4年重力波ゼミ

正田亜八香

2010.1.20.

5 Optical Readout Noise

どれくらいの振幅の重力波をとらえられるか？＝どれくらい細かい出力まで見れるのか？
光の量子性によるノイズの影響が無視できなくなる．

5.1 Photon Shot Noise

光が photon という粒子であることによる．

ある時間に平均 $\overline{N}$ 個の光子を観測するとき，N個の光子がダイオードに来る確率は Poisoon 分布

$$P(N) = \frac{\overline{N}^N e^{-\overline{N}}}{N!} \tag{1}$$

Poisson 分布とは二項分布の応用バージョンで，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$p = \frac{\lambda}{n}$$

で与えられる．これは，事象の回数や確率はよくわからないが平均値はわかっているときに有用．

平均値が十分大きい（$\lambda > 1000$ くらい）とき，標準偏差 $\sigma = \sqrt{N}$ の Gaussian に近似できる．Gaussian は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp(-\frac{(x-\lambda)^2}{\sigma^2})$$

となる．

1 秒間に $\overline{n}$ 個 PD に Photon が来るとすれば，$\overline{N} = \overline{n}\tau$ で，SN 比は

$$\sigma_{\overline{N}}/\overline{N} = 1/\sqrt{\overline{N}} \tag{2}$$

となるので，$\overline{N}$ が大きい方が良いことがわかる．見積もりのため，これをパワーに変換する．

1 光子あたりのエネルギーは $E_1 = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$ なので

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda}\overline{n} = P_{out} \tag{3}$$

今，制御系の一番感度が良いところ（midfringe:$P_{out} = P_{in}/2$）でロックするとする．鏡の位置の微小変化 δL に対する出力の変動は

$$\frac{dP_{out}}{dL} = \frac{2\pi}{\lambda} P_{in} \tag{4}$$

以上より，

$$\overline{N} = \overline{n}\tau = \frac{\lambda}{4\pi\hbar c}P_{in}\tau \tag{5}$$

$$\frac{\sigma_{\overline{N}}}{\overline{N}} = \sqrt{\frac{4\pi\hbar c}{\lambda}\frac{1}{P_{in}\tau}} \tag{6}$$

鏡の位置の変化分に換算すると

$$\sigma_{\delta L} = \frac{\frac{\sigma_{\overline{N}}}{\overline{N}}}{\frac{1}{P_{out}}\frac{dP_{out}}{dL}} \tag{7}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar c\lambda}{4\pi P_{in}\tau}} \tag{8}$$

Chapter2 より，振幅 h の重力波が入ってきたときの片腕の長さの変化は $\frac{\Delta L}{L} = \frac{h}{2}$ だったので両腕で合わせて $\delta L = 2\Delta L = hL$ となり，

$$h = \frac{\delta L}{L} \tag{9}$$

$$\therefore \sigma_h = \frac{\sigma_{\delta L}}{L} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{\hbar c\lambda}{4\pi P_{in}\tau}} \tag{10}$$

これを one-sided のスペクトル密度に直せば

$$h_{shot}(f) = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{\hbar c\lambda}{2\pi P_{in}}} \tag{11}$$

5.2 Radiation Pressure Noise

今度は，photon が鏡に与える運動量によって揺れる影響を考える．光のパワーが P，受ける力が F_{rad} で $F_{rad}c = P$（力積の関係）だから

$$\sigma_F = \sigma_p/c \tag{12}$$

ショットノイズによるパワーの揺らぎを用いれば，式**??**より

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda}\sigma_{\overline{n}} = \sigma_P \tag{13}$$

$$\therefore \sigma_P = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda}P_{in}} \tag{14}$$

$$\therefore \sigma_F = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{c\lambda}P_{in}} \tag{15}$$

となって，輻射雑音のスペクトル密度が求まる．片腕だけの輻射雑音を考えて鏡の揺れに換算すると

$$m\ddot{x} = F \tag{16}$$

$$x(f) = \frac{1}{m(2\pi f)^2}F(f) = \frac{1}{mf^2}\sqrt{\frac{\hbar P}{8\pi^3 c\lambda}} \tag{17}$$

$$\propto f^{-2} \tag{18}$$

2 つの腕の効果を考えれば，2 つのノイズは反相関なので，2 倍の効果が出る．重力波の振幅に換算すれば

$$h_{rp}(f) = \frac{2}{L}x(f) = \frac{1}{mf^2L}\sqrt{\frac{\hbar P}{2\pi^3 c\lambda}} \tag{19}$$

これが輻射雑音である．

以上より，光子の量子性から現れる 2 つのノイズを合わせて"optical readout noise"といい，

$$h_{oro}(f) = \sqrt{h_{shot}^2 + h_{rp}^2} \tag{20}$$

となる．ミニマムのときを探すと，周波数を f_0 のときに固定すれば，全体が最小になるのは $h_{shot} = h_{rp}$ のときで

$$P = \pi c \lambda m f_0^2 \equiv P_{opt} \tag{21}$$

入射パワーが P_{opt} だったとき，

$$h_{oro} = h_{QL}(f) = \frac{1}{\pi f L}\sqrt{\frac{\hbar}{m}} \tag{22}$$

これを"Quantum Limit(量子限界)"と呼ぶ．これはスペクトル密度っぽいけどちょっと違うのに注意.

5.3 Shot noise in classical and quantum mechanics

量子論的考え方の話.

干渉をおこしてるのは，1 粒子自身の間でのみで，2 つ以上の粒子が干渉しあってるわけではない. しかしこれでは 2 つの腕の輻射雑音は考慮しにくいので，干渉計における輻射雑音は，本当はもっと量子論的な扱いをされなければならない．それが Cave などが用いた vacuume fluctuation で，そういうことを考慮してちゃんと計算すると，やっぱり今まで見たようなノイズでオッケーになるそうです.

ちなみに，squeezed light とか，量子論の性質をうまく利用した光を使うことでこの量子限界を突破することができます.（高橋さん，松本さんの実験）

5.4 The Remarkable Precision of Interferometory

干渉計は，フリンジの 10^{-9} くらいまでの精度がある．これは原子のサイズよりちっちゃい．鏡の原子の凸凹や，マスの振動もあるけれど，結局適切に対処すれば Optical Readout Noise よりは減らすことができるはずなので，結局量子雑音が効いてきてしまいますよ.