

### 11.5 The Compensation Filter

制御のアクティブ帯域 (制御帯域):  $|G(i2\pi f)| > 1$  となる帯域

アクティブ帯域で大きな  $G$  を実現しつつ、系を安定に保つために補償フィルタ (制御フィルタ) を用いる。

補償フィルタの設計が面白くて難しい理由

Kramers-Kronig の関係から  $G$  の実部と虚部  $\longleftrightarrow G$  のゲインと位相を独立に決められない

$|G| \propto f^{-\gamma}$  ならだいたい  $\text{Phase}(G) \approx -\gamma \times 90^\circ$

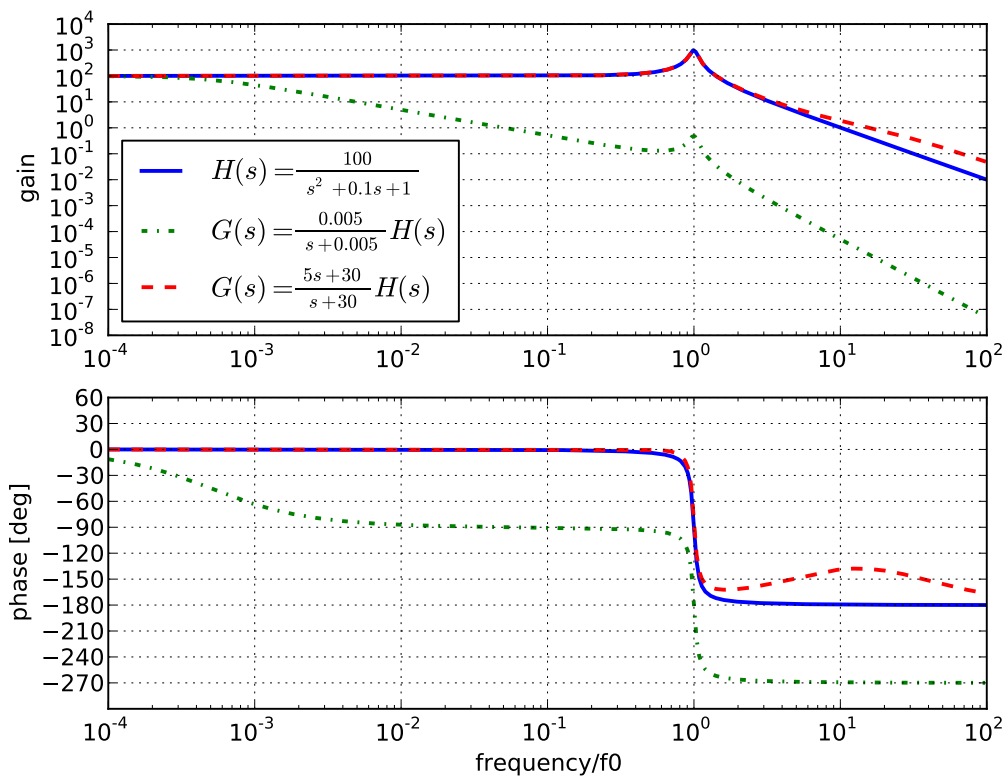


図 1: 振り子の伝達関数と補償フィルタ

### 11.6 Active Damping: A Servo Design Example

Q 値の高い振り子を制御することを考える

マスの速度に比例するような力を加える制御 アクティブダンピング

例: Figure 11.6

plant: 振り子、sensor: LED、compensator、actuator: コイルマグネット

目標: 高い Q 値を持った受動的な振り子と同じ高周波応答やノイズスペクトルを持ち、共振がよくダンプされている閉ループ系を作る

センサは位置センサなので、補償フィルタとして微分を使えば、速度に比例した力を加えられる

理想的な微分器は  $F(f) = i2\pi f$ 。そうでなくても制御はかかる。フィードバック系は簡単に動作できる！  
 パッシブダンピングに比べてフィードバックのいいところ

フィードバック系は熱平衡に無い 揺動散逸定理を回避できる

大きなフィードバックダンピングを掛けても、低ノイズレベル

フィードバック系で生じるノイズ

線形増幅器のノイズ温度:  $v(f), i(f)$  は入力電圧ノイズ, 電流ノイズの振幅スペクトル密度として

$$T_{\text{amp}} \equiv \frac{v(f)i(f)}{k_B}$$

Heffner による定理: 線形増幅器で得られる最小のノイズ温度は

$$T_{\text{amp, min}} = \frac{1}{\ln 2} \frac{2\pi\hbar f}{k_B} \quad (11.12)$$

センサーのノイズ  $x_n(f)$  とそれが引き起こすマスの運動のノイズ  $x(f)$  の比は

$$\frac{x(f)}{x_n(f)} = \frac{G(f)}{1 + G(f)} \quad (11.14)$$

## 11.7 Feedback to Reduce Seismic Noise over a Broad Band

### 11.7.1 Suspension point interferometer

地面振動: ワイヤを通して伝わってくるが、差動変動は SPI が抑える

重力波: 数 10Hz 以上では SPI と MIF は独立とみなせるので、SPI は重力波信号を打ち消さない

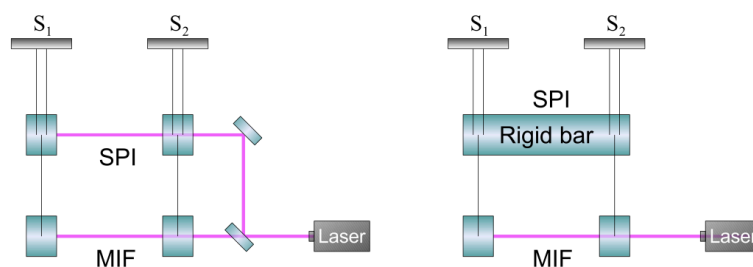


図 2: A Fabry-Perot arm with an SPI<sup>1</sup>

### 11.7.2 Active isolation

よく防振された試験質量に台が追従するように制御をかける

<sup>1</sup>麻生洋一: 東京大学 博士論文、2006

おまけ: 式 (11.8) の導出 (4月28日追加)

長さ  $L$ 、断面積  $S$ 、ヤング率  $E$ 、密度  $\rho$  の弾性体を考える。位置  $x$  の点の変位を  $u(x, t)$  とすると、この弾性体を伝わる弾性波の波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$u(x, t) = U(x)e^{i\omega t}$  とおいて代入すると  $\kappa^2 \equiv \frac{\omega^2 \rho}{E}$  とおいて

$$\kappa^2 U(x) + \frac{d^2 U}{dx^2} = 0$$

となるので  $U(x)$  の一般解は

$$U(x) = C \sin \kappa x + D \cos \kappa x$$

位置  $x$  の点に掛かる力は

$$F(x) = -ES \frac{dU}{dx} = -ES\kappa(C \cos \kappa x - D \sin \kappa x)$$

とかけるので、境界条件 (入力側の端に力を加え、出力側は自由端)

$$f(0, t) = F_0 e^{i\omega t}, \quad f(L, t) = 0$$

から定数を求めると

$$C = \frac{-F_0}{ES\kappa}, \quad D = \frac{C \cos \kappa L}{\sin \kappa L}$$

従って入力側の変位から出力側の変位への伝達関数は

$$T = \frac{U(L)}{U(0)} = \frac{C \sin \kappa L + \frac{C \cos \kappa L}{\sin \kappa L} \cos \kappa L}{\frac{C \cos \kappa L}{\sin \kappa L}} = \frac{1}{\cos \kappa L}$$

弾性体の質量  $m$  やばね定数  $k = \frac{ES}{L}$  を用いて書くと

$$\kappa = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \omega \sqrt{\frac{m/(SL)}{kL/S}} = \frac{\omega}{L} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

より

$$T = \frac{1}{\cos(\sqrt{m/k} \omega)}$$

Saulson に載っていたもともとの参考文献 [1] は機械振動の計算に four-pole parameters が便利であることを紹介している。弾性波の波動方程式の導出は例えば [2] で、読むと four-pole parameters の求め方もわかる。今回考えた弾性体の場合、境界条件を変えて解くことで four-pole parameters は  $\mu = i\sqrt{mk}$  として

$$\begin{pmatrix} F_{\text{in}} \\ V_{\text{in}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \kappa L & \mu \sin \kappa L \\ -\mu^{-1} \sin \kappa L & \cos \kappa L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{\text{out}} \\ V_{\text{out}} \end{pmatrix}$$

と求まる。ここで  $F_i, V_i$  は力と速度である。

例えば 22 成分は今回考えた境界条件から求まるパラメータである。

$$\alpha_{22} = \frac{V_{\text{in}}}{V_{\text{out}}}\bigg|_{F_{\text{out}}=0} = \frac{i\omega U_{\text{in}}}{i\omega U_{\text{out}}}\bigg|_{F_{\text{out}}=0} = \frac{1}{T} = \cos \kappa L$$

four-pole parameters を用いると機械要素が直列につながった系の全体の伝達関数を行列の掛け算から簡単に求めることができる。

## 参考文献

[1] C.T. Molloy: J. Acoust. Soc. Am. **29** (1957) 842.

[2] J.C. Snowdon: *Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems* (John Wiley & Sons Inc, 1968).