輪講　Saulson, Chapter 4　(日野幹雄『スペクトル解析』などを参考に)

理学部物理学科 4 年 05-081560 道村唯太

2010 年 1 月 13 日

4.1 Characterizing a Time Series

時系列データ $x(t)$ → フーリエ変換 $X(f)$ (周波数領域)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} \mathrm{d}f \tag{1}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} \mathrm{d}t \tag{2}$$

パワースペクトル密度の定義[1]

$$S(f) \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{|X(f)|^2}{T} \tag{3}$$

意味は「平均パワー $\overline{x^2(t)}$ への各周波数成分からの寄与」

$$\begin{aligned} \overline{x^2(t)} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{S(f)}}\mathrm{d}f \qquad \left(\because \text{Parseval の定理} : \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \mathrm{d}f\right) \end{aligned} \tag{4}$$

実際には $S(-f) = S(f)$ として $f \geq 0$ に対する片側パワースペクトル密度 $G(f) = 2S(f)$ を用いる。さらに、具体的数値を上げるときは平方根を取った振幅スペクトル密度 $\sqrt{G(f)}$ を用いる。単位は $\mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ などになる。
自己相関関数の定義は

$$C(\tau) \equiv \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{5}$$

τ だけずらした波形が元の波形とどのくらい似ているか。$\tau = 0$ で最大値。白色雑音のときは δ 関数になる。
$S(f)$ は $C(\tau)$ のフーリエ変換になっている (Wiener-Khintchine の定理)。

4.2 Linear Systems

入力 $x(t)$ に対し、出力 $y(t)$ を返す線形システムの周波数応答関数 (伝達関数) は以下のように定義される。

$$H(\omega) \equiv \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \tag{6}$$

入力が $\delta(t)$ だった時の出力であるインパルス応答を $h(t)$ とすると線形性、重ね合わせの原理より

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t')x(t-t')\mathrm{d}t' \tag{7}$$

これはたたみ込み積分になっているから、以下のような関係が得られる。

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega \tag{8}$$

[1] 参照→坪野公夫、安東正樹、麻生洋一: 物理学実験 II テキスト「ブラウン運動」 2 章

例えば、減衰のある振り子の運動方程式は

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \frac{g}{l}x = \frac{f}{m} \tag{9}$$

なので、フーリエ変換して $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$、$Q = \dfrac{\omega_0}{\gamma}$ とおくと振り子の伝達関数 $H(\omega)$ は

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)_{(\text{出力})}}{F(\omega)_{(\text{入力})}} = \frac{1}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\dfrac{\omega\omega_0}{Q}\right)} \tag{10}$$

と求まる。ω_0 は共振周波数、Q は Q 値。Bode 線図を書くと......(Figure 4.6)

4.3 The Signal-to-Noise Ratio

検出器の出力を $v(t)$、期待される信号を $s(t)$ とするとこれらの相互相関関数は

$$C_{vs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)s(t+\tau)\mathrm{d}\tau \tag{11}$$

SN 比は

$$\mathrm{SNR} \equiv \sqrt{S^2/N^2} \qquad (N^2 \equiv \sqrt{\overline{C_{vs}^2(t)}},\, S^2 \equiv |C_{vs}(t)|) \tag{12}$$