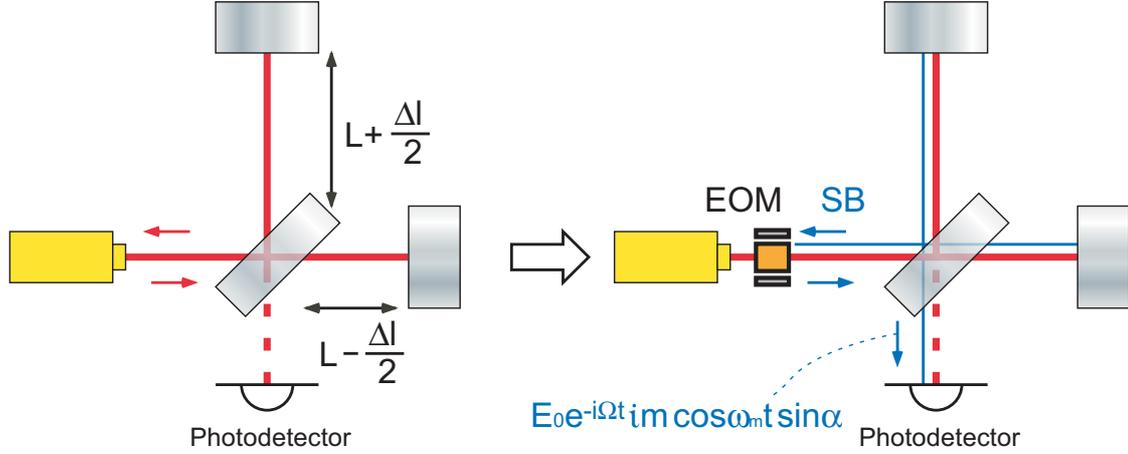


Figure 3.2: RF sidebands leak through the dark port due to the asymmetry of the Michelson interferometer.

### 3.2 変調と復調

ダークフリンジにある Michelson 干渉計の鏡の差動揺らぎはダークポートに現れ、光検波器で自乗される:

$$\begin{aligned} \text{Output Signal} &= \left| \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\Omega t + \psi_-)} - \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\Omega t - \psi_-)} \right|^2 \\ &= E_0^2 \sin^2 \psi_-. \end{aligned} \quad (3.4)$$

式 (3.4) の平方根をとれば、差動揺らぎ  $\psi_-$  の絶対値に比例した信号を入手することができるが、その極性 (位相) の情報はすでに消えてしまっており、フィードバック制御は成立しない。線形信号を得る一つの方法は、ポッケルスセルを用いて RF の位相変調をかけるというものである。Electro-Optical Modulator (EOM) と呼ばれる RF 位相変調器に光を通すと、キャリア光の周りに RF サイドバンドが形成される。

$$\begin{aligned} E_{\text{in}} &= E_0 e^{-i(\Omega t + m \sin \omega_m t)} \\ &\simeq J_0(m) E_0 e^{-i\Omega t} + J_1(m) E_0 e^{-i(\Omega + \omega_m)t} + J_{-1}(m) E_0 e^{-i(\Omega - \omega_m)t} \quad (m \ll 1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここで、 $m$  は変調の強さを表す変調指数、 $\omega_m$  は変調周波数、 $J_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) は以下で表されるベッセル関数である。

$$\begin{aligned} J_n(m) &= \frac{1}{n!} \left(\frac{m}{2}\right)^n + \frac{-1}{(n+1)!} \left(\frac{m}{2}\right)^{n+2} + \dots, \\ J_{-n}(m) &= (-1)^n J_n, \end{aligned} \quad (3.6)$$

ベッセル関数は  $m$  が小さいときは、およそ  $J_0 = 1$ 、 $J_{\pm 1} = \pm m/2$  と近似できる。式 (3.5) は以下のようになる。

$$E_{\text{in}} = E_0 e^{-i\Omega t} (1 + i m \sin \omega_m t). \quad (3.7)$$

上式の虚部が、線形信号を得るのに重要な役割を果たす。その前に、もう一つしておかなければならないことがある。それは、Michelson 干渉計の腕の長さのマクロな差  $\Delta \ell$  をつけておくということである。こ

のマクロな差はキャリアの波長の整数倍に保たれ、ダークフリンジであることに変わりはない (Fig. 3.2)。ダークポートの電場は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\text{Output} &= \left| \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\Omega t + \psi_-)} \left[ 1 + im \sin \omega_m \left( t + \frac{\Delta \ell}{c} \right) \right] - \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\Omega t - \psi_-)} \left[ 1 + im \sin \omega_m \left( t - \frac{\Delta \ell}{c} \right) \right] \right|^2 \\
&\simeq E_0^2 |i [\sin \psi_- + m \sin \alpha \cos \omega_m t] - [m \sin \psi_- \cos \alpha \sin \omega_m t]|^2 \quad (\psi_- \ll 1) \\
&= E_0^2 \left[ \sin^2 \psi_- + \frac{m^2}{2} (\sin^2 \alpha + \sin^2 \psi_- \cos^2 \alpha) \quad \dots \text{DC Components} \right. \\
&\quad \left. + 2m \sin \psi_- \sin \alpha \cos \omega_m t \quad \dots \omega_m \text{ Components} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^2}{2} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \psi_- \cos^2 \alpha) \cos 2\omega_m t \right] \quad \dots 2\omega_m \text{ Components} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

ここで、 $\alpha = \Delta \ell \omega_m / c$  は腕の長さの差 (アシンメトリ) によりサイドバンドが受ける位相差を表す。キャリア光の位相差  $\Delta \ell \Omega / c$  は  $2n\pi$  であるので、省略されている。式 (3.8) から、もし  $\omega_m$  成分のみを抽出することができれば、 $\psi_-$  に対する線形信号、すなわち誤差信号を得ることができると分かる。出力信号に  $\cos(\omega_m t + \zeta')$  を掛けることにより、その他の全ての成分を RF 周波数帯に押しやりつつ、 $\omega_m$  成分を DC ヘダウンコンバートすることができる。RF 周波数帯に押しやった成分はローパスフィルタにより除去される。

$$\begin{aligned}
&\sin \psi_- \cos \omega_m t \times \cos(\omega_m t + \zeta') \\
\Rightarrow &\frac{1}{2} \sin \psi_- (\text{DC}) + \sin \pi \cos 2\omega_m t \quad (\text{for } \zeta' = \frac{\pi}{2}), \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{DC} &\rightarrow \omega_m, \\
\omega_m &\rightarrow \underline{\text{DC}} + 2\omega_m, \\
2\omega_m &\rightarrow \omega_m + 3\omega_m,
\end{aligned}$$

このようにして  $\psi_-$  に比例する誤差信号を取得することができる。このプロセスを復調と呼び、 $\zeta'$  を復調位相と呼ぶ。上記の例では、復調位相が 0 のとき、信号が最大化されている。このように RF サイドバンドとマクロなアシンメトリを用いて信号を取得する方法を Schnupp 変調法と呼ぶ [25]。

### 3.3 Phasor Diagram

変調と復調のプロセスは、phasor diagram と呼ばれる手法を用いて直感的に説明することができる [10]。干渉計内の全ての電場は複素振幅、言い方を変えれば、振幅と位相の 2 つの情報を持っている。Phasor diagram では、キャリア光  $E_0 e^{-i\Omega t}$  との相対位相に焦点を当てる。キャリア光を実軸に固定する。上下の RF サイドバンド  $E_0 e^{-i(\Omega \pm \omega_m)t}$  を合わせたものは、虚軸上で  $im \sin \omega_m t$  のように振動する (Fig. 3.3)。Michelson 干渉計のダークポートでは、2 つの腕から戻ってきたキャリア光は互いに打ち消しあい、差動信号成分のみが残る。RF サイドバンドの一部はダークポートに漏れ、信号成分と同じく虚軸にあるので、フォトデテクタには RF サイドバンドと信号サイドバンドのビートが現れる。信号の位相情報は消えずに残っている。

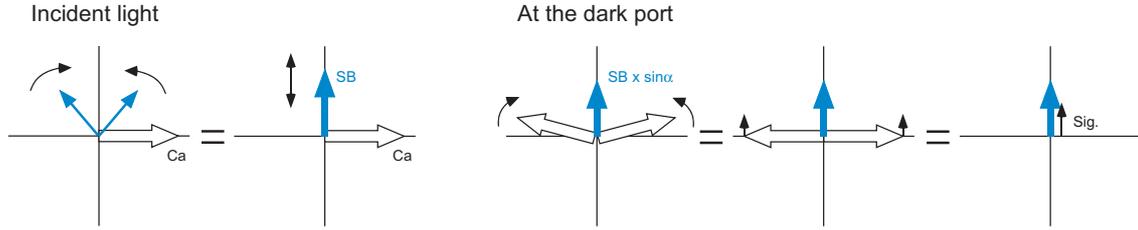


Figure 3.3: On the phasor diagram, it is visually expressed that the RF phase-modulated sidebands have the same quadrature phase as the differential signal of the carrier.

同じ軸上にある電場は、自乗和されたときクロスタームを生み出す:

$$|A + iB|^2 \rightarrow A^2 + B^2,$$

$$|A + iB + iC|^2 \rightarrow A^2 + B^2 + C^2 + \underline{2BC}.$$

干渉計において信号とクロスタームを生み出す役割を担う光のことを、ローカルオシレーターと呼ぶ。

Schnupp 変調法を用いずに鏡の差動モードの誤差信号を得るもう一つの方法は、ダークフリンジに少しだけオフセットを加えて、一部のキャリア光を信号取得ポートに漏れさせるというものである。この場合、漏れ出すキャリア光が、RF サイドバンドの代わりにローカルオシレーターの役割を担う。RF サイドバンドを用いた場合と比べると、信号量は小さくなる (Fig. 3.4)。例えば、いわゆる mid-fringe の場合、すなわちシンメトリックポートとアンチシンメトリックポートに同程度の光が行くように制御した場合、各ポートで取得できる信号はダークフリンジの場合の  $1/\sqrt{2}$  になる。ただし、2つのポートの出力を足し合わせれば、ダークフリンジの場合と同じだけの信号量を得ることができる。

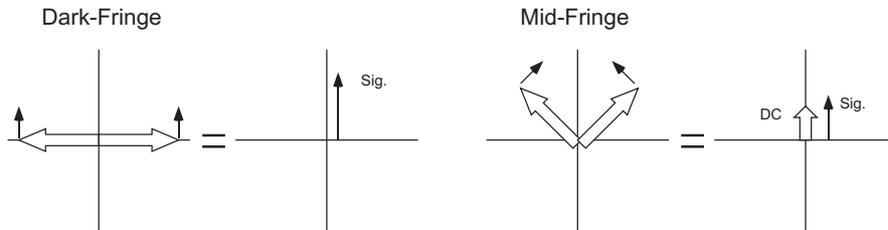


Figure 3.4: The differential signal  $\psi_-$  can be detected if the Michelson interferometer is not locked at the dark fringe.

オフセットを最小限にとどめて、その光をローカルオシレーターとして使えば、RF サイドバンドを用いる場合と同等の信号を得ることができる。この手法は DC readout と呼ばれ、第二世代検出器で採用が予定されている。

### 3.4 Fabry-Perot Michelson 干渉計

Fabry-Perot 共振器の誤差信号は、共振器の反射光から得ることができる。

$$-r + \frac{t^2 e^{2i\psi_L}}{1 - r e^{2i\psi_L}} \simeq \left[ \frac{2T^2 \cos^2 \psi_L}{T^2 + 4 \sin^2 2\psi_L} - 1 \right] + i \left[ \frac{4T \cos \psi_L}{T^2 / (\sin 2\psi_L \cos \psi_L) + 8 \sin \psi_L} \right]. \quad (3.10)$$

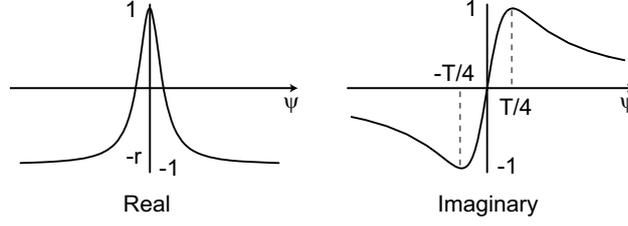


Figure 3.5: Real and imaginary part of the reflected light from a Fabry-Perot resonator.

ここで  $\psi_L$  は共振点を基準とした鏡の動きを位相で表しており、 $r$  および  $t$  ( $T = t^2$ ) はフロント鏡の反射率と透過率である。エンド鏡の反射率は 1 としている。上式の実部は偶関数であり、共振点 ( $\psi_L = 0$ ) 付近ではほぼ 1 である。上式の虚部は、 $\psi_L \ll T/4$  のとき、およそ  $8\psi_L/T$  で、 $T/4 \ll \psi_L$  のとき、およそ  $\frac{T}{2} \cot \psi_L$  である。共振点の周りで線形信号を与えてくれる (Fig. 3.5)。前節で示したように、光検波すると虚部も自乗され、誤差信号としては使えなくなってしまうので、ここでも RF サイドバンドを用いて線形信号を抽出する。

Fabry-Perot Michelson 干渉計 (FPMI) には、制御すべき自由度が 3 つある。2 本の Fabry-Perot 共振器の長さ ( $L_1$  および  $L_2$ ) と中央部の Michelson 干渉計 ( $\ell_-$ ) である。ビームスプリッター (BS) とフロント鏡の間にピックオフ鏡を配置して光を取り出せば、各々の共振器長を取得できるが、同相成分  $L_+ = L_1 + L_2$  をブライトポートから、差動成分  $L_- = L_1 - L_2$  をダークポートから取得する方が効率がよい。第一世代干渉計でも、このような同相差動制御が用いられている。ダークポートの信号は、中央部の Michelson 干渉計信号 ( $\ell_-$ ) も含んでいるが、 $L_-$  と比べると、フィネス分ほどその大きさは小さい。ブライトポートの信号は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \text{SB} &: \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\Omega t + \psi_{\ell_-})} \cdot im \sin \omega_m \left( t + \frac{\Delta \ell}{c} \right) + \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\Omega t - \psi_{\ell_-})} \cdot im \sin \omega_m \left( t - \frac{\Delta \ell}{c} \right) \\ &= m E_0 e^{-i\Omega t} [i \cos \alpha \sin \omega_m t - \sin \psi_{\ell_-} \sin \alpha \cos \omega_m t], \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \text{Ca} &: \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\Omega t + \psi_{\ell_-})} \left[ 1 - i \frac{4}{T} \sin \psi_{L1} \right] + \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\Omega t - \psi_{\ell_-})} \left[ 1 - i \frac{4}{T} \sin \psi_{L2} \right] \\ &\quad (\psi_{L1}, \psi_{L2} \ll 1) \\ &= E_0 e^{-i\Omega t} \left( \cos \psi_{\ell_-} \left[ 1 - i \frac{4}{T} 2 \sin \frac{\psi_{L+}}{2} \cos \frac{\psi_{L-}}{2} \right] - i \sin \psi_{\ell_-} \cdot 2 \cos \frac{\psi_{L+}}{2} \sin \frac{\psi_{L-}}{2} \right) \\ &\simeq E_0 e^{-i\Omega t} \left[ 1 - i \frac{4}{T} \sin \psi_{L+} \right] \quad (\psi_{\ell_-} \simeq 0), \end{aligned} \quad (3.12)$$

光検波後、実部のクロスタームは  $\sin \omega_m t$  に比例し、 $\psi_{L+}$  の情報をもたらす。また、虚部は  $\cos \omega_m t$  に比例し、 $\psi_{\ell_-}$  の情報をもたらす。つまり、出力信号を  $\sin \omega_m t$  ( $\zeta' = \pi/2$ ) で復調すれば  $\psi_{L+}$  の情報を、 $\cos \omega_m t$  ( $\zeta' = 0$ ) で復調すれば  $\psi_{\ell_-}$  の情報を得られるということである。前者を I-phase 信号、後者を Q-phase 信号と呼ぶ。かくして、3 つの自由度をほぼ独立に取得することができるわけである (Table 3.1)。

Phasor diagram では、I-phase と Q-phase の違いがもっと視覚的に分かる。ブライトポートにおいて、キャリア光は実軸上に存在し、 $L_+$  信号が虚部に現れる。RF サイドバンドはそれぞれが  $\pm \omega_m$  の周波数で複素平面上を回転している (図 3.6 の左上のパネル)。上下 (左回りと右回り) の RF サイドバンドの振幅

DOF	Port	Component	Phase
$\ell_-$	BP	$\cos \omega_m t (\zeta' = 0)$	Q-phase
$L_+$	BP	$\sin \omega_m t (\zeta' = \pi/2)$	I-phase
$L_-$	DP	$\cos \omega_m t (\zeta' = 0)$	Q-phase

Table 3.1: Three signals necessary to lock the interferometer can be extracted independently.

は以下のようなになる。

$$\frac{1}{2}E_0e^{-i(\Omega \pm \omega_m)(t + \Delta\ell/c)} + \frac{1}{2}E_0e^{-i(\Omega \pm \omega_m)(t - \Delta\ell/c)} = E_0e^{-i(\Omega \pm \omega_m)t}(\cos \alpha \mp \psi_{\ell-} \sin \alpha). \quad (3.13)$$

すなわち振幅は差動で  $\psi_{\ell-}$  に比例して変化している。上下の RF サイドバンドが共に実軸上にあるとき、サイドバンドの振幅は互いに相殺するが、 $\psi_{\ell-}$  信号はそのとき最大になり、同じく実軸上にあるキャリア光とビートをとってクロスタームを生み出す (図 3.6 の右下のパネル)。逆に、上下の RF サイドバンドが共に虚軸上にあるときは、サイドバンドの振幅が最大となり、キャリアが運んできた  $\psi_{L+}$  とビートをとる。このとき  $\psi_{\ell-}$  信号は互いに相殺している (図 3.6 の左下のパネル)。前者のケースが、RF サイドバンドが  $\cos \omega_m t$  で表される場合 (Q-phase) であり、後者のケースが、 $\sin \omega_m t$  で表される場合 (I-phase) である。

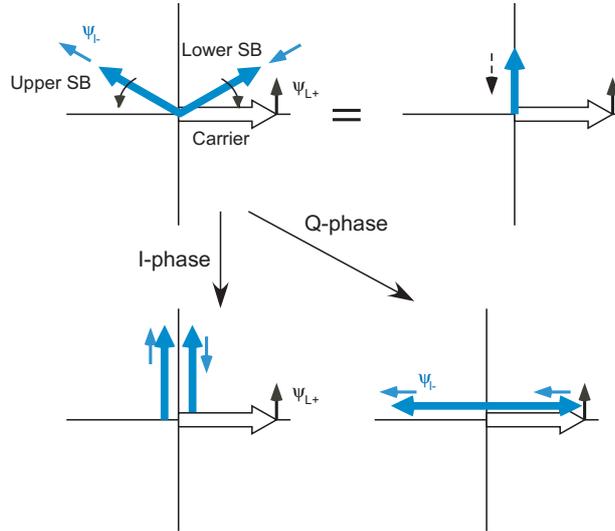


Figure 3.6: The difference between I-phase and Q-phase is the timing at which the RF sidebands appear on the imaginary or the real axes. The carrier light is fixed on the real axis with the phase signal  $\psi_{L+}$  being directed to the imaginary axis. The upper and the lower RF sidebands rotate with the modulation frequency and their amplitudes are perturbed differentially by  $\psi_{\ell-}$ .

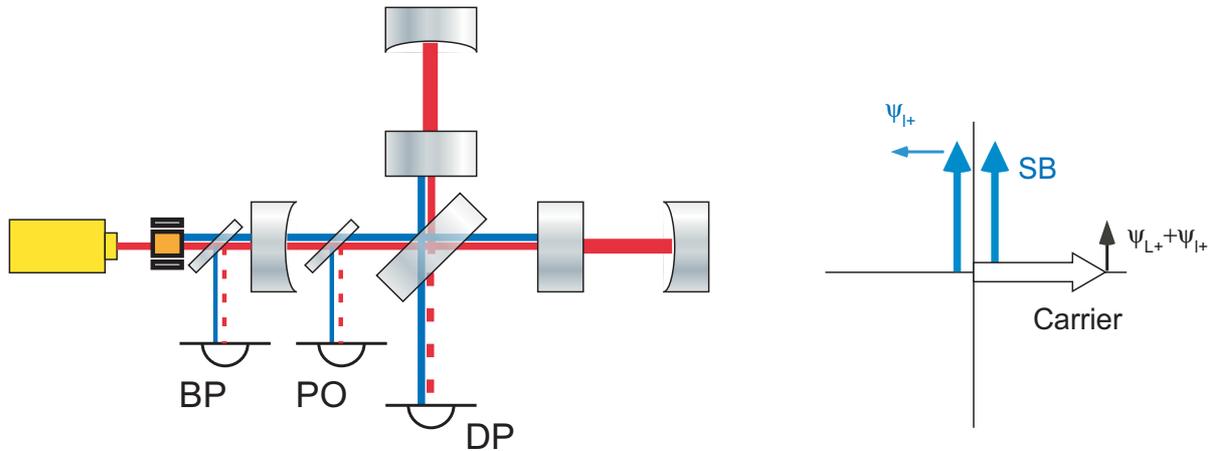


Figure 3.7: At the bright port or the pickoff port, both the carrier and the sidebands bring  $\psi_{l+}$  signal but with the different sign. The power recycling gain for the sidebands is lower than that for the carrier due to the asymmetry, so  $\psi_{l+}$  signal brought by the sidebands is smaller than that of the carrier.

### 3.5 Power Recycling Cavity

パワーリサイクリングを組み込んだ Fabry-Perot Michelson 干渉計 (PR-FPMI) は 4 つの自由度を持つ。FPMI と同じ 3 つの自由度  $l_-$ 、 $L_+$ 、 $L_-$  に加えて、パワーリサイクリング共振器長 (PRC 長)  $l_+$  である。FPMI より複雑なのは、PRC 内でキャリアとサイドバンドを共に共振させなければ、 $l_-$  や  $L_-$  の制御ができないということである。キャリアもサイドバンドも  $l_+$  信号を運んでくるため、ビートをとると信号の一部が相殺する (Fig. 3.7)。しかし、キャリアとサイドバンドの間で PRC のフィネスが異なるため、 $l_+$  信号は生き残ることができる。PRC のフィネスの違いは、サイドバンドにとっては Schnupp アシンメトリが、キャリアにとっては腕での光学損失があるためもたらされる。PRC は一種の Fabry-Perot 共振器であり、 $l_+$  信号は  $L_+$  信号と共に、ブライトポートの I-phase に現れる。この 2 つの信号を分離するには、PRC 内にピックオフ鏡を配置して、ブライトポートとピックオフ (PO) ポートの双方からの出力を用いる。それぞれの出力は以下のようにして求まる。ここで、 $r_1 = r_F \cos \alpha$  は Michelson 干渉計の反射率、

$r_2 \simeq r_F$  は共振しているときの腕の反射率である。

(Bright Port)

$$\begin{aligned} \text{Ca} &\propto -r_p(1 + i\psi_{L+}) + \frac{t^2 r_2(1 + i\psi_{L+})}{1 - r_p r_2(1 + i\psi_{\ell+})(1 + \psi_{L+})}, \\ \text{SB} &\propto -r_p(1 + i\psi_{\ell+}) + \frac{t^2 r_1}{1 - r_p r_1(1 + i\psi_{\ell+})}, \\ \text{Im}[\text{Ca} \times \text{SB}] &\propto \psi_{\ell+} \left( \frac{-r_p}{r_1 - r_p} + \frac{-r_p}{r_2 - r_p} + \frac{r_p r_1}{1 - r_p r_1} + \frac{r_p r_2}{1 - r_p r_2} \right) + \psi_{L+} \left( \frac{r_2}{r_2 - r_p} + \frac{r_p r_2}{1 - r_p r_2} \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

(Pickoff Port)

$$\begin{aligned} \text{Ca} &\propto \frac{r_{\text{PO}} t r_2(1 + i\psi_{L+})}{1 - r_p r_2(1 + i\psi_{\ell+})(1 + \psi_{L+})}, \\ \text{SB} &\propto \frac{r_{\text{PO}} t r_1}{1 - r_p r_1(1 + i\psi_{\ell+})}, \\ \text{Im}[\text{Ca} \times \text{SB}] &\propto \psi_{\ell+} \left( \frac{r_p r_1}{1 - r_p r_1} + \frac{r_p r_2}{1 - r_p r_2} \right) + \psi_{L+} \left( 1 + \frac{r_p r_2}{1 - r_p r_2} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

式 (3.14) と式 (3.15) は、 $\psi_{\ell+}$  と  $\psi_{L+}$  の応答がブライトポートと PO ポートで異なることを示している。典型的な値として、 $r_p = 0.8$ 、 $r_F = 0.99$ 、 $r_E = 0.9999$  を代入すると、ブライトポートでは  $\psi_{\ell+} : \psi_{L+} \simeq -2 : 9$  となり、PO ポートでは  $\psi_{\ell+} : \psi_{L+} \simeq 7 : 5$  となっている。

干渉計をどうやって動作点に引き込むか (ロックアキュジション) というのは、PR-FPMI の課題の 1 つである。腕共振器を先にロックすると、PR 鏡の動きに応じて腕への入射パワーが変動し、制御を乱してしまう。PRC を先にロックすると、腕が共振に入ったときに反射率の極性が反転し、PRC の制御がはずれてしまう。この問題を回避するため、LIGO ではデジタル制御を使って、PRC をロックしてから、腕が共振に入る瞬間に制御の極性を反転させるという手段を講じている [26]。

TAMA では別の手法が用いられている。キャリアと RF サイドバンドは共に PRC で共振しているが、変調の第二高調波サイドバンドは PRC で反共振であり、これとサイドバンドの基本波とのビートをを用いて PRC を制御することで、腕の影響を回避するのである [27]。ビート信号の周波数は  $3\omega_m$  であり、この手法は三倍波復調法 (Third-Harmonics Demodulation; THD) と呼ばれている。式 (3.6) から、キャリアとサイドバンドの基本波 (1 次) および二倍高調波 (2 次) は以下のように書ける。

$$E_{\text{in}} = E_0 e^{-i\Omega t} \left[ \left( 1 - \frac{m^2}{4} \right) + im \sin \omega_m t + \frac{m^2}{8} \cos 2\omega_m t \right]. \quad (3.16)$$

1 次がキャリアに対して位相変調であるのに対して、2 次はキャリアに対する振幅変調である (Fig. 3.8)。複素平面において、 $\psi_{L+}$  は 1 次への位相変調であり、2 次と同様に実軸上に現れ、ビート信号を生成する。異なる位相変調を 2 種類用意しても、それらのビートから PRC の制御信号を取得できない、ということに注意したい。

THD を使用するならば、PO 鏡は必要でなくなる。ロスが減り、PR ゲインが少し上昇する。キャリアと 1 次のサイドバンドのビート、すなわち  $\omega_m$  で復調された I-phase 信号は  $L_+$  の制御に用いられる。中央部の Michelson 干渉計も THD 信号の Q-phase を用いて制御が可能である。干渉計が動作点に引き込まれた後で、基本波復調 (FDM) の Q-phase から得られる、より強い信号に切り替えてもよい。

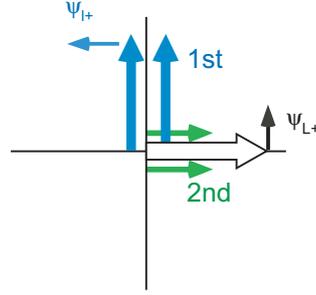


Figure 3.8: The set of second harmonics is an amplitude-modulated sideband, and the beat signal of the first and the second sidebands is mainly composed of  $\psi_{\ell_+}$ , while that of the carrier and the first sidebands is mainly composed of  $\psi_{L_+}$  mainly.

DOF	Port	Demodulation	Phase
$\ell_+$	BP	THD	I-phase
$\ell_-$	BP	THD	Q-phase
$L_+$	BP	FDM	I-phase
$L_-$	DP	FDM	Q-phase

Table 3.2: Four signals necessary to lock the interferometer can be extracted independently.

## 3.6 Signal Recycling Cavity

### 3.6.1 2周波変調

シグナルリサイクリングキャビティ(SRC) も一種の Fabry-Perot 共振器であり、腕や PRC と同様に I-phase 信号で制御される。しかし、いま我々は 3 種類の I-phase 信号を必要としており、特に  $\psi_{\ell_+}$  と  $\psi_{\ell_s}$  (SRC 長) はキャリアを使わずに制御するのが望ましい。いくつかのテーブルトップ実験から、RSE の制御には 2 つ目の位相変調の導入が必要であるという結論に至った [28]。THD もある意味で 2 周波変調方式なのであるが、それに加えて周波数を選べるという自由度が与えられる。さらに PRC 内の PO 鏡も導入され、I-phase 信号を得るポートが増やされる。

SRC 長により干渉計が detune なのか broadband なのかが決まる。まず、図 3.9 に示すように、長さ  $L$  の共振器で共振する光と周波数が  $\Delta\Omega$  だけ異なる光は、以下の条件を満たしたときやはり共振する。

$$\frac{2L\Delta\Omega}{c} = 2n\pi \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.17)$$

ここで  $n = 1$  として、共振条件を周波数幅で表すと

$$\Delta f_{\text{FSR}} = \frac{c}{2L}, \quad (3.18)$$

となる。これをフリースペクトルレンジ (FSR) と呼ぶ。例えば、PRC の FSR を変調周波数のちょうど 2 倍にすると、キャリアは PRC で反共振になり、サイドバンドは上下ともに共振となる。

$$2f_m = \frac{c}{2\ell_p}. \quad (3.19)$$

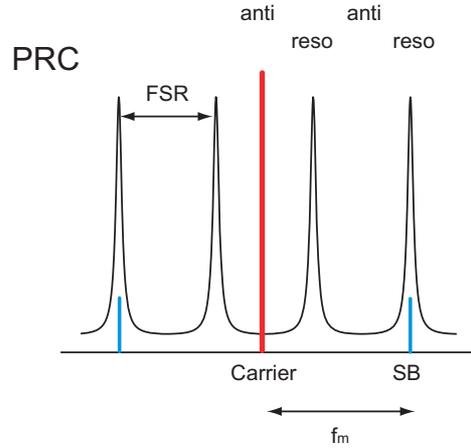


Figure 3.9: The FSR is the frequency separation of resonant peaks, which depends on the length of the cavity. A modulation frequency is set to an odd multiple of half the FSR of the PRC so that both the carrier, which has a 180-degree phase shift due to its resonance in the arm cavities, and the sidebands will be resonant in the PRC.

共振条件を FSR で表すと以下ようになる。

$$2f_m = (2n + 1) \frac{c}{2\ell_p} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.20)$$

ブロードバンド干渉計の SRC については、BSR のときは PRC と同様な条件が成立し、BRSE のときは FSR の偶数倍が変調周波数の 2 倍であることが条件となる。

BSR

$$2f_m = (2n + 1) \frac{c}{2\ell_s} \quad (3.21)$$

BRSE

$$2f_m = 2n \frac{c}{2\ell_s}. \quad (3.22)$$

Detuned 干渉計の場合は、変調周波数の 2 倍が FSR の整数倍より線幅以上に離れていることが条件となる。すなわち、おおよそ  $T_s/4 \ll \Delta\psi_s$  (3.4 節) ということである。Detune の度合いがこれより小さい場合は、上下のサイドバンドによってもたらされるオフセットが相殺し、干渉計は、サイドバンドがどちらにとっても同じくらい非共振で、キャリアが共振もしくは反共振するような動作点に引き込まれる (Fig. 3.10)。Detune の度合いがこれより大きい場合は、上下どちらかのサイドバンドが共振し、もう一方は共振から大きく外れた非共振に、キャリアは detune 状態にロックすることになる。

キャリアが運んできてサイドバンドを参照光としてビートをとったものと、サイドバンドが運んできてキャリアを参照光としてビートをとったものとは、誤差信号の極性が逆である (図 3.11)。共振器の FSR が変調周波数の整数倍から十分ずれており、サイドバンドが共振するようにサーボの極性を選んでおけば、キャリアが共振する動作点でロックすることはほぼない。

まず PRM を除いて考えることとしよう。SRC で  $f_1$  もしくは  $f_2$  のどちらかが共振し、 $\psi_s$  を運んできて、もう一方はローカルオシレーターの役割を担うことになる。PRM が入ると、もう少し複雑になる。

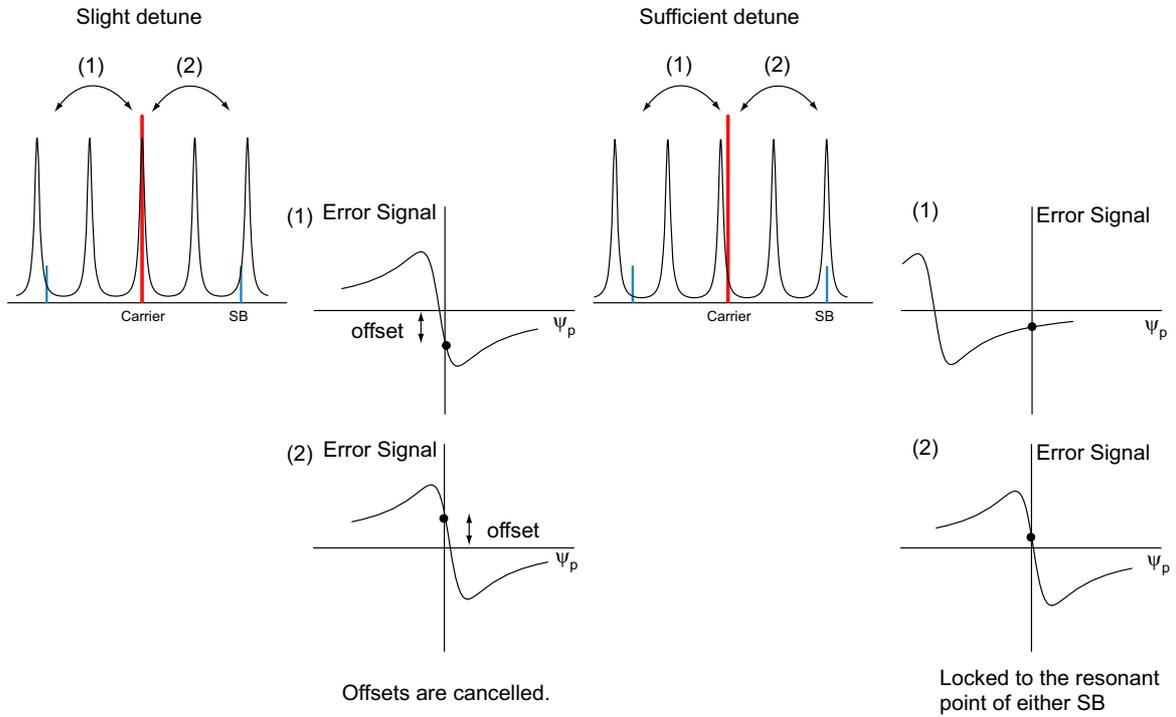


Figure 3.10: The carrier is locked to the resonance (BRSE) if the detuning is slight (left). The carrier is locked to DRSE if the SRC length is sufficiently detuned (right).

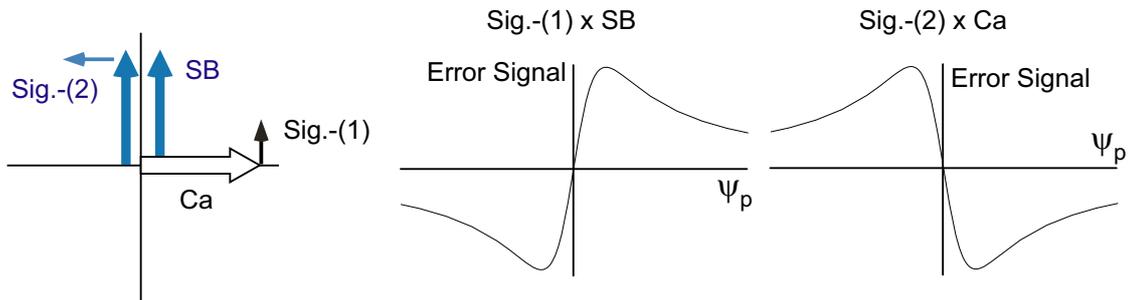


Figure 3.11: The error signal has a different polarity due to whether the carrier or the sideband is resonant in the cavity.

### 3.6.2 Asymmetry の最適化

式 (3.20)、(3.21)、(3.22) は、Michelson 干渉計の反射率を含んでいない。Michelson 干渉計の反射率は Schupp アシンメトリの関数である。サイドバンド  $E_0 e^{-i(\Omega \pm \omega_m)t}$  が Michelson 干渉計に入射すると、ブライトポートに戻る成分と、ダークポートへ透過する成分は以下のように与えられる。ここで、簡単のためフロント鏡の反射率は 1 としている。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\Omega \pm \omega_m)(t + \Delta \ell / c)} + \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\Omega \pm \omega_m)(t - \Delta \ell / c)} &= E_0 e^{-i(\Omega \pm \omega_m)t} \cdot \cos \alpha, \\ \therefore r_{\text{MI}} &= \cos \alpha \quad (\text{BP} \rightarrow \text{BP} \text{ or } \text{DP} \rightarrow \text{DP}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\Omega \pm \omega_m)(t + \Delta \ell / c)} - \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\Omega \pm \omega_m)(t - \Delta \ell / c)} &= E_0 e^{-i(\Omega \pm \omega_m)t} \cdot i \sin \alpha, \\ \therefore t_{\text{MI}} &= i \sin \alpha \quad (\text{BP} \rightarrow \text{DP} \text{ or } \text{DP} \rightarrow \text{BP}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

この  $r_{\text{MI}}$  を含めて考えると、アシンメトリが大きいとき ( $\alpha > \pi/2$ ) には反射率の極性が反転するので、PRC および SRC の共振条件が変わってくる。ブロードバンド干渉計の場合の共振条件は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{PR} \\ 2f_m &= 2n \frac{c}{2\ell_p} \quad \left( \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \text{BSR} \\ 2f_m &= 2n \frac{c}{2\ell_s} \quad \left( \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \text{BRSE} \\ 2f_m &= (2n + 1) \frac{c}{2\ell_s} \quad \left( \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

さらに、PRC と SRC のフィネスもアシンメトリに大きく依存する。アシンメトリの最適化については、参考文献 [29] で紹介されているように、以下のように与えられる。まず、Signal-recycled Michelson 干渉計 (SRMI) の反射率および透過率は

$$\begin{aligned} r_{\text{SRMI}} &= \cos \alpha + r_s (i \sin \alpha)^2 + r_s^2 (i \sin \alpha)^2 \cos \alpha + \dots \\ &= \cos \alpha - \frac{r_s \sin^2 \alpha}{1 - r_s \cos \alpha} \quad (\text{BP} \rightarrow \text{BP} \text{ or } \text{DP} \rightarrow \text{DP}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} t_{\text{SRMI}} &= t_s [i \sin \alpha + i \sin \alpha \cdot r_s \cos \alpha + \dots] \\ &= t_s \left[ \frac{i \sin \alpha}{1 - r_s \cos \alpha} \right] \quad (\text{BP} \rightarrow \text{DP} \text{ or } \text{DP} \rightarrow \text{BP}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

となり、PRM がないとすると、 $\psi_s$  信号はダークポートからブライトポートへ運ばれてくるので、 $|t_{\text{SRMI}}|$  に比例することになり、

$$\cos \alpha = r_s \quad (3.30)$$

を満たすときに最大となる。

PRM を含めて考えると、PR-SRMI の反射率は

$$\begin{aligned} &-r_p + \frac{t_p^2 r_{\text{SRMI}} (1 + t_{\text{SRMI}}/t_s \cdot \psi_s)}{1 - r_p r_{\text{SRMI}} (1 + t_{\text{SRMI}}/t_s \cdot \psi_s)} \\ \simeq &-r_p + \frac{t_p^2 [(\cos \alpha - r_s)(1 + r_p r_s - (r_p + r_s) \cos \alpha) + i r_s \sin^2 \alpha \cdot \psi_s]}{[1 + r_p r_s - (r_p + r_s) \cos \alpha]^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

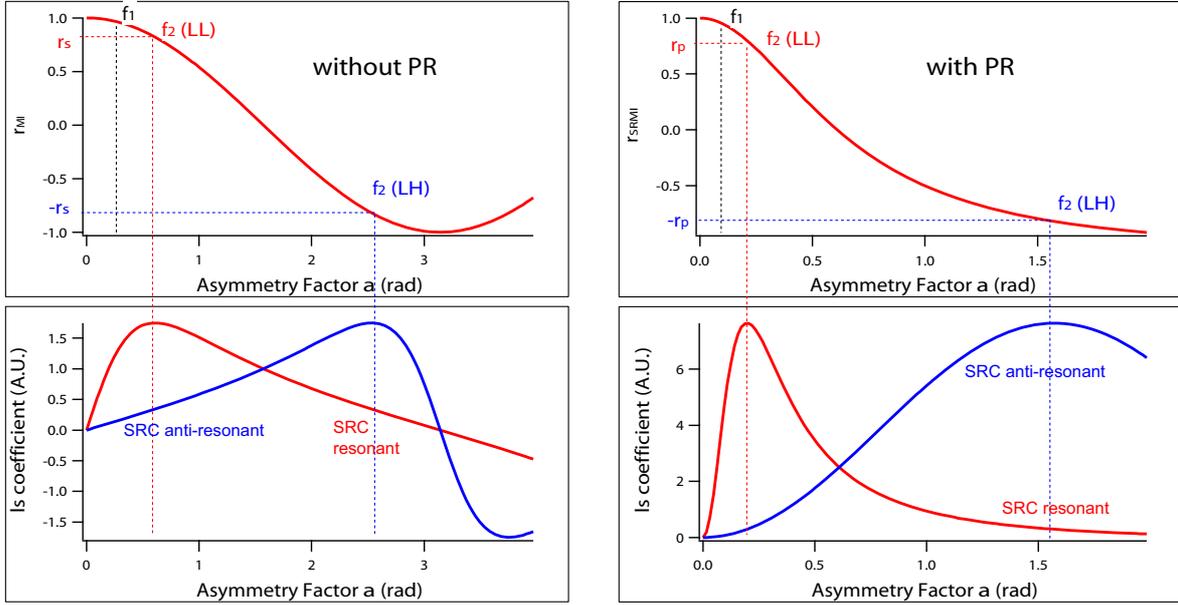


Figure 3.12: The coefficient of  $\psi_s$  signal is maximized when the reflectivity of MI in the case without PR matches to  $\pm r_s$  or the reflectivity of SRMI in the case with PR matches to  $\pm r_p$ .

で与えられる。式 (3.31) の最後の部分が  $\psi_s$  の係数であり、

$$\cos \alpha = \frac{r_p + r_s}{1 + r_p r_s} \quad (3.32)$$

のとき最大化される。

### 3.6.3 低周波法と高周波法

FPMIのアシメトリーは変調周波数に依存し ( $\alpha = \Delta \ell \omega_m / c$ )、たいていは  $0.2 \sim 0.5$  程度にしている。EOMによる変調周波数は 10 MHz から 200 MHz の幅で得ることができ、アシメトリー長  $\Delta \ell$  は大型干渉計では 1 m 程度以下にして両腕間のアンバランスを増やさないようにしている。片方の変調サイドバンド ( $f_1$ ) はダークポートには漏れないようにし、もう片方のサイドバンド ( $f_2$ ) をダークポートへ漏れさせて  $\psi_s$  信号を運ばせるために、 $f_1$  を低周波に設定し (Advanced LIGO の場合は 9 MHz)、 $f_2$  は式 (3.30) もしくは (3.32) を満たすようにして、SRC の制御信号を最大化すればよい。PRM がない場合、式 (3.30) を満たすには 2 通りの解が存在する。1 つ目は  $r_s > 0$  の場合、2 つ目は  $r_s < 0$  の場合の解である。前者は  $f_2$  サイドバンドが SRC で共振している状態で、後者は反共振の場合である。PRM がない場合も、式 (3.32) は 2 通りの解を持つ。1 つ目はアシメトリーが小さな場合に成り立ち、 $f_2$  サイドバンドが PRC と SRC で共振する。2 つ目はアシメトリーが大きめの場合に成り立ち、 $f_2$  サイドバンドが PRC もしくは SRC のどちらかで共振、どちらかで反共振する。前者を低周波法、後者を高周波法と呼ぶことにしよう。表 3.3 にそれぞれの場合の例を示す。どちらの場合もリサイクリング鏡の反射率は  $r_p = r_s = 0.82$  に設定してある。最適なアシメトリー長は、リサイクリング鏡の反射率によって変わる。モードクリーナー (MC) は PRM より手前に配置されている共振器で、レーザーの整形をし、ジャンク光を除去するためのものである [30]。EOM は MC の前に配置するので、キャリアだけでなくサイドバンドも MC を透過しなければならない。

	$f_1$	$f_2$	$\Delta\ell$	$\alpha(f_1)$	$\alpha(f_2)$	FSR-PR	FSR-SR	FSR-MC
L-H	9MHz	180MHz	42cm	$\pi/40$	$\pi/2$	18MHz	18MHz	$18/n$ MHz
L-L	15MHz	35MHz	27cm	0.084rad	0.197rad	10MHz	35MHz	$5/n$ MHz

Table 3.3: Representative four models to control PR-RSE.

すなわち、 $f_1$  と  $f_2$  は MC の FSR の倍数でなければならないということである。表 3.3 では、Broadband RSE (BRSE) のパラメタが記載されている。Detuned RSE (DRSE) の場合は SRC の FSR を少し変えることで、キャリアが共振から外れ、detune される。

高周波法 (9-180 MHz)

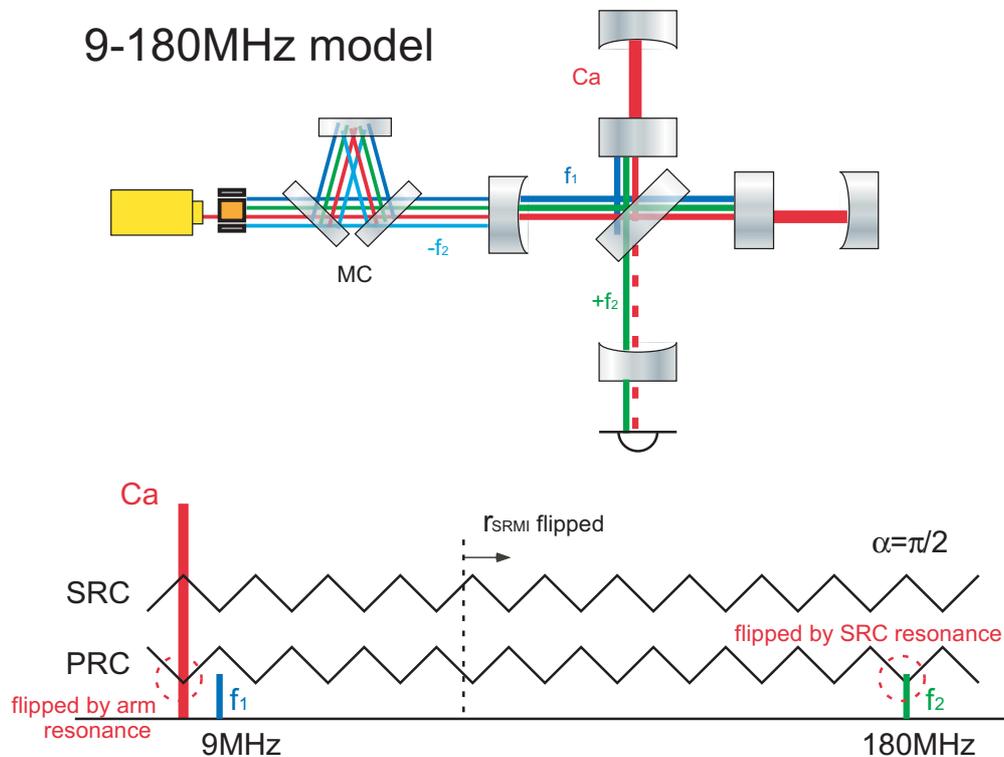


Figure 3.13: Resonant condition of High-freq method, 9-180 MHz model.

高周波法は、Advanced LIGO のために J. Mason らによって開発されたものである [29][31]。高周波法では、 $r_p \simeq r_s$  として、 $f_2$  にとってのアシメトリはおよそ  $\pi/2$  となる。PRM を通って入射する  $f_2$  サイドバンドはそのままダークポートへ抜け、SRM で反射して、 $\psi_s$  信号と共にまたそのまま PRM まで戻ってくる。この  $f_2$  サイドバンドは、PRC で共振しているのではなく、PRC と SRC で構成される複合共振器で共振しているのである。2 つの変調周波数  $f_1$  と  $f_2$  は大きく離れており、その理由は以下の 2 点である。第一に高調波との干渉を避けるため、第二に  $f_1$  にとってのアシメトリをなるべく小さくして、 $f_1$  に

よって制御されるその他の自由度の信号に SRC の影響が及ばないようにするためである (see Fig. 3.13)。

この方法の欠点は、 $f_2$  の周波数が高くなるという点である。RF readout を用いる場合、ダークポートまで到達する  $f_2$  サイドバンドは重力波検出に用いるローカルオシレーターであり、その周波数が高いことは大きな問題である。 $\Delta l$  を大きくすれば  $f_2$  を下げることは可能であるが、Advanced LIGO の場合は Initial LIGO と同じ真空槽を用いるという束縛条件があるため、大きくする余地はほぼない。また、もしアシンメトリ長を長くできたとしても、今度は  $f_1$  がダークポートへ漏れ始めるので、問題は解決しない。

実際は、Advanced LIGO では、DC readout [32] を採用し、 $f_2$  を重力波検出に使うことはないので、この問題は回避できる。しかし、 $f_2$  の周波数が高いことは他自由度の制御や鏡の姿勢制御などで問題になり、こちらは解決していない。

### 低周波法 (15-35 MHz)

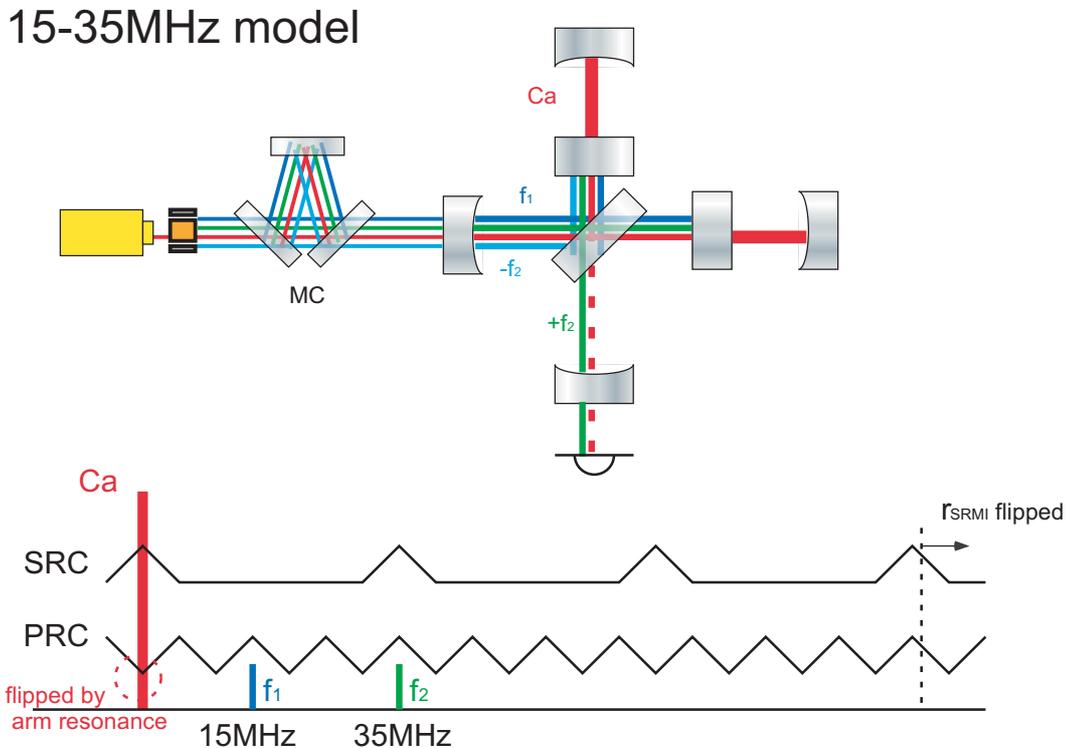


Figure 3.14: Resonant condition of Low-freq method, 15-35 MHz model.

低周波法は、参考文献 [29] でも紹介されているが、そのときは  $f_1$  と  $f_2$  の周波数が近くなることが懸念され、Advanced LIGO の制御法の候補には残らなかった。たしかに、周波数が近いと、 $f_1$  の高調波と  $f_2$  が干渉してしまう可能性が残る。しかし、これらは直接倍数の関係にある必要はない。そこに着目したのが 15-35 MHz モデルである。MC の FSR を 5 MHz もしくはその約数にしておけば、15 MHz も 35 MHz も MC を透過する。そして両方とも PRC で共振し (図 3.14)、35 MHz のみ SRC でも共振する。

この方法のメリットは、アシンメトリ長を長くすることなく、 $f_2$  サイドバンドの周波数を低く保っている点である。真空槽の束縛条件がある Advanced LIGO には最適な制御法ではないかと考える。

### 3.7 変調方式

これまで位相変調のみを対象としてきたが、強度変調やシングルサイドバンドも、変調方式の候補として挙げられる。ただし、変調に関してはいくつか注意事項がある：

- 位相変調サイドバンドによって運ばれる位相信号は、別の位相変調サイドバンドとのビートをとることはできない (図 3.15 の左パネル)
- 重力波を運ぶ  $L_-$  信号はキャリアによって運ばれるので、強度変調サイドバンドとビートをとることはできない (図 3.15 の右パネル).
- Detune により  $f_2$  の上下サイドバンドの振幅がアンバランスになり、各々がブライトポートとダークポートでシングルサイドバンドのように振る舞う

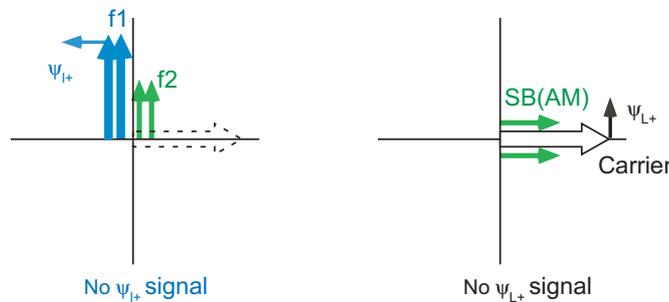


Figure 3.15: Phase-modulated sidebands do not produce a beat with a different set of phase-modulated sidebands (left) and amplitude-modulated sidebands do not beat with the carrier (right).

Detuned RSE の制御法としては、 $f_1$  も  $f_2$  も位相変調で構わない。アシンメトリの最適化をした状況では、上下どちらかのサイドバンドは完全にダークポートへ抜け、もう一方はブライトポートへ戻される。シングルサイドバンドは、キャリアが運ぶ  $L_-$  信号とビートをとることができるので、DC readout を用いないとしても、RF readout で重力波信号をとることは可能である。

Broadband RSE の制御法としては、 $f_1$  が  $f_2$  のどちらかは振幅変調でなければならない。もし  $f_2$  を振幅変調にすると、重力波信号を RF readout で取得することはできなくなる。DC readout を用いるか、わずかに漏れ出る  $f_1$  をローカルオシレーターに用いるか、ということになる。振幅変調ではなくシングルサイドバンドを用いると、この問題は解決するが、せっかくバランスのとれている BRSE にわざわざアンバランスを導入することになる。もし  $f_1$  を振幅変調にすると、ブライトポートで  $L_+$  信号がとれなくなるので、PO ポートで取得することになる。

### 3.8 Double Demodulation

Detune やシングルサイドバンドのようなアンバランス状態がもたらす大きな問題の 1 つが、制御信号に乗る電氣的オフセットである。特に  $l_-$  に乗るオフセットはサイドバンドアンバランスがもたらす原理的な問題として知られている。Q-phase の信号は  $\cos(\omega_1 \pm \omega_2)t$  という 2 つのサイドバンドが運ぶものである。これらは  $\cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t$  成分と  $\sin \omega_1 t \cdot \sin \omega_2 t$  成分に分解することができる。もし  $f_1$  がバランスのとれ

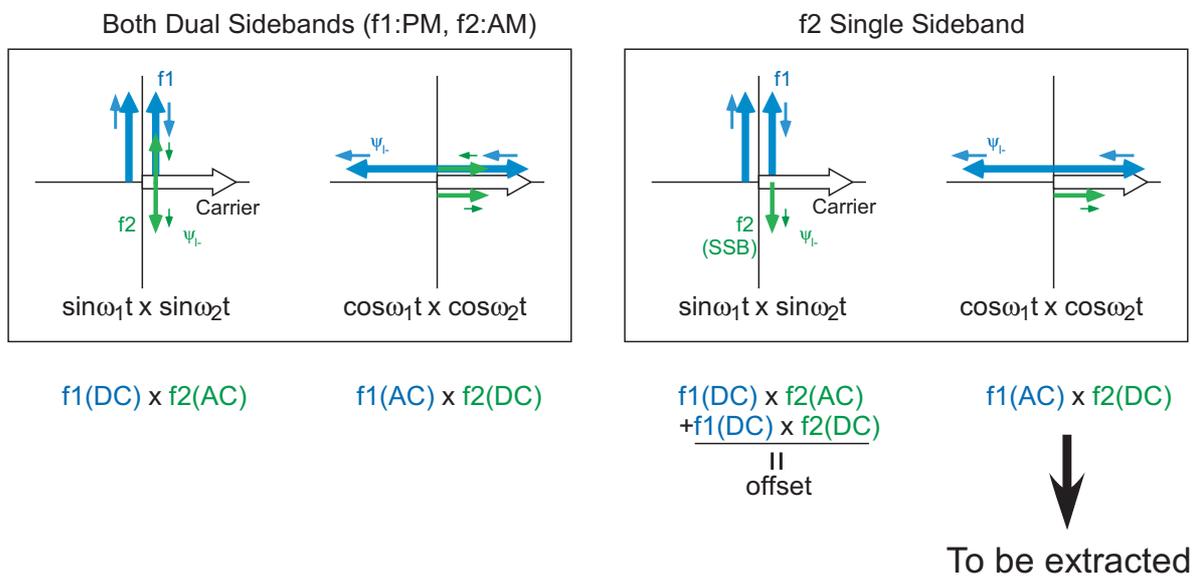


Figure 3.16: When the sidebands at  $f_2$  make an amplitude-modulation (AM),  $\ell_-$  can be detected without an offset by the beat of the sidebands at  $f_1$  and  $f_2$ , but when the sideband at  $f_2$  is a single sideband, not only  $\ell_-$  but also a DC offset is included in the beat signal. This offset can be removed by the double demodulation technique, which will extract only a  $\cos\omega_1 t \cos\omega_2 t$  component from the beat signal. Here the sidebands at  $f_1$  are assumed to make a phase modulation (PM).

た位相変調サイドバンドで、 $f_2$  が detune の影響でシングルサイドバンドであったとすると、Q-phase の出力は以下ようになる。ここで干渉計はシンプルな Michelson 干渉計とする (式 (3.13) を参照のこと):

$$\pm f_1 : \pm m_1 E_0 e^{-i(\Omega \pm \omega_1)t} \cdot (\cos \alpha_1 \mp \psi_{\ell-} \sin \alpha_1), \quad (3.33)$$

$$+ f_2 : m_2 E_0 e^{-i(\Omega + \omega_2)t} \cdot (\cos \alpha_2 - \psi_{\ell-} \sin \alpha_2), \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \therefore & \operatorname{Re}[+f_1 \times +f_2^*] + \operatorname{Re}[-f_1 \times +f_2^*] \\ = & 2m_1 m_2 E_0^2 [\sin \omega_1 t \sin \omega_2 t (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \psi_{\ell-} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2) - \psi_{\ell-} \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t \sin \alpha_1 \cos \alpha_2]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

この出力が  $\cos(\omega_1 \pm \omega_2)t$  のどちらかで復調されたとすると、復調信号は

$$\mp (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \psi_{\ell-} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2) - \psi_{\ell-} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \quad (3.36)$$

に比例したものとなる。下線を引いた部分が、Michelson 干渉計をダークフリンジからずらす DC オフセットを生み出す。このオフセットを除去する 1 つの方法は、 $\cos(\omega_1 \pm \omega_2)t$  で復調した信号を組み合わせ、式 (3.36) の最後の項が相殺するようにする、というものである。また、差周波や和周波で復調するのではなく、 $\cos \omega_1 t$  で復調した後に  $\cos \omega_2 t$  で復調することで、 $\sin \omega_1 t \sin \omega_2 t$  成分を除去する、という方法もある (図 3.16)。これらは基本的に同じことであるが、特に後者を Double Demodulation (DDM) と呼んでいる。

Broadband RSE の場合、 $f_2$  サイドバンドは振幅変調もしくはシングルサイドバンドでなければならない。振幅変調の場合はオフセットは生じないが、シングルサイドバンドの場合は、detune した場合と同様にオフセットが問題となる。

式 (3.36) から、 $\cos \alpha_2$  をゼロにして第二項だけをとれば、オフセット問題から解放されると思うかもしれない。この条件は RSE の場合に、 $\ell_s$  を最大化するのと同じ条件である。しかし、detuned RSE の場合は、 $\pm f_2$  のどちらかしか SRC で共振しないため、共振しない方のサイドバンドがオフセットを生み出してしまふ。もし  $f_2$  がシングルサイドバンドであれば、この条件を満たすようにすることでオフセット問題を回避することが可能である。

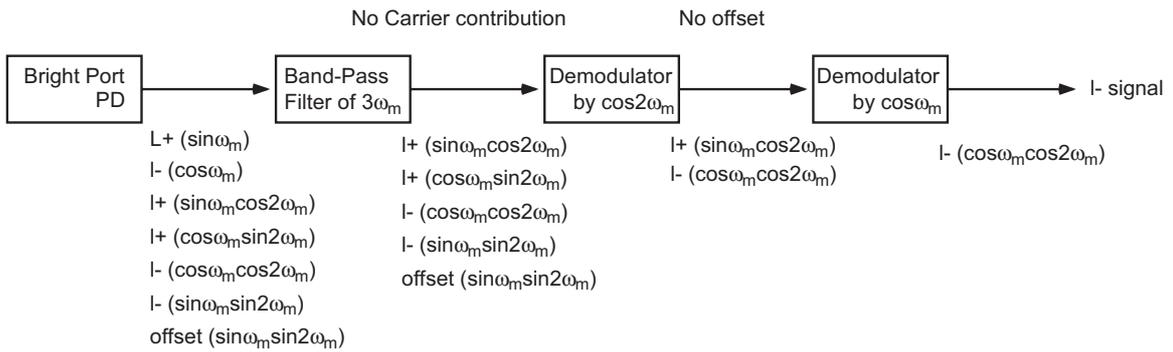


Figure 3.17: Procedure of double demodulation.

もっと簡単に言えば、DDM は 2 つの復調位相という自由度を与えてくれるので、片方を信号の最大化に、もう片方をオフセットの除去に使っているということである。Detuned RSE では、実際には  $\ell_-$  以外の自由度にもオフセットが乗る。DDM を用いて、各自由度からオフセットを除去していくことになる。

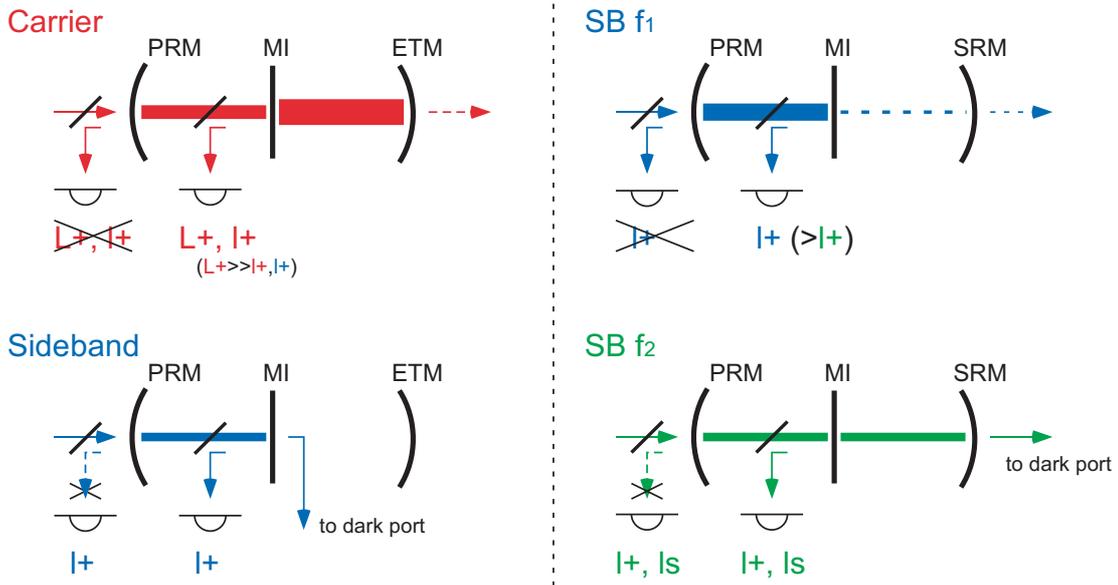


Figure 3.18: Similarity between the isolation of  $l_+$  from  $L_+$  in PRFPMI and the isolation of  $l_+$  and  $l_s$  in DRMI.

### 3.9 同相信号の分離

Initial LIGO では、サイドバンドが PRC でやや under coupling に近い critical coupling になるようにアシンメトリが設定されている。Fabry-Perot 共振器において入射側の鏡と比べて出射側の鏡の反射率が高い共振状態を over coupling、その逆を under coupling といい、2つの鏡の反射率が等しい場合は critical coupling と呼ぶ。いま、PRM と FPMI 複合鏡からなる共振器を考えたとき、キャリア光は PRC で over coupling になっている。一方、サイドバンドにとっては  $r_{\text{FPMI}} \simeq \cos \alpha$  ということになり、LIGO ではこれが 0.983 であるから、ほぼ critical coupling ということになる。すると、ブライトポートではサイドバンドの DC 成分がほとんどないから、キャリアとサイドバンドのビートからはサイドバンドの AC 成分が支配的に検出される。サイドバンドは腕で共振していないので  $L_+$  を運ばず  $l_+$  を運ぶので、なるべく分離することができるのである。一方、PRC 内にはサイドバンドの DC 成分があるので、元々  $l_+$  より大きい  $L_+$  は PO ポートから支配的に取ることができる。

PRFPMI において carrier と sideband を用いて  $L_+$  と  $l_+$  を分離するのと、RSE において 2つの sideband を用いて  $l_+$  と  $l_s$  を分離することは類似している (図 3.18)。振幅変調サイドバンド  $f_1$  を power-recycling cavity のみで共振させ、位相変調サイドバンド  $f_2$  を signal-recycling cavity と power-recycling cavity の複合共振器で critical coupling に近い状態で共振させると、ブライトポートには  $f_2$  の DC 成分があまり現れないことになる。すると、ブライトポートでは  $f_2$  の AC 成分が持つ  $l_+$  と  $l_s$  が検出され、PO ではそれに加えて  $f_1$  の AC 成分が持つ  $l_+$  が検出される。2つの sideband にとっての power-recycling gain が等しくなるように asymmetry を設定すれば、PO で  $l_s$  だけ分離して取得できるし、そこまでしなくても BP と PO で  $l_+$  と  $l_s$  の混合比が異なるので独立な信号を得ることが可能である。

## 3.10 ループノイズ

### 3.10.1 Shot-noise-limited control-loop noise

sec:3-6-3 節で低周波法と高周波法の 2 つの制御法を紹介したが、これ以外にもいくつかの制御法がある。DDM を用いないもの、 $f_1$  を高周波にするもの、などである。複数の制御法の中でどれが最良かは、干渉計の感度を基準にして判断されるべきである。本節ではループノイズという観点から、制御法の比較を行なう。

制御がもたらす雑音は、表 3.4 のようなセンシング行列に現れる。この行列では、各自由度の揺らぎが、他の信号ポートにどのように現れるかを示している。本来取得すべき自由度が 1 になるよう規格化されている。規格化定数はオプティカルゲインと呼ばれるもので、その逆数がショットノイズレベルを与える。センシング行列がおおよそ対角化されている場合、1 次的な貢献 ( $\ell_-$  から  $L_-$ ) と 2 次的な貢献 ( $\ell_+$  および  $\ell_s$  から  $\ell_-$ ) を計算すればよい。表 3.4 における  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $B_2$  である。しかし、非対角項が大きくなると、その他の要素も含めて計算しなければならなくなる。例えば、 $C_2 = C_3 \simeq 1$  であれば、 $\ell_+$  と  $\ell_s$  が縮退し、他自由度も含めてオプティカルゲインが低下する。どれくらいの縮退が許容されるのか、以下で計算する。

図 3.19 に制御系のブロックダイアグラムを示す。各自由度の揺らぎが  $j$  番目の信号に混入する様子を表している。ここで  $A$  はセンシング行列 (例えば、 $A_{24}$  が表 3.4 における  $A_1$  である)、 $H$  がオプティカルゲインベクトル、 $G$  が電氣的サーボゲイン行列、 $\mathbf{n}$  が雑音ベクトルである。全ての鏡が動いていないとしても、それを制御するためのセンシング系のショットノイズが、制御帯域内で鏡を揺らしてしまふ。これをループノイズと呼ぶ。ショットノイズの源である真空場の大きさはどれも等しい ( $\sim 1$ ) が、 $n_1$  と  $n_2$  については、輻射圧の影響でスクイズされている。センシング行列やオプティカルゲインは、FINESSE や Optickle などのシミュレーションツールを用いて計算される。サーボゲイン行列  $G$  は対角行列でなくともよい。非対角項を調整することで、ループノイズを軽減することができる。Initial LIGO では、 $G_{24}$  を調整し、 $\ell_-$  の混入を 30 dB ほど減らすことに成功している。この技術を feed-forward と呼んでいる。

	Port	Demod.	$L_+$	$L_-$	$\ell_+$	$\ell_-$	$\ell_s$	opt. gain	d-range
$L_+$	SP	$f_1$	1	-	-	-	-	$H_1$	$d_1$
$L_-$	AP	DC	0	1	0	$A_1$	0	$H_2$	$d_2$
$\ell_+$	SP	DDM	-	-	1	$C_1$	$C_2$	$H_3$	$d_3$
$\ell_-$	AP	DDM	-	-	$B_1$	1	$B_2$	$H_4$	$d_4$
$\ell_s$	PO	DDM	-	-	$C_3$	$C_4$	1	$H_5$	$d_5$

Table 3.4: A signal sensing matrix.

図 3.19 より、

$$\mathbf{y} = \mathcal{M}\mathbf{y} + \mathcal{D}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (3.37)$$

となる。ここで、

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}\mathcal{G} \quad \text{and} \quad D_{ij} = H_i A_{ij} \quad (3.38)$$

である。次の行列を定義すると

$$\mathcal{B} = (1 - \mathcal{M})^{-1}, \quad (3.39)$$

式 (3.37) の解は

$$\mathbf{y} = \mathcal{B}(\mathcal{D}\mathbf{x} + \mathbf{n}) \quad (3.40)$$

のようになる。式 (3.40) から  $x_2$  成分を抽出し、全ての  $n_j$  を二乗和して雑音レベルを得る。仮に  $\mathcal{D}$  が行列でなくベクトルであったなら、 $\mathcal{B}$  は感度には影響を及ぼさず、ゲインの低下も生じないということに注意したい。

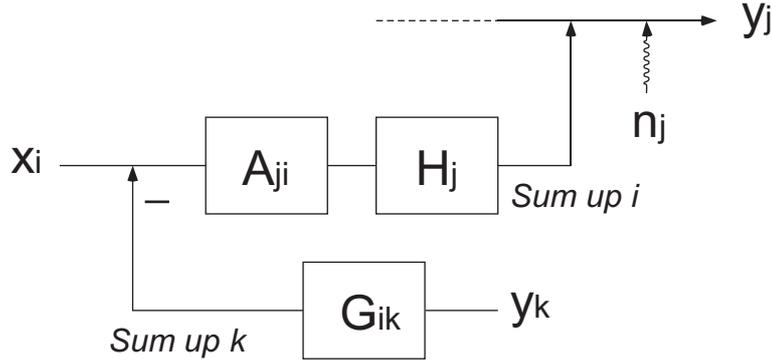


Figure 3.19: Block diagram that shows couplings from other degrees of freedom.

簡単な例を見てみよう。  $L_-$  に  $l_-$  が混入し、中央部の DRMI では  $l_+$  と  $l_s$  が強く縮退し、他の自由度は同程度にやや縮退しているとする。センシング行列は以下ようになる。

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1+\epsilon \\ 0 & 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-\epsilon & a & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

オープンループゲインが 1 より十分高いとして、 $\mathcal{B} \simeq \mathcal{M}^{-1}$  となる。また、 $\mathcal{G}$  の非対角項はゼロとする ( $G_{ii} \rightarrow G_i$ )。式 (3.40) は以下のようになり、

$$y_i = \sum_j \frac{x_i + A_{ij}^{-1} n_j / H_j}{G_i}, \quad (3.42)$$

$x_i$  のショットノイズ感度は

$$h_i = \sum_j A_{ij}^{-1} n_j / H_j \quad (3.43)$$

となる。式 (3.41) で与えられる  $\mathcal{A}$  の逆行列は

$$\mathcal{A}^{-1} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a^2/\epsilon & -a & -a^2/\epsilon \\ 0 & 0 & 1/\epsilon^2 & a/\epsilon & -1/\epsilon^2 \\ 0 & 0 & -a/\epsilon & 1 & a/\epsilon \\ 0 & 0 & -1/\epsilon^2 & a & 1/\epsilon^2 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

であり、2行目に注目すると、縮退の影響で  $l_+$  と  $l_s$  が縮退ファクター  $\epsilon$  だけ増加しているのが分かる。ショットノイズ感度は

$$h_2 = \frac{n_2}{H_2} + \frac{a^2}{\epsilon} \left( \frac{n_3}{H_3} \right) - a \left( \frac{n_4}{H_4} \right) - \frac{a^2}{\epsilon} \left( \frac{n_5}{H_5} \right) \quad (3.45)$$

となる。

## Chapter 4

# アライメント制御

干渉計に対して最も効率よく入射光が結合するためには、鏡を適当な姿勢に保持しなければならない。例えばリニアキャビティでは常に鏡の反射面が光軸と直交しなければならない。このような条件を満たすよう、自動制御により入射光と干渉計の全ての鏡の相対角を調節することをアライメント制御と呼んでいる。アライメントのずれ (ミスアライメント) が生じた場合には、リサイクリングゲインや同相雑音除去比の低下などが起こって干渉計の感度が低下する。以下では、ミスアライメントの効果について、およそどの程度ずれが問題となるかを簡単なオーダーで議論する。

### 4.1 ガウシアンビームの展開

レーザービームは、近軸光線の方程式の解であるエルミートガウシアン (HG) ビームあるいはラゲールガウシアン (LG) ビームでよく近似される。ある軸上で定義される HG モードのセットは、その軸の近傍を通りほとんど平行な他の光軸上の HG モードのセット  $\{U'_{ij}\}$  で近似的に展開することが可能である。

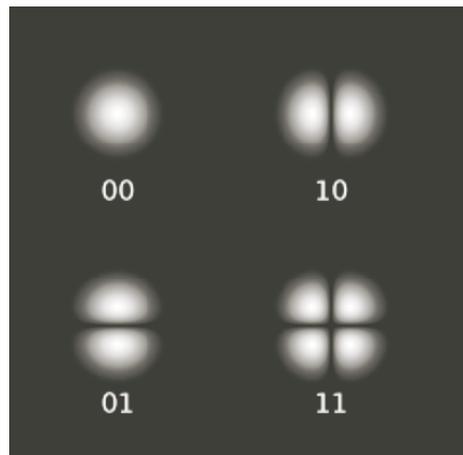


Figure 4.1: エルミートガウシアンモード。アライメントが悪くなると HG の高次モードが増える。

入射ビームの軸を  $z$  軸とし、ビームは  $zx$  平面内にあるとする。ウエスト半径  $w_0$  をもち、ビームウエ

ストが  $z-x$  の原点にあるような、 $z$  軸上を正の向きに伝播する  $i+j$  次の HG モードを  $U_{ij+} \exp i\Omega t$  で表すとすると、その電場は次のように定義される。

$$U_{\ell m+}(x, z) \equiv U_{\ell+}(x, z) \exp[-ik_0 z + (\ell + m + 1)i\eta(z)] \quad (4.1)$$

$$U_{\ell+}(x, z) \equiv \left[ \frac{2}{\pi(\ell!)^2 2^{2\ell} w^2(z)} \right]^{\frac{1}{4}} H_{\ell} \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \exp \left[ \frac{x^2}{w^2(z)} - \frac{ik_0 x^2}{2R(z)} \right] \quad (4.2)$$

ただし  $k_0$  と  $\Omega$  は光の波数と角周波数であり、またビーム半径  $w(z)$ 、波面の曲率半径  $R(z)$ 、Gouy 位相  $\eta(z)$  およびエルミート多項式  $H_{\ell}(x)$  は、それぞれ

$$w(z) \equiv w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2} \quad (4.3)$$

$$R(z) \equiv (z^2 + z_R^2)/z \quad (4.4)$$

$$\eta(z) \equiv \arctan \left( \frac{z}{z_R} \right) \quad (4.5)$$

$$z_R \equiv \frac{k_0 w_0^2}{2} \quad (4.6)$$

$$H_{\ell}(x) = (-1)^{\ell} e^{x^2} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} e^{-x^2} \quad (4.7)$$

によって定義される。 $z$  軸上を負の向きに進む波は、 $U_{\ell m+}$  の複素共役を用いて

$$U_{\ell m+}(x, y, z) e^{i\Omega t} = (U_{\ell m+})^* e^{i\Omega t} \quad (4.8)$$

と表される。ビームの遠方での広がり半幅角  $\alpha_0$  は、ウエスト半径を用いて

$$\alpha_0 = \frac{2}{K w_0} \quad (4.9)$$

と定義される。

$z-x$  系を角度  $\alpha$  だけ回転させ、 $x$  方向に  $\alpha$  だけ平行移動したものを  $z'-x'$  系とする。 $z-x$  系のモード  $\{U_{ij+}\}$  を  $z'-x'$  系のモード  $\{U'_{ij+}\}$  で展開すると、

$$U_{00+} \simeq \left( 1 - \frac{a^2}{2w_0^2} - \frac{\alpha^2}{2\alpha_0^2} + i \frac{a\alpha}{w_0\alpha_0} \right) U'_{00+} + \left( \frac{a}{w_0} + i \frac{\alpha}{\alpha_0} \right) U'_{10+} \quad (4.10)$$

$$U_{10+} \simeq U'_{10+} + \left( -\frac{a}{w_0} + i \frac{\alpha}{\alpha_0} \right) U'_{00+} \quad (4.11)$$

である。ただし、ここで基本モードについては、 $\alpha$  と  $a$  の 2 次まで、1 次の高次モードについては 1 次まで展開した。

## 4.2 Fabry-Perot 共振器のミスアライメント

平面鏡と曲率半径  $R$  の球面鏡からなる共振器では、固有モードの中心軸は平面鏡に垂直で球面鏡の曲率中心を通る。キャビティ長を  $L$  とすると、平面鏡の回転  $\alpha_f$  はキャビティの固有モード光軸の回転  $\alpha = \alpha_f$  と平行移動  $a = -\alpha_f(R-L)$  を、球面鏡の回転  $\alpha_e$  は光軸の平行移動  $-R\alpha_e$  を誘起する (図 4.2)。このキャビティの基本モードの反射率を  $r_0$ 、1 次の高次モードの反射率を  $r = 1$  とする。キャビティの  $z'$  軸と

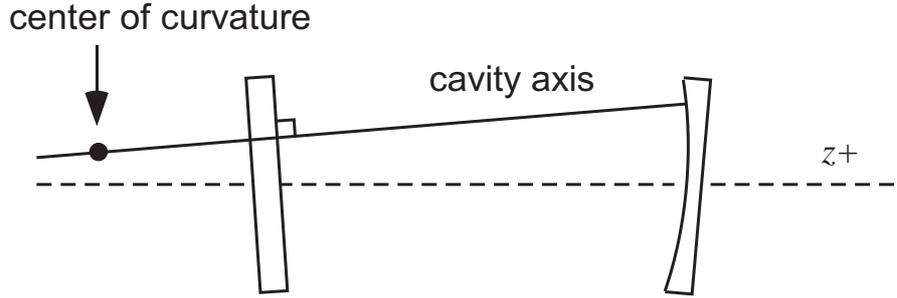


Figure 4.2: Fabry-Perot 共振器の固有モードの中心軸。平面鏡と球面鏡からなるキャビティでは、平面鏡に垂直で球面鏡の曲率中心を通る軸が中心軸である。入射光軸とキャビティの軸のずれは、2つの軸のなす角  $\alpha$ 、およびウエスト位置での距離  $a$  の2つパラメタで与えられる。

し、入射光軸を  $z$  軸とする。入射光が基本モード  $U_{00+}$  であるとして、これがキャビティの基本固有モード  $U'_{00+}$  にどれだけ結合しているかは、式 (4.10) より直ちに

$$1 - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{a}{w_0} \right)^2 + \left( \frac{a}{\alpha_0} \right)^2 \right] \quad (4.12)$$

と求められる。キャビティからの反射光の入射光軸上 ( $z-x$  座標系) での展開係数は、まず入射光をキャビティの軸上で展開し、これに対する反射光をキャビティの軸上で求め、さらにこれを再び入射光軸上で展開しなおすことによって得られる。実際にこの計算を行なうと、入射光が基本モード  $U_{00+}$  の時、反射光はミスアライメントの2次までで、

$$E_r = r_0 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{r_1}{r_0} \right) \left( \frac{a}{w_0} \right)^2 - \left( 1 + \frac{r_1}{r_0} \right) \left( \frac{a}{\alpha_0} \right)^2 - 2i \left( 1 + \frac{r_1}{r_0} \right) \frac{a}{w_0} \frac{a}{\alpha_0} \right] U_{00-} \\ + r_0 \left[ \left( 1 - \frac{r_1}{r_0} \right) \frac{a}{w_0} + i \left( 1 + \frac{r_1}{r_0} \right) \frac{a}{\alpha_0} \right] U_{10-} \quad (4.13)$$

入射光が1次の高次モード  $U_{10+}$  の時には、ミスアライメントの1次までで

$$E_r = r_1 U_{10-} + r_0 \left[ \left( 1 - \frac{r_1}{r_0} \right) \frac{a}{w_0} + i \left( 1 + \frac{r_1}{r_0} \right) \frac{a}{\alpha_0} \right] U_{00-} \quad (4.14)$$

となる。

基本モードがキャビティに共振している時、高次モードは共振していないので、重力波検出器に用いられるようなキャビティでは  $r_0$  と  $r_1$  は逆符号である<sup>1</sup>。このことに注意して式 (4.12) と式 (4.13) を見ると、入射光とキャビティとのカップリング率には平行移動のずれ  $a/w_0$  と角度ずれ  $\alpha/\alpha_0$  とが同じ重みで入っているが、反射光の振幅に対する寄与では2つのパラメタの重みに差があり、平行移動のずれの方が反射光の基本モード振幅を減少させる効果が大きいことが分かる。また、 $a + r_1/r_0 < 0$  である場合、キャビティの角度ずれが起こると、共振器と入射光のカップリングは減少するが、反射光の基本モードの振幅は増加する。

<sup>1</sup>通常の重力波検出器に用いられるようなキャビティでは、フロントミラーはエンドミラーよりも反射率が低くなっている。この場合、共振時と非共振時ではキャビティの反射率の符号が反転する。

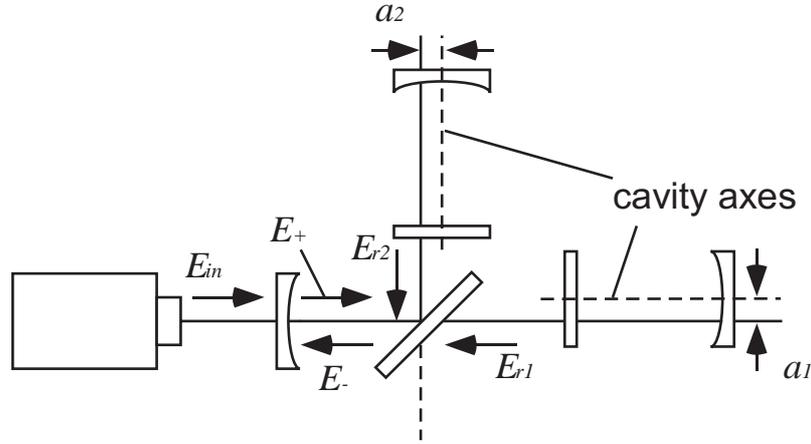


Figure 4.3: 干渉計の内部電場。

### 4.3 リサイクリングとミスアライメント

リサイクリングファクターに及ぼすミスアライメントの影響について考える。簡単のため、ビームスプリッターとリサイクリングミラーのロスを考えず、またリサイクリングミラーの反射率  $r_r$  は 00 モードのゲインを最適化するように ( $r_r = r_0$ ) 選択されているとする。ミスアライメントがない時、リサイクリングキャビティの内部電場強度は

$$\begin{aligned}
 I_{r0} &= \left| \frac{t_r}{1 - r_r r} \right|^2 I_0 \\
 &= \frac{1}{1 - r_0^2} I_0 \\
 &= g_{r0} I_0
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

ここで  $t_r = \sqrt{1 - r_r^2}$  はリサイクリングミラーの振幅透過率、 $I_0$  は入射光強度であり、 $g_{r0}$  はミスアライメントがない場合のリサイクリングファクターである。ミスアライメントがある場合について、ここでは詳細な計算を行なうことはせず、大体のオーダーを求めることにしよう。このためにかなり粗い近似を行なう。すなわち、 $r_0$  と  $r_1$  とはどちらも絶対値が 1 程度で、ちょうど符号が逆になるので、 $1 + r_1/r_0$  の項は無視し、 $1 - r_1/r_0 \sim 2$  とする。また、式 (4.13) 中の  $2ia\alpha$  に比例する位相ずれの項は、ビームスプリッターの制御系によって補正されるので、ここでは考えないことにする。すると、キャビティからの反射光の式 (4.13)(4.14) は次のように簡略化される。入射光が  $U_{00+}$  の時、

$$E_r = r_0 \left[ 1 - 2 \left( \frac{a}{w_0} \right)^2 \right] U_{00-} + 2r_0 \frac{a}{w_0} U_{10-} \tag{4.16}$$

入射光が  $U_{10+}$  の時、

$$E_r = r_1 U_{10-} + 2r_0 \frac{a}{w_0} U_{00-} \tag{4.17}$$

さて、レーザーからリサイクリングミラーに向けて入射する光  $E_{in}$  およびリサイクリングミラーからビー

ムスプリッターへ向かって入射する光  $E_+$  (図 4.3 参照) がそれぞれ

$$E_{in} = U_{00+} \quad (4.18)$$

$$E_+ = pU_{00} + qU_{10+} \quad (4.19)$$

であるとする。ただし  $p$  は 1 のオーダーなのに対して、 $q$  はたかだかミスアライメントの 1 次のオーダーの量である。2 本の腕共振器の平行移動のミスアライメントをそれぞれ  $a_1$  と  $a_2$  で表す (ただし、図 4.3 の向きを正に取る)。腕共振器からの反射電場を  $E_{ri}$  ( $i = 1, 2$ ) とすると、リサイクリングミラーに向かって反射されてくる電場  $E_-$  は  $(E_{r1} + E_{r2})/2$  なので、式 (4.16)(4.17)(4.19) を用いて、

$$E_- = r_0 \left[ p \left( 1 - \frac{a_1^2 + a_2^2}{w_0^2} \right) + q \frac{a_1 + a_2}{w_0} \right] U_{00-} + r_0 \left( p \frac{a_1 + a_2}{w_0} - q \right) U_{10-} \quad (4.20)$$

である<sup>2</sup>。リサイクリングキャビティが基本モードに対して共振している場合、各電場の間には、

$$E_+ = t_r E_{in} + r_r E_- \quad (4.21)$$

という関係が成立する。式 (4.18)-(4.20) を式 (4.21) に代入して各モードの係数を比較すると、

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{g_{r0}} \left\{ 1 - \frac{g_{r0} r_0^2}{2w_0^2} \left[ \frac{1 - r_0^2}{1 + r_0^2} (a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 \right] \right\} \\ &\sim \sqrt{g_{r0}} \left[ 1 - \frac{g_{r0}}{2} \left( \frac{a_1 - a_2}{w_0} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$q \sim \frac{\sqrt{g_{r0}}}{2} \frac{a_1 + a_2}{w_0} \quad (4.23)$$

を得る。したがってリサイクリングゲイン  $g_r$  は

$$\begin{aligned} g_r &= \left| \frac{E_+}{E_{in}} \right|^2 \\ &= |p|^2 + |q|^2 \\ &\sim g_{r0} \left[ 1 - g_{r0} \left( \frac{a_1 - a_2}{w_0} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

のように悪化する。ただし最後の近似には  $g_{r0} \ll 1$  を用いた<sup>3</sup>。一例として  $L = 3$  km でリサイクリングゲインが 30 程度の干涉計を考える。ただし腕キャビティは平面鏡と球面鏡からなり、球面鏡の曲率半径  $R$  は 4.5 km とする。ビームウエストの半径はおよそ 2.7 cm ほどである。ミスアライメントによるリサイクリングゲイン悪化の安全係数を 10 見込むなら、

$$30 \left( \frac{a_1 - a_2}{2.7 \text{ cm}} \right) < \frac{1}{10} \quad (4.25)$$

すなわち  $|a_1 - a_2| < 1.6$  mm が要求される。キャビティの全ての鏡は同程度の振幅だけ回転するとして、鏡の回転角を  $\alpha_m$  とすると、エンドミラーに対して  $\alpha \sin \alpha_m R$ 、フロントミラーに対して  $\alpha \sin \alpha_m (R - L)$

<sup>2</sup>本来ならリサイクリングキャビティの中でも高次モードと基本モードの間に Guoy 位相の差があるのだが、リサイクリングキャビティが腕キャビティの長さ比べて十分短い時にはあまり問題にならないので、ここでは無視する。

<sup>3</sup>干涉計の信号の大きさは、正しくは  $|E_+|^2$  ではなく腕部分に閉じ込められている光のパワーに直接依存している。したがって、腕部分のリサイクリングキャビティ内部電場に対するカップリング率の変化を考慮する必要がある。しかしこの計算を実際に行なうと、 $g_{r0} \ll 1$  の場合、カップリング率の減少は  $|E_+|^2$  の減少に比べ無視できることが示される。

であるので、最悪の場合、並進のミスアライメントはそれぞれの腕で逆向きに  $(2R - L)|\alpha_m|$  だけ生ずるから、

$$2(2R - L)\alpha_m < 1.6 \text{ mm} \quad (4.26)$$

すなわち  $\alpha_m$  をおよそ 130 mrad 以下に抑えなければならないことが分かる。

#### 4.4 同相雑音除去とミスアライメント

マイケルソン干渉計は 2 つの腕からの反射光の位相差を読む装置である。ミスアライメントによって 2 つの電場に位相差が生じれば、それが信号に出てきてしまう。ミスアライメントが周波数雑音に及ぼす効果を調べてみよう。Fabry-Perot 共振器への入射電場が

$$\begin{aligned} U_{00+} \exp [i\Omega t + i\phi(t)] &\sim U_{00+} \exp (i\Omega t) [1 + i\phi(t)] \\ &= U_{00+} \exp (i\Omega t) \left[ 1 + i \int \tilde{\phi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

のように位相に雑音をもっているとする。ただし  $\Omega$  は光のキャリアの周波数である。まずアライメントが合っている場合の反射電場を考えると、

$$E_r = U_{00-} \exp (i\Omega t) \left[ r_0 + i \int \tilde{\phi}(\omega) r_0(\Omega + \omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \quad (4.28)$$

ただし  $r_0(\omega)$  は角周波数  $\omega$  の基本モード光に対するキャビティの反射率である。キャリアがキャビティに共振している場合、 $r_0(\Omega) \equiv r_0$  は実数であり、また  $\phi$  の積分も実数になる。

$$\begin{aligned} E_r &\simeq U_{00-} \exp (i\Omega t) r_0 \left[ 1 + i \int \tilde{\phi}(\omega) \frac{r_0(\omega)}{r_0} e^{i\omega t} d\omega \right] \\ &\equiv U_{00-} \exp (i\Omega t) r_0 [1 + i\phi(t) + i\psi(t)] \end{aligned} \quad (4.29)$$

ここで  $\psi(t)$  は反射光の位相揺らぎが入射光に比べてキャビティの応答分だけ増加したことを表す量で、

$$\begin{aligned} \psi(t) &= - \int \frac{\mathcal{F}T_f}{\pi r_0} \frac{i\omega/\omega_c}{1 + i\omega/\omega_c} \tilde{\phi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &\equiv \int \tilde{\psi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (4.30)$$

で定義される。上の式で  $\mathcal{F}$ 、 $\omega_c$ 、 $T_f$  はそれぞれ、キャビティのフィネス、カットオフ角周波数、およびフロントミラーの強度透過率である。

この場合でも、FPMI の 2 本のキャビティが完全に同じ応答特性を持てば、キャビティからのそれぞれの反射電場の位相差はゼロになるので、重力波検出のような位相差測定において位相揺らぎは測定にからない。このように、2 本のキャビティに対象に働く雑音 (同相雑音) がキャンセルされることを同相雑音除去と呼んでいる。干渉計において、ビームスプリッタに入射してくる光の位相揺らぎが  $\phi(t)$ 、キャビティからの反射光の位相揺らぎがそれぞれ  $\phi(t) + \psi_i(t)$  ( $i = 1, 2$ )、光源の位相揺らぎが  $\varphi(t)$  と表される時、FPMI 部分の同相雑音除去比 (CMRR) は

$$\gamma_{\text{FPMI}} \equiv \left| \frac{\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_2}{(\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2)/2} \right| \quad (4.31)$$

干渉計全体の CMRR は

$$\gamma \equiv \left| \frac{\tilde{\phi}}{\tilde{\varphi}} \right| \gamma_{\text{FPMI}} \quad (4.32)$$

と定義できる<sup>4</sup>。リサイクリングを行わない場合、 $\gamma = \gamma_{\text{FPMI}}$  である。

次にミスアライメントがある場合の反射光を考えよう。高次モードの項はキャビティに入らず、キャリアに対しても位相雑音のサイドバンドに対してもキャビティの反射率は一定の実数で  $r_1$  と書けるものとする、式 (4.13) の第 1 項に相当する式は、この場合、ミスアライメントの 2 次、位相雑音の 1 次まで、

$$\begin{aligned} E_r = & \left[ r_0 - \frac{a^2}{w_0^2}(r_0 - r_1) - \frac{\alpha^2}{\alpha_0^2}(r_0 + r_1) - 2a\alpha r_1 \psi(t) \right] \left[ 1 - 2ia\alpha \left( 1 + \frac{r_1}{r_0} \right) \right] \\ & \times \left\{ 1 + i\phi(t) + i\psi(t) \left[ 1 - \frac{r_1}{r_0} \left( \frac{a^2}{w_0^2} - \frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

となる。この式を見ると、反射光の位相には、キャビティまでの航路が変化したことによる項 ( $ia\alpha$  に比例する項) の他に、高次モードがキャビティの中に進入できないために、

$$-\frac{r_1}{r_0} \left( \frac{a^2}{w_0^2} - \frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} \right) \psi \quad (4.34)$$

という位相ずれが生じていることがわかる。リサイクリングゲインを考察した時と同様に、位相雑音に比例しない位相ずれの項  $1 - 2ia\alpha(1 + r_1/r_0)$  はビームスプリッタの制御系によって補正されるものと思っ  
て無視すると、両腕からの反射光の位相差は

$$\psi_1 - \psi_2 = -\frac{r_1}{r_0} \left( \frac{a_1^2 - a_2^2}{w_0^2} - \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_0^2} \right) \psi(t) \quad (4.35)$$

と計算できる。ただし 2 本の腕に関する位相やミスアライメントを添え字の 1、2 で表した。つまり 2 本のキャビティが完全に同等の特性を持っている場合でも、アライメントの非対称性によって位相雑音が出てきてしまう。この時、FPMI 単体での同相雑音除去比は

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{FPMI}} &= \left| \frac{\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_2}{(\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2)/2} \right| \\ &\sim \left| \frac{a_1^2 - a_2^2}{w_0^2} - \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_0^2} \right| \end{aligned} \quad (4.36)$$

以下に制限されてしまう。ここで  $|r_0| \sim |r_1| \sim 1$  を用いた。

次にリサイクリングを行なった場合を考える。リサイクリングゲインがキャリアに対して最適化されるよう、リサイクリングミラーの反射率は  $r_0$  であるとして、また簡単のためリサイクリングミラーの透過率は  $t_r = (1 - r_0^2)^{1/2}$  であるとする。リサイクリングファクターは  $g_r = 1/(1 - r_0^2)$  である。ミスアライメントがない場合、リサイクリングミラーから見た FPMI 部分の反射率は、共振から  $\omega$  だけずれた光に対して、

$$\gamma_{\text{FPMI}} \sim r_0 \left( 1 - \frac{FT_f}{\pi r_0} \frac{i\omega/\omega_c}{1 + i\omega/\omega_c} \right) \quad (4.37)$$

<sup>4</sup>ここで分母を  $\tilde{\phi} + (\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2)/2$  ではなく  $(\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2)/2$  と定義したのは、1 本のキャビティだけを用いて位相検出を行なった場合には  $\psi$  が検出されるからである。

である。ここで、通常の干渉計では腕共振器のエンドミラーの反射率はほぼ 1 であるとみなしてよいことを用いて

$$FT_f \sim \frac{\pi\sqrt{r_f}}{1-r_f}(1-r_f^2) \sim 2\pi \quad (4.38)$$

なる近似を行なう。ここで  $r_f$  はフロントミラーの振幅反射率である。リサイクリングキャビティの長さを  $\ell$  とすると、干渉計に入射する電場からビームスプリッタに入射する電場への電場振幅の伝達関数は

$$\begin{aligned} \frac{t_r}{1-r_0 r_{\text{FPMI}}(\omega)e^{-2i\omega\ell/c}} &= \frac{t_r}{1-r_0^2 \left(1 - \frac{FT_f}{\pi r_0} \frac{i\omega/\omega_c}{1+i\omega/\omega_c}\right) e^{-2i\omega\ell/c}} \\ &\sim \sqrt{g_r} \times \frac{1}{1+2g_r \frac{i\omega/\omega_c}{1+i\omega/\omega_c}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

となる。ただしここで、最後の近似には式 (4.38) と  $1/\omega_c \ll \ell/c$  を用いた。この式からただちに干渉計の入射光の位相揺らぎ  $\tilde{\varphi}$  と干渉計内部でビームスプリッタに入射している光の位相揺らぎ  $\tilde{\phi}$  の関係が

$$\tilde{\phi}(\omega) \sim \frac{1}{1+2g_r} \frac{i\omega/\omega_c}{1+i\omega/\omega_c} \tilde{\varphi}(\omega) \quad (4.40)$$

のように求まる。式 (4.36)(4.40) より、リサイクリングを行なった場合の干渉計の CMRR は

$$\gamma(\omega) \sim \left| \frac{(a_1^2 - a_2^2)/w_0^2 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)/\alpha_0^2}{1+2g_r \frac{i\omega/\omega_c}{1+i\omega/\omega_c}} \right| \quad (4.41)$$

である。

## 4.5 ビームジッタ雑音とアライメント

これまで、暗黙のうちにミスアライメントの要因として鏡の姿勢の変化を仮定していたが、もちろん実際には入射レーザー光の軸が変動することも考えられる。レーザー光の光軸変動のことをビームジッタと呼んでいる。レーザーがビームジッタを持っている場合、鏡のミスアライメントと結合して位相雑音が生じる。式 (4.13) の中に  $ia\alpha$  に比例する項があることから分かるように、干渉計の腕共振器が平行移動のずれ  $a$  を、レーザービームが角度揺れ  $\alpha_b(t)$  を持っているとき、 $a\alpha_b(t)$  に比例する位相ずれが生じる。もっとも、式 (4.13) の中の  $\alpha$  はキャビティの角度ずれを表すもので、ビームジッタを表すものではないので、計算し直してみる。ビームスプリッタへの入射光  $E_+$  が角度ずれ  $\alpha_b$  と平行移動のずれ  $a_b$  を共にもっている場合、入射光はジッタの 1 次までで次のように展開される。

$$E_+ \simeq U_{00+} - \left( \frac{a_b}{w_0} + i \frac{\alpha_b}{\alpha_0} \right) U_{10+} \quad (4.42)$$

一方、FPMI はミスアライメント  $a_\ell, \alpha_\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) をもっている。ここでも簡単のため  $1+r_1/r_2$  の項を無視することになると、各キャビティからの反射電場  $E_{r\ell}$  ( $\ell = 1, 2$ ) は式 (4.16)(4.17) を用いて

$$E_{r\ell} \sim r_0 \left[ 1 - 2 \frac{a_\ell}{w_0} \left( \frac{a_b}{w_0} + i \frac{\alpha_b}{\alpha_0} \right) \right] U_{00-} + r_0 \left( 2 \frac{a_\ell}{w_0} + \frac{a_b}{w_0} + i \frac{\alpha_b}{\alpha_0} \right) \quad (4.43)$$

と計算される。ただしここで展開は  $a_b, \alpha_b, a_\ell, \alpha_\ell$  ( $\ell = 1, 2$ ) のそれぞれ 1 次まで行った。したがって 2 つのキャビティからの反射電場の中の基本モードの位相差は

$$\psi_1 - \psi_2 = 2 \frac{a_1 - a_2}{w_0} \frac{\alpha_b}{\alpha_0} \quad (4.44)$$

キャビティの長さの変動に換算すると、

$$\delta L \sim \frac{\psi_1 - \psi_2}{4K\mathcal{F}/\pi} = \frac{\lambda}{4\mathcal{F}} \frac{a_1 - a_2}{w_0} \frac{\alpha_b}{\alpha_0} \quad (4.45)$$

程度となる。ただしここで  $K$ 、 $\mathcal{F}$  はそれぞれレーザーの波数と腕キャビティのフィネスである。

レーザーのビームジッタ  $\alpha_j$  を  $\alpha_b$  と直接比較することは意味がない。なぜならレーザーと干渉計の間に存在するマッチング光学系によって、ジッタも変換を受けるからである。しかし、通常のマッチング光学系では、ミスアライメントをもつビームに対して  $(a/w_0)^2 + (\alpha/\alpha_0)^2$  が保存量であることを簡単に示すことができる。したがって、ここでは最悪の場合を想定して、マッチング光学系によってもととのビームジッタが最終的に全て角度のジッタ  $(\alpha/\alpha_0)^2$  に換算されると考える。レーザービームのジッタは、まずモードクリーナーでおよそ  $(1 - r_{MC}^2)/(1 + r_{MC}^2) \sim (1 - r_{MC}^2)/2$  倍だけ低減される。ただし  $r_{MC}$  はモードクリーナーの鏡の振幅反射率である。次にリサイクリングキャビティに入射すると、 $U_{10}$  モードの  $U_{00}$  モードに対する振幅比はおよそ  $(1 - r_0^2)/(1 - r_0 r_1) \sim 1/2g_{r0}$  倍になる。したがって、リサイクリングキャビティ内のビームジッタの大きさは

$$\frac{\alpha_b}{\alpha_0} \sim \frac{1 - r_{MC}^2}{4g_{r0}} \sqrt{\left(\frac{a_j}{w_{\text{laser}}}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_{\text{laser}}}\right)^2} \quad (4.46)$$

である。ただし  $w_{\text{laser}}$  と  $\alpha_{\text{laser}}$  はそれぞれレーザー出射光のウエスト半径と広がり半幅角である。一例として、レーザーの波長が1マイクロメートル、モードクリーナーの鏡の反射率が  $r_{MC}^2 = 99.9\%$  で、FPMIのリサイクリングゲインが30、腕キャビティのフィネスが50、キャビティ長と球面鏡の曲率半径がそれぞれ3 kmと4.5 kmの場合を考えよう。腕キャビティのウエスト半径は2.7 cm程度である。レーザーのビームジッタ  $a_j$ 、 $\alpha_j$  とレーザービームのウエスト半径  $w_{\text{laser}}$ 、広がり半幅角  $\alpha_{\text{laser}}$  の比としては、100 Hz近辺で、

$$\frac{a_j}{w_{\text{laser}}} \sim \frac{\alpha_j}{\alpha_{\text{laser}}} \sim 10^{-6} (1/\sqrt{\text{Hz}}) \quad (4.47)$$

程度とする。式(4.46)(4.47)より、リサイクリングキャビティ内でのビームジッタは

$$\frac{\alpha_b}{\alpha_0} \sim \frac{10^{-3}}{4 \times 30} \times 10^{-6} = 8.3 \times 10^{-12} (1/\sqrt{\text{Hz}}) \quad (4.48)$$

したがって、式(4.45)より、ジッターにより生じる位相雑音は、変位雑音に変換して、

$$\delta L \sim \frac{a_1 - a_2}{w_0} \times 4.2 \times 10^{-20} (\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}) \quad (4.49)$$

となる。リサイクリングファクターを計算した時と同様、腕キャビティの鏡の回転を  $\alpha_m$  とした時、最悪の場合の並進のミスアライメントはそれぞれの腕で逆向きに  $(2R - L)|\alpha_m|$  だけ生じるものと思って  $a_1 - a_2$  に  $2(2R - L)$  を代入し、 $w_0$  に腕共振器のウエスト半径2.7 cmを代入すると、

$$\delta L \sim \alpha_m \times 1.9 \times 10^{-14} (\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}) \quad (4.50)$$

の変位雑音が生じることが分かる。したがって、たとえば干渉計の感度が  $h < 10^{-23}/\sqrt{\text{Hz}}$ 、すなわち  $1.5 \times 10^{-20} (\text{m}/\sqrt{\text{Hz}})$  を要求されるとして、ビームジッタによる感度低下の安全率を10とする場合、腕キャビティの鏡の角度に対する要求値としては、

$$\begin{aligned} \alpha_m &< \frac{1}{10} \times \frac{1.5 \times 10^{-20}}{1.9 \times 10^{-14}} \\ &\sim 80 (\text{nrad}) \end{aligned} \quad (4.51)$$

程度になることが分かる。

## 4.6 Wave-front sensing

アライメント誤差の検出方法については、Wave-front sensing と呼ばれる方法が主流である。これは、分割フォトデテクタを使い、その右受光面と左受光面、もしくは上受光面と下受光面の差をとり、キャリアの高次モードと RF サイドバンドの基本モードのビートからアライメント誤差を検出する方法である。光学系を追加しなくてよいという点で優れている。詳しくは参考文献 [33]などを参考にしてほしい。

## Chapter 5

# モードマッチング

### 5.1 複素波面係数

TEM00 モードについて式 (4.1) を以下のように書き直すことができる。

$$U(x, y, z) = \frac{1}{q(z)} \exp \left[ -ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - \frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \quad (5.1)$$

ここで、 $R(z)$  は波面の曲率半径、 $w(z)$  はビーム半径であり、

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + \frac{1}{iS(z)} \quad (5.2)$$

$$\frac{k_0}{2S(z)} = \frac{1}{w^2(z)} \quad (5.3)$$

という関係にある。

$$q(z) = z + iz_R \quad (5.4)$$

としたとき、 $z_R$  をレイリーレンジと呼び、式 (5.2)(5.2) から

$$R(z) = \frac{z^2 + z_R^2}{z} \quad (5.5)$$

$$S(z) = \frac{z^2 + z_R^2}{z_R} \quad (5.6)$$

となる。

### 5.2 共振器からの要求

共振器 (2 枚鏡とする) において鏡の曲率と、波面の曲率  $R(z)$  が一致していないと、光軸からの距離によって位相変化が異なるため、干渉縞ができてしまう (図 5.1)。フロント鏡の曲率を  $R_1$ 、エンド鏡の曲率を  $R_2$  として、

$$-R_1 = R(-z_1) \quad (5.7)$$

$$R_2 = R(z_2) \quad (5.8)$$

でなければならない。共振器長  $L$  と鏡の曲率  $R_{1,2}$  が決まると、入射すべき光のモードが一意に決まり、鏡上のビーム径 (スポットサイズ) も決まる。いま、 $g$  ファクターと呼ばれる量を以下のように定義する。

$$g_{1,2} = 1 - \frac{L}{R_{1,2}} \quad (5.9)$$

スポットサイズは

$$w_1^2 = \frac{\lambda L}{\pi} \times \sqrt{\frac{g_2}{g_1(1-g_1g_2)}} \quad (5.10)$$

$$w_2^2 = \frac{\lambda L}{\pi} \times \sqrt{\frac{g_1}{g_2(1-g_1g_2)}} \quad (5.11)$$

となる。上式のルート内が正であるために

$$0 \leq g_1g_2 \leq 1 \quad (5.12)$$

でなければならない。この条件はレイリーレンジ  $z_R$  が実数であることと等価である。レイリーレンジは、ウエスト位置からレーザー光が点光源からの光とみなせる位置までの距離であり、上記の安定条件は、共振器の中で光があまり急に広がらない、あるいは平行になり過ぎないための条件であると言える。

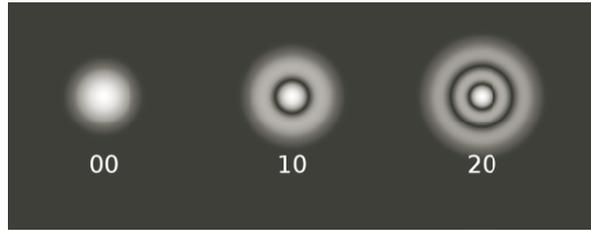


Figure 5.1: ラゲールガウシアンモード。モードマッチングが悪くなると LG の高次モードが増える。

鏡の曲率が決まると、スポットサイズは一意に決まるが、スポットサイズを決めた場合、鏡の曲率は一意には決まらず、2通りの解が存在する。これは、 $g_1g_2$  が等しくても、 $g_1$  および  $g_2$  が共に正である場合と、共に負である場合があり得るからである。前者を positive-g 共振器、後者を negative-g 共振器と呼んでいる。前者は共振器の鏡が平坦に近く、後者は共振器の鏡の曲率が急である。

### 5.3 レンズによる調整

レンズを置くと、レンズの手前のビーム  $q(z)$  とレンズ後のビーム  $q'(z)$  に関して

$$\frac{1}{q'(z)} = \frac{1}{q(z)} - \frac{1}{f} \quad (5.13)$$

となる。ここで  $f$  はレンズの焦点距離である。式 (5.2) より

$$\frac{1}{R'(z)} + \frac{1}{iS'(z)} = \frac{1}{R(z)} + \frac{1}{iS(z)} - \frac{1}{f} \quad (5.14)$$

すなわち、

$$R'(z) = -\frac{R(z)f}{R(z)-f} \quad (5.15)$$

$$S'(z) = S(z) \quad (5.16)$$

となる。

## Chapter 6

# 最後に

本書は、2004年に執筆された筆者の博士論文を元に、その一部を和訳したものである(4章は「重力波をとらえる」[1]の第7-3-5節をコピーしたものである)。その後の研究により、新たな知見を得て、特に制御法に関しては多くの点に変更されている。以下に変更点を列挙する。

- Double demodulation は用いられなくなった。ループノイズの計算方法が確立し、単復調と比較した結果、分離はよいか信号の弱いDDMと、分離は悪いが信号の強いFDMは、ほぼ同じレベルのループノイズをもたらすことが分かり、シンプルさを優先してFDMが選択されたものである。
- Detune を実現するオフセットのかけ方が変更された。RF サイドバンドの振幅がアンバランスになるのではなく、上下のサイドバンドが共に位相平面上で回転し、PM から一部 AM に変化する。
- Advanced LIGO は detune するのをあきらめた。
- 欧州の第三世代重力波検出器は Einstein Telescope と名付けられた。

# Bibliography

- [1] ”重力波をとらえる” 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健, 京都大学学術出版会 (1998); 第 7-3-5 節は河邊径太氏著.
- [2] ”Control Scheme of Laser-interferometric Gravitational-wave Detector with Fabry-Perot Cavities”, M.Ando (Master Thesis), in Japanese ,1996
- [3] R.Weiss, *Quarterly Progress Report, MIT Research Lab of Electronics* **105** (1972) 54
- [4] P.Saulson ”*Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*”, World Scientific (1994)
- [5] Y.Jafry, ”*Laser Interferometer Space Antenna(LISA) for Gravitational Wave Measurements in Space*”, Aspen Winter Conference on Gravitational Waves and Their Detection, January 22-28 ,(1995)
- [6] N.Seto, S.Kawamura, T.Nakamura, *Phys. Rev. Let.* **87** 221103 (2001)
- [7] Anthony E. Siegman, ”LASERS”, California:University Science Books(1986)
- [8] ”Advanced optical techniques for laser-interferometric gravitational-wave detectors”, G.Heinzel (Doctor Thesis), 1999
- [9] K.Danzmann, J.Hough *et al.*,”*Proc. First Edoardo Amaldi Conf. on Gravitational Wave Experiments*”, ed. E. Coccia, G.Pizzella and F.Rongap, p.100 (World Scientific, Singapore, 1995)
- [10] ”Comparison of optical configurations for laser-interferometric gravitational-wave detectors”, J.Mizuno (Doctor Thesis), 1995
- [11] J.Mizuno, K.Strain, P.Nelson, J.Chen, R.Schilling, A.Rüdiger, W.Winkler, and K.Danzmann, *Phys. Let. A* **175**, 273 (1993)
- [12] K.Strain, K.Danzmann, J.Mizuno, P.Nelson, A.Rüdiger, R.Schilling, and W.Winkler, *Phys. Let. A* **194**, 124 (1994)
- [13] M.Ando *et al.*, *Phys. Rev. Let.* **86** 3950 (2001)
- [14] ”Detector Description and Performance for the First Coincidence Observations between LIGO and GEO”, The LIGO Scientific Collaboration, gr-qc/0308043
- [15] C.Bradaschia *et al.*, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **289**,518(1990)

- [16] "Low Frequency Seismic Isolation for Gravitational Wave Detectors", A.Takamori (Doctor Thesis), 2003
- [17] "Stabilization of a Fabry-Perot Interferometer using a Suspension Point Interferometer", Y.Aso (Master Thesis), in Japanese, 2002
- [18] K.Thorne, talk at Technical Plenary Session of the LSC meeting 2003, Livingston
- [19] M. Burgay, *et al.*, Nature, **426** (2003), 531-533
- [20] Unpublished document by H.Tagoshi, in Japanese
- [21] V.B.Braginsky, F.Ya.Khalili, "Quantum Measurement", ed. K.S.Thorne, Cambridge University Press, 1992
- [22] V.B.Braginsky, Sov. Phys.-JETP, **26**, 831 (1968)
- [23] A.Buonanno and Y.Chen, Phys. Rev. D **64**, 042006 (2001)
- [24] A.Buonanno and Y.Chen, Phys. Rev. D **65**, 042001 (2002)
- [25] L.Schnupp, talk at *European Collaboration Meeting on Interferometric Detection of Gravitational Waves*, Sorrento (1988)
- [26] M.Evans, "Lock Acquisition in Resonant Optical Interferometers" (Doctor Thesis), 2002
- [27] "Robust extraction of control signals for power-recycled interferometric gravitational-wave detectors", K.Arai (Doctor Thesis), 2002
- [28] K.Strain *et al.*, Appl. Opt. **42**, vol.7, p.1244 (2003)
- [29] "Signal Extraction and Optical Design for an Advanced Gravitational Wave Interferometer", J.Mason (Doctor Thesis), 2001
- [30] "Optical mode cleaner for the interferometric gravitational wave detector", M.Araya (Doctor Thesis), 1995
- [31] J.Mason and P.Willems, Appl. Opt. **42**, vol.7, p.1269 (2003)
- [32] P.Fritschel, talk at Technical Plenary Session of the LSC meeting 2003, Hannover
- [33] "Fabry-Perot 共振器のアラインメント制御" 枡久保邦治, 修士論文 (1996)