安東さん修論第 2 章

T.Sekiguchi (B4 in Yamanouchi Lab.)

2010.01.06.(Wed.)

2.1 Einstein 方程式の線型化

2.1.1 Einstein テンソルの弱場での表式

Einstein 方程式の弱い重力場での近似式を求めたい.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{2.2}$$

(2.2) の条件の元で，Christoffel 記号，Ricci テンソルおよび Ricci スカラーの表式を求めると，

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \approx \frac{1}{2}(h^{\alpha}{}_{\beta,\gamma} + h^{\alpha}{}_{\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma}{}^{,\alpha}) \tag{2.3}$$

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}(h^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha} + h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\nu} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{\alpha} - h_{,\mu\nu}) \tag{2.4}$$

$$R \approx h^{\alpha}{}_{\beta,}{}^{\beta}{}_{\alpha} - h_{,}{}^{\alpha}{}_{\alpha} \tag{2.5}$$

となる．ここで上の変形において，以下のことを用いた．

- $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h)$ となっている．
- $h_{\mu\nu}$ の添字の上下に $\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}$ を用いることができる．

$g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu}$ は以下のように確かめられる．$g^{\mu\nu}$ が $g_{\mu\nu}$ の逆行列であることから，例えば 1 次元空間について，

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1+h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & 1+h_{11} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} \approx \begin{pmatrix} -1-h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & 1-2h_{00}+h_{11} \end{pmatrix} = \eta^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h)$$

次に $h_{\mu\nu}$ の添字の上げ下げのルールとして $\eta^{\alpha\mu}h_{\mu\beta,\gamma} \equiv h^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}$ を採用したことについてだが，そもそも $h_{\mu\nu}$ はテンソルではない ($\eta_{\mu\nu}$ がテンソルではなくただの係数だから) ので，添字の上げ下げは自由に定義して問題ない．そしてテンソル同様 $g^{\alpha\mu}h_{\mu\beta,\gamma} \equiv h^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}$ と定義することもできるが，h の 2 次以上の項を無視して考える上では前の定義と何ら変わらないので，ここでは $h_{\mu\nu}$ の添字の上げ下げに $\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}$ を用いることにする．こう定義すれば，添字の上げ下げと微分が交換し，記述しやすい．

$$\eta^{\alpha\mu}h_{\mu\beta,\gamma} = (\eta^{\alpha\mu}h_{\mu\beta})_{,\gamma} = h^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}$$

すると Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ は次のように書き表されることがわかる．

$$2G_{\mu\nu} \approx (h^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha} + h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\nu} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{\alpha} - h_{,\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}(h^{\alpha}{}_{\beta,}{}^{\beta}{}_{\alpha} - h_{,}{}^{\alpha}{}_{\alpha}) \tag{2.6}$$

2.1.2 Trace reverse tensor を用いた変形

ここで $h_{\mu\nu}$ の trace reverse tensor $\bar{h}_{\mu\nu}$ を次を満たすものとして導入する．

$$\begin{cases} \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \\ \\ h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \end{cases} \tag{2.7}$$

ただし，$\bar{h}_{\mu\nu}$ の添字の上げ下げは $h_{\mu\nu}$ 同様 $\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}$ を用いることにする．この $\bar{h}_{\mu\nu}$ を用いて Einstein テンソルの式 (2.6) を書き換えると，どういう訳かきれいになることがわかる．

$$2G_{\mu\nu} \approx \bar{h}^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha} + \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{\nu} - \bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha}{}_{\beta,}{}^{\beta}{}_{\alpha} \tag{2.8}$$

2.1.3 Gauge 条件

しかしきれいになったとは言え，添字がついたごちゃごちゃがまだ 4 項もある．そこで，この 4 項のうちの 3 項を消し去る魔法のような条件

$$\bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} = 0 \qquad \text{：Gauge 条件} \tag{2.9}$$

について考えてみることにしよう．座標変換によってこの Gauge 条件を満たすような状況を作れないかどうか考えてみる．ただし，あまりに大きな座標変換をしてしまうと $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ から外れてしまう可能性があるので，ここでは以下のような微小変換

$$x^{\mu} \longmapsto x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(\boldsymbol{x}) \qquad |\xi^{\mu}| \ll |x^{\mu}| \tag{2.10}$$

を考えることにする．この変換により，

$$\bar{h}'_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} = \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} - \xi_{\mu,\alpha}{}^{\alpha} \tag{2.11}$$

と変換されることから，以下の式を満たすような ξ^{μ} を選べば，Gauge 条件を課すことができる．

$$\xi_{\mu,\alpha}{}^{\alpha} = \Box\xi^{\mu} = \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha} \tag{2.12}$$

2.1.4 結論

Gauge 条件により，結局 Eistein テンソルは，

$$2G_{\mu\nu} \approx \bar{h}_{\mu\nu,}{}^{\alpha}{}_{\alpha} = \Box\bar{h}_{\mu\nu} \tag{2.13}$$

と書ける．よって Einstein 方程式は以下のような波動方程式に帰着する．

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.14}$$

2.2 重力波

真空中を伝搬する重力波 $\Box\bar{h}_{\mu\nu}=0$ の単色平面波解：

$$\bar{h}_{\mu\nu}=A_{\mu\nu}e^{ik_\alpha x^\alpha} \tag{2.15}$$

を考える．この $\bar{h}_{\mu\nu}$ は複素数であるが，実際にはその実部が現実世界での解となる．$A_{\mu\nu}$ が満たす条件は，

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu}\text{が対称} &\quad:\quad A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu} \\ \text{Gauge 条件} &\quad:\quad A_{\mu\alpha}k^\alpha=0 \\ \text{波動方程式} &\quad:\quad k_\alpha k^\alpha=0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

上の条件から，k_α を決めた時，$A_{\mu\nu}$ は 6 つの自由度を持つように見える．しかし，実際には 2 つの自由度しか持たない．これは，座標変換 (2.10) において，$\Box\chi^\mu=0$ を満たす微小量 χ^μ を ξ^μ に付け加える 4 つの自由度が残っているためである．$\xi^\mu\mapsto\xi^\mu+\chi^\mu$ としてやると，

$$\bar{h}'_{\mu\nu}\longmapsto\bar{h}'_{\mu\nu}-\chi_{\mu,\nu}-\chi_{\nu,\mu}+\eta_{\mu\nu}{\chi_\beta}^{,\beta} \tag{2.17}$$

この座標変換を利用して，さらに以下の条件

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu}\text{が空間成分のみ} &\quad:\quad A_{\mu 0}=0 \\ \text{traceless }(\bar{h}_{\mu\nu}\text{と }h_{\mu\nu}\text{が同じ}) &\quad:\quad {A^j}_j=0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

を付け加えることができないかどうか考えてみよう．$\Box\chi^\mu=0$ の解として $\chi^\mu=c^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}$ を考えると，以下の 4 つの条件式

$$\left\{\begin{array}{rcll} A_{0i}+k_0c_i+k_ic_0 &=& 0 & (i=1,2,3) \\ {A^\mu}_\mu+2c^\mu k_\mu &=& 0 & \end{array}\right. \tag{2.19}$$

を満たすような c^μ を求めれば，上の条件を付加できることがわかる．これは TT(Tranverse-Traceless) gauge と呼ばれる．具体的に，z 方向に進む平面波：

$$h_{\mu\nu}=A_{\mu\nu}e^{ik(z-ct)} \tag{2.20}$$

を考えてやると，$A_{\mu\nu}$ は以下のような形で書けることがわかる．

$$A_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^+ & a^\times & 0 \\ 0 & a^\times & -a^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

2.3 重力波検出の原理

2.3.1 自由質点に対する重力波の影響

重力以外に力を受けていない自由粒子の運動は，測地線の方程式

$$\frac{du^\mu}{d\tau}+{\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta=0 \tag{2.22}$$

に従う．u^μ は粒子の 4 元速度，τ は粒子の固有時間である．最初，粒子が静止している Minkowski 時空を考え，この系に対する．TT gauge をとる．この時，u^μ の初期値は

$$(u^\mu)_0 = (c, 0, 0, 0) \tag{2.23}$$

となっている．この粒子に対して重力波が進入してきたとすると，粒子の加速度の初期値は,

$$\begin{aligned}\left(\frac{du^\mu}{d\tau}\right)_0 &= -\Gamma^\mu{}_{00}c^2 \\ &= -\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}(h_{\alpha 0,0} + h_{\alpha 0,0} - h_{00,\alpha}) \\ &= 0 \qquad\qquad (\because\ h_{0\mu} = 0)\end{aligned} \tag{2.24}$$

これは，静止している質点には加速度が働かず，TT gauge の座標軸上で静止し続けることを意味する．このこと自体は物理的意味を持たない.

2.3.2 測地線偏差の方程式

重力波の影響を見るには，2 つの近接した粒子間の固有距離を調べる必要がある．そこで，近接した 2 点 x^μ と $x^\mu + \xi^\mu (|\xi^\mu| \ll |x^\mu|)$ にある質点が，何らかの外力 F^μ を受けて運動している状況を考える．測地線の方程式は,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = F^\mu(\boldsymbol{x}) \tag{2.25}$$

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi})\frac{d(x^\alpha + \xi^\alpha)}{d\tau}\frac{d(x^\beta + \xi^\beta)}{d\tau} = F^\mu(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi}) \tag{2.26}$$

2 式の差を取り，ξ の 1 次の項まで取り出すと,

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{d\xi^\beta}{d\tau} + \xi^\gamma\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta,\gamma}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = \xi^\gamma F^\mu{}_{,\gamma} \tag{2.27}$$

共変性が明白になるよう，絶対微分：

$$\frac{D\xi^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}\xi^\mu{}_{;\beta} = \frac{d\xi^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\xi^\alpha\frac{dx^\beta}{d\tau} \tag{2.28}$$

を用いて (2.27) を書き換えてやると,

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} + R^\mu{}_{\beta\alpha\gamma}\frac{dx^\gamma}{d\tau}\xi^\alpha\frac{dx^\beta}{d\tau} = \xi^\gamma F^\mu{}_{;\gamma} \tag{2.29}$$

となる．地上の観測者に対して，近似的に

$$d\tau \approx dt, \qquad \frac{dx^0}{d\tau} \approx c, \qquad \frac{dx^0}{d\tau} \approx 0 \tag{2.30}$$

が成り立つとし，TT gauge において考えると，(2.29) は以下のように変形される.

$$\frac{d^2\xi^j}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^j{}_k}{\partial t^2}\xi^k + \xi^\gamma F^j{}_{;\gamma} \tag{2.31}$$

2.3.3　重力波の影響

さらに詳しく調べるために，質点に外力が働かず，z 軸方向に進む重力波が入射する場合を考える．ξ は微小にしか変動しないものと考え，$\xi^j = (\xi^j)_0 + \varphi^j$，$|\varphi^j| \ll |\xi^j|$ とすると，

$$\frac{d^2\varphi^j}{dt^2} \approx \frac{1}{2}\frac{\partial^2 {h^j}_k}{\partial t^2}(\xi^k)_0 \tag{2.32}$$

$t \to \infty$ において発散しない解を求めると，

$$\varphi^j = \frac{1}{2}{h^j}_k(\xi^k)_0 \tag{2.33}$$

ここで z 方向に進行してくる波を考えれば，

$$\begin{pmatrix} \varphi^x \\ \varphi^y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^+ & a^\times \\ a^\times & -a^+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^x \\ \xi^y \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)} \tag{2.34}$$

$$= \frac{1}{2}a^+\begin{pmatrix} \xi^x \\ -\xi^y \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)} + \frac{1}{2}a^\times\begin{pmatrix} \xi^y \\ \xi^x \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)} \tag{2.35}$$

第 1 項と第 2 項はそれぞれ重力波の 2 つの偏光 (+mode と ×mode) を表す．

2.3.4　レーザー干渉計重力波検出器

x 軸と y 軸に腕を持つような Michelson 干渉計において，z 方向から +mode の偏光を持った重力波が入射してきた場合を考える．このとき 4 次元線素は，

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (1+h(t))dx^2 + (1-h(t))dy^2 + dz^2 \tag{2.36}$$

で表される．beam splitter から鏡までの距離をそれぞれ ξ^x，ξ^y とし，レーザー光の角周波数を ω とする．x 軸方向を往復する光子の世界線に沿った線素は，

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (1+h(t))dx^2 = 0 \tag{2.37}$$

$|h(t)| \ll 1$ より，

$$\left[1 - \frac{1}{2}h(t)\right] cdt = \pm dx \tag{2.38}$$

光子が beam splitter と鏡の間を往復するのに要する時間を Δt_x とすると，両辺を積分して，

$$\int_{t-\Delta t_x}^{t}\left[1 - \frac{1}{2}h(t')\right] dt' = \frac{2\xi^x}{c}$$

$$\therefore\ \Delta t_x = \frac{2\xi^x}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-\Delta t_x}^{t} h(t')dt' \approx \frac{2\xi^x}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-2\xi^x/c}^{t} h(t')dt' \tag{2.39}$$

よってレーザー光の角周波数を ω とすれば，光が x 軸を往復する時の位相変化は，

$$\phi_x = \omega\Delta t_x = \frac{2\xi^x\omega}{c} + \frac{\omega}{2}\int_{t-2\xi^x/c}^{t} h(t')dt' \tag{2.40}$$

同様に，光が y 軸上を往復する時の位相変化は，

$$\phi_y = \frac{2\xi^y\omega}{c} - \frac{\omega}{2}\int_{t-2\xi^y/c}^{t} h(t')dt' \tag{2.41}$$

よって基線長 $\ell \equiv \xi^x \approx \xi^y$，$\ell_- \equiv \xi^x - \xi^y$ とすると，位相差は

$$\phi_- = \frac{2\ell_-\omega}{c} + \omega \int_{t-2\ell/c}^{t} h(t')dt' \tag{2.42}$$

となる．第 2 項が重力波の影響による位相変化を表す．