

第 1 1 章 分布定数線路

11-1 無損失伝送線路

同軸ケーブルに代表される信号伝搬線路を分布定数線路あるいは分布定数回路と云う。図 11-1 に示すように、伝送線路の方向に z 軸をとり、電圧 $V(z, t)$ 、電流 $I(z, t)$ を定義する。伝送線路の単位長さ当たりのインダクタンスを L 、同じく単位長さ当たりのグラント間静電容量を C とする。

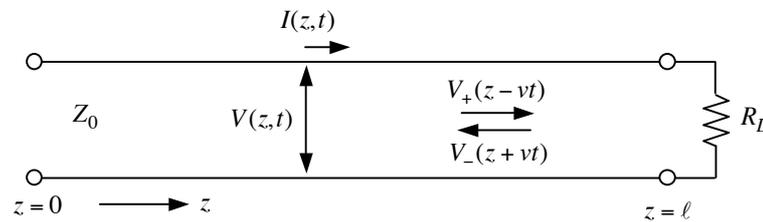


図 11-1 伝送線路

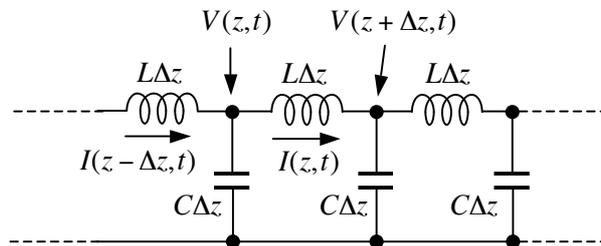


図 11-2 伝送線の等価回路

図 11-2 に示すように、微小区間のインダクタンス $L\Delta z$ 両端の電圧差及び、微小時間 Δt 間の容量 $C\Delta z$ の電圧変化は

$$\left. \begin{aligned} V(z + \Delta z, t) &= V(z, t) - L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \Delta z \\ V(z, t + \Delta t) &= V(z, t) + \frac{1}{C\Delta z} \{I(z - \Delta z, t) - I(z, t)\} \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (11.1.1)$$

と書ける。(11.1.1)式において $\Delta z \rightarrow 0$ 、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとることで $V(z, t)$ 、 $I(z, t)$ についての次の微分方程式を得る。

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \quad (11.1.2)$$

(11.1.2)式をさらに微分することで、 $V(z, t)$ 、 $I(z, t)$ についての 1 次元波動方程式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 I(z,t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 I(z,t)}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (11.1.3)$$

(11.1.3)式の一般解は

$$\left. \begin{aligned} V(z,t) &= V_+(z-t/\sqrt{LC}) + V_-(z+t/\sqrt{LC}) \\ I(z,t) &= I_+(z-t/\sqrt{LC}) + I_-(z+t/\sqrt{LC}) \end{aligned} \right\} \quad (11.1.4)$$

で与えられる。ここで $V_{\pm}(z \mp t/\sqrt{LC})$ 、 $I_{\pm}(z \mp t/\sqrt{LC})$ は任意関数である。 V_+ 、 I_+ はの正方向に伝搬する電圧、電流であり、 V_- 、 I_- は負の方向に伝搬する電圧、電流である。(11.1.4)式は任意の波形の信号がその波形を保ったまま、伝送線路を正負両方向に速度

$$v_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (11.1.5)$$

で伝搬することを表しており、パルス波形等の伝送において重要な性質である。更に(11.1.2)式により

$$V_{\pm}(z \mp t/\sqrt{LC}) = \pm \sqrt{\frac{L}{C}} I_{\pm}(z \mp t/\sqrt{LC}) \quad (11.1.6)$$

なる関係が成立しており

$$Z_0 = \sqrt{L/C} \quad (11.1.7)$$

を伝送線路の特性インピーダンスと云う。

伝送線には図 11-1 のように $z = \ell$ に負荷抵抗 R_L が接続されているものとする。負荷端 $z = \ell$ においては

$$V(\ell, t) = R_L I(\ell, t) \quad (11.1.8)$$

であることを用いて、(11.1.4)式、(11.1.6)式より

$$V_-(\ell + t/\sqrt{LC}) = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} V_+(\ell - t/\sqrt{LC}) \quad (11.1.9)$$

を得る。即ち、負荷に進行波 $V_+(z - t/\sqrt{LC})$ が加わると、反射波 $V_-(z + t/\sqrt{LC})$ が発生する。

$$r = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} \quad (11.1.10)$$

を振幅反射率と呼ぶ。

$$R_L = Z_0 \quad (11.1.11)$$

のときは

$$V_-(\ell + t/\sqrt{LC}) = 0 \quad (11.1.12)$$

即ち反射波がなくなり、給電端 ($z = 0$) に加えられた進行波 $V_+(z - t/\sqrt{LC})$ 電圧の波形がそのまま負荷端に現れ、進行波のエネルギーは全て負荷で消費されることになる。これをインピーダンス整合 (インピーダンス・マッチング) と云う。 $R_L > Z_0$ のとき

は反射波電圧は進行波電圧と同極性となり、 $R_L < Z_0$ では反射波は逆極性となる。また、負荷端における電圧は

$$V(\ell, t) = \frac{2R_L}{R_L + Z_0} V_+(\ell - t/\sqrt{LC}) \quad (11.1.13)$$

となる。以上をまとめると次のようになる。

$$R_L \gg Z_0$$

$$\left. \begin{aligned} V(\ell, t) &= 2V_+(\ell - t/\sqrt{LC}) \\ V_-(\ell + t/\sqrt{LC}) &= V_+(\ell - t/\sqrt{LC}) \end{aligned} \right\} \quad (11.1.14)$$

$$R_L = Z_0$$

$$\left. \begin{aligned} V(\ell, t) &= V_+(\ell - t/\sqrt{LC}) \\ V_-(\ell + t/\sqrt{LC}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.1.15)$$

$$R_L \ll Z_0$$

$$\left. \begin{aligned} V(\ell, t) &= 0 \\ V_-(\ell + t/\sqrt{LC}) &= -V_+(\ell - t/\sqrt{LC}) \end{aligned} \right\} \quad (11.1.16)$$

次に $V(z, t)$ 、 $I(z, t)$ が時間的に周波数 ω でサイン波状に振動している場合を考える。

$$V(z, t) = V(\omega, z)e^{j\omega t}, \quad I(z, t) = I(\omega, z)e^{j\omega t} \quad (11.1.17)$$

これを(11.1.3)式に代入して

$$\frac{d^2V(\omega, z)}{dz^2} = -\omega^2LCV(\omega, z), \quad \frac{d^2I(\omega, z)}{dz^2} = -\omega^2LCI(\omega, z) \quad (11.1.18)$$

これより

$$\left. \begin{aligned} V(\omega, z) &= V_+(\omega)e^{-jkz} + V_-(\omega)e^{jkz} \\ I(\omega, z) &= I_+(\omega)e^{-jkz} + I_-(\omega)e^{jkz} \end{aligned} \right\} \quad (11.1.19)$$

ここで

$$k = \omega/v_0 \quad (11.1.20)$$

は伝搬定数と呼ばれ、また(11.1.6)式の関係式は

$$V_{\pm}(\omega) = \pm Z_0 I_{\pm}(\omega) \quad (11.1.21)$$

となる。以上の解に対応する $V(z, t)$ 、 $I(z, t)$ は

$$\left. \begin{aligned} V(z, t) &= V_+(\omega)e^{-j(kz-\omega t)} + V_-(\omega)e^{j(kz+\omega t)} \\ I(z, t) &= I_+(\omega)e^{-j(kz-\omega t)} + I_-(\omega)e^{j(kz+\omega t)} \end{aligned} \right\} \quad (11.1.22)$$

となり、 $V_+(\omega)$ 、 $I_+(\omega)$ は z の正方向に伝搬する進行波の振幅、 $V_-(\omega)$ 、 $I_-(\omega)$ は負の方向に伝搬する反射波の振幅であることが分かる。

11-2 損失のある伝送線路

伝送線路を伝搬する信号は、線路を構成する電極の表皮抵抗及び線間絶縁体の誘電体損失により減衰する。これらの損失は周波数に依存するので、時間領域で取り扱うのは極めて煩雑になる。そこでこのような損失のある伝送線路を周波数領域で考察してみよう。

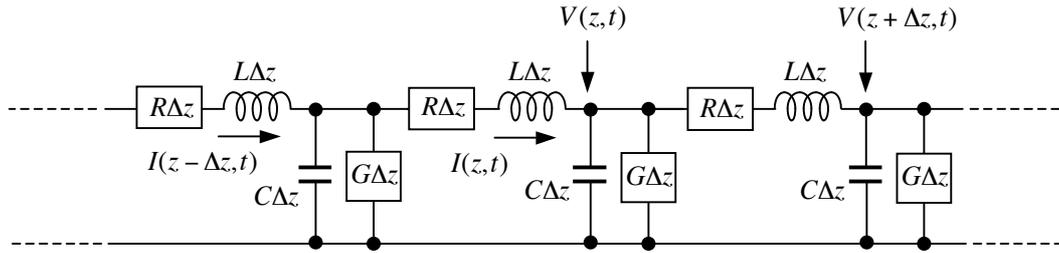


図 11-3 損失のある伝送線路

図 11-3 に示すように、区間 Δz におけるインダクタンス $L\Delta z$ に直列な抵抗成分を $R\Delta z$ 、容量 $C\Delta z$ に並列なコンダクタンス成分を $G\Delta z$ とする。 R 、 G は周波数に依存し、周波数 ω が高いときは、 $R(\omega)$ は線路を構成する電極の表皮抵抗、 $G(\omega)$ は誘電体損失を表す。電圧、電流は時間的に周波数 ω でサイン波的に振動しているものとして

$$v(z, t) = V(\omega, z)e^{j\omega t}, \quad i(z, t) = I(\omega, z)e^{j\omega t} \quad (11.2.1)$$

とすると、図 11-3 より

$$\left. \begin{aligned} V(\omega, z + \Delta z) &= V(\omega, z) - j\omega L\Delta z I(\omega, z) - R\Delta z I(\omega, z) \\ V(\omega, z + \Delta z) &= \frac{1}{j\omega C\Delta z} \{I(\omega, z) - I(\omega, z + \Delta z) - G\Delta z V(\omega, z + \Delta z)\} \end{aligned} \right\} \quad (11.2.2)$$

が得られ、 $\Delta z \rightarrow 0$ の極限では

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV(\omega, z)}{dz} &= -(R + j\omega L)I(\omega, z) \\ \frac{dI(\omega, z)}{dz} &= -(G + j\omega C)V(\omega, z) \end{aligned} \right\} \quad (11.2.3)$$

となる。これより(11.1.4)式に対応する次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2V(\omega, z)}{dz^2} &= \gamma^2 V(\omega, z) \\ \frac{d^2I(\omega, z)}{dz^2} &= \gamma^2 I(\omega, z) \end{aligned} \right\} \quad (11.2.4)$$

ここで

$$\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C) \quad (11.2.5)$$

である。解は次のようになり

$$\left. \begin{aligned} V(\omega, z) &= V_+(\omega)e^{-\gamma z} + V_-(\omega)e^{\gamma z} \\ I(\omega, z) &= I_+(\omega)e^{-\gamma z} + I_-(\omega)e^{\gamma z} \end{aligned} \right\} \quad (11.2.6)$$

(11.1.6)式に対応して、電圧、電流は特性インピーダンス $Z'_0(\omega)$ で関係づけられ

$$V_{\pm}(\omega) = \pm Z'_0(\omega)I_{\pm}(\omega, z) \quad (11.2.7)$$

特性インピーダンス

$$Z'_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (11.2.8)$$

は複素数となる。また、伝搬定数

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + jk \quad (11.2.9)$$

の実数部 α は損失係数、虚数部 k は波数を表す。

注：(11.2.6)式より

$$\left. \begin{aligned} V(\omega, 0) &= V(\omega, \ell)\cosh \gamma \ell + Z'_0 I(\omega, \ell)\sinh \gamma \ell \\ I(\omega, 0) &= V(\omega, \ell)\sinh \gamma \ell / Z'_0 + I(\omega, \ell)\cosh \gamma \ell \end{aligned} \right\}$$

従って伝送線路の基本四端子行列は

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \gamma \ell & Z'_0 \sinh \gamma \ell \\ \sinh \gamma \ell / Z'_0 & \cosh \gamma \ell \end{pmatrix}$$

で与えられる。

$z = \ell$ に負荷インピーダンス Z_L を接続した場合、 $V(\omega, \ell) = Z_L I(\omega, \ell)$ より

$$\left\{ \begin{aligned} V_-(\omega) &= \frac{Z_L - Z'_0}{Z_L + Z'_0} V_+(\omega) e^{-2\gamma \ell} \\ Z'_0 I_+(\omega) &= V_+(\omega) \\ I_-(\omega) &= -\frac{Z_L - Z'_0}{Z_L + Z'_0} I_+(\omega) e^{-2\gamma \ell} \end{aligned} \right.$$

となり $z = 0$ から伝送線路を見たときのインピーダンス $Z(\omega) = V(\omega, 0) / I(\omega, 0)$ は

$$Z(\omega) = Z'_0 \frac{Z_L \cosh \gamma \ell + Z'_0 \sinh \gamma \ell}{Z'_0 \cosh \gamma \ell + Z_L \sinh \gamma \ell}$$

となる。

$|\gamma \ell| \ll 1$ では

$$Z(\omega) = Z'_0 \frac{Z_L + Z'_0 \gamma \ell}{Z'_0 + Z_L \gamma \ell} = \frac{Z_L + (R + j\omega L)\ell}{1 + Z_L(G + j\omega C)\ell}$$

と近似され、さらに $G = 0$ では

$$Z(\omega) = (Z_L + R\ell) \frac{1 + j\omega L\ell / (Z_L + R\ell)}{1 + j\omega C\ell Z_L} \quad (G = 0)$$

$Z_L = R_L$ (純抵抗) の場合は

$$Z(\omega) = (R_L + R\ell) \frac{1 + j\omega/\omega_1}{1 + j\omega/\omega_2}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = 1/C\ell R_L \\ \omega_2 = (R_L + R\ell)/L\ell = (R_L + R\ell)/Z_0^2 C\ell \end{cases}$$

$$Z(\omega) \rightarrow \begin{cases} R_L + R\ell & (\omega \rightarrow 0) \\ \frac{L\ell}{C\ell R_L} \equiv \frac{Z_0^2}{R_L} & (\omega \rightarrow \infty) \end{cases}$$

$R \ll 2\omega L$ 、 $G \ll 2\omega C$ では特性インピーダンス $Z_0'(\omega)$ 及び伝搬定数 $\gamma(\omega)$ は

$$Z_0' = Z_0 \left\{ 1 - j \left(\frac{R}{2\omega L} - \frac{G}{2\omega C} \right) \right\} \quad (11.2.10)$$

$$\gamma = \left(\frac{R}{2Z_0} + \frac{GZ_0}{2} \right) + j\omega\sqrt{LC} \quad (11.2.11)$$

と近似できる。ここで $Z_0 = \sqrt{L/C}$ は無損失線路の特性インピーダンス ((11.1.7)式) である。

ケーブルの減衰量 Γ は通常 1km 当たりの減衰量 dB/km で表示される。

$$\Gamma(\text{dB}/\text{km}) = 10^3 \times 10 \log(e^{2\alpha\ell})/\ell = 2 \times 10^4 \alpha$$

ここで $e^{2\alpha\ell}$ となっているのは通常パワー減衰量で定義されるためである。例えば $\omega = 2\pi \times 100\text{MHz}$ で

$$\Gamma(\text{dB}/\text{km}) = 100\text{dB}/\text{km}$$

のケーブルの場合

$$\alpha = 5 \times 10^{-5} \Gamma(\text{dB}/\text{km})/m = 5 \times 10^{-3} / m$$

程度となる。また、絶縁体がポリエチレンで構成されているケーブルでは伝搬速度は

$$v_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\epsilon\mu} \approx 2c/3$$

である。ここで c は真空中の光速である。そこで簡単化のために、減衰が R のみによるものとする $\alpha = R/2Z_0$ より

$$R = 2\alpha\sqrt{L/C}$$

であるから

$$R/\omega L = 4\alpha c/3\omega = 3.2 \times 10^{-3} \ll 1$$

となる。減衰が G による場合 ($\alpha = GZ_0/2$) にも同じ議論が成立し

$$G/\omega C = 4\alpha c/3\omega = 3.2 \times 10^{-3} \ll 1$$

となる。このように(11.2.10)式の虚数部は通常極めて小さいので無視でき

$$Z'_0 = Z_0 (= \sqrt{L/C} = \sqrt{\mu/\epsilon})$$

として良い。以下 $Z'_0 = Z_0$ とする。

11-3 信号伝播

$z = \ell$ に負荷 Z_L を接続した場合の信号伝搬を考える。(11.2.6)式

$$\left. \begin{aligned} V(\omega, 0) &= V_+(\omega) + V_-(\omega) \\ V(\omega, \ell) &= V_+(\omega)e^{-\gamma\ell} + V_-(\omega)e^{\gamma\ell} \end{aligned} \right\} \quad (11.3.1)$$

において、負荷端電圧 $V(\omega, \ell)$ は

$$V(\omega, \ell) = Z_L I(\omega, \ell) = Z_L I_+(\omega)e^{-\gamma\ell} + Z_L I_-(\omega)e^{\gamma\ell} \quad (11.3.2)$$

で与えられることから

$$V_-(\omega) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} V_+(\omega) e^{-2\gamma\ell} \quad (11.3.3)$$

が成立し、負荷端 $z = \ell$ における振幅反射係数は

$$r = \frac{V_-(\omega)e^{\gamma\ell}}{V_+(\omega)e^{-\gamma\ell}} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (11.3.4)$$

となる。なお、ここで $Z'_0 = Z_0$ とした。また入力端 $z = 0$ における反射係数は

$$r_0 = \frac{V_-(\omega)}{V_+(\omega)} = r e^{-2\gamma\ell} \quad (11.3.5)$$

で与えられる。以上より、負荷端における信号電圧は $z = 0$ における信号電圧により次式のように与えられ

$$V(\omega, \ell) = \frac{Z_L}{Z_L \cosh \gamma\ell + Z_0 \sinh \gamma\ell} V(\omega, 0) \quad (11.3.6)$$

$z = 0$ から見た伝送線路のインピーダンスは

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{V(\omega, 0)}{I(\omega, 0)} \\ &= Z_0 \frac{Z_L \cosh \gamma\ell + Z_0 \sinh \gamma\ell}{Z_0 \cosh \gamma\ell + Z_L \sinh \gamma\ell} \end{aligned} \quad (11.3.7)$$

となる。ここで $Z_L = Z_0$ とすると、ケーブル長 ℓ に関係なく

$$Z(\omega) = Z_0 \quad (\text{for } Z_L = Z_0) \quad (11.3.8)$$

が成立する。また、給電端 $z = 0$ に出カインピーダンス Z_s の信号源 $V_s(\omega)$ を接続すると、負荷端電圧は

$$V(\omega, \ell) = \frac{Z_L}{Z_L \cosh \gamma\ell + Z_0 \sinh \gamma\ell} \frac{Z(\omega)}{Z_s + Z(\omega)} V_s(\omega)$$

$$= \frac{Z_L}{(Z_L + Z_s) \cosh \gamma \ell + (Z_0 + Z_s Z_L / Z_0) \sinh \gamma \ell} V_s(\omega) \quad (11.3.9)$$

で与えられる。これより $Z_s = Z_0$ では

$$V(\omega, \ell) = \frac{Z_L}{Z_L + Z_0} e^{-\alpha \ell} e^{-jk\ell} V_s(\omega) \quad (11.3.10)$$

また、 $Z_L = Z_0$ では

$$V(\omega, \ell) = \frac{Z_0}{Z_s + Z_0} e^{-\alpha \ell} e^{-jk\ell} V_s(\omega) \quad (11.3.11)$$

となる。

ここで電圧定在波比 (VSWR) について触れておく。進行波と反射波が同時に存在するときには定在波が発生する。無損失伝送線を考えると反射係数の定義から伝送線に発生している電圧振幅は

$$V(\omega, z) = V_+(\omega)(e^{-jkz} + r e^{jkz}) \quad (11.3.12)$$

と書ける。そこで

$$r = |r| e^{j\theta} \quad (11.3.13)$$

と置くと、電圧振幅の大きさは

$$|V(\omega, z)| = |V_+(\omega)| \sqrt{1 + 2|r| \cos(2kz + \theta) + |r|^2} \quad (11.3.14)$$

となる。これより $|V(\omega, z)|$ は

$$z = (2n + 1)\lambda/4 - \lambda\theta/4\pi$$

で最小、

$$z = n\lambda/2 - \lambda\theta/4\pi$$

で最大

$$\left. \begin{aligned} |V(\omega, z)|_{\min} &= |V_+(\omega)|(1 - |r|) \\ |V(\omega, z)|_{\max} &= |V_+(\omega)|(1 + |r|) \end{aligned} \right\} \quad (11.3.15)$$

となる。最大振幅 (山) と最小振幅 (谷) の比を VSWR と云い

$$VSWR = \frac{|V(\omega, z)|_{\max}}{|V(\omega, z)|_{\min}} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad (11.3.16)$$

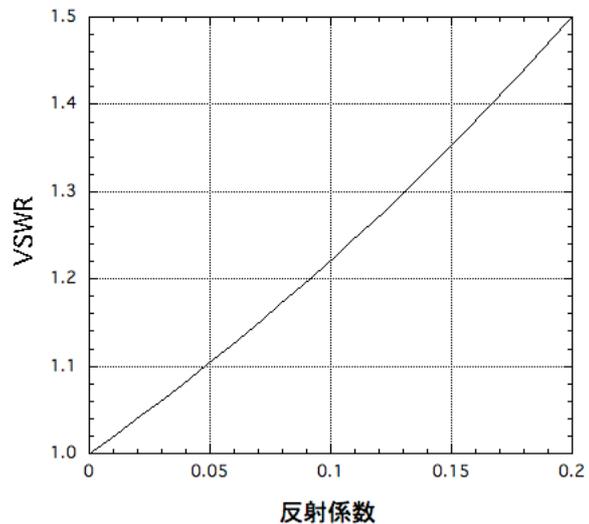


図 8-4 反射係数と VSWR の関係

VSWR を測定することで反射係数の大きさ $|r|$ を知ることができる。谷と谷の間隔は半波長 $\lambda/2$ であるから、負荷から見て最初の山または谷ができる z と ℓ との距離を知ることによって位相 θ を知ることができる。 $|r|$ の小さい範囲での VSWR を図 8-4 に示す。

11-4 低周波信号（集中定数回路近似）

無損失ケーブル（ $\alpha = 0$ 、 $\gamma = jk$ ）において、低周波領域

$$kl \ll 1 \quad (k = 2\pi/\lambda = \omega/v_0) \quad (8.4.1)$$

を考える。この条件はまた

$$\omega \ll 1/Z_0 C l \quad (11.4.2)$$

と書ける。 $\cosh \gamma l = \cos kl = 1$ 、 $\sinh \gamma l = j \sin kl = jkl$ と近似し、(11.3.9)式及び伝播速度 $v_0 = 1/CZ_0$ ((11.1.5)式、(11.1.7)式参照) より

$$\begin{aligned} V(\omega, \ell) &= \frac{R_L}{R_L \cosh \gamma \ell + Z_0 \sinh \gamma \ell} \frac{Z(\omega)}{R_s + Z(\omega)} V_s(\omega) \\ &= \frac{R_L}{R_L + R_s} \frac{1}{1 + j\omega C l Z_0} \frac{Z_0}{R_L + R_s} V_s(\omega) \end{aligned} \quad (11.4.3)$$

ここで $R_s \approx Z_0 \ll R_L$ とすると

$$V(\omega, \ell) = \frac{R_L}{R_L + R_s} \frac{1}{1 + j\omega C l R_s} V_s(\omega) \quad (11.4.4)$$

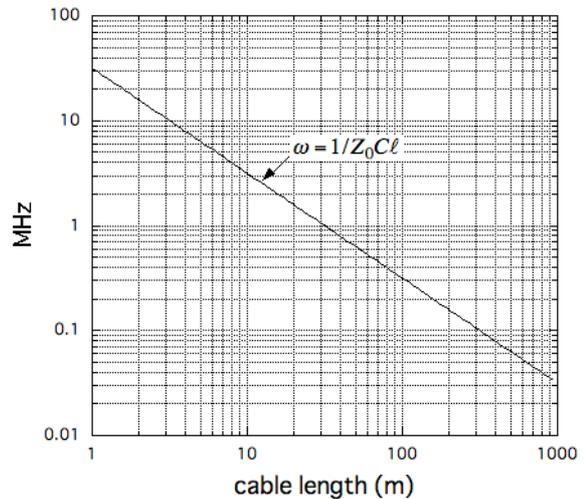
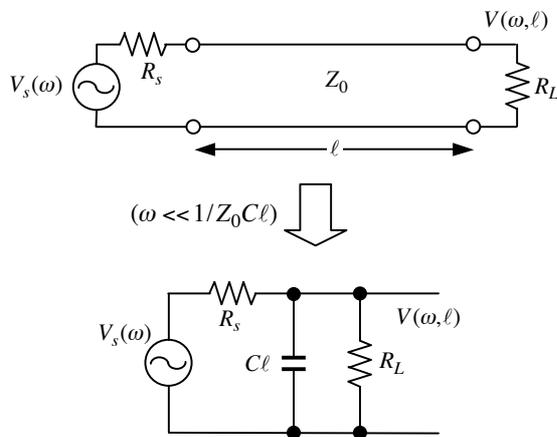


図 11-5 $R_L \gg Z_0$ 、 $\omega \ll 1/Z_0 C l$ における伝送線の等価回路

と近似され、等価回路は図 11-5 となる。すなわち、 $kl \ll 1$ ($l \ll \lambda/2\pi$) では長さ l のケーブルは容量 $C l$ と等価であり、 $-3dB$ カットオフ周波数は

$$\omega_c = 1/R_s C l \quad (11.4.5)$$

となる。

したがって(11.4.2)式を満たす周波数領域の信号伝送においては、インピーダンス・マッチングを考慮する必要はない。

11-5 無損失同軸線路

図 11-6 に示すような、内部導体直径 $2a$ 、外部導体内径 $2b$ の同軸伝送線路（同軸管）を考える。内外導体間の絶縁層の誘電率を ϵ 、透磁率を μ とする。導体は完全導体、誘電体損失はないものとする。Maxwell 方程式

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}\mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \text{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} \\ \text{div}\mathbf{E} &= \rho/\epsilon \\ \text{div}\mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.5.1)$$

を円柱座標で表し、TEM モード ($E_z=0, H_z=0$) を考える。軸対称 ($\partial/\partial\theta=0$)、 $E_\theta=0$ を仮定すると

$$\left. \begin{aligned} H_r &= 0 \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} &= -j\omega\mu H_\theta \end{aligned} \right\} \quad (11.5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_\theta}{\partial z} &= -j\omega\epsilon E_r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.5.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) = 0 \quad (11.5.4)$$

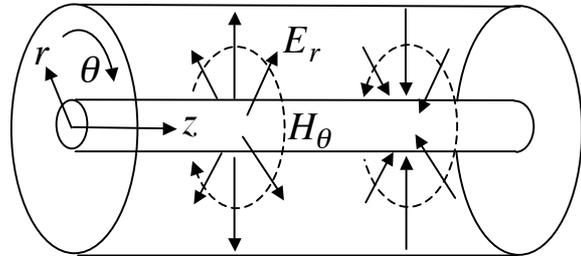


図 11-6 同軸線路中の電磁場 (TEM モード)

より

$$E_r = f(z)/r, \quad H_\theta = g(z)/r \quad (11.5.5)$$

と置ける。これらを(11.3.2)、(11.3.3)式に代入して

$$\frac{df(z)}{dz} = -j\omega\mu g(z), \quad \frac{dg(z)}{dz} = -j\omega\epsilon f(z) \quad (11.5.6)$$

を得る。これより

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = -\omega^2 \mu \epsilon f(z) \quad (11.5.7)$$

を得、解は

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= f_+ e^{-j\omega\sqrt{\epsilon\mu}z} + f_- e^{j\omega\sqrt{\epsilon\mu}z} \\ g(z) &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (f_+ e^{-j\omega\sqrt{\epsilon\mu}z} - f_- e^{j\omega\sqrt{\epsilon\mu}z}) \end{aligned} \right\} \quad (11.5.8)$$

で与えられる。したがって E_r 、 H_θ は

$$\left. \begin{aligned} E_r(r,z) &= \frac{1}{r}(f_+e^{-j\omega\sqrt{\epsilon\mu}z} + f_-e^{j\omega\sqrt{\epsilon\mu}z}) \\ H_\theta(r,z) &= \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(f_+e^{-j\omega\sqrt{\epsilon\mu}z} - f_-e^{j\omega\sqrt{\epsilon\mu}z}) \end{aligned} \right\} \quad (11.5.9)$$

となる。

導体表面の境界条件は

$$H_\theta(a,z) = J_{1z}(z), \quad H_\theta(b,z) = -J_{2z}(z) \quad (11.5.10)$$

と表される。 $J_{1z}(z)$ は内部導体の表面電流密度、 $J_{2z}(z)$ は外部導体の表面電流である。磁場が θ 方向成分だけなので、表面電流は z 方向成分のみである。従って内部導体の全表面電流 $I(z)$ は

$$I(z) = 2\pi a H_\theta(a,z) = 2\pi\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(f_+e^{-j\omega\sqrt{\epsilon\mu}z} - f_-e^{j\omega\sqrt{\epsilon\mu}z}) \quad (11.5.11)$$

となり、また外部導体の全表面電流 $I'(z)$ は $-I(z)$ に等しい。

$$I'(z) = -2\pi b H_\theta(b,z) = -I(z) \quad (11.5.12)$$

更に外部導体に対する内部導体の電圧は

$$\begin{aligned} V(z) &= -\int_a^b E_r(r,z) dr \\ &= \ln\left(\frac{a}{b}\right)(f_+e^{-j\omega\sqrt{\epsilon\mu}z} + f_-e^{j\omega\sqrt{\epsilon\mu}z}) \end{aligned} \quad (11.5.13)$$

である。ここで

$$V_\pm(\omega) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)f_\pm, \quad I_\pm(\omega) = \pm 2\pi\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}f_\pm \quad (11.5.14)$$

$$k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \quad (11.5.15)$$

と置くと

$$\left. \begin{aligned} V(z) &= V_+(\omega)e^{-jkz} + V_-(\omega)e^{jkz} \\ I(z) &= I_+(\omega)e^{-jkz} + I_-(\omega)e^{jkz} \end{aligned} \right\} \quad (11.5.16)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} k &= \omega\sqrt{\epsilon\mu} \\ V_\pm(\omega) &= \pm Z_0 I_\pm(\omega) \\ Z_0 &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned} \right\} \quad (11.5.17)$$

であり Z_0 は特性インピーダンスである。

次に 11-1 節及び 11-2 節で導入された単位長さ当たりのインダクタンス L 、静電容量 C との対応を考える。(11.2.9)式において損失がない($R=0, G=0$)ものとする損

失係数は $\alpha = 0$ であり、伝搬定数は

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} = jk \quad (11.5.18)$$

となる。したがって

$$\sqrt{LC} = \sqrt{\epsilon\mu} = 1/v_0 \quad (11.5.19)$$

である。 v_0 は内導体と外導体間の媒質中の光速度である。また $Z_0 = \sqrt{L/C}$

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (11.5.20)$$

であり、(11.1.7)、(11.5.20)式より

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \quad (11.5.21)$$

が導かれる。ここで C は静電気学的に導かれる容量と同じものである。

11-6 表皮効果 I (軸対称電流の場合)

次節で同軸線路における導体損失を考察するための準備として、本節で表皮効果の一般論を解説する。考察対象として、半径 a の円柱状導体を考え、図 11-7 に示すように軸対称電流が軸方向 (z 方向) に一様に流れている

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = i(r)e^{j\omega t} \mathbf{e}_z \quad (11.6.1)$$

ものとする。考えている周波数領域では導体内部では $\omega \ll \sigma/\epsilon_0$ が成立する (注 1) ので変位電流 $\epsilon\partial\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)/\partial t$ は無視でき、Maxwell 方程式は

$$\text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu\frac{\partial\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (11.6.2)$$

$$\text{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \quad (11.6.3)$$

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = \sigma\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (11.6.4)$$

となる。なお (11.6.3)、(11.6.4)式より

$$\text{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (11.6.5)$$

である。(8.6.4)式を (8.6.2)、(8.6.3)式に代入することで

$$\text{rot rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (11.6.6)$$

を得る。ここで

$$\text{rot rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{grad div}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

及び (11.6.5)式より、(11.6.6)式は

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (11.6.7)$$

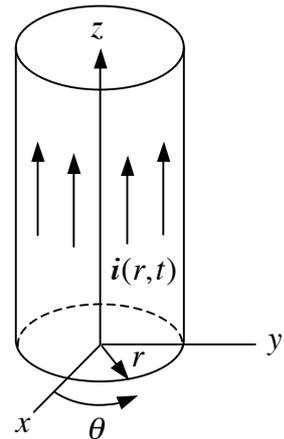


図 11-7 円柱導体に流れる電流

となる。(11.6.1)式、(11.6.4)式より $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ も軸対称かつ z 方向に一様

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(r)e^{j\omega t}\mathbf{e}_z \quad (11.6.8)$$

であるから、(11.6.7)式を円柱座標で書き(注2)、(11.6.8)式を代入することで $E(r)$ に対する次のベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2 E(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE(r)}{dr} - j\omega\mu\sigma E(r) = 0 \quad (11.6.9)$$

を得る(注3)。ここで

$$\kappa = \sqrt{-j\omega\mu\sigma} \quad (11.6.10)$$

とし

$$\hat{z} = \kappa r \quad (11.6.11)$$

と置くと、(11.6.9)式は0次のベッセル微分方程式

$$\frac{d^2 E(r)}{d\hat{z}^2} + \frac{1}{\hat{z}} \frac{dE(r)}{d\hat{z}} + E(r) = 0 \quad (11.6.12)$$

となり、 $r \rightarrow 0$ で発散しない解は

$$E(r) = AJ_0(\kappa r) \quad (11.6.13)$$

で与えられる。 $J_0(\hat{z})$ は0次のベッセル関数、 A は境界条件で決まる定数である。なお(11.6.10)式は

$$\kappa = \frac{1-j}{\delta} \quad (11.4.14)$$

と書くことができ

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (11.6.15)$$

を表皮の深さ (skin depth) (または表皮の厚さ) と云う。ちなみに $\omega = 2\pi \times 10\text{MHz}$ における銅の δ は、比抵抗を $\rho = 1/\sigma = 1.8 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ として $\delta = 21.4 \mu m$ である。

次に定数 A を決めるために $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ について解く。(11.6.2)式及び

$$\left. \begin{aligned} (\text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t))_r &= (\text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t))_z = 0 \\ (\text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t))_\theta &= -\frac{\partial E(r)}{\partial r} e^{j\omega t} = -\mu \frac{\partial H_\theta(r)}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

より

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = H(r)e^{j\omega t}\mathbf{e}_\theta \quad (11.6.16)$$

とすることができ

$$\frac{dE(r)}{dr} = j\omega\mu H(r) \quad (11.6.17)$$

を得る。これより

$$H(r) = \frac{\kappa A}{j\omega\mu} J'_0(\kappa r) = -\frac{\kappa A}{j\omega\mu} J_1(\kappa r) \quad (11.6.18)$$

となり、更に

$$(\text{rot}\mathbf{H}(r,t))_z = i(r)e^{j\omega t} \quad (11.6.19)$$

より、電流密度 $i(r)$ は次式

$$\begin{aligned} i(r) &= \frac{dH(r)}{dr} + \frac{1}{r}H(r) = \frac{A}{j\omega\mu} \left\{ \frac{d}{dr} \frac{dJ_0(\kappa r)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dJ_0(\kappa r)}{dr} \right\} \\ &= \frac{A}{j\omega\mu} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dJ_0(\kappa r)}{dr} \right) = -\frac{\kappa A}{j\omega\mu} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rJ_1(\kappa r)) \end{aligned} \quad (11.6.20)$$

となり、全電流 I は

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_0^a i(r)rdr \\ &= -\frac{2\pi\kappa A}{j\omega\mu} \int_0^a \frac{d}{dr} (rJ_1(\kappa r))dr = -\frac{2\pi\kappa A}{j\omega\mu} [rJ_1(\kappa r)]_0^a \\ &= -\frac{2\pi\kappa A}{j\omega\mu} J_1(\kappa a) = 2\pi a H(a) \end{aligned} \quad (11.6.21)$$

となる (注4)。以上より結果は以下のようなになる。

$$A = -\frac{j\omega\mu I}{2\pi\kappa a J_1(\kappa a)} = \frac{(1-j)I}{2\pi a \delta \sigma J_1(\kappa a)} \quad (11.6.22)$$

$$\left. \begin{aligned} E(r) &= (1-j) \frac{I}{2\pi\sigma a \delta} \frac{J_0(\kappa r)}{J_1(\kappa a)} \\ H(r) &= \frac{I}{2\pi a} \frac{J_1(\kappa r)}{J_1(\kappa a)} \end{aligned} \right\} \quad (11.6.23)$$

次に $|\kappa r| = \sqrt{2}r/\delta \gg 1$ の場合を考える。 $|\kappa r| \gg 1$ におけるベッセル関数の漸近形

$$\left. \begin{aligned} J_0(\kappa r) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa r}} \cos\left(\kappa r - \frac{\pi}{4}\right) \cong \sqrt{\frac{(1-j)\delta}{4\pi r}} e^{(1+j)r/\delta} \\ J_1(\kappa r) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa r}} \cos\left(\kappa r - \frac{3\pi}{4}\right) \cong -j \sqrt{\frac{(1-j)\delta}{4\pi r}} e^{(1+j)r/\delta} \end{aligned} \right\} \quad (11.6.24)$$

より $r/\delta \gg 1$ では

$$\left. \begin{aligned} E(r) &= \frac{(1+j)I}{2\pi\sigma\delta\sqrt{ar}} e^{-(1+j)(a-r)/\delta} \\ H(r) &= \frac{I}{2\pi\sqrt{ar}} e^{-(1+j)(a-r)/\delta} \end{aligned} \right\} \quad (11.6.25)$$

$$i(r) = \frac{dH(r)}{dr} + \frac{1}{r}H(r) = \frac{I}{2\pi\sqrt{ar}} \left(\frac{1+j}{\delta} + \frac{1}{2r} \right) e^{-(1+j)(a-r)/\delta}$$

$$= \frac{(1+j)I}{2\pi\sqrt{ar}\delta} e^{-(1+j)(a-r)/\delta} \quad (11.6.26)$$

となる。また、単位長さ当たりのパワー損失

$$P = \frac{1}{2} \int_0^a 2\pi r \operatorname{Re} [E^*(r)i(r)] dr \quad (11.6.27)$$

は

$$E^*(r)i(r) = \frac{I^* I}{2\pi^2 \sigma \delta^2 ar} e^{-2(a-r)/\delta} \quad (11.6.28)$$

より

$$\begin{aligned} P &= \frac{I^2}{2\pi\sigma\delta^2 a} \int_0^a e^{-2(a-r)/\delta} dr = \frac{1-e^{-2a/\delta}}{4\pi\sigma\delta a} I^* I \\ &= \frac{\rho}{2\pi a \delta} \left| \frac{I}{\sqrt{2}} \right|^2 \quad (a/\delta \gg 1) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [E^*(a)I] \end{aligned} \quad (11.6.29)$$

となる。これは表面の厚さ δ の領域に電流 I が流れて表面電場

$$E(a) = (1+j) \frac{\rho}{2\pi a \delta} I \quad (11.6.30)$$

を発生し、それによって生ずるパワー損失に等しい。 $\rho = 1/\sigma$ は抵抗率、 $\rho/2\pi a \delta$ は深さ δ の表面層の単位長さ当たりの直流抵抗である。以上より、半径 a の円柱導体の単位長さ当たりのインピーダンス（表面インピーダンス） $Z_s(\omega) = E(a)/I$ は

$$Z_s(\omega) = (1+j) \frac{\rho}{2\pi a \delta} = (1+j) \frac{\sqrt{\omega\mu\rho}}{2\sqrt{2}\pi a} \quad (11.6.31)$$

となる。

注1：銅の導電率として $\sigma = 1/\rho \approx 5.6 \times 10^7 \text{ S/m}$ ($\rho \approx 1.8 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$) とすると条件 $\omega \ll \sigma/\epsilon_0$ の成立範囲は

$$\omega \ll \sigma/\epsilon_0 \approx 2\pi \times 10^{18} \text{ Hz}$$

である。

注2：円柱座標表示

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2}$$

注3：同軸線路を流れる電流は進行波であるので

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = i(r)e^{-j(kz - \omega t)}\mathbf{e}_z$$

とすると(11.6.4)式より

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(r)e^{-j(kz - \omega t)}\mathbf{e}_z$$

であるから

$$\frac{\partial^2 E(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E(r)}{\partial r} - (k^2 + j\omega\mu\sigma)E(r) = 0$$

ここで $\sigma = 5.6 \times 10^7 \text{ S/m}$ とすると、 $v_0 \approx c$ として

$$\omega \ll \mu\sigma v_0^2 \approx \sigma/\epsilon_0 \approx 2\pi \times 10^{18} \text{ Hz}$$

では

$$k^2 \ll \omega\mu\sigma$$

となり、(11.6.9)式が成立する。

注4 : (11.6.3)式を導体表面一周について積分すると

$$I = \oint H(a)ad\theta = 2\pi aH(a)$$

11-7 表皮効果 II (平面電磁波の場合)

前節では円柱状導体に、時間的に振動している軸対称電流が流れている場合についての表皮効果を考察したので、本節では平面状導体表面に平面電磁波が入射する場合の表皮効果を考察する。

図 11-8 に示すように電場が x に偏光した平面波の進行方向を z 方向とし、 $z < 0$ は自由空間、 $z \geq 0$ は導体領域とする。

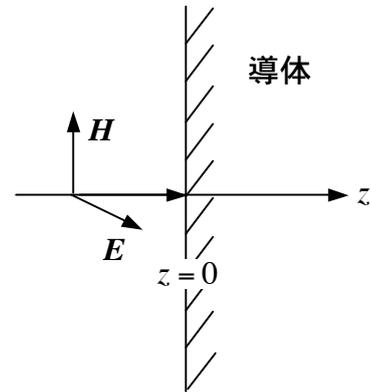


図 11-8 導体平面に入射する平面波

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_x e^{-j(kz - \omega t)}\mathbf{e}_x \quad (11.7.1)$$

(11.5.2)式より

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{k}{\omega\mu} E_x e^{-j(kz - \omega t)}\mathbf{e}_y \quad (11.7.2)$$

を(11.6.7)式 $\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu\sigma \partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) / \partial t = 0$ に代入することで分散式

$$k^2 = -j\omega\mu\sigma \quad (11.7.3)$$

を得る。従って(11.6.15)式で定義される δ を用いて

$$k = \sqrt{-j\omega\mu\sigma} = \frac{1-j}{\delta} \quad (11.7.4)$$

と書けるので

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_x e^{-j(z/\delta - \omega t)} e^{-z/\delta} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= H_y e^{-j(z/\delta - \omega t)} e^{-z/\delta} \mathbf{e}_y \end{aligned} \right\} \quad (11.7.5)$$

$$H_y = (1 - j) \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} E_x \quad (11.7.6)$$

となる。即ち導体中の電磁波の振幅は $e^{-z/\delta}$ に従って減衰する。導体表面におけるポインティング・ベクトル

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, t)]$$

は z 方向（導体内部方向）を向いており、単位面積当たり導体に消費されるパワーは

$$\mathbf{P}|_{z=0} = \frac{1}{2} \text{Re}[E_x H_y^*] \mathbf{e}_z = \frac{1}{2} |H_y|^2 \frac{1}{\sigma\delta} \mathbf{e}_z \quad (11.7.7)$$

となる。ここで完全導体表面の境界条件は表面電流を

$$\mathbf{J}(t) = J_x e^{j\omega t} \mathbf{e}_x \quad (11.7.8)$$

として

$$J_x = H_y \quad (11.7.9)$$

である。即ち (11.6.29)式と同様に、(11.7.7)式は表面電流 J_x が厚さ δ 、抵抗率 $\rho = 1/\sigma$ の層を流れて消費するパワー面密度である。以上より、導体表面は厚さ δ (skin depth) の抵抗層と考えて良いことになる。

11-8 表皮効果による損失を考慮した同軸線路

11-6節、11-7節の結果を用いて、同軸線路の損失として導体の表皮効果のみを考慮に入れた場合を考察する。導体は単位長さ当たり 11-4節 (11.4.31)式で与えられるインピーダンスを有する（表皮効果による表面インピーダンス）。同軸線路では内外両導体の表面インピーダンスを考慮して、11-2節の図 11-3 における R を

$$\begin{aligned} Z_s(\omega) &= (1 + j) \frac{\rho}{2\pi\delta(\omega)} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \\ &= \frac{\sqrt{j\omega\mu\rho}}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \end{aligned} \quad (11.8.1)$$

に置き代えれば良い。そこで、誘電体損失は無視できるものとして $G=0$ とすると (11.2.9)式の伝播定数は

$$\gamma(\omega) = \sqrt{\{Z_s(\omega) + j\omega L\} j\omega C}$$

$$= \sqrt{j\omega C(j\omega L + K\sqrt{j\omega})} \quad (11.8.2)$$

となる。ここで

$$K = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} \quad (11.8.3)$$

である。

$$\sqrt{\omega} \gg \frac{K}{L} = \frac{v_0}{2\pi Z_0} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} \quad (11.8.4)$$

を仮定して (注1) 1次近似すると

$$\gamma(\omega) = j\omega\sqrt{LC} + \frac{K\sqrt{j\omega}}{2Z_0} \quad (11.8.5)$$

と近似される。ここで

$$Z_0 = \sqrt{L/C}, \quad v_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (11.8.6)$$

であり、11-2節 (11.2.9)式で定義される減衰定数 α 及び伝搬定数 k は

$$\alpha = \frac{\sqrt{\omega}K}{2\sqrt{2}Z_0}, \quad k = \omega\sqrt{LC} + \frac{\sqrt{\omega}K}{2\sqrt{2}Z_0} \quad (11.8.7)$$

与えられる (注2)。

11-2節の (11.2.6)、(11.2.7)式より信号伝搬は

$$\left. \begin{aligned} V(\omega, z) &= V_+(\omega)e^{-\gamma(\omega)z} + V_-(\omega)e^{\gamma(\omega)z} \\ I(\omega, z) &= I_+(\omega)e^{-\gamma(\omega)z} + I_-(\omega)e^{\gamma(\omega)z} \\ V_{\pm}(\omega) &= \pm Z'_0 I_{\pm}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (11.6.8)$$

と表わされる。ここで特性インピーダンス Z'_0 は

$$\begin{aligned} Z'_0 &= \sqrt{\frac{Z_s(\omega) + j\omega L}{j\omega C}} \\ &= \sqrt{\frac{K\sqrt{j\omega} + j\omega L}{j\omega C}} \\ &= Z_0 + \frac{(1-j)K}{2\sqrt{2}\omega LC} \end{aligned} \quad (11.8.9)$$

である。そこで出力端を $Z_L = Z_0$ で短絡した場合振幅反射率は

$$|r| \equiv \left| \frac{-(1-j)K}{4\sqrt{2}\omega LC Z_0} \right| = \frac{K}{4\sqrt{\omega LC Z_0}} \quad (11.8.10)$$

の程度生ずることになる (注3)。

ケーブルの周波数特性関数は

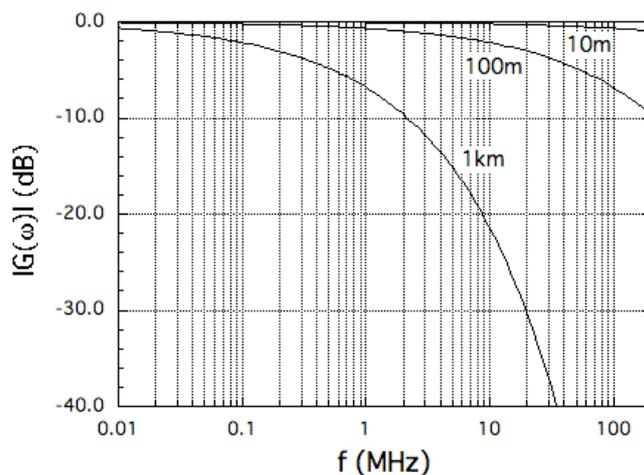


図 11-9 長さ 10m、100m 及び 1km の 5D2V の周波数特性

$Z_L \cong Z_0$ として反射を無視すると

$$G(\omega) = \frac{V(\omega, \ell)}{V(\omega, 0)} = e^{-\gamma \ell} \\ = \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\omega} K \ell}{2\sqrt{2}Z_0} - j \left(\frac{\omega}{v_0} + \frac{\sqrt{\omega} K}{2\sqrt{2}Z_0} \right) \ell \right\} \quad (11.8.11)$$

となる。5D2V 同軸ケーブルでは注2より $K = 4.417 \times 10^{-5} (\Omega \cdot \sqrt{\text{sec}}/m)$ であるので $\ell = 10m, 100m, 1km$ では $|G(\omega)|$ は図 11-9 のようになる。

注1 : 5D2V 同軸ケーブルを例にとると

$$5D2V : 2a = 1.4mm, 2b = 4.8mm, Z_0 = 50\Omega, v_0 = 2c/3, \rho = 1.8 \times 10^{-8} \Omega \cdot m \\ \text{より}$$

$$\sqrt{\omega} \gg \frac{K}{L} = \frac{v_0}{2\pi Z_0} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} = 1.77 \times 10^2 / \sqrt{\text{sec}}$$

即ち(11.8.4)式の条件は

$$\omega \gg 2\pi \times 5kHz$$

注2 : 5D2V 同軸ケーブルの表皮効果による減衰量

$$K = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} = 4.417 \times 10^{-5} (\Omega \cdot \sqrt{\text{sec}}/m)$$

$$\alpha = \frac{R}{2Z_0} = \frac{\sqrt{\omega} K}{2\sqrt{2}Z_0}$$

$$R = \sqrt{\frac{\omega}{2}} K = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}$$

$$\alpha = \begin{cases} 4.29 \times 10^{-3} / m & (\text{at } 30MHz) \\ 1.11 \times 10^{-2} / m & (\text{at } 200MHz) \end{cases}$$

$$\text{減衰量} : 10 \log(e^{2\alpha \ell}) = \begin{cases} 37.2dB/km & (\text{at } 30MHz) \\ 96.2dB/km & (\text{at } 200MHz) \end{cases}$$

誘電体損失を $\tan \delta = \epsilon' / \epsilon''$ として、誘電体による減衰定数は

$$\alpha = \frac{GZ_0}{2} = \frac{\omega}{2v_0} \tan \delta \\ = \frac{3\omega}{4c} \tan \delta \quad (\text{PE ケーブル} : v_0 = 2c/3)$$

注3 :

$$|r| = \frac{Kv_0}{4\sqrt{\omega}Z_0} = 0.56\% \quad (\text{at } 10MHz)$$

11-9 過度応答 (transient response)

次にパルス信号の伝搬を考えよう。出力端はインピーダンスマッチングがとられていて反射波は存在しないものとする。入力端 ($z=0$) に加わる入力電圧のラプラス変換を $V(s,0)$ とし、(11.6.8)式において反射波振幅を $V_- = 0$ とし、 z における電圧のラプラス変換 $V(s,z)$ は $j\omega$ をラプラス変数 s に置き代えて

$$V(s,z) = V(s,0)e^{-\gamma(s)z} \quad (11.9.1)$$

で与えられる。ここで

$$\gamma(s) = s\sqrt{LC} + \sqrt{s} \frac{K}{2Z_0} \quad (11.9.2)$$

である。これを逆変換することで出力端における電圧

$$V_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[V(s,z)] \quad (11.9.3)$$

を求めることができる。信号源端に加えらるる入力電圧を

$$V_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[V(s,0)] \quad (11.9.4)$$

とするとラプラス変換公式 (4-2 節 (4.2.26)式)

$$\mathcal{L}\left[\frac{a}{2\sqrt{\pi}} t^{-3/2} e^{-a^2/4t}\right] = e^{-a\sqrt{s}} \quad (11.9.5)$$

を用いて、出力は

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}[V(s,z)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[V(s,0)e^{-s\sqrt{LC}z}e^{-\sqrt{s}(Kz/2Z_0)}\right] \\ &= \frac{Kz}{4Z_0\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{LC}z}^t V_1(\tau - \sqrt{LC}z)(t-\tau)^{-3/2} e^{-(Kz/4Z_0)^2/(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (11.9.6)$$

となる。実際と同軸線路では絶縁体の誘電体損失を持つが、R.L.Wigington and N.S.Nahman (Transient Analysis of Coaxial Cables Considering Skin Effect, Proc. of the IRE, 1957, p.166) によれば、nsec以上の領域では導体の表皮効果による損失のみを考慮することで、実際の損失をよく再現できるようである。

例 1 : インパルス応答

長さ z の同軸線路のインパルス入力

$$V_1(t) = V_1 T \delta(t) \quad (11.9.7)$$

に対する出力は

$$V_2(t) = \frac{Kz}{4Z_0\sqrt{\pi}} V_1 T (t - \sqrt{LC}z)^{-3/2} e^{-\{(K/2Z_0)z\}^2/4(t-\sqrt{LC}z)} \quad (11.9.8)$$

となる。

例 2 : ステップ応答
ステップ入力

$$V_1(t) = V_1 u(t) \quad (11.9.9)$$

に対する応答は

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \frac{Kz}{4Z_0\sqrt{\pi}} V_1 \int_0^t u(\tau - \sqrt{LCz})(t - \tau)^{-3/2} e^{-(Kz/4Z_0)^2/(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{Kz}{4Z_0\sqrt{\pi}} V_1 \int_{\sqrt{LCz}}^t (t - \tau)^{-3/2} e^{-(Kz/4Z_0)^2/(t-\tau)} d\tau \\ &= V_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-x'^2} dx' \quad \left(x = \frac{Kz/4Z_0}{\sqrt{t - \sqrt{LCz}}}\right) \\ &= V_1 \operatorname{erfc}\left(\frac{Kz/4Z_0}{\sqrt{t - \sqrt{LCz}}}\right) \quad (\sqrt{LCz} \leq t) \end{aligned} \quad (11.9.10)$$

で与えられる。

例 3 : パルス応答
幅 T の矩形波パルス入力

$$V_1(t) = V_1 \{u(t) - u(t - T)\} \quad (11.9.11)$$

に対する応答は

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \frac{Kz}{4Z_0\sqrt{\pi}} V_1 \int_0^t \{u(\tau - \sqrt{LCz}) - u(\tau - T - \sqrt{LCz})\} (t - \tau)^{-3/2} e^{-(Kz/4Z_0)^2/(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{Kz}{4Z_0\sqrt{\pi}} V_1 \int_0^t u(\tau - \sqrt{LCz})(t - \tau)^{-3/2} e^{-(Kz/4Z_0)^2/(t-\tau)} d\tau \\ &= -\frac{Kz}{4Z_0\sqrt{\pi}} V_1 \int_0^t u(\tau - T - \sqrt{LCz})(t - \tau)^{-3/2} e^{-(Kz/4Z_0)^2/(t-\tau)} d\tau \\ &= \begin{cases} V_1 \operatorname{erfc}\left(\frac{Kz/4Z_0}{\sqrt{t - \sqrt{LCz}}}\right) & (\sqrt{LCz} \leq t < \sqrt{LCz} + T) \\ V_1 \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{Kz/4Z_0}{\sqrt{t - \sqrt{LCz}}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{Kz/4Z_0}{\sqrt{t - \sqrt{LCz} - T}}\right) \right\} & (\sqrt{LCz} + T \leq t) \end{cases} \end{aligned} \quad (11.9.12)$$

である。図 11-10 に、長さ $z = 100m$ の 5D2V ケーブルの給電端に波高値 V_1 、幅

10nsec 及び100nsec の矩形パルスを印加したときの、負荷端における波形の例を示す。

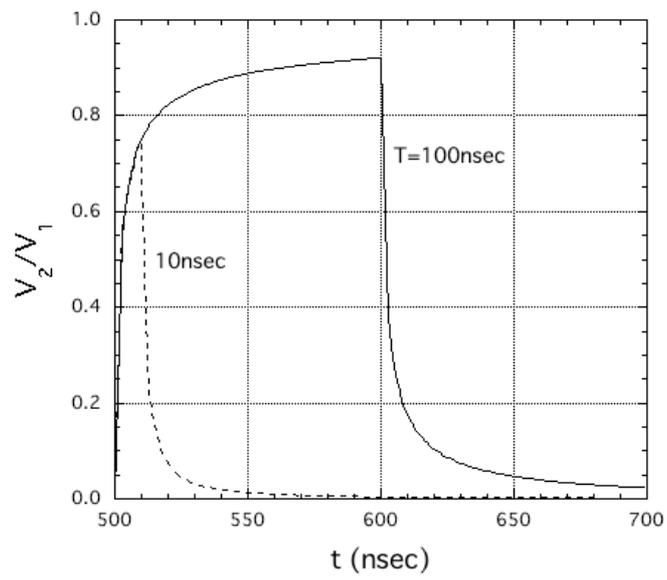


図 11-10 パルス応答 (5D2V, 100m)