# Chapter 11: Feedback Control Systems

30 April 2010, SEKIGUCHI Takanori

## 11.0 Introduction

11.0.1 Terminology

・control system: 命令（input）に従って行動（output）する機構

・servomechanism(servo): 物体の位置、方位、姿勢などを制御量として、目標値に追従するように自動で作動する機構のこと(Wikipedia)

・regulator: 出力される電流・電圧を一定に保つもの

11.0.2 General Feedback System

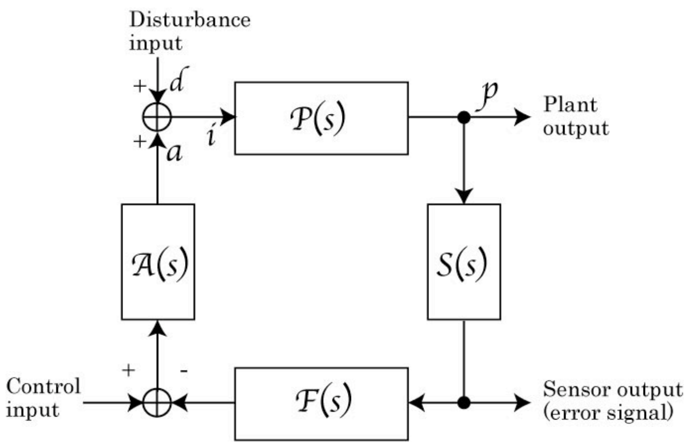


図 1：Feedback 回路の構成

$P(s), S(s), F(s), A(s)$ は伝達関数。

それぞれ Plant、Sensor、Filter、Actuator の頭文字か。

Filter の伝達関数のみ無次元量。他は次元を持っていてもよい。

## 11.1 Loop Transfer Function

$$G(s) \equiv P(s)S(s)F(s)A(s)$$

ループをどこかで切断し、両端の電圧や電流の周波数特性を比べたもの。

## 11.2 The Closed Loop Transfer Function

Feedback のループがない時の伝達関数が$H(s)$であるものに、ループ伝達関数が$G(s)$であるような Feedback 回路を取り付けると、その伝達関数$H_{cl}(s)$は

$$H_{cl}(s) \equiv \frac{H(s)}{1+G(s)}$$

となる。例えば図 1 で$H(s)=P(s)$の場合を考えると、Feedback 回路を加えることによって$P(s)$に対する入力は$i=d+a$となる。ループ伝達関数の定義から$a=-iPSFA=-iG$なので、

$$i \equiv \frac{d}{1+G}$$

が導ける。つまり$P(s)$に対する入力が$d$の$1/(1+G)$倍になるから、出力$p$も$1/(1+G)$倍となる。よって Feedback 回路を付け加えたことによって伝達関数が$1/(1+G)$倍になったように見える。

## 11.3 Designing the Loop Transfer Function

Feedback 回路によって出力を抑えるためには、ループ伝達関数$G(s)$をなるべく大きくしてやればよい。逆に、ある複素周波数$s$において分母$1+G(s)$が 0 に近くなると、その領域では伝達関数が大きく膨れ上がる。このような周波数を極$p_i$とよぶ。この極は Feedback 閉回路のあらゆるところで共通であり、どこを入力や出力と見なすかによらない。

ここで、常微分方程式によってダイナミクスが記述されるような線形システムの伝達関数は、$s$に関する有理関数（$s$に関する多項式の分数）によって記述することが可能である（らしい）。また因果律が成り立つようなシステムでは高周波数領域で伝達関数は急激に減少する（らしい）から、分子の多項式の次数は分母の多項式の次数よりも小さいはずである。よって伝達関数$H_{cl}(s)$は部分分数分解することができて、

$$H_{cl}(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{s-s_i} + \sum_{j=m+1}^{n'} \frac{b_j s + c_j}{s^2 + q_j s + r_j}$$

という形にできる。分母の形はどこを入力や出力と見なすかによらない。$d_i, p_i$を複素数としたこの形の方がわかりやすいかもしれない。

$$H_{cl}(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{s-p_i}$$

次に、入力に対する出力の時間依存性を見るため、インパルス応答（入力が$\delta(t)$だった時の出力$h(t)$）を考える。4 章で議論したように、インパルス応答$h(t)$と伝達関数$H_{cl}(s)$はフーリエ・逆フーリエの関係にある（今の場合、ラプラス・逆ラプラスと言うべきか？）。上の形で記述される伝達関数を逆ラプラス変換すると、$e^{p_i t}$に比例する項が登場する（もっと厳密に言うと、$n$重根が存在した時には$t^{n-1}e^{p_i t}$に比例する）。$p_i$の値によって$e^{p_i t}$の関数形は異なり、

・ $p_i$が実数：relaxation（減衰）
・ $p_i$が純虚数：sinusoidal（正弦波）
・ $p_i$が複素数：ringing（包絡線をもつ正弦波）

となる。

## 11.4 Instability

$p_i$の虚部は、正であっても負であっても応答の時間依存性はそれほど変わらない。しかし$p_i$の実部が正か負かは非常に大きな違いを生む。実部が負である時には関数は減衰するが、正である時には発散する。つまり、実部の符号によって系が安定か不安定かが分かれることになる。

不安定点の存在というのは現実世界では何の珍しいこともない（鉛筆の尖った先を机の上に立てるとか）が、Feedback に特徴的なのは、安定な系が不安定な系に化けることがあるということである。

### 11.4.1 Causes of instability

制御システムの構成物が有限の大きさを持つために、高周波数帯域において位相反転が起こる。例として、有限の大きさを持つ物体の動きを制御する時、物体の左側から変位を加えて物体の右側の変位を制御しようと思うと、物体の弾性により伝達関数

$$\frac{x_{right}}{x_{left}} = \frac{1}{\cos 2\pi\sqrt{m/k}\,f}$$

が生じる(グラフは p.178 Figure 11.5 参照)。入力に対して信号を減衰させる向きに Feedback が働けば制御できるのだが、高周波数で位相が反転するために、逆に信号を増幅させる方向に Feedback が働くことがある。

11.4.2 Stability tests

不安定になる条件として、ゲイン$|G(2\pi if)|$が 1 となるような周波数を $f_{unity}$ とするとき、

(a) $f_{unity}$ において$|G(2\pi if)|$が $f$ の増加とともに減少する

(b) 位相が負のフィードバックが正しく働く向きから 180°以上ずれている

ときに不安定となることが知られている。もっとよく知られているナイキストの条件で言うと、$|G(2\pi if)|$を $f$ の関数として複素平面上にプロットした時、グラフが（-1,0）を正の向きに囲えば不安定、囲わなければ安定となる。