輪講 Saulson

理学部物理学科　05-081517　榊原裕介

2010 年 1 月 27 日

7　THERMAL NOISE

7.1　Brownian Motion

熱雑音の古典的な形は、水に浮かぶ塵や花粉の粒が揺れるブラウン運動である。アインシュタインは、水分子の粒子への衝突が粒子の運動エネルギー散逸の起源であると考え、変位の 2 乗平均が (7.1) のようになることを示した。

7.2　Brownian Motion of a Macroscopic Mass Suspended in a Dilute Gas

Figure 7.1 のような状況を考え、気体は希薄とし、分子の平均自由行程は十分長いとする。片面からの単位時間あたりの衝突個数は、

$$N = \frac{1}{4} n\bar{v}A = nA\sqrt{\frac{k_BT}{2\pi\mu}} \tag{7.2}$$

となり、この力は

$$F_+ = PA = nk_BTA \tag{7.3}$$

となる。時間 τ に衝突する分子数が Poisson 統計に従うとすると

$$\frac{\sigma_{N\tau}}{N\tau} = \frac{1}{\sqrt{N\tau}} \tag{7.4}$$

であり、(7.2)、(7.3) より

$$\sigma_F^2 \sim (k_BT)^2 \frac{nA}{\bar{v}\tau} \tag{7.5}$$

となる。さらに、shot noise の時と同様にパワースペクトルは

$$F^2(f) \sim (k_BT)^2 \frac{nA}{\bar{v}} \tag{7.6}$$

となる。また、表面に垂直に速度 v_p で運動する場合には摩擦力

$$F_{\text{fric}} = -\frac{1}{4} nA\mu\bar{v}v_p \equiv -bv_p \tag{7.7}$$

が働き、(7.6) は

$$F^2(f) \sim k_BTb \tag{7.8}$$

となり、揺動 (fluctuation) は散逸の係数 b に比例している。

7.3 The Fluctuation-Dissipation Theorem

この揺動と散逸の関係は、系が線形で熱平衡にあるとき成り立つ。系が線形のとき、運動方程式は外力 $F_{\rm ext}(f)$、速度 $v(f)$ を用いて $F_{\rm ext} = Zv$ あるいは $v = YF_{\rm ext}$ と書くことができ、$Z(f)$ はインピーダンス、$Y(f) \equiv Z^{-1}(f)$ はアドミッタンスと呼ばれる。このとき、力、変位のスペクトルは

$$
\begin{aligned}
F^2_{\rm therm}(f) &= 4k_BT\Re(Z(f)) &\quad (7.11)\\
x^2_{\rm therm}(f) &= \frac{k_BT}{\pi^2 f^2}\Re(Y(f)) &\quad (7.12)
\end{aligned}
$$

となる (揺動散逸定理)。前の例の運動方程式 $F_{\rm ext} = m\ddot{x}+b\dot{x}+kx$ を周波数領域で書き直すと $x = v/i2\pi f,\ \ddot{x} = i2\pi fv$ を用いて

$$Z \equiv \frac{F_{\rm ext}}{v} = b + i2\pi fm - i\frac{k}{2\pi f} \tag{7.14}$$

となる。よって (7.11) は

$$F^2_{\rm therm}(f) = 4k_BTb \tag{7.15}$$

となり、(7.8) が得られた。また、変位のスペクトルを得るには $F_{\rm ext} = Zv$ より

$$x^2_{\rm therm}(f) = \left(\frac{1}{i2\pi fZ}\right)^2 F^2(f) \tag{7.17}$$

を使うか、$Y(f) \equiv Z^{-1}(f)$ を計算して (7.12) を用いればよい。結果は (7.20) で与えられる。

7.4 Remarks on the Fluctuation-Dissipation Theorem

- 散逸現象のミクロなモデルを作る必要がなく、インピーダンスを求めるためのマクロなモデルで十分である。
- 共振周波数から離れたところで、熱雑音による変位のスペクトルを小さくするには、散逸を小さくすればよい。

7.5 The Quality Factor, Q

Q 値の 3 つの概念

- 共鳴ピークの全幅 Δf を用いて（定義）$Q \equiv f_0/\Delta f$
- 伝達関数の共鳴ピークにおける振幅と十分低い周波数における振幅の比 $Q = f_0^2/g_d(f_0)$
- 振動の振幅が $1/\sqrt{e}$ となる時間に相当する位相 $Q = \pi f_0\tau_0$

7.6 Thermal Noise in a Gas-Damped Pendulum

ここで熱雑音を具体的に評価する。(7.20) に具体的な数値 $f_0 = 1$ Hz, $m = 10$ kg, $P = 10^{-6}$ torr, $A = 400\ {\rm cm}^2$, $T = 300$ K などを代入し、片腕の長さ $L = 4$ km として $h(f) = 2/L \times x(f)$ をプロットしたものが Figure 7.3 である。$f \gg f_0$ で $h(f) \propto f^{-2}$ となる。