輪講資料

T.Sekiguchi (B4 in Yamanouchi Lab.)

2009.12.02.(Wed.)

1　はじめに

この資料は安東正樹さん ('95 卒) の修士論文の読解を目的として作られたものです．第 2 章から読み進めていきたいと思ったのですが，初っ端に登場する Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.4}$$

からして「その意味すらよくわからない」という自分の状況を鑑み，初回の輪講は一般相対性理論の復習 (自分にとっては初習) にあてさせていただきたいと思います．なお，資料はすべて須藤先生の「一般相対論入門」を参考に作成しました．

2　一般相対性理論の復習

2.1　一般相対論の基本的主張

物理量とは座標系によらない概念であり，座標変換について不変なものである．ところが，座標系が変化すると基底 (物理量を測るモノサシ) が変化するために，その成分が変換される．つまり，座標変換というのは同じものを首をかしげて別の方向から見るようなもので，基底ベクトルの選び方を変えることに相当するのである．

そして相対論の本質的な主張とは，**「およそ物理的に意味をもつ量はあまねく基底ベクトルで展開できるテンソルである」**ということである．

2.2　相対論を記述するための数学的準備

基底 (basis) という概念

ある時空上の任意の点 P において定義された物理量を $\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$ とする．ここで点 P とは**座標系に依らない概念**であり，またこの物理量も**座標系とは無関係に存在するもの**であることに注意しよう．しかし物理量を用いて具体的なことをするためには，その**成分**を見なければ先に進むことはできない．そこで便宜的に座標系を設定し，点 P まわりで局所的に定義される基底ベクトル (basis vector)$\boldsymbol{e}_\mu(\mathrm{P})$ を設定する．

基底ベクトルの変換性

ある点 P における基底ベクトルの 2 つの組を $\boldsymbol{e}_\mu(\mathrm{P}), \boldsymbol{e}_{\mu'}(\mathrm{P})$ とすると，互いに展開できるはずなので，

$$\boldsymbol{e}_{\mu'}(\mathrm{P}) = \varepsilon_{\mu'}{}^{\alpha}(\mathrm{P})\boldsymbol{e}_\alpha(\mathrm{P}) \tag{2.1}$$

と書けるはずである．ここで本来，物理量は時空のある一点で局所的 (local) に定義されるものなので，有限だけ離れた点 Q までの距離，といった非局在的な量を点 P だけで定義された $\boldsymbol{e}_\mu(\mathrm{P})$ によって展開することはできない．それが可能なのは，P から無限小だけ離れた点までの差だけであり，具体的には，

$$d\boldsymbol{x} = dx^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha(\mathrm{P}) \tag{2.2}$$

となる．これを今度は $\boldsymbol{e}_{\mu'}(\mathrm{P})$ を用いて展開し，(2.1) を代入すると，

$$d\boldsymbol{x} = dx^{\mu'}\boldsymbol{e}_{\mu'}(\mathrm{P}) = \varepsilon_{\mu'}{}^{\alpha}(\mathrm{P})dx^{\mu'}\boldsymbol{e}_\alpha(\mathrm{P}) \tag{2.3}$$

(2.2) と (2.3) を比較して，

$$dx^\alpha = \varepsilon_{\mu'}{}^{\alpha}dx^{\mu'} \qquad \therefore\ \varepsilon_{\mu'}{}^{\alpha} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \tag{2.4}$$

よって基底ベクトルの変換性は以下のように座標間の変換行列で書くことができる．

$$\boldsymbol{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\boldsymbol{e}_\alpha \tag{2.5}$$

計量テンソル (metric tensor)

基底ベクトル間に内積を定義し，

$$\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu \equiv g_{\mu\nu} \tag{2.6}$$

と書く．すると無限小離れた 2 点間の距離 (線素 linear element) が定義できて，次のように書ける．

$$ds^2 \equiv (d\boldsymbol{x})\cdot(d\boldsymbol{x}) = (dx^\mu\boldsymbol{e}_\mu)\cdot(dx^\nu\boldsymbol{e}_\nu) = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.7}$$

ベクトル (vector) **の変換性**

物理量 $\boldsymbol{A}$ が基底 $\boldsymbol{e}_\mu$ の線形結合で書ける時，これを**ベクトル**と呼ぶ．展開した時の成分を A^μ と書けば，A^μ は以下のような変換性を持つ．

$$A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha}A^\alpha \tag{2.8}$$

基底の変換性 (2.5) とは逆の変換性を持つので，これを $\boldsymbol{A}$ の反変 (contravariant) 成分とよぶ．

一方，物理量 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{e}_\mu$ の内積を取ってみると，

$$\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{A} = g_{\mu\alpha}A^\alpha \equiv A_\mu \tag{2.9}$$

となり，A^μ とは違うものが得られる．これは基底と同じ変換性

$$A_{\mu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}A_\alpha \tag{2.10}$$

を持つ．これを $\boldsymbol{A}$ の共変 (contravariant) 成分とよぶ．

テンソル (tensor) の変換性

物理量 $\boldsymbol{T}$ が n 個の基底ベクトルの積で展開できる時，$\boldsymbol{T}$ を n 階の**テンソル**と呼ぶ．

$$\boldsymbol{T} = T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \boldsymbol{e}_{\mu_1} \otimes \boldsymbol{e}_{\mu_2} \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{\mu_n} \tag{2.11}$$

任意の添字は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ およびその逆行列 $g^{\mu\nu}$ によって上下させることができて，例えば

$$T^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} g_{\mu_1 \nu_1} = T_{\nu_1}{}^{\mu_2 \cdots \mu_n} \tag{2.12}$$

のようにすることができる．すると添字が下にあるものに関しては基底と同じ変換性，上にあるものは基底とは逆の変換性を持つ．

共変微分 (covariant differentiation)

あるベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\beta$ 方向に関する「自然な」微分を考える．「自然な」というのは要するに，微分する際，基底ベクトルによって展開された成分だけを微分するのではなく，基底ベクトルそのものもひっくるめて微分を行うことを言う．ライプニッツの微分則 (chain rule) により，

$$\nabla_\beta \boldsymbol{u} = (\nabla_\beta u^\mu)\boldsymbol{e}_\mu + u^\mu(\nabla_\beta \boldsymbol{e}_\mu) = (u^\mu{}_{,\beta} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta} u^\alpha)\boldsymbol{e}_\mu \equiv u^\mu{}_{;\beta}\boldsymbol{e}_\mu \tag{2.13}$$

ここで $\mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}$ は $\boldsymbol{e}_\beta$ 方向に $\boldsymbol{e}_\alpha$ を微分した時の $\boldsymbol{e}_\mu$ 成分を表すもので，**接続係数** (connection coefficient) と呼ばれる．接続係数はテンソルではなく，変換則はテンソルのそれと異なる．

リーマン接続とクリストッフェル記号

接続係数としては色々なものが考えられるが，一般相対論では普通，下の添字について対称なもの

$$\mathit{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \mathit{\Gamma}^\alpha_{\gamma\beta} \tag{2.14}$$

を用いる．これは物理的には，時空の任意の点において局所的に $\mathit{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ とできるための必要十分条件となっている．また任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ を平行移動させた時にその大きさが不変である，という条件を課すと，$\mathit{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ を $g_{\mu\nu}$ から一意的に構成することができて，

$$\mathit{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \equiv g^{\alpha\mu}\mathit{\Gamma}_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) \tag{2.15}$$

となる．これを特に**クリストッフェル記号** (Christoffel symbol) と呼ぶ．クリストッフェル記号によって基底ベクトルの接続 (平行移動) を定義することを**リーマン接続** (Riemann connection) と呼ぶ．

リーマンの曲率テンソル (Riemann's curvature tensor)

ベクトルを平行移動した結果は，経路に依存して変化する．これは，共変微分が一般には可換ではないことを意味している．リーマンの曲率テンソルとは，同じベクトルを，(i) $\boldsymbol{e}_\beta$ 方向に平行移動 → $\boldsymbol{e}_\gamma$ 方向に平行移動したときと，(ii) $\boldsymbol{e}_\gamma$ 方向に平行移動 → $\boldsymbol{e}_\beta$ 方向に平行移動したときの差を表す量であり，

$$R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} \equiv \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\gamma,\beta} - \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta,\gamma} + \mathit{\Gamma}^\mu_{\lambda\beta}\mathit{\Gamma}^\lambda_{\alpha\gamma} - \mathit{\Gamma}^\mu_{\lambda\gamma}\mathit{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta} \tag{2.16}$$

で定義される．あるいは，共変微分を用いて

$$(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)A^\mu \equiv R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}A^\mu \tag{2.17}$$

と定義される．また，添字の縮約により，**リッチテンソル** (Ricci tensor) および**曲率スカラー** (curvature scalar) が定義される．

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} \tag{2.18}$$

$$R \equiv R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\alpha\beta} R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} \tag{2.19}$$

2.3 相対論での運動方程式

測地線の方程式 (重力以外の外力が存在しない時)

ニュートンの第 1 法則は，「外力が働かない場合の質点の軌道は直線である」というものであった．これをリーマン時空における一般相対論に拡張すれば，「**重力以外**の力が働かない場合の質点の軌道は測地線である」ということになる．この「測地線 (geodesic line)」を求める方程式は様々な導き方があるが，ここではニュートン力学における変分法の一般化から導いてみる．

ニュートン力学では，自由粒子の運動方程式を最小作用の原理から導くことができる．

$$I = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} L\ dt = \frac{1}{2} m \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} |\boldsymbol{v}|^2 dt\ ; \quad \delta I = 0 \tag{2.20}$$

これを 4 次元時空に拡張 (共変化) して，

$$dt \longrightarrow d\tau, \quad |\boldsymbol{v}|^2 = \delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \longrightarrow g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \tag{2.21}$$

と置き換えてみよう．そしてこの置き換えで得られる作用

$$I \equiv \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} d\tau \tag{2.22}$$

を変分してみることを考える．”·”は $\frac{d}{d\tau}$ を意味するものとすると，オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \tag{2.23}$$

にラグランジアン $L = g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$ を代入して，(2.15) を使うと，最終的に

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \mathit{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{2.24}$$

が得られる．この式は測地線の方程式と呼ばれ，左辺第 1 項は加速度，第 2 項は重力に相当する．

ニュートン理論との対応

ただ，このままでは重力がどこに入っているのかよくわからない．それを理解するために，ニュートン理論との対応を考えてみよう．測地線方程式 (2.24) の空間成分を考えると，

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \mathit{\Gamma}^{i}{}_{00} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + 2\mathit{\Gamma}^{i}{}_{0j} \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} + \mathit{\Gamma}^{i}{}_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0 \tag{2.25}$$

ここで，(i) 重力場が弱い ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$，$|h_{\mu\nu}| \ll 1$)，(ii) 質点の速度が非相対論的 ($|v^i| \ll 1$)，(iii) 重力場の時間変化が無視できる ($|h_{\mu\nu,0}| \approx 0$) という 3 つの条件を課すと，

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\frac{\partial}{\partial x^i}\left(-\frac{h_{00}}{2}\right) \tag{2.26}$$

となり，ニュートン力学での重力ポテンシャル φ が計量と $\varphi = -h_{00}/2$ という関係にあれば，ニュートン力学はの運動方程式に帰着することになる．

2.4　重力場の方程式

マッハの原理 (Mach's principle)

マッハの原理は，「物体のもつ慣性は，宇宙内にあるすべての物質の存在に起因する」と表現できる．つまり，

$$\textbf{時空の幾何学} \Longrightarrow \text{重力} \Longrightarrow \text{物質の運動} \Longrightarrow \textbf{物質分布} \tag{2.27}$$

という流れと，それとは逆方向の

$$\textbf{時空の幾何学} \Longleftarrow \text{重力} \Longleftarrow \textbf{物質分布} \tag{2.28}$$

とのせめぎあいで互いに相手を規定した結果として，物質分布と時空がともに落ち着くべきところに落ち着いている，という考え方である．「鶏と卵」の話にちょっと似ているかもしれない．

マッハの原理をもう少し推し進めると，時空の幾何学を決める計量 $g_{\mu\nu}$ と，抽象的に「物質分布」を表現するテンソル $T_{\mu\nu}$ が存在し，これらの間に何らかの関係が導けるはずだと考えられる．このような 2 階のテンソルは確かに定義できて，**エネルギー運動量テンソル** (energy momentum tensor) と呼ばれる．

エネルギー運動量テンソル

非相対論的流体力学で登場する応力テンソルを 4 次元化したものを，エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ としてここでは採用しよう．各成分の物理的な意味は以下の通りである．

- T^{00}：エネルギー密度
- T^{i0}：運動量密度の第 i 成分
- T^{0j}：エネルギーフラックスの第 j 成分
- T^{ij}：x^j 軸に垂直な単位面積に働く力の第 i 成分

エネルギー保存則や運動量保存則から，$T^{\mu\nu}$ が添字について対称であることが導ける．例えば電磁場に対するエネルギー運動量テンソルは，

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & S_x & S_y & S_z \\ S_x & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

となる．ここで，

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \text{: 電磁場のエネルギー密度} \tag{2.30}$$

$$S_i = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) \text{：ポインティングベクトル} \tag{2.31}$$

$$\sigma_{ij} = -\varepsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{\mu_0}B_i B_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right) \text{：マクスウェルの応力テンソル} \tag{2.32}$$

である．

アインシュタイン方程式

　では，いよいよ一般相対論の核心とも言うべき重力場の方程式を構築する．物質分布 $T_{\mu\nu}$ を与えたとき，それと整合的な時空の計量 $g_{\mu\nu}$ を具体的に計算する微分方程式を

$$\text{時空の方程式}\ (g_{\mu\nu}) = \text{物質の方程式}\ (T_{\mu\nu}) \tag{2.33}$$

として見つけたいと思う．とりあえず $g_{\mu\nu}$ は 10 個の独立成分を持っており，これを求めるには，少なくとも 10 個の独立な式が必要である．とすれば，もっとも考えやすいのは，両辺がともに 2 階の対称テンソルの場合である．そこで $T_{\mu\nu}$ がすでに対称テンソルであることに注目し，右辺を $\kappa T_{\mu\nu}$ と置いてしまうことにする (κ はある定数)．すると，重力場の方程式として

$$G_{\mu\nu}(\leftarrow g_{\mu\nu}\text{から作られる}) = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2.34}$$

という形が考えられる．この $G_{\mu\nu}$ が満たすべき条件は以下の通りである．

(A)　μ と ν の添字に対して対称なテンソル

(B)　ミンコフスキー時空 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ に対し 0 となる (物質が無い場合に $\eta_{\mu\nu}$ を解として取り得る)

(C)　$g_{\mu\nu}$，$g_{\mu\nu,\alpha}$，$g_{\mu\nu,\alpha\beta}$ だけから構築される (なるべく簡単な形であって欲しいが，局所ローレンツ系で $g_{\mu\nu,\alpha}$ は 0 となってしまうので，2 階微分を含まざるを得ない)

(D)　ただなるべく簡単なものとして，$g_{\mu\nu,\alpha\beta}$ に関して線形

(E)　$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ を恒等的に満たす (右辺のエネルギー運動量保存則より)

これらの要請を満たすテンソルは，以下のアインシュタインテンソル (Einstein tensor) 以外存在しない．

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{2.35}$$

ただし，リッチスカラー (Ricci scalar)R，リッチテンソル (Ricci tensor)$R_{\mu\nu}$，リーマンテンソル (Riemann tensor)$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$，クリストッフェル記号 (Christoffel symbol)$\mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\lambda}$ の定義は次のようであった．

$$R \equiv R^{\alpha}{}_{\alpha} \tag{2.36}$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \tag{2.37}$$

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} \equiv \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\beta,\alpha} - \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\alpha,\beta} + \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\gamma\alpha}\mathit{\Gamma}^{\gamma}{}_{\nu\beta} - \mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\gamma\beta}\mathit{\Gamma}^{\gamma}{}_{\nu\alpha} \tag{2.38}$$

$$\mathit{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\lambda} \equiv \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\alpha}) \tag{2.39}$$

ニュートン理論との対応

ニュートン理論との対応を考えることにより，定数 κ を決定する．まずリーマンテンソルの定義式から，リッチテンソルをクリストッフェル記号で表すことができて，

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\alpha} \tag{2.40}$$

特にこの 00 成分は,

$$R_{00} = \Gamma^{\alpha}{}_{00,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{0\alpha,0} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\gamma}{}_{00} - \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma 0}\Gamma^{\gamma}{}_{0\alpha} \tag{2.41}$$

ここでさきほど同様, (i) 重力場が弱い ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$), (ii) 質点の速度が非相対論的 ($|v^i| \ll 1$), (iii) 重力場の時間変化が無視できる ($|h_{\mu\nu,0}| \approx 0$) という 3 つの条件を課すと，まず (i) の条件から,

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} \approx \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}(h_{\alpha\nu,\lambda} + h_{\alpha\lambda,\nu} - h_{\lambda\nu,\alpha}) \tag{2.42}$$

すなわち $\Gamma \sim \mathcal{O}(\langle)$ となっていることがわかる．よってこれを (2.41) に代入し h に関する 1 次の項だけを取ると，(2.41) の最後の 2 項は無視できることがわかり,

$$R_{00} \approx \Gamma^{\alpha}{}_{00,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{0\alpha,0} \tag{2.43}$$

さらに条件 (iii) から，(2.43) の第 2 項も無視することができて,

$$R_{00} \approx \Gamma^{i}{}_{00,i} \approx \Delta\varphi \tag{2.44}$$

となる．つまり R_{00} はニュートン理論における重力ポテンシャルのラプラシアンを与える．

これに対応する物質場を考えるため，まずアインシュタイン方程式の両辺のトレースを考える．

$$\begin{gathered} R^{\mu}{}_{\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu}{}_{\mu}R = R^{\mu}{}_{\mu} - \frac{1}{2}4R = -R = \kappa T^{\mu}{}_{\mu} \equiv \kappa T \\ \therefore\ R = -\kappa T \end{gathered} \tag{2.45}$$

これをアインシュタイン方程式に代入すれば,

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{2.46}$$

より，00 成分は以下のように書き下せる．

$$R_{00} = \kappa\left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T\right) \approx \frac{\kappa}{2}\left(T_{00} + \sum_{i=1}^{3} T_{ii}\right) \tag{2.47}$$

ただし，$g_{00} \approx -1$ を用いた．ここで条件 (ii) から，$T_{\mu\nu}$ として非相対論的完全流体を考えると,

$$R_{00} \approx \frac{\kappa}{2}\left[\rho + \sum_{i=1}^{3}(\rho {v_i}^2 + p)\right] \approx \frac{\kappa}{2}\rho \tag{2.48}$$

これがニュートン理論での重力場の方程式 $\Delta\varphi = 4\pi G\rho$ と一致するよう要請すれば,

$$\kappa = 8\pi G \tag{2.49}$$

となる．なお，c を含めた単位系で書けば，$\kappa = 8\pi G/c^4$ となる．