Quantum Optics

Ayaka Shoda

2010.5.7

3 Quantum Distribution Theory and Partially Coherent Radiation

量子論的な特徴と統計的な特徴を共に記述できるような、半古典的な描像が必要。

- P-representation
- Q-representation
- Wigner-Weyl distribution

の 3 つについて定義していきます。

3.1 Coherent state representation

揺らいでいる古典的場での、測定値の確率分布を考える。
perator O に対するアンサンブル平均は

$$\begin{aligned} \langle\langle O \rangle\rangle &= \sum_\phi P_{phi} \langle\phi|O|\phi\rangle && (1) \\ &= \sum_n \langle n|\rho O|n\rangle && (2) \\ &= \mathrm{Tr(O\rho)} && (3) \end{aligned}$$

今後は量子状態を表すのに density operator ρ を用いる。

$$\rho = \sum_\phi P_\phi |\phi\rangle\langle\phi| \tag{4}$$

これをコヒーレントステートではさむと

$$\rho = \iint \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha|\rho|\beta\rangle\langle\beta| \tag{5}$$

ここで R-representation を定義

$$R(\alpha^*, \beta) \equiv \langle\alpha|\rho|\beta\rangle e^{\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \tag{6}$$

すると

$$\rho = \iint \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}|\alpha\rangle\langle\beta|R(\alpha^*, \beta)e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \tag{7}$$

P-representation も定義

$$P(\alpha,\alpha^*) \equiv \mathrm{Tr}[\rho\delta(\alpha^* - \mathrm{a}^\dagger)\delta(\alpha - \mathrm{a})] \tag{8}$$

このとき

$$\langle O\rangle = \int d^2\alpha P(\alpha,\alpha^*)O_N(\alpha,\alpha^*) \tag{9}$$

$$\rho = \int P(\alpha,\alpha^*)|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha \tag{10}$$

O_N は normally ordered function (に書き換えたもの) で、

$$O_N(\alpha,\alpha^*) = \sum_n\sum_m c_{nm}(a^\dagger)^n a^m \tag{11}$$

☆例

- 熱平衡状態の thermal field

$$P(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi\langle n\rangle}e^{-|\alpha|^2/\langle n\rangle} \tag{12}$$

  P はガウシアンになる。

- coherent state $|\alpha_0\rangle$ の場合

$$P(\alpha,\alpha^*) = \delta^{(2)}(\alpha-\alpha_0) \tag{13}$$

- 量子数状態 $|n\rangle$ は P-representation では表せない。（R-representation を用いるとうまくいく）

3.2 Q-representation

次は Q-representation を定義。

$$Q(\alpha,\alpha^*) \equiv \mathrm{Tr}[\rho\delta(\alpha - \mathrm{a})\delta(\alpha^* - \mathrm{a}^\dagger)] \tag{14}$$

$$= \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle \tag{15}$$

$$\langle O(\alpha,\alpha^*)\rangle = \int Q(\alpha,\alpha^*)O_A(\alpha,\alpha^*)d^2\alpha \tag{16}$$

$$O_A(\alpha,\alpha^*) = \sum_n\sum_m d_{nm}a^n(a^\dagger)^m \tag{17}$$

P と Q の関係は

$$Q(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi}\int P(\alpha',\alpha'^*)e^{-|\alpha-\alpha'|^2}d^2\alpha' \tag{18}$$

☆例

number state のとき

$$Q(\alpha,\alpha^*) = \frac{e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^2}{\pi n!} \tag{19}$$

3.3 The Wigner-Weyl distribution

こんどは symmetric ordering に関係した関数を定義する。
P と Q の定義の中身のデルタ関数を積分に書き換えると

$$P(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi}\int d^2\beta e^{-i\beta\alpha^*-i\beta^*\alpha}\mathrm{Tr}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\mathrm{a}^\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta^*\mathrm{a}}\rho] \tag{20}$$

$$Q(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi}\int d^2\beta e^{-i\beta\alpha^*-i\beta^*\alpha}\mathrm{Tr}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta^*\mathrm{a}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\mathrm{a}^\dagger}\rho] \tag{21}$$

一方 W は

$$W(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi}\int d^2\beta e^{-i\beta\alpha^*-i\beta^*\alpha}\mathrm{Tr}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\mathrm{a}^\dagger+\mathrm{i}\beta^*\mathrm{a}}\rho] \tag{22}$$

で定義する。このときの operator function は symmetric order に対応する。

3.4 Generalized representation of the density operator and connection between the P-, Q-, and W-distribution

今まで出てきた representation は一般化できて

$$\rho = \pi\int F^{(\Omega)}(\alpha,\alpha^*)\Delta^{(\Omega)}(\alpha-a,\alpha^*-a^\dagger)d^2\alpha \tag{23}$$

$$\Delta^{(\Omega)}(\alpha-a,\alpha^*-a^\dagger) = \frac{1}{\pi^2}\int e^{\Omega(\beta,\beta^*)}e^{-\beta(\alpha^*-a^\dagger)+\beta^*(\alpha-a)}d^2\beta \tag{24}$$

この Ω に適当な値を入れると F が P, Q, W のそれぞれと対応する

- $\Omega(\beta,\beta^*) = \frac{-|\beta|^2}{2}$ のとき $F = P$
- $\Omega(\beta,\beta^*) = \frac{|\beta|^2}{2}$ のとき $F = Q$
- $\Omega(\beta,\beta^*) = 0$ のとき $F = W$

になる。

3.5 Q-representation for a squeezed coherent state

sqeezed coherent state に対する Q-representation を導出する。

$$Q(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi}|\rangle\alpha|\beta,\xi\rangle|^2 \tag{25}$$

より、計算すると、(3.5.11) 式を得る。
次に、光子数分布 $p(n) = |\rangle n|\beta,\xi\rangle|^2$ を求めると (3.5.16) のようになる。これより

- $|\beta|^2 \gg \sinh^2 r$：コヒーレントな性質の方が強い場合、光子数分布は普通のコヒーレントのものと似てガウシアンっぽくなる。
- $|\beta|^2 \ll \sinh^2 r$：スクイーズドの効果が強い場合、光子数は振動する。
- $\beta = 0$：特にスクイーズドバキュームの場合、光子が奇数個観測される確率は０。2 光子状態のみが現れてくる。