Saulson Chapter 14

T. Sekiguchi

2010.6.2.(Tue)

14 Detecting Gravitational Wave Signals

重力波検出器をどう設計するかをこれまで話してきたので、この章では検出器からの出力をどのように解釈するかについて学ぶ。

14.1 The Signal Detection Problem

重力波検出器では重力波のシグナルが膨大なノイズに埋もれているため、仮にシグナルらしきものが得られても、それが「重力波である」と自信を持って言うことは難しい。以下の節で、バースト型の重力波（超新星爆発）、周期的重力波（中性子星連星）、背景重力波（宇宙初期）のそれぞれのケースについて重力波シグナルとノイズをどのように区別するかについて説明していく。

14.2 Probability Distribution of Time Series

干渉計からの出力を $h(f)$ によってキャリブレーションしたとして、伝達関数 $G(f)$ を出力に噛ませたとすると、出力の rms は

$$v_{\rm rms} = \sqrt{\int_0^\infty h^2(f)|G(f)|^2} \tag{1}$$

一方、重力波 $h_{\rm GW}(t)$ が入ってきた時、フィルターを通した後の出力は

$$v_{\rm GW}(t) \propto \int_{-\infty}^{t} h_{\rm GW}(\tau) g(t-\tau) d\tau \tag{2}$$

ただし $g(t)$ はフィルターのインパルス応答。直観的に言うと、これがノイズの rms より十分に大きければ、我々はそれの重力波シグナルとしてノイズと区別することが可能である。この根拠を以下に述べる。

フィルターからの出力 v をランダムに取り出し、出力 v が得られる頻度をプロットしていくことにしよう。サンプル数を増やしていくと、このヒストグラムは中心極限定理によりだんだんガウス分布へ近づいていく。

$$P(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(v-\bar{v})^2/2\sigma^2} \tag{3}$$

なお、ガウス分布の確率密度を持つようなデータを線形なフィルターにかけたとしても、フィルターからの出力の確率分布はやはりガウシアンとなる。

確率分布がガウシアンでかける時、平均値から $z\sigma$ 以上離れた値が与えられる確率は完全エラー関数

$$\mathrm{erfc}(z) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt \tag{4}$$

によって表される。これは z が大きくなると急激に減少する関数であるから、平均値から大きく離れた値のノイズが発生する確率は非常に低いということが保証される。よって何らかの threshold を設定しておいて、まず間違いなくノイズがそのレベルを超えないようにしておけばよい。ただしこの方法には (1) 重力波以外に大きなシグナルを与える要素が存在しない (2) 確率分布が正確にガウス分布で記述されるという前提条件が必要である。

14.3 Coincidence Detection

重力波と他のノイズを見分ける判断を与える最も良い方法は、複数の観測装置を作ること。問題は、複数の検出器をどこに設置するか。

- **複数の観測装置を同じ場所に作る場合：**同じ条件で観測を行うことができる。また真空装置などの設備を共有することによってコストを抑えることができる。しかし設備を共有すると、共通のノイズを発生させる確率が増える。
- **離れた場所に観測装置を作る場合：**共通のノイズを発生させる確率は相当低い。ただし観測条件が異なるため、観測結果が異なる可能性が高く、結果を比較しにくい。

離れた場所に観測装置を作る場合、1 つ目の問題点は光が有限の速度を持つために、二つの装置における信号の間に時間差が生じること。LIGO の場合はこれが 6 msec、LIGO と VIRGO の間では 20 msec ほど。もう 1 つの問題点は、地球の丸みのために干渉計が感度を持つ向きがそれぞれの観測装置で異なること。また、それぞれの装置で違う振動モードが観測される可能性があり、測定結果を単純に比較することはできない。

14.4 Optimum Orientation

観測装置で観測される重力波の偏向モードは、干渉計の腕の間の角度を 2 等分するような向きで決まる。よって離れた 2 つの観測装置で同じ振動モードを観測したければ、その向きをそろえてやればよい。ただしその場合、2 つの観測装置では同じ信号が得られるため、重力波の性質に関する新たな情報を得ることができない。また、バイナリの合体から出る重力波の場合、楕円偏向となることが予想されるので、2 つの観測装置の向きを揃えることはそこまで重要ではない。

14.5 Local Coincidences

同じ場所に複数の干渉計を作った場合の話。重力波が来ればかならず同時に信号が得られるというメリットがある。少なくとも、重力波とおぼしき信号が得られた場合、それが 2 つの装置で同時に観測されていないければ、それは重力波ではないと言い切ることができる。

ローカル同時観測の改良版が、LIGO には採用されている。同じ場所にキャビティの長さが半分の干渉計を作り、同じ真空装置を共有させる。ただしフィネスを 2 倍にして、光の閉じ込め時間やショットノイズが同じになるようにしてある。2 つの干渉計において、シグナルが同時かつ SN 比が 1:2 という要請をすれば、重力波だけが要求されるシグナルを出すと考えられる。

14.6 Searching for Periodic Gravitational Waves

14.6.1 When is a spectral peak improbably strong?

ノイズのパワースペクトルが白色で一定であると仮定すると、パワースペクトルにおいて周波数 f に大きさ v_f のノイズが得られる確率はレイリー分布によって与えられる。

$$P(v_f) = \frac{v_f}{\sigma^2} e^{-v_f^2/2\sigma^2} \tag{5}$$

この確率分布が干渉計のスペクトルで現れるというのは、Niebauer らによって実験的に示されている。しかし、ほかの装置のスペクトルはレイリー分布に従わない可能性がある。実際、熱雑音によって励起された機械的共振などのシャープなピークをもつノイズが存在する。

14.6.2 Signatures of periodic gravitational waves

周期的な重力波は他のノイズとはあきらかに異なる特徴がある。一つは、同じ装置に対しては同じ大きさのピークが常に出続けるということ。1 つの場所に同じような観測装置を作った場合、それぞれの装置における機械的共振の周波数はわずかであるが異なるため、周波数解像度が十分によければ重力波による信号と区別することができる。

もう一つの特徴は、地球が自転・公転していることによって周波数変調が得られることである。この特徴を用いるとソースの位置を特定することが可能である。ソースは地球上に固定された観測装置から見て「動いて」見える。ドップラー効果による周波数の変化は以下のようになる。

$$f = f_0 \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \hat{r}}{c}\right) \tag{6}$$

観測装置の速度は、地球の自転速度および公転速度のサイン波の重ね合わせで見積もれる。地球の公転速度は $v_{\rm orb} = 2.98 \times 10^4$ m/sec、$\beta_{\rm orb} = 10^{-4}$、地球の自転速度は緯度 40 度において $v_{\rm rot} = 355$ m/sec、$\beta_{\rm rot} = 1.2 \times 10^{-6}$、自転周波数は 1.2×10^{-5} Hz、公転周波数は 3.2×10^{-8} Hz である。

積分する時間の長さを長くしていって周波数解像度を上げていくと、ソースの位置の角度分解能はよくなる。そのオーダーは

$$\Delta\theta \sim \frac{c}{vfT} \tag{7}$$

で見積もれる。一日積分すると $\Delta\theta = 0.15$ rad あるいは 10 ° である。2 か月積分すると $\Delta\theta = 20$ μrad あるいは 4 arcsec となる。

観測時間 T を長くすると、ホワイトノイズが下がって SN 比は $\sqrt{T}$ に比例して上がっていく。しかしドップラーシフトの効果を受けるために carrier frequency におけるシグナル強度は下がってしまう。このことを見るために、周波数変調を加えられたシグナルは以下のように表してみる。

$$h(t) = h_0 \cos(2\pi f_0 t + \delta \cos(2\pi f_m t)) \tag{8}$$

f_m は変調周波数、δ は変調指数と呼ばれるもので、

$$\delta = \frac{f_0}{f_m} \frac{(\vec{v} \cdot \hat{r})_{\rm max}}{c} \tag{9}$$

で与えられ、$\vec{v} \cdot \hat{r}$ の最大値に比例する。この効果がサイドバンドにどう表れるかは、δ の大きさに依存する。n 個目のサイドバンドの大きさはベッセル関数 $J_n(\delta)$ となる。

- $\delta \ll 1$ **のとき：**carrier frequency が最大ピークとなり、現れるサイドバンドはせいぜい 1 次の項のみ
- $\delta \gg 1$ **のとき：**およそ δ 個のサイドバンドが立つ。ベッセル関数は $J_n(\delta) \sim \sqrt{2/\pi\delta}\cos(\delta-\pi/2-n\pi/2)$ となり、ピークの大きさは、変調しない時のおよそ $1/\sqrt{\delta}$ 倍のオーダー

自転による変調を考えた場合、$\delta \approx 10$ となる。これは SN 比がファクター 3 で下がることを意味する。もし公転による変調効果を考慮に入れて 1 年間分のデータの積分を行うと $\delta \approx 3 \times 10^6$ となって、おのおののピークは 10^{-3} 倍未満となる。

もっとスマートな方法として、星の位置が厳密にわかっている場合、星の位置を基準にして考える方法がある。このときの干渉計の座標を $\vec{x}(t)$ とする。この座標系においては、重力波は同じ周波数で放出される。このやり方では、時間 t の代わりに

$$t' \equiv t + \frac{\vec{x}\cdot\hat{r}}{c} \tag{10}$$

という時刻を用いる。この新しい時系列データでは、サイドバンドは消えて無くなり一つのピークに落ち着く。しかしこのやり方はソースの位置を正確に知る必要があり、ドップラー効果で同定できるのと同程度の正確さが必要。また、一回の計算で一つのソースの場所しか基準に取ることができない。

14.6.3 Frequency noise in the source and elsewhere

これまでの仮定は重力波のソースがずっと同じ周波数 (10^{-10} 未満の変化率) で重力波を発していることが前提となっている。パルサーについては、現在知られている最も周波数が変化するパルサーでさえこれよりずっと小さい変化しか起こさないので、無問題。一方バイナリについては上で述べた程度の周波数変化があるようで、この方法による位置の特定は難しい。

14.7 Searching for a Stochastic Background

初期宇宙から来る一様なバックグランド放射を測定しようという試み。しかしバックグランドの存在を、時間や空間の性質と区別するのは難しく、バックグランド重力波の検出は非常にチャレンジングである。バックグランドの測定がいかに難しいかについては、CMB の測定でも語られている。

背景重力波を測ることは非常に難しそうである。シグナルをブロックする方法もないし、キャリブレーションを行うこともできない。しかし重力波観測者にとって幸いなことに、背景重力波の周波数は音波と同程度であることが予想されている。よって時間波形そのものを観測することができ、また波長が十分長いために、離れた場所にある検出器におけるシグナルと比較することが容易である。(重力波の波長は 10 Hz の時で 3×10^4 km 程度)

データを解析するのは簡単で、2 つの信号についてオフセット 0 の相関関数を計算すればよい。

$$s_1 \star s_2(\tau = 0) \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt \tag{11}$$

ただしあまりノイズの大きな周波数帯域はフィルターでカットしておく必要がある。