# 輪講　安東さん修士論文、pp.19-41 (1996)

理学部物理学科 4 年 05-081560 道村唯太

2009 年 12 月 9 日

# 第 3 章　レーザー干渉計による重力波の検出

## 3.1　原理

Michelson 干渉計で 2 つの鏡 (自由質点) までの光路を往復する際に生じる位相差 $\phi_-$ を検出。2 つの基線長を $l$、その差を $l_-$、レーザーの角周波数を $\Omega$ とすると、

$$\phi_- = \underbrace{\frac{2l_-\Omega}{c}}_{=\Phi_0} + \underbrace{\delta\phi_{\mathrm{GR}}}_{\text{重力波}} \qquad (3.12)$$

$$\delta\phi_{\mathrm{GR}} = \Omega \int_{t-2l/c}^{t} \bar{h}(t')\mathrm{d}t' \qquad (3.13)$$

Michelson 干渉計の周波数応答関数から、各周波数 $\omega$ の重力波に対して感度が最も良くなるのは

$$\frac{l\omega}{c} = \frac{\pi}{2} \qquad (3.17)$$

のとき。1kHz だと $l = 75$km！

　→ Delay-line 方式 (多重反射)、Fabry-Perot 方式 (多重干渉)

## 3.2　Fabry-Perot 共振器

透過光強度最大のとき、共振器内部の強度最大。共振条件は、共振器長を $L$ として

$$\Phi = \frac{2L\Omega}{c} = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad (3.34)$$

フィネス。共振の鋭さを表す。フロントミラー、エンドミラーの反射率 $r_{\mathrm{F}}$、$r_{\mathrm{E}}$ を用いて

$$\mathcal{F} = \frac{\nu_{\mathrm{FSR}}}{\nu_{\mathrm{FWHM}}} = \frac{\pi\sqrt{r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}}}{1 - r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}} \qquad (3.37)$$

重力波に対する応答: 1 次のローパス特性 (重力波の影響が積分されてしまうため)
鏡が $\delta L$ 変動すると、振幅 $2\delta L/L$ の重力波に見える。
レーザーの周波数が $\delta\nu$ ずれると振幅 $2\delta\nu/\nu$ の重力波に見える。

## 3.3　レーザー干渉計における雑音源

- **散射雑音** (shot noise): 光子数の量子揺らぎに起因。散射雑音による位相検出限界は

$$\delta\phi_{-\mathrm{shot}} = \sqrt{\frac{2e}{i_{\mathrm{dc}}}} \frac{1}{\sin(\Phi_0/2)}$$

  これは $\Phi_0 = \pi$(ダークフリンジ) で最小。このとき

$$\delta\phi_{-\mathrm{shot}} = \sqrt{\frac{2h\Omega}{\eta P_{\mathrm{in}}}} \qquad (3.79)$$

  入射パワー $P_{\mathrm{in}}$ が大きいとき小さい (→パワーリサイクリング)。

- **熱雑音**: 鏡を吊る振り子と鏡自身の。冷却するか、Q 値を上げて抑える。

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\underbrace{\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{\text{減衰力}}+kx=\underbrace{f_N}_{\text{熱雑音力}} \quad \text{で} \quad \gamma=\frac{m\omega_0}{Q}$$

- **地面振動**: 常時微動。特に低周波で効いてくる。(多段) 振り子などにより防振。

- **周波数雑音**: Michelson、Delay-Line では腕の長さを、Fabry-Perot では共振器の特性 ($L$、$\mathcal{F}$) をよく合わせることで除去。光源の周波数安定化 (別の共振器で or 主干渉計自身で)。

- **強度雑音**: 入射光源の強度変化と、信号による強度変化を区別する必要。位相変調により周波数帯を分離。例えば内部変調法では PD で検出される光強度は $\phi_- = \Phi_0 + \delta\phi$ で

$$\begin{aligned} I_{\rm int} &= \frac{I_0+\delta I}{2}[1-\cos(\Phi_0+\delta\phi+m\sin\omega_m t)] \\ &\sim \frac{I_0+\delta I}{2}[1-J_0(m)\cos(\Phi_0+\delta\phi)+2J_1(m)\sin(\Phi_0+\delta\phi)\sin(\omega_m t)+\cdots] \end{aligned}$$

で表され、$\sin\omega_m t$ をかけて復調すると

$$(\text{復調信号の}\omega\text{成分}) = \underbrace{(\delta I[1-J_0(m)\cos\Phi_0]/2 \quad \text{の}\omega_m\pm\omega\text{成分})}_{\omega_m\sim 10\text{MHz より散射雑音に隠れる}} + \underbrace{(I_0J_1(m)[(\delta/I_0)\sin\Phi_0+\delta\phi\cos\Phi_0] \quad \text{の}\omega\text{成分})}_{\Phi_0=\pi(\text{ダークフリンジ}) \text{ とすることで強度雑音の影響低減できる}}$$

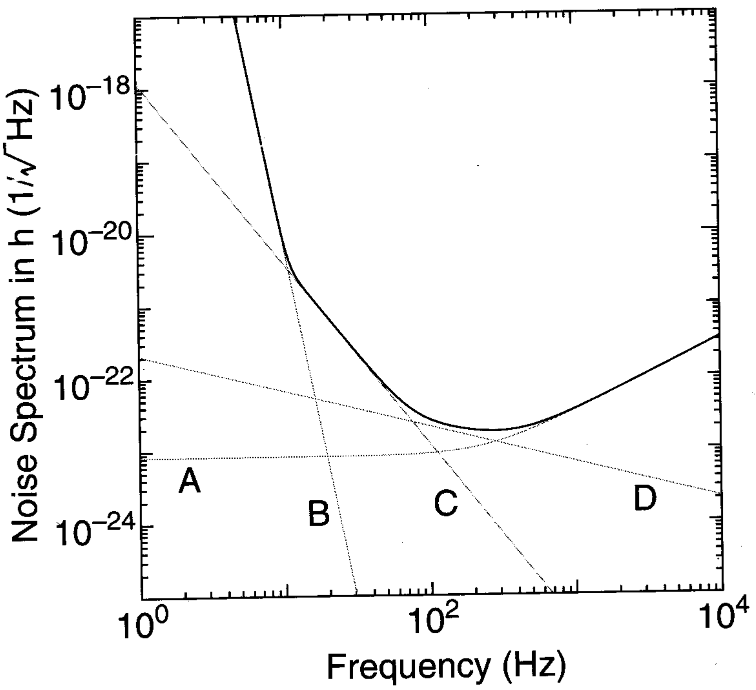


図 6-8　干渉計の雑音スペクトルの例. 散射雑音 (A), 外乱振動雑音 (B), 振り子の熱雑音 (C), 鏡の熱雑音 (D) のスペクトルを考慮し, それぞれの 2 乗和の平方根を用いて, 干渉計全体の雑音の推定を行った.

図 1: 典型的な干渉計で予想される雑音スペクトル (100Mpc の連星中性子星合体を観測できるレベル)[1]

[1]中村卓史、大橋正健、三尾典克 (編著):「重力波をとらえる」、p.228、1998

- **残留ガスによる雑音**: 屈折率変化による光路長揺らぎ。超高真空中に置く。

- **制御による雑音**: 共振状態、ダークフリンジを保つために制御が不可欠。電気回路による雑音など。

## おまけ: リッチテンソルの対称性

定義

$$\Gamma_{\mu\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2}(\partial_\gamma g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\gamma} - \partial_\mu g_{\beta\gamma}), \qquad \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\gamma}$$

$$R^\mu{}_{\beta\gamma\delta} \equiv \partial_\gamma \Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma}\Gamma^\lambda{}_{\beta\delta} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\delta}\Gamma^\lambda{}_{\beta\gamma}$$

$g_{\mu\nu}(P_0) = \eta_{\mu\nu}$、$\partial_\lambda g_{\mu\nu}(P_0) = 0$、$\Gamma(P_0) = 0$ の局所ローレンツ系[2]で示せばよい。

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma\delta}(P_0) &= g_{\alpha\nu}R^\nu{}_{\beta\gamma\delta} \\
&= g_{\alpha\nu}(\partial_\gamma \Gamma^\nu{}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\nu{}_{\beta\gamma}) \\
&= g_{\alpha\nu}\left\{\partial_\gamma \left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\underline{\partial_\delta g_{\mu\beta}} + \partial_\beta g_{\mu\delta} - \partial_\mu g_{\beta\delta}\right)\right] - \partial_\delta \left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\underline{\partial_\gamma g_{\mu\beta}} + \partial_\beta g_{\mu\gamma} - \partial_\mu g_{\beta\gamma}\right)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}g_{\alpha\nu}g^{\mu\nu}\left[\partial_\gamma\left(\partial_\beta g_{\mu\delta} - \partial_\mu g_{\beta\delta}\right) - \partial_\delta\left(\partial_\beta g_{\mu\gamma} - \partial_\mu g_{\beta\gamma}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\partial_\gamma\left(\partial_\beta g_{\alpha\delta} - \partial_\alpha g_{\beta\delta}\right) - \partial_\delta\left(\partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}\right)\right]
\end{aligned}$$

となるので、以下の反対称性、対称性を示すことができる[3]。

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} \cdots ① \qquad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} \cdots ② \qquad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \cdots ③$$

③の両辺に $g^{\alpha\gamma}$ をかけると

$$\begin{aligned}
R^\gamma{}_{\beta\gamma\delta} &= R^\alpha{}_{\delta\alpha\beta} \\
\therefore \quad R_{\beta\delta} &= R_{\delta\beta}
\end{aligned}$$

[2] M.Maggiore *Gravitational Waves* Vol.I の 1.3.2 節でも見た。須藤「一般相対論入門」2.7 節あたり参照。
[3] ③の関係は①+②+「3 つの添字の循環和=0」からも示せる→須藤 問題 [2.9]