
物理学実験 II

ブラウン運動

— 第1日目 —

確率過程について
抵抗の熱雑音の測定実験

確率過程 (1)

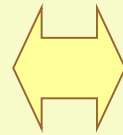
— 確率分布 —

- 確率過程 (ランダムプロセス)

時間とともに不規則に変動する確率事象

ただし…

本実験で扱う確率過程は
すべてエルゴートプロセスである



時間平均と集合平均が一致

$$\langle x \rangle = \bar{x}$$

確率過程を調べるには**確率密度関数**が大事

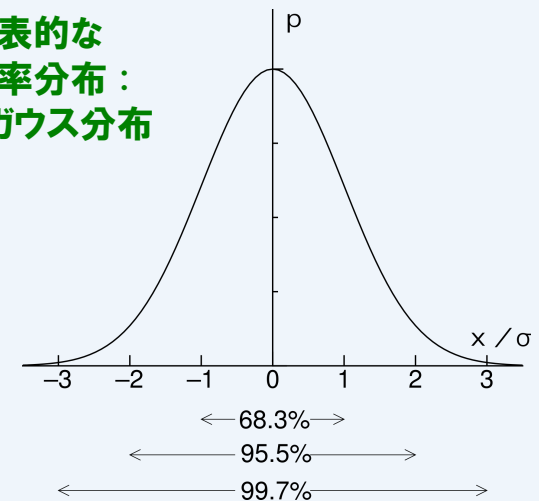
確率変数 x が

x と $x + dx$ の間にある確率: $p(x)dx$

確率の定義から

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad \text{が成り立つ}$$

代表的な
確率分布:
ガウス分布



確率過程 (2)

－ ヒストグラム －

・ ヒストグラム

長時間の測定を行い

値が x と $x + dx$ の間にある頻度を調べる

↓ 適切な規格化のもとで

測定時間が十分ならば **確率密度関数に漸近**

ただし、時間に関する情報は失われる



↓ 時間軸を拡大



⇒ **ヒストグラムは一致**

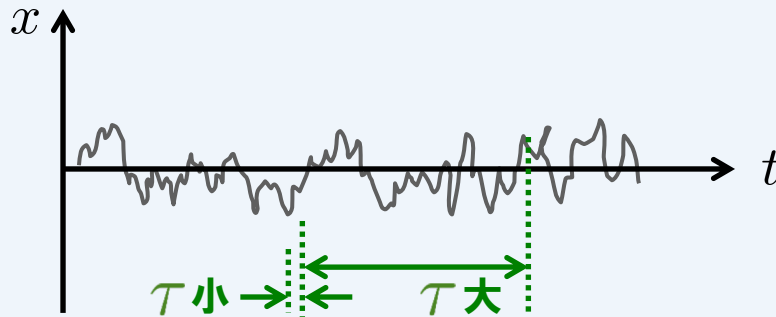
確率過程 (3)

— 自己相関関数 —

自己相関関数

定義：時間 τ だけ後の値との相関

$$C(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle$$



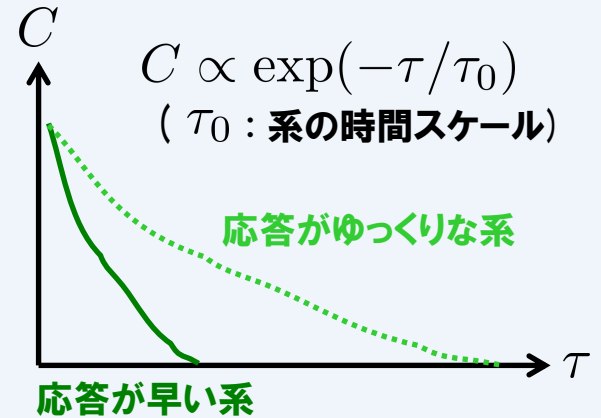
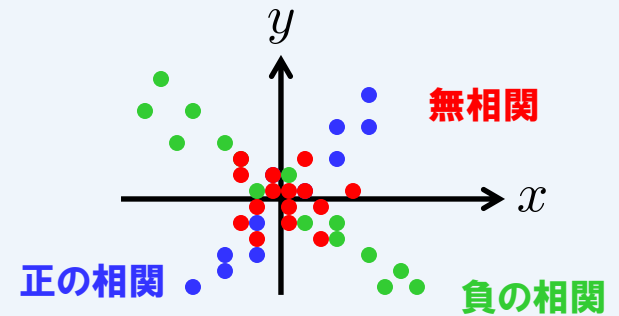
有限の応答時間
→ 相関が残っている

十分な時間が経過
→ 相関はほとんど無くなる



どれくらい時間が経過すると相関が無くなるか
系の応答の典型的な**時間スケール**を表す

c.f. 相関関数 $C_{xy} = \langle x(t)y(t) \rangle$
xとyの相関の強さを表す



確率過程 (4)

— パワースペクトル —

・ パワースペクトル

定義: フーリエスペクトルの2乗平均で定義

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} \right\rangle$$

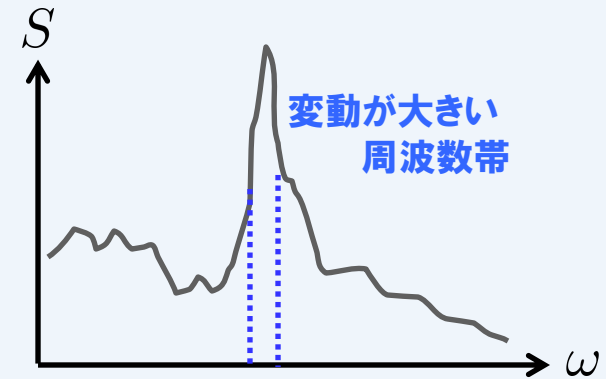
このとき、次式が成り立つ

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

➡ パワースペクトルは
ランダム変動の平均パワーに対する
各周波数成分の寄与を表す



系の応答の典型的な周波数を表す

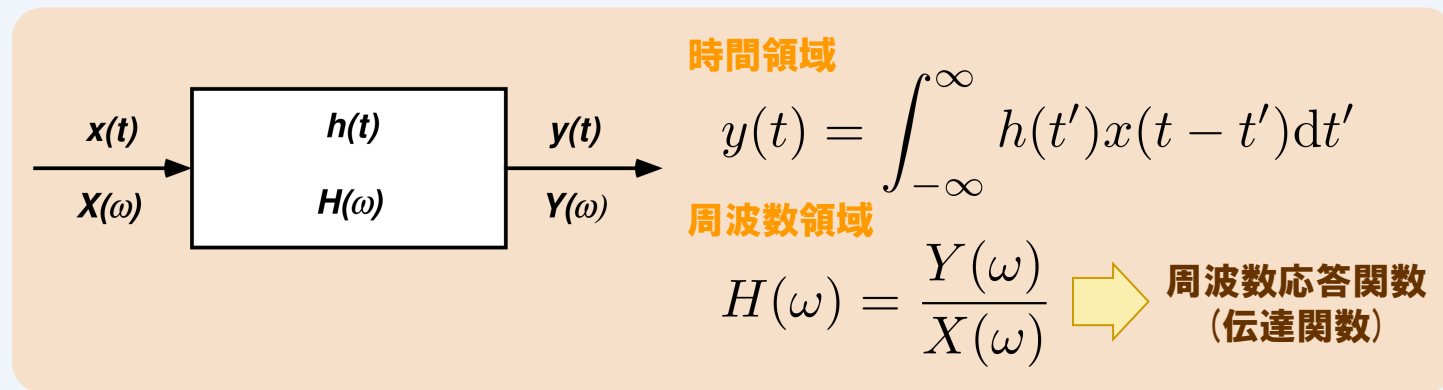


確率過程 (5)

— 線型システム —

線型系

入力と出力が線型関係で結ばれた系



このとき

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \text{ が成り立つ}$$



周波数応答関数がわかれば
出力のパワースペクトルを知ることができる

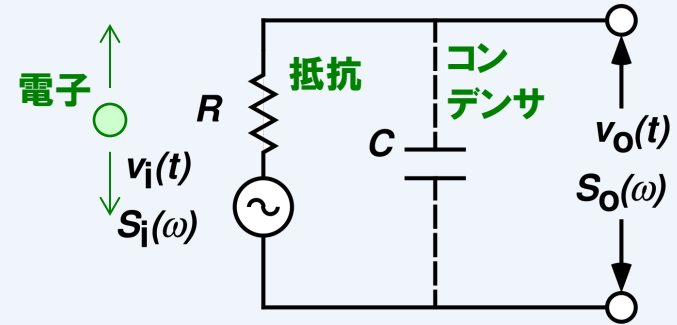
抵抗の熱雑音 (1)

— 抵抗の熱雑音 —

- 抵抗の熱雑音 (ジョンソン雑音)

抵抗の両端に生じる雑音
抵抗内の自由電子の熱運動に起因

確率密度関数：ガウス分布
スペクトル：平坦 (白色雑音)



エネルギー等分配則より
コンデンサー両端の平均エネルギーは

$$\frac{C \langle v_o^2 \rangle}{2} = \frac{k_B T}{2} \quad \text{となる}$$



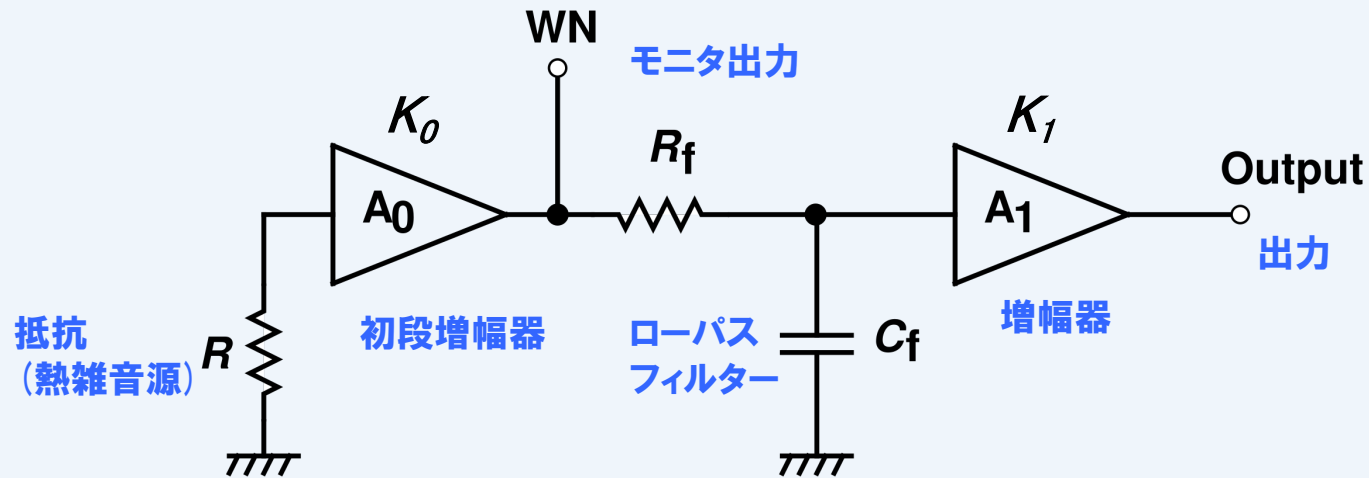
電圧の2乗平均から温度が求められる

抵抗の熱雑音 (2)

— 測定回路 —

測定回路の構成

熱雑音源となる抵抗・増幅器などを含む



抵抗値 : 1, 2, 5, 10 M Ω
時定数 : 10, 20, 50, 100 msec

➡ 合計16通りの測定を行う

(注)
スイッチ切り替え直後は
出力が安定しないので
落ち着くのを待ってから測定すること

抵抗の熱雑音 (3)

— A/Dコンバータ —

- **A/Dコンバータ**

アナログ信号をデジタル信号に変換

→ コンピュータに記録できるようにする

仕様: $\pm 10\text{ V}$, 16 bit → 分解能 約 50.3 mV

ソフトウェア: FDSAMP で計測、DATDISPで表示・解析

注意点

信号の大きさ

ゲイン大 → アナログ回路の飽和、ADCのレンジオーバー

ゲイン小 → 回路の雑音の影響、ADCの量子化誤差

サンプリングレート

早い → データ量が増える

遅い → エリアシングの問題

測定データ量

短い → 統計誤差が大きくなる

長い → 測定時間が長くなる

抵抗の熱雑音 (4)

— エリアシング —

・ 標本化定理とエリアシング

標本化定理

アナログ信号をデジタル変換する際、
サンプリング周波数の半分の周波数
(ナイキスト周波数) までしか記録できない

エリアシング

ナイキスト周波数以上の成分が
低周波数成分として現れてしまう

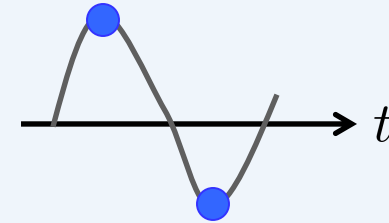
⇒ 低周波数帯の測定結果も
信頼できないものになる

アンチ・エリアシング・フィルター

ADC入力前に、ナイキスト周波数以上
の成分を除去しておくためのLPF

⇒ 低周波数帯は
正確な測定結果が得られる

標本化定理の大雑把な理解



波形を再現するには
最低2点は必要

