

# Quantum Optics Chapter 2

理学系研究科 物理学専攻 坪野研究室 修士課程 1年 道村唯太  
2010年4月30日

## 2 Coherent and squeezed states of the radiation field

### 2.1 Radiation from a classical current

古典的 (演算子でない) 電流分布からの輻射は coherent state

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)|0\rangle \quad (2.1.10)$$

### 2.2 The coherent state as an eigenstate of the annihilation operator and as a displaced harmonic oscillator state

消滅演算子  $a$  の固有状態 (固有値  $\alpha$ ) としても定義できる  
coherent state は真空に変位演算子  $D(\alpha)$  を掛けたもの

$$D(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} = e^{|\alpha|^2/2} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \quad (2.2.5), (2.2.9), (2.2.8)$$

### 2.3 What is so coherent about coherent states?

まず number state  $|n\rangle$  の座標表示を考える  $\rightarrow \phi_n(q)$  (2.3.5)

この uncertainty product は

$$\Delta p \Delta q = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \quad (2.3.13)$$

最小になるのは  $\phi_0(q)$ 。

$\phi_0(q)$  の位置を  $q_0$  だけずらした波束  $\psi(q, 0)$  (2.3.14) は、形を変えずに振動する

it sticks together or *coheres* (2.3.15)

(2.3.14) を書き換えると (2.3.16) で、これは coherent state の座標表示になっている。

$$\psi(q, 0) = \left(\frac{\nu}{\pi \hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\nu}{2\hbar}(q - q_0)^2\right] = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle q|n\rangle = \langle q|\alpha\rangle \quad (2.3.14), (2.3.16)$$

### 2.4 Some properties of coherent states

(a)  $|\alpha\rangle$  で  $n$  個の光子を見つける確率は Poisson 分布  $p(n)$  (2.4.2)

(b) 不確定性が最小  $\Delta p \Delta q = \frac{\hbar}{2}$  (2.4.3)

(c) 完全性 (2.4.6)

(d) 直交系ではない (2.4.7) *overcomplete*

## 2.5 Squeezed state physics

squeezed state の単振動 (simple harmonic oscillator) → Fig 2.3 波束は半周期毎に sharp になる  
 電場  $E$  中の、ばねに繋がれた質量  $m$ 、電荷  $e$  の SHO を考える。

一様 (→  $a$  と  $a^\dagger$  の 1 次) な電場を掛けて切る → Fig 2.4 coherent state

$x$  の 2 次の形で表される (→  $(a + a^\dagger)^2$  の形) 電場ポテンシャルをかける → Fig 2.6 squeezed state

## 2.6 Squeezed states and the uncertainty relation

$X_1 = \frac{1}{2}(a + a^\dagger)$  と  $X_2 = \frac{1}{2}(a - a^\dagger)$  を用いて

$$\mathbf{E}(t) = \mathcal{E}\hat{\epsilon}(ae^{-i\nu t} + a^\dagger e^{i\nu t}) \quad (2.6.5) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{E}(t) = 2\mathcal{E}\hat{\epsilon}(X_1 \cos \nu t + X_2 \sin \nu t) \quad (2.6.11)$$

$(\Delta X_i)^2 < \frac{1}{4}$  だったら squeezed state、 $\Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{4}$  だったら ideal squeezed state。

squeezed state で  $X_i$  のどちらか一方のノイズが減ると振幅か位相のノイズが減る → Fig 2.7

## 2.7 The squeeze operator and the squeezed coherent states

squeeze operator

$$S(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi a^{\dagger 2}\right) \quad (\xi = r e^{i\theta}) \quad (2.7.3)$$

squeezed coherent state

$$|\alpha, \xi\rangle = S(\xi)D(\alpha)|0\rangle \quad (2.7.10)$$

### 2.7.1 Quadrature variance

$X_i$  ではなく  $\theta/2$  回転させた  $Y_i$  を使う。

$$Y_1 + iY_2 = (X_1 + iX_2)e^{-i\theta/2} = ae^{-i\theta/2} \quad (2.7.8), (2.7.14)$$

coherent state では  $(\Delta X_i)^2 = \frac{1}{4}$  だった。squeezed coherent state では

$$(\Delta Y_1)^2 = \frac{1}{4}e^{-2r}, \quad (\Delta Y_2)^2 = \frac{1}{4}e^{2r} \quad (2.7.15), (2.7.16)$$

で、ideal squeezed。

$r$  は squeezed 度合いを決めるパラメータになっている。

Fig 2.8:  $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$ 。error ellipse は  $X_i$  軸を  $\theta/2$  回転させた  $Y_i$  軸と平行な軸を持つ。

## 2.8 Multi-mode squeezing

two-mode squeezing。  $\nu$  まわりに対称的に位置した 2 つのモードに対する生成消滅演算子から作った演算子

$$S(\xi) = \exp\left(\xi^* a_{\nu+\nu'} a_{\nu-\nu'} - \xi a_{\nu+\nu'}^\dagger a_{\nu-\nu'}^\dagger\right) \quad (2.8.1)$$

を two-mode vacuum にかければよい。

## Problems

順次追加予定

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5 混乱を避けるために

$$|\alpha, \xi\rangle = S(\xi)D(\alpha)|0\rangle, \quad |\xi, \alpha\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle$$

とする。

$$\langle \xi, \alpha | a | \xi, \alpha \rangle = \langle 0 | S^\dagger D^\dagger a D S | 0 \rangle = \langle 0 | S^\dagger (a + \alpha) S | 0 \rangle = \langle 0 | (a \cosh r - a^\dagger e^{i\theta} \sinh r) | 0 \rangle + \alpha = \alpha$$

以下同様に、 $|0\rangle$  ではさむと  $a$  や  $a^\dagger$  や  $a^\dagger a$  の項は残らないことに注意して計算すると

$$\begin{aligned} \langle \xi, \alpha | a^2 | \xi, \alpha \rangle &= \alpha^2 - e^{i\theta} \sinh r \cosh r \\ \langle \xi, \alpha | a^{\dagger 2} | \xi, \alpha \rangle &= \alpha^{*2} - e^{-i\theta} \sinh r \cosh r \\ \langle \xi, \alpha | a^\dagger a | \xi, \alpha \rangle &= |\alpha|^2 + \sinh^2 r \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} (\Delta Y_1)^2 = \langle Y_1^2 \rangle - \langle Y_1 \rangle^2 &= \frac{1}{4} \langle (ae^{-i\theta/2} + a^\dagger e^{i\theta/2})^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle ae^{-i\theta/2} + a^\dagger e^{i\theta/2} \rangle^2 \\ &= \frac{1}{4} ((\alpha^2 - e^{i\theta} \sinh r \cosh r) e^{-i\theta} + 1 + 2(|\alpha|^2 + \sinh^2 r) + (\alpha^{*2} - e^{-i\theta} \sinh r \cosh r) e^{i\theta}) \\ &\quad - \frac{1}{4} (\alpha^2 e^{-i\theta} + \alpha^{*2} e^{i\theta} + |\alpha|^2) \\ &= \frac{1}{4} (1 - 2 \sinh r \cosh r + 2 \sinh^2 r) \\ &= \frac{1}{4} e^{-2r} \end{aligned}$$

同様に

$$(\Delta Y_2)^2 = \frac{1}{4} e^{2r}$$

ちなみに、計算があていれば

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \xi | (Y_1 + iY_2) | \alpha, \xi \rangle &= \operatorname{Re}(\alpha e^{-i\theta/2}) e^{-r} + i \operatorname{Im}(\alpha e^{-i\theta/2}) e^r \\ \langle \xi, \alpha | (Y_1 + iY_2) | \xi, \alpha \rangle &= \operatorname{Re}(\alpha e^{-i\theta/2}) + i \operatorname{Im}(\alpha e^{-i\theta/2}) \\ &= \alpha e^{-i\theta/2} \\ &= \langle \alpha | (Y_1 + iY_2) | \alpha \rangle = \langle \alpha | (X_1 + iX_2) | \alpha \rangle e^{-i\theta/2} \end{aligned}$$

2.6

2.7

2.8