輪講 Saulson

理学系研究科物理学専攻　修士１年　35-106033　榊原裕介

2010 年 5 月 25 日

13　RESONANT MASS GRAVITATIONAL WAVE DETECTORS

13.1　Does Form Follow Function?

形は機能と関係があるが、機能が決まっても形は一意には決まらない。つまり、重力波検出には resonant mass や干渉計よりも優れた方法があるかもしれない。

13.2　The Idea of Resonant Mass Detectors

ばねでつながれた 2 つの質量（円柱状の棒のモデル）のうち 1 つの端に加速度計をつけると重力波による力

$$F_{\rm gw} = \frac{1}{2} mL \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial t^2} \tag{13.1}$$

をとらえることができる。

13.3　A Bar's Impulse Response and Transfer Function

2 つの質量の重心は固定されていると考え、Figure 13.1 のように半分のばね（ばね定数 K）の一方が固定されもう一方が質量 M につながっている場合を考える。このとき、(4.11) よりインパルス応答は

$$g_{\rm bar}(\tau) = \left(KM - B^2/4\right)^{-1/2} e^{-\tau/\tau_d} \sin \Omega_0 \tau \tag{13.2}$$

ただし $\tau_d \equiv 2M/B$、$\Omega_0 \equiv \sqrt{(K/M) - (B^2/4M^2)}$ となる（Figure 13.2）。Burst の長さ τ_b がちょうど $1/f_0$ のとき質量の振幅は大きくなる。このことは、伝達関数

$$G(f) = \frac{1}{M(\Omega_0^2 + 1/\tau_d^2 - (2\pi f)^2) + i2\pi f B} \tag{13.4}$$

（Figure 13.4）からも分かる。

また、一般的な入力 $s(t)$ に対する応答は

$$v(t) \propto \int_{-\infty}^{t} s(\tau) g(t-\tau) d\tau \tag{13.3}$$

となる。

13.4 Resonant Transducers

Figure 13.5 のようなモデルを考える。M、m の共振周波数 $f_0 = (1/2\pi)\sqrt{K/M}$、$f_t = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$ を同じにするため $k = \alpha K$、$m = \alpha M$ とする。運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k(x - X) \quad (13.5) \\ M\ddot{X} &= -k(X - x) - KX \quad (13.6) \end{aligned}$$

であり、x を $xe^{i\omega t}$ のように仮定すると

$$\begin{pmatrix} k - m\omega^2 & -k \\ -k & k + K - M\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix} = 0 \quad (13.7)$$

となる。2 つのモードの共振周波数は $\alpha \ll 1$ として

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{K}{M}\left(1 \pm \sqrt{\alpha}\right) \quad (13.9)$$

であり、このとき

$$\frac{x}{X} = \mp\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (13.10)$$

となる。よって α が小さい時、このファクターは大きくなり、M の運動を増幅することができる。

13.5 Thermal Noise in a Bar

熱雑音が共振を励起するため、フィルターを

$$F(f) \propto \frac{G^*(f)}{n^2(f)} \quad (13.11)$$

($G^*(f)$ は bar-sensor 系の伝達関数) として、ノイズ $n(f)$ が強い周波数領域からの寄与を小さくする。

τ_d と比べて短い時間 τ_m を測定時間とすれば、熱雑音は $\sqrt{\tau_m/\tau_d}$ だけ小さくなるので、Figure 13.7 のように共振周波数の正弦波に"exponential signum"

$$D(\tau) \equiv \begin{cases} +e^{-\tau/\tau_m} & (\tau > 0) \\ -e^{+\tau/\tau_m} & (\tau < 0) \end{cases} \quad (13.12)$$

をかけたものを用いればよい。

13.6 Bandwidth of Resonant Mass Detectors

13.6.1 When are narrow bandwidths optimum?

重力波に対する最大の感度を達成するためには、M と m の相対変位が最大になるのをうなりの周期だけ待たなければばならない。そのため、最適感度のバンド幅はうなりの周期の逆数、すなわち 2 つのモードの周波数の差より小さくなる。バンド幅が広く、振幅の増幅が大きいセンサーを作るためには質量比が $\mu \equiv \alpha^{1/N}$ の N 個からなる系をつくる方法がある。

13.6.2 Interpreting narrow-band observations

ここで、励起エネルギー E が測定されたときの重力波の特徴的な振幅 h_c を評価する。

$$E = \frac{4}{15}\frac{\mathsf{M}v_s^4}{\mathsf{L}^2}|H(f_0)|^2 \tag{13.14}$$

（v_s は音速）となることを用いると、重力波のフーリエ変換 $H(f)$ がバンド $\Delta f_g = 1/\tau_g$ で一定として

$$h_c \equiv \frac{1}{\tau_g}|H(f_0)| \tag{13.15}$$

であり、(13.14) から

$$h_c = \frac{\sqrt{15}}{2}\frac{\mathsf{L}}{\tau_g v_s^2}\sqrt{\frac{E}{\mathsf{M}}} \tag{13.16}$$

となる。

13.7 A Real Bar

50 mK の棒で $h \sim 10^{-19}$ の感度が出る。

13.8 Quantum Mechanical Sensitivity "Limit"

不確定性原理 $\sigma_x\sigma_p \geq \hbar$ と、$\sigma_p = 2\pi f_0 M\sigma_x$（調和振動子）より

$$\sigma_x \geq \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi f_0 M}} \tag{13.17}$$

すなわち

$$h_{\mathrm{rms}} \geq \frac{1}{L}\sqrt{\frac{\hbar}{2\pi f_0 M}} \tag{13.18}$$

であり、$M = 10^6$ g, $f_0 = 1$ kHz, $L = 1$ m のとき $h_{\mathrm{rms}} \geq 4\times 10^{-21}$ となる。共振型の検出器では共振周波数を天文学的に興味のある周波数に合わせなければならず、物質中での音速が決まれば棒の長さも決まる。その結果棒の長さが短くなると、量子限界が大きくなる。量子限界を小さくするために棒を長くする、すなわち音速の大きい物質（silicon carbide）を選ぶと $h_{\mathrm{rms}} \approx 4\times 10^{-22}$ となる。

13.9 Beyond the Quantum "Limit"?

変換器の力学系と電気系の間の coupling を $\sin 2\pi f_0 t$ のように変調すると、物体の速度の $\sin 2\pi f_0 t$ 成分は検出できるが、$\cos 2\pi f_0 t$ 成分は検出できない。このとき、変換器から力学系への反作用は $\sin 2\pi f_0 t$ のような力となり、速度は $\cos 2\pi f_0 t$ のようになるので、これは検出にかからない。このような方法で量子限界を超えることができる。