

# DPF 用干渉計制御回路要求仕様

東大理 麻生 洋一

January 20, 2010

## 1 この文章の目的

DPF に用いられる干渉計制御回路の要求仕様を計算した。特に雑音要求値に主眼を置いている。

## 2 回路概要

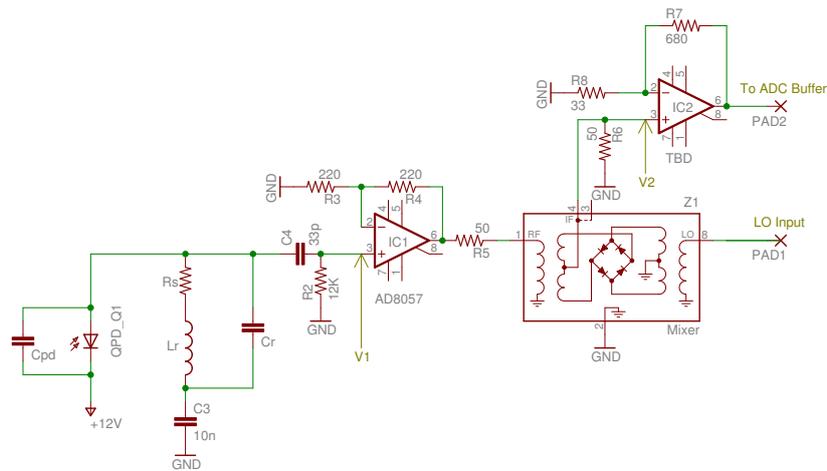


Figure 1: QPD 共振型 I-V 変換+復調回路

この文章で考える回路を図1に示す。これは、実際の回路をRF部分だけ取り出して簡略化している。また、QPDのうち1つの受光面のみを考えている。基本的な信号の流れは以下のとおり。(1) PDで発生した電流は共振回路のtransimpedanceで電圧に変換され、IC1でバッファされる。IC1は後段の50Ωインピーダンスマッチングで失われる6dBを補償する、6dBアンプとしても働く。(2) IC1の出力はMixerでLOと掛け合わされる。(3) MixerのIF出力をIC2でさらに増幅する。

### 3 入射雑音

この文章ではまず、IC1 と IC2 に対する入力換算雑音要求値を計算する。その際に、出発点となるのは PD に入射する光の雑音である。すなわち、PD に入射する光の雑音パワーをまず求めた上で、この雑音を回路に伝搬させ、各 IC の入力換算雑音が光起因の雑音を上回らないように要求する。この際、光に載っている雑音として、ショットノイズとレーザー周波数雑音を考える。

ショットノイズは、光子の量子性に起因する雑音であり、干渉計の最も基本となる雑音である。レーザーパワーを固定して考えた場合、Fabry-Perot 干渉計のショットノイズの下限は一意に決まる。この最低ショットノイズレベルよりも回路の雑音を下げることには意味がない。よって、ショットノイズから得られる回路雑音への要求値を満たしておけば、回路の性能としては万全である。しかし下に述べるように、ショットノイズから来る要求値は DPF においては過大である。従って、必ずしもこの要求値を満たす必要は無い。

DPF においては、レーザーの周波数雑音がショットノイズを大きく上回っており、これが感度のボトムラインを決めている。レーザー周波数雑音によって PD 上に生じる雑音電流から得られる回路雑音への要求値は、DPF において満たさなければならない最低限の雑音要求となる。

#### 3.1 ショットノイズ

完全に共振状態にある Cavity からの反射光の DC パワーは、入射レーザーパワー  $P_0$  と Carrier に対する Cavity 反射率  $r_0$  を用いて以下のように書ける。

$$P_{dc} = P_0(r_0^2 J_0(m)^2 + 2J_1(m)^2) \quad (1)$$

$$r_0 = r_{1b} - \frac{(t_1^2 r_2)}{(1 - r_1 r_2)} \quad (2)$$

ここで、 $m$  はレーザーにかける位相変調の振幅 (rad)、 $J_0, J_1$  は 0 次、及び 1 次の第一種ベッセル関数、 $r_1, r_{1b}, t_1$  はフロントミラーの表面振幅反射率、裏面振幅反射率および振幅透過率、 $r_2$  はエンドミラーの振幅反射率である。

$P_{DC}$  を用いて、ショットノイズによって PD に誘起される雑音電流のスペクトル密度は以下のように書ける。

$$I_{sn} = \sqrt{2e^2 \eta P_{DC} / 4h\nu_c} \quad (3)$$

ここで、 $e$  は素電荷、 $\eta$  は PD の量子効率、 $h$  はプランク定数、 $\nu_c$  は Carrier の振動数。ここでは QPD の 1 受光面のみを考えているので、 $P_{DC}$  は 1/4 されている。

Fabry-Perot 共振器には同じフィネスでも様々な反射率の組み合わせがあり得る。長さ情報を PDH 法で取得する場合、Critical Coupling、すなわち二つのミラーを同一反射率にした構成がショットノイズ最小になる。これは、Critical Coupling では Carrier が反射せずに全て透過するからである。また、位相変調の振幅 ( $m$ ) にも最適値があり、Critical Coupling の場合  $m = 1.5$  rad 程度が最適である。DPF のパラメータ (補遺 A 参照) では、 $I_{sn} = 2.8\text{pA}/\sqrt{\text{Hz}}$  である。

#### 3.2 周波数雑音

共振付近における PDH 信号の共振器長変動に対するゲインは、以下のように計算できる。

$$P_{mod} = 4P_0 J_0(m) J_1(m) g_c H_{FP}(\omega) \delta L \quad (4)$$

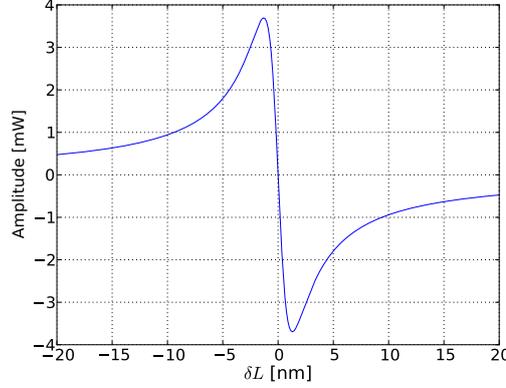


Figure 2: Cavity 長に対する PDH 信号の振幅

$$g_c = \frac{t_1^2 r_2}{1 - r_1 r_2} \quad (5)$$

$$H_{\text{FP}}(\omega) = \frac{4\pi\nu c}{c(1 - r_1 r_2)} \sqrt{\frac{1}{1 + (\tau\omega)^2}}, \quad \tau = \frac{2L\mathcal{F}}{\pi c} \quad (6)$$

ここで、 $P_{\text{mod}}$  は、共振器長が  $\delta L$  だけ変動した際に PD 上に位相変調周波数 ( $\omega_m$ ) で現れる光パワー変動の振幅である。 $\omega$  は共振器長変動の角振動数で、DPF においては対象とする周波数が Cavity の応答に比べて充分低いので、 $\omega = 0$  の場合のみを考えればよい。 $c$  は光速、 $L$  は Cavity 長、 $\mathcal{F}$  はフィネスである。 $\omega = 0$  における、 $\delta L$  と QPD の 1 受光面当たりに流れる光電流との関係は、約  $5 \times 10^5$  [A/m] である。

DPF のレーザー周波数雑音はストレインで  $1 \times 10^{-15}/\sqrt{\text{Hz}}$  程度と見積もられている。変位  $\delta L$  に直すと  $3 \times 10^{-16}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$  である。この値を用いて、QPD の 1 受光面当たりに誘起される周波数雑音起因の雑音電流スペクトル密度を計算すると、 $I_{\text{fm}} = 0.15\text{nA}/\sqrt{\text{Hz}}$  である。ただし、この  $I_{\text{fm}}$  は位相変調周波数  $\omega_m$  で変動する成分である。

## 4 最大入力信号

PDH 法の信号振幅は共振付近では式 (4) で表される。しかし、共振から離れるに従って、このような線形の関係は成り立たなくなる。Cavity 長を準静的にスイープした場合、図 2 のような PDH 信号が得られる。ここで縦軸は PD に入射する光パワーのうち、 $\omega_m$  で変動する成分の振幅である。式で表すと下のようになる。

$$P_{\text{PDH}}(\delta L) = -P_0 \frac{4r_2 t_1^2 J_0(m) J_1(m) \sin(4\pi\delta L/\lambda)}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(4\pi\delta L/\lambda)} \quad (7)$$

$P_{PDH}$  は  $\delta L = \lambda \tan^{-1} \left( \frac{r_1 r_2 - 1}{r_1 r_2 + 1} \right) / 2\pi$  の時に最大値を取り、

$$P_{\max} = P_0 \frac{4r_2 t_1^2 J_0(m) J_1(m) \sin \left[ 2 \tan^{-1} \left( \frac{r_1 r_2 - 1}{r_1 r_2 + 1} \right) \right]}{r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \left[ 2 \tan^{-1} \left( \frac{r_1 r_2 - 1}{r_1 r_2 + 1} \right) \right] + 1} \quad (8)$$

となる。DPFのパラメータでは、 $P_{\max} = 3.7 \text{ mW}$  であり、QPDの受光面1つ当たりに流れる光電流の $\omega_m$ における振幅は $I_{\max} = 0.32 \text{ mA}$ となる。

## 5 共振回路

PDに発生した電流は共振回路によってI-V変換される。この共振回路はQPDの接合容量+パッケージ寄生容量( $C_{pd}$ )、共振回路のキャパシタ( $C_r$ )と、インダクタ( $L_r$ )から構成される。共振のQ値を調整するために、 $L_r$ には直列にダンピング抵抗 $R_s$ が入れている。この共振回路のインピーダンスに、IC1の入力に付いているR2を並列接続することでトランスインピーダンスが計算できる。 $C_{pd}$ が40pF程度で、共振回路のQ値が10程度、共振周波数15MHzだとすると、その周波数に於いてトランスインピーダンス( $R_{tr}$ )は1.5k $\Omega$ 程度となる。

## 6 IC1(RF プリアンプ) に対する要求値

IC1の入力段(図1中のV1)において、 $I_{sn}$ ,  $I_{fn}$ ,  $I_{\max}$ がどのような電圧値を作り出すかは、それぞれに $R_{tr}$ をかければよい。

ショットノイズが作り出す雑音電圧は $V_{sn1} = 3.7 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ 、周波数雑音は、 $V_{fn1} = 0.2 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$ である。最大電圧は $V_{\max1} = 0.43 \text{ V}$ である。

IC1の入力換算電圧雑音は、 $V_{fn1}$ 以下でなければならない。できれば、 $V_{sn1}$ 以下であるほうが望ましいが、必須ではない。例えば、AD8057の入力換算電圧雑音は $7 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ であり、 $V_{sn1}$ よりも大きい。しかし、 $V_{fn1}$ よりは充分小さいので、許容範囲と考えられる。IC1の入力電流雑音と外付け抵抗がカップルして現れる雑音についても、入力換算電圧で $V_{fn1}$ を下回らなければならない。また、外付け抵抗の熱雑音も同様である。図1に示した素子値とAD8057を仮定して計算した入力換算雑音が図3に示されている。計算にはLISOを用いた。

上記IC1に対する要求値は全て $\omega_m$ の周波数における値である。

## 7 Mixer に対する要求値

IC1の最大入力 $V_{\max1} = 0.43 \text{ V}$ は、50 $\Omega$ で約6dBmに相当する。これがそのままMixerのRF入力の最大値になる。MixerのLOはこれより+10dB以上とするならば、Level16以上のMixerが必要である。

## 8 IC2(AF プリアンプ) に対する要求値

IC2の入力にはMixerのRF入力からMixerのConversion Lossだけ減衰され、周波数がDCに移った信号が入る。Conversion Lossとして-7dBを仮定すると、ショットノイズはIC2の入力段で $V_{sn2} = 1.7 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ となる。周波数雑音は、 $V_{fn2} = 89 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ 、最大入力電圧は $V_{\max2} = 0.2 \text{ V}$ 。これらの値は、DPFがターゲットとする0.1-10Hz程度の帯域におけるものであることに注意する。

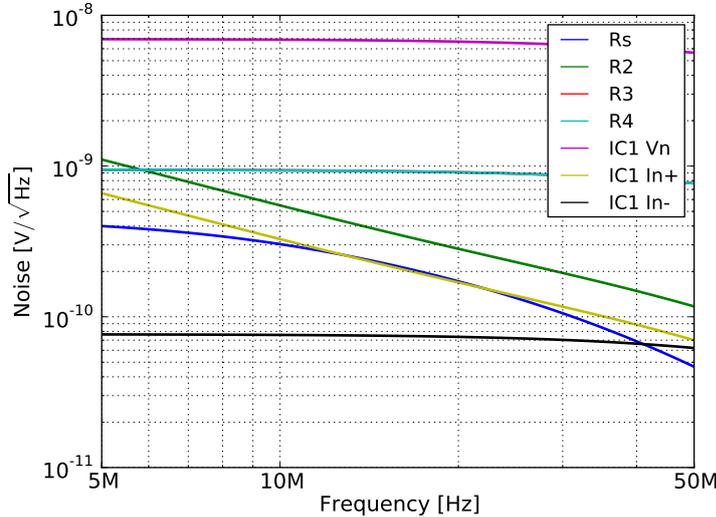


Figure 3: IC1 の入力換算雑音。Rs, R2, R3, R4 はそれぞれの抵抗起因の熱雑音。IC1 Vn は入力電圧雑音。In+と In-はそれぞれ+/-ピンの入力電流雑音。

LISO を用いて計算した IC2 の入力換算雑音を図 4 に示す。IC2 には OP27 を仮定した。

## 9 LO 位相雑音に対する要求

LO と RF の Carrier の間に  $\phi$  の位相差があるとすると、Mixer の変換効率は理想的な in-phase 復調に比べて振幅比で  $\cos(\phi)$  倍になる。今、 $\phi$  が  $\phi = \phi_0 + \Delta\phi$  というように、 $\Delta\phi$  だけ揺らいだ場合を考える。 $\phi_0 = 0$  であれば、このゆらぎの変換効率に与える影響は 2 次である。しかし、LO と RF に DC 的な位相差がある場合 (復調位相の調節が不完全な場合)、 $\Delta\phi$  の影響は大きく現れる。具体的には、Mixer のゲインが  $\sin(\phi_0)\Delta\phi$  だけ揺らぐことになる。

この  $\Delta\phi$  が雑音を作り出すには、定常的な雑音電圧が RF に入力されている必要がある。その量は制御後の残留 Cavity 長変動で決まる。Cavity の共振幅は波長 ( $1\mu\text{m}$ ) をフィネス (200) で割った程度であり、約  $5\text{nm}$  である。線形性の良い信号を得るには、制御によってさらにその  $1/100$  以下に共振器長変動を抑え込む必要がある。今残留共振器長変動をざっくり  $10\text{pm}/\sqrt{\text{Hz}}$  と置いて議論を進める。

$dL_{\text{RMS}} = 1 \times 10^{-11} \text{m}$  のとき、この残留変動による Mixer 出力の RMS 電圧は  $V_{\text{RMS2}} = 3 \text{mV}$  である。これに対して、 $\phi_0 = 10^\circ$  の復調位相ズレを仮定すると、 $\Delta\phi$  による雑音電圧は  $V_\phi = V_{\text{RMS2}} \cdot \sin(\phi_0) \cdot \Delta\phi$  で計算できる。これを、 $V_{\text{sn2}}$  や  $V_{\text{fn2}}$  と等しいとすれば、ショットノイズや周波数雑音から決まる LO 位相雑音への要求値が計算できる。具体的には、 $\Delta\phi_{\text{sn}} = 3.2 \times 10^{-6} \text{rad}/\sqrt{\text{Hz}}$ 、 $\Delta\phi_{\text{fn}} = 1.7 \times 10^{-4} \text{rad}/\sqrt{\text{Hz}}$  であり、dBc に変換するとそれぞれ、 $-115\text{dBc}$ 、 $-81\text{dBc}$  となる。

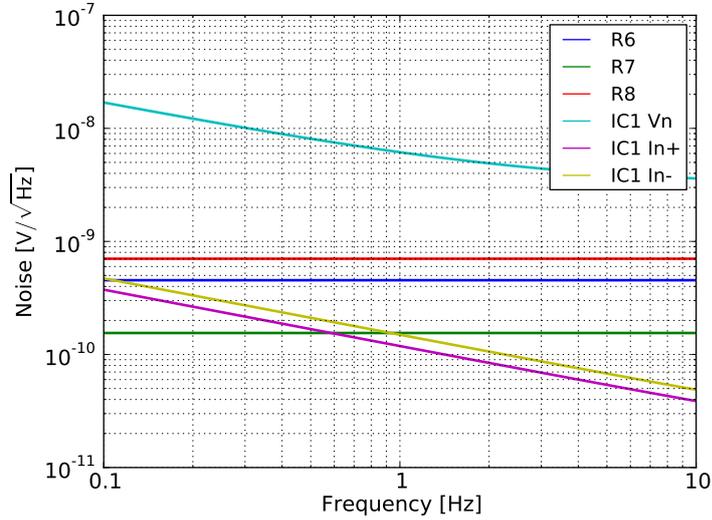


Figure 4: IC2 の入力換算雑音。R6, R7, R8, はそれぞれの抵抗起因の熱雑音。IC1 Vn は入力電圧雑音。In+ と In- はそれぞれ +/- ピンの入力電流雑音。

## 10 要求値の一覧

名称	記号	要求値	備考
PD 雑音電流 (SN)	$I_{sn}$	$2.8\text{pA}/\sqrt{\text{Hz}}$	QPD1 受光面当り
PD 雑音電流 (FN)	$I_{fn}$	$0.15\text{nA}/\sqrt{\text{Hz}}$	QPD1 受光面当り
IC1 入力換算雑音 (SN)	$V_{sn1}$	$3.7\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$	ショットノイズ起因。@15MHz
IC1 入力換算雑音 (FN)	$V_{fn1}$	$0.2\mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$	周波数雑音起因。@15MHz
IC1 最大入力電圧	$V_{max1}$	0.43 V	@15MHz
IC2 入力換算雑音 (SN)	$V_{sn2}$	$1.7\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$	ショットノイズ起因。@0.1-10Hz
IC2 入力換算雑音 (FN)	$V_{fn2}$	$89\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$	周波数雑音起因。@0.1-10Hz
IC2 最大入力電圧	$V_{max2}$	0.2 V	
Mixer 最大入力レベル		0.43V or 6dBm	50Ω
LO 位相雑音 (SN)		$3.2\mu\text{rad}/\sqrt{\text{Hz}}$ or -115dBc	ショットノイズ起因
LO 位相雑音 (FN)		$0.17\text{mrad}/\sqrt{\text{Hz}}$ or -81dBc	周波数雑音起因

### A 計算に用いたパラメータ

名称	記号	値	備考
入射レーザーパワー	$P_0$	25 mW	
フロントミラー反射率	$r_1$	0.992	振幅反射率
フロントミラー裏面反射率	$r_{1b}$	0.992	AR ロス込
フロントミラー透過率	$t_1$	0.125	振幅透過率
エンドミラー反射率	$r_2$	0.992	振幅反射率
共振器長	$L$	30 cm	
残留共振器長変動	$dL_{RMS}$	10pm/ $\sqrt{\text{Hz}}$	
フィネス	$\mathcal{F}$	200	
変調指数	$m$	1.5 rad	
PD 量子効率	$\eta$	0.42	QD-50-4X
PD 雑音電流	$I_{npd}$	60fA/ $\sqrt{\text{Hz}}$	QD-50-4X

Table 1: 光学パラメータ

名称	記号	値	備考
QPD ピン間容量	$C_{pd}$	40 pF	逆バイアス 12V
ダンピング抵抗	$R_s$	48 $\Omega$	Q=10
共振回路キャパシタ	$C_r$	22pF	
共振回路インダクタ	$L_r$	1.8 $\mu\text{H}$	
Mixer 変換ロス		7dB	
復調位相誤差	$\phi_0$	10°	

Table 2: 回路パラメータ