

---

# 物理学実験 II

## ブラウン運動

---

### — 第1日目 —

確率過程について  
抵抗の熱雑音の測定実験

---

# 確率過程 (1)

## — 確率分布 —

- 確率過程 (ランダムプロセス)

時間とともに不規則に変動する確率事象

ただし…

本実験で扱う確率過程は  
すべてエルゴートプロセスである



アンサンブル平均と時間平均が一致

$$\langle x \rangle = \bar{x}$$

確率過程を調べるには確率密度関数が大事

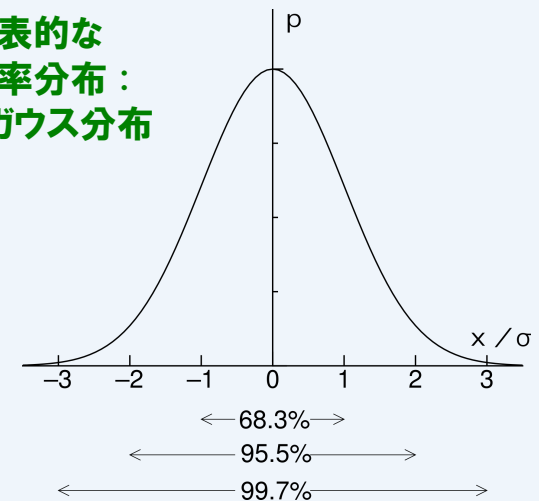
確率変数  $x$  が

$x$  と  $x + dx$  の間にある確率:  $p(x)dx$

確率の定義から

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad \text{が成り立つ}$$

代表的な  
確率分布:  
ガウス分布



# 確率過程 (2)

## － ヒストグラム －

### ・ ヒストグラム

長時間の測定を行い

値が  $x$  と  $x + dx$  の間にある頻度を調べる

↓ 適切な規格化のもとで

測定時間が十分ならば **確率密度関数に漸近**

ただし、時間に関する情報は失われる



↓ 時間軸を拡大



⇒ **ヒストグラムは一致**

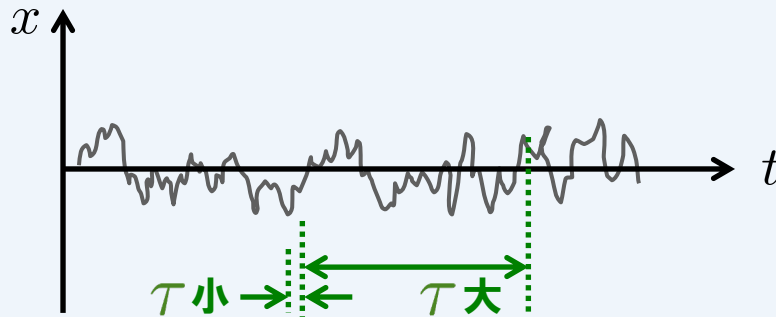
# 確率過程 (3)

## — 自己相関関数 —

### 自己相関関数

定義：時間  $\tau$  だけ後の値との相関

$$C(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle$$



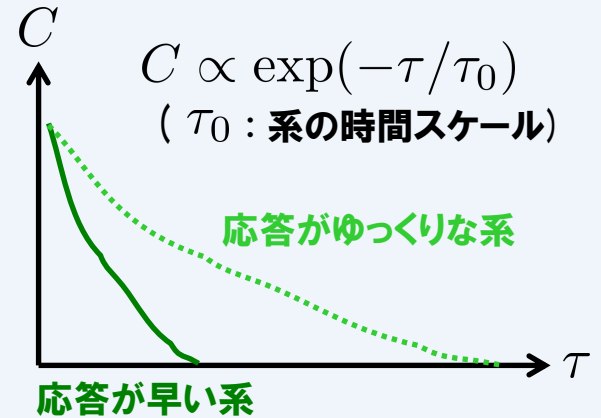
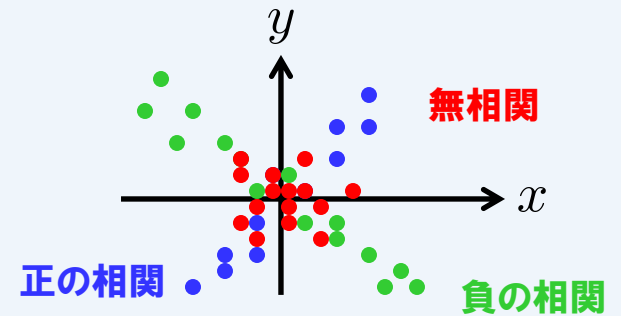
有限の応答時間  
→ 相関が残っている

十分な時間が経過  
→ 相関はほとんど無くなる



どれくらい時間が経過すると相関が無くなるか  
系の応答の典型的な**時間スケール**を表す

c.f. 相関関数  $C_{xy} = \langle x(t)y(t) \rangle$   
xとyの相関の強さを表す



# 確率過程 (4)

## — パワースペクトル —

### ・ パワースペクトル

定義: フーリエスペクトルの2乗平均で定義

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} \right\rangle$$

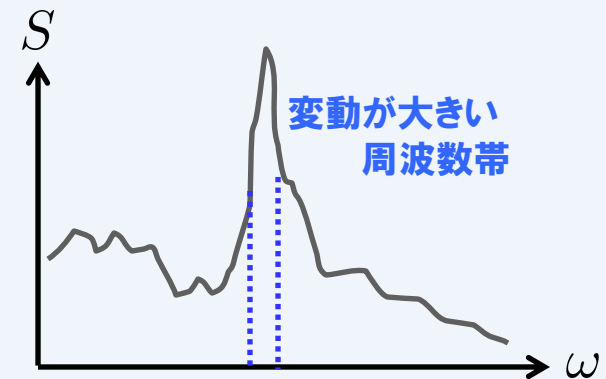
このとき、次式が成り立つ

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

➡ パワースペクトルは  
ランダム変動の平均パワーに対する  
各周波数成分の寄与を表す



系の応答の典型的な周波数を表す

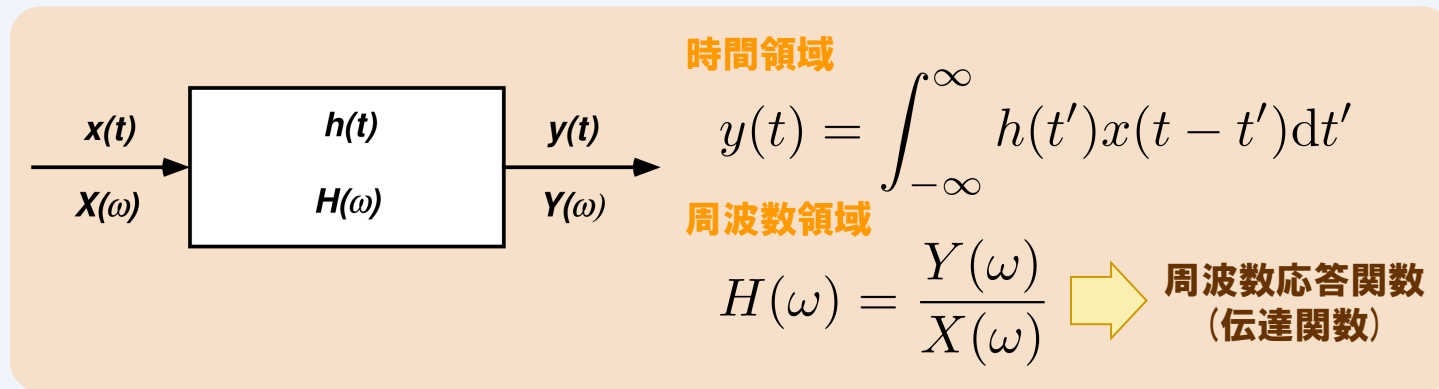


# 確率過程 (5)

## — 線型システム —

### ・ 線型系

入力と出力が線型関係で結ばれた系



このとき

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \text{ が成り立つ}$$



周波数応答関数がわかれば  
出力のパワースペクトルを知ることができる

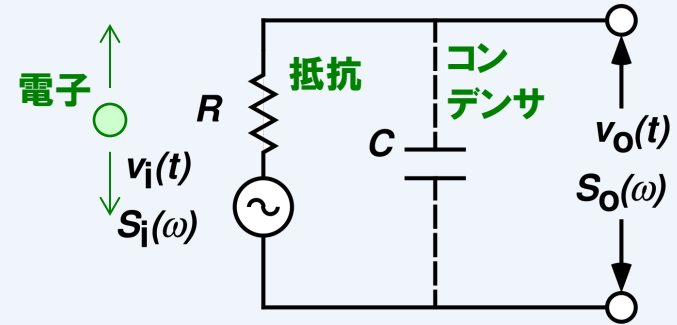
# 抵抗の熱雑音 (1)

## — 抵抗の熱雑音 —

- 抵抗の熱雑音 (ジョンソン雑音)

抵抗の両端に生じる雑音  
抵抗内の自由電子の熱運動に起因

確率密度関数：ガウス分布  
スペクトル：平坦 (白色雑音)



エネルギー等分配則より  
コンデンサー両端の平均エネルギーは

$$\frac{C \langle v_o^2 \rangle}{2} = \frac{k_B T}{2} \quad \text{となる}$$



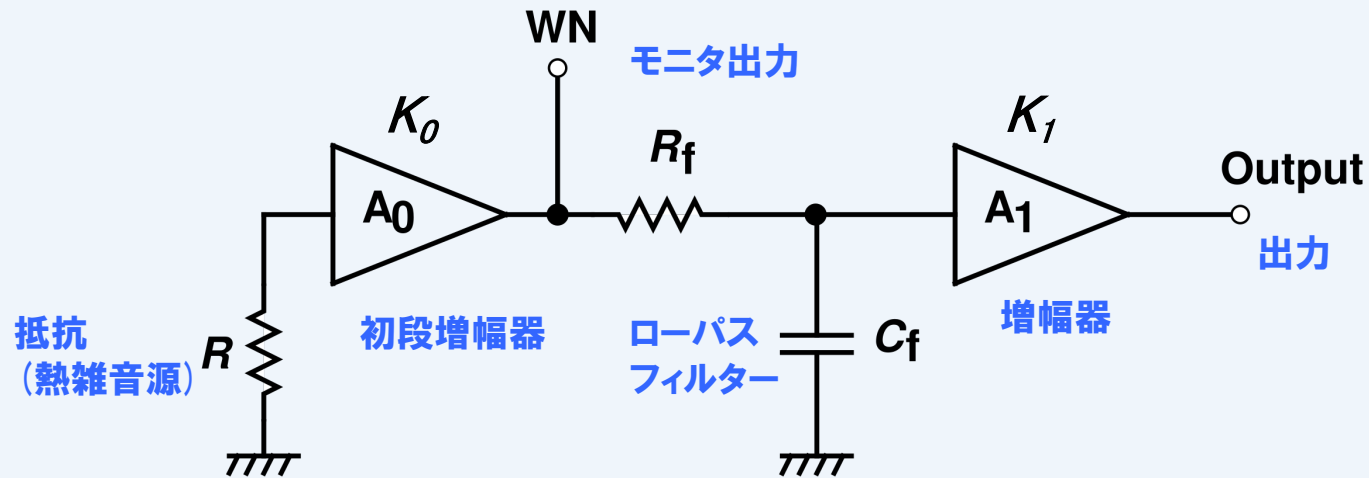
電圧の2乗平均から温度が求められる

# 抵抗の熱雑音 (2)

## — 測定回路 —

### 測定回路の構成

熱雑音源となる抵抗・増幅器などを含む



抵抗値 : 1, 2, 5, 10 M $\Omega$   
時定数 : 10, 20, 50, 100 msec

➡ 合計16通りの測定を行う

(注)  
スイッチ切り替え直後は  
出力が安定しないので  
落ち着くのを待ってから測定すること



# 抵抗の熱雑音 (3)

## — A/Dコンバータ —

- A/Dコンバータ

アナログ信号をデジタル信号に変換

→ コンピュータに記録できるようにする

仕様 :  $\pm 10$  V, 16 bit → 分解能 約 0.3 mV

ソフトウェア : FDSAMP で計測、DATDISPで表示・解析

### 注意点

#### 信号の大きさ

ゲイン大 → アナログ回路の飽和、ADCのレンジオーバー

ゲイン小 → 回路の雑音の影響、ADCの量子化誤差

#### サンプリングレート

早い → データ量が増える

遅い → エリアシングの問題

#### 測定データ量

短い → 統計誤差が大きくなる

長い → 測定時間が長くなる

# 抵抗の熱雑音 (4)

## — エリアシング —

### ・ 標本化定理とエリアシング

#### 標本化定理

アナログ信号をデジタル変換する際、  
サンプリング周波数の半分の周波数  
(ナイキスト周波数) までしか記録できない

#### エリアシング

ナイキスト周波数以上の成分が  
低周波数成分として現れてしまう

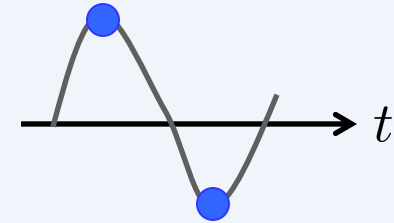
⇒ 低周波数帯の測定結果も  
信頼できないものになる

#### アンチ・エリアシング・フィルター

ADC入力前に、ナイキスト周波数以上  
の成分を除去しておくためのLPF

⇒ 低周波数帯は  
正確な測定結果が得られる

#### 標本化定理の大雑把な理解



波形を再現するには  
最低2点は必要

