９章　アナログフィルター

フィルターはその基本的なフィルタリング特性によって大きく４種類に分類され、カットオフ周波数より高い周波数成分を減衰させるローパスフィルター（LPF）、それとは逆に低い周波数を減衰させるハイパスフィルター（HPF）、特定の周波数帯域の周波数成分だけを通過させ、高い周波数成分及び低い周波数成分を減衰させるバンドパスフィルター（BPF）、特定の周波数成分だけを減衰させるバンドエリミネーションフィルター（ノッチフィルターと呼ばれることもある）（BEF）がある。

更にローパスフィルター（LPF）としてのフィルタリング特性によって次の三つのタイプに分けられる。

チェビシェフ型フィルター：通過帯域（第一種）または除去帯域（第二種）の周波数特性にリプルを有するが、減衰カーブが急峻。

バターワース型フィルター：周波数特性にリプルがなく、通過帯域の周波数特性が最も平坦、減衰カーブが穏やか。

ベッセル型フィルター　　：通過帯域の郡遅延時間が最も一定、減衰カーブは最も穏やか。

最も減衰特性が急峻なチェビシェフ型フィルターは、通信分野において隣り合ったチャンネル間のクロストークを極力抑制するためによく用いられ、またデータサンプリングにおいてエリアシングを除去するためのアンチエリアシングフィルターとしてもよく用いられる。計測分野では周波数特性の平坦性が重視されることが多いため、バターワース型フィルターが用いられ、またパルス的信号のような多くの高調波成分を有する信号の波形再現性が重視される場合にはベッセル型フィルターがよく用いられる。概ね MHz 以上の高周波帯域で用いるフィルターは L, C, R（受動素子）で構成されるが、多くの場合 L や C の誤差（特に L の誤差が大きい）のために設計通りの性能を得ることが難しく、試行錯誤による調整が必要になる。一方、低周波領域では必要となる L が大きくなってしまうこと、及び L の誤差を回避するためにオペアンプを用いた能動フィルターを用いるのが一般的である。また、次数の高いフィルターを LC フィルターで実現するには多数の L と C が多段に接続された構成となり、それらが互いに影響しあうので設計には高度の知識と膨大な計算が必要である。そのため設計には専用の設計ソフトが用いられる。そこで LC フィルターの一般論については他書に譲ることとし、本書では基本的な能動フィルターについて解説する。能動フィルターでは１次及び２次のフィルターを多段従属接続することで次数の高いフィルタ

ーを実現することができるので、以下 1 次と 2 次の能動フィルターを解説し、その後 9-3 節ー9.5 節にて高次のフィルターの一般論を述べる。

9-1　1 次フィルター

(a)　1 次 LPF

図 9-1 より

$$\frac{V_1}{R_1} = -(\frac{1}{R_2} + j\omega C)V_2 \qquad (9.1.1)$$

したがって周波数特性関数は

$$G(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+j\omega CR_2} \qquad (9.1.2)$$

となる。$R_1 = R_2 = R$ として伝達関数は

$$G_{LPF}^{(1)}(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c} \qquad (9.1.3)$$

で与えられる。

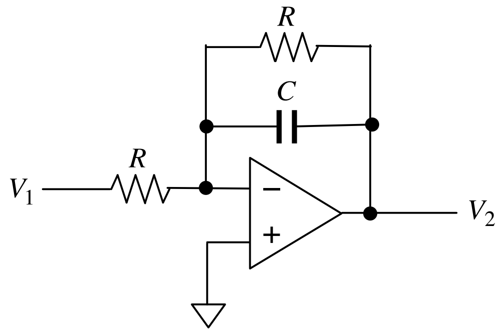


図 9-1　1 次 LPF

(b)　1 次 HPF

図 9-2 より

$$\frac{V_1}{R_1} = -(\frac{1}{R_2} + j\omega C)V_2 \qquad (9.1.4)$$

したがって周波数特性関数は

$$G(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1}\frac{j\omega CR_1}{1+j\omega CR_1} \qquad (9.1.5)$$

となる。$R_1 = R_2 = R$ として伝達関数は

$$G_{HPF}^{(1)}(s) = \frac{s}{s+\omega_c} \qquad (9.1.6)$$

で与えられる。

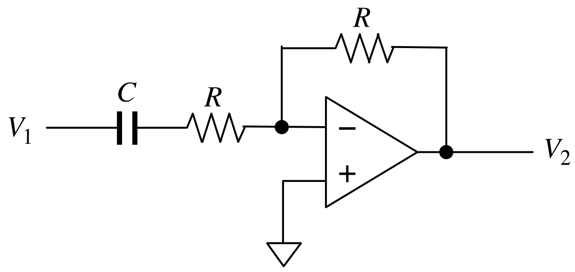


図 9-2　1 次 HPF

9-2　２次フィルター

２次フィルターの伝達関数は

$$\left.\begin{array}{ll} G_{LPF}^{(2)}(s)=\dfrac{\omega_c^2}{s^2+(\omega_s/Q)s+\omega_c^2}, & G_{HPF}^{(2)}(s)=\dfrac{s^2}{s^2+(\omega_s/Q)s+\omega_c^2} \\ G_{BPF}^{(2)}(s)=\dfrac{(\omega_s/Q)s}{s^2+(\omega_s/Q)s+\omega_c^2}, & G_{BEF}^{(2)}(s)=\dfrac{s^2+\omega_c^2}{s^2+(\omega_s/Q)s+\omega_c^2} \\ G_{APF}^{(2)}(s)=\dfrac{s^2-(\omega_s/Q)s+\omega_c^2}{s^2+(\omega_s/Q)s+\omega_c^2} & \end{array}\right\} \tag{9.2.1}$$

で与えられ、$Q=1/\sqrt{2}$の場合はバターワース型フィルター、$Q=1/\sqrt{3}$のときをベッセル型フィルターとなる。また LPF、HPF、BPF 以外は２次より高い次数のフィルターが使われることはほとんどない。

周波数変換

上記の各種のフィルターは LPF が基準であり、他のフィルターの伝達関数は周波数変換法によって LPF を変換して求めることができる。対数スケールで周波数を表示すると HPF はω_cを対称軸として左右反転したもので与えられる。即ち LPF に対して$s/\omega_c\to\omega_c/s$なる変換を行うと、１次の LPF、２次の LPF ともに

$$\left.\begin{array}{l} G_{LPF}^{(1)}(s)\Big|_{s/\omega_s\to\omega_s/s}\to G_{HPF}^{(1)}(s) \\ G_{LPF}^{(2)}(s)\Big|_{s/\omega_s\to\omega_s/s}\to G_{HPF}^{(2)}(s) \end{array}\right\} \tag{9.2.2}$$

となり、それぞれ１次の HPF および２次の HPF が得られる。また、１次の HPF に$s/\omega_s\to Q(s/\omega_s+\omega_s/s)$なる変換を行うと

$$G_{HPF}^{(1)}(s)\Big|_{s/\omega_s\to Q(s/\omega_s+\omega_s/s)}=G_{BPF}^{(2)}(s) \tag{9.2.3}$$

また$s/\omega_s\to 1/\{Q(s/\omega_s+\omega_s/s)\}$なる変換を行うと

$$G_{HPF}^{(1)}(s)\Big|_{s/\omega_s\to 1/\{Q(s/\omega_s+\omega_s/s)\}}=G_{BEF}^{(2)}(s) \tag{9.2.4}$$

となる。これより LPF から他のフィルターの伝達関数を得ることができるので、LPF の特性を知ることで他のフィルターの特性を知ることができる。

9-2-1 VCVS 型フィルター(電圧制御電圧源型フィルター)

オペアンプによる非反転アンプに帰還を施すことで２次の LPF 及び HPF を実現することができる。

(a) LPF（図 9-3）

図 9-3 の回路方程式は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{V_1 - V}{R_1} = j\omega C_1(V - V_2) + \frac{1}{R_2}(V - \frac{V_2}{K})\\&\frac{1}{R_2}(V - \frac{V_2}{K}) = j\omega C_2 \frac{V_2}{K}\\&K = 1 + \frac{R_3}{R_4}\end{aligned}\right\} \tag{9.2.5}$$

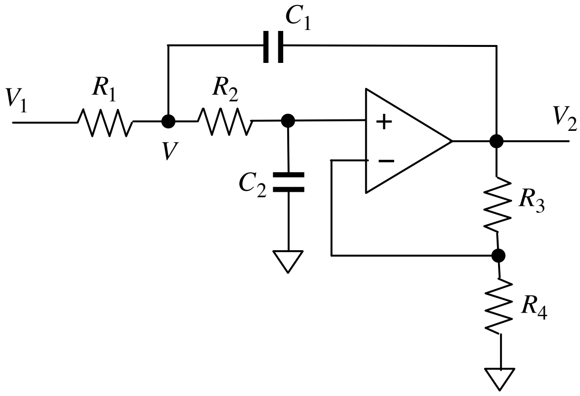


図 9-3　VCVS 型 LPF

で与えられ、これを解くことで次の応答を得る。

$$V_2 = \frac{K}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} V_1 \tag{9.2.6}$$

ここで

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}}, \qquad Q = \frac{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}}{C_1R_1(1-K) + C_2(R_1+R_2)} \tag{9.2.7}$$

である。通常 $C_1R_1 = C_2R_2 = CR$ として設計され、このとき

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}, \qquad Q = \frac{1}{2 - K + C_2/C_1} \tag{9.2.8}$$

となる。$K = 2$ では $Q = C_1/C_2$ となり広い範囲で Q を設定することができる。但し K が $2 + C_2/C_1$ に近くなると R_3、R_4 の誤差が Q に大きく影響するので注意が必要である。

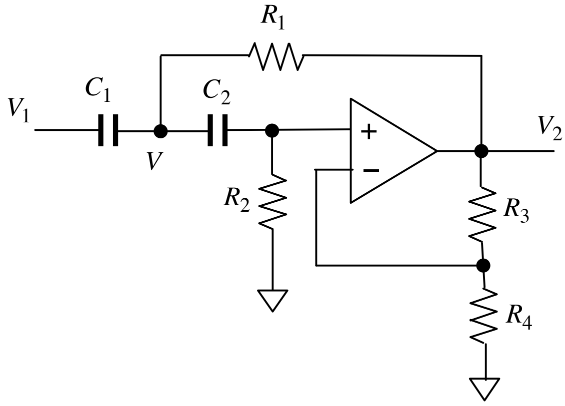


図 9-4　VCVS 型 HPF

(b) HPF（図 9-4）

図 9-4 の回路方程式

$$\left.\begin{aligned}
&j\omega C_1(V_1 - V) = j\omega C_2\left(V - \frac{V_2}{K}\right) + \frac{V - V_2}{R_1} \\
&j\omega C_2\left(V - \frac{V_2}{K}\right) = \frac{V_2}{KR_2} \\
&K = 1 + \frac{R_3}{R_4}
\end{aligned}\right\} \tag{9.2.9}$$

より、出力応答は次式となる。

$$V_2 = -K\frac{\omega^2/\omega_0^2}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2}V_1 \tag{9.2.10}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}, \qquad Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{(C_1 + C_2)R_1 + C_2 R_2(1 - K)} \tag{9.2.11}$$

LPF と同様、通常 $C_1 R_1 = C_2 R_2 = CR$ として設計され、このとき

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}, \qquad Q = \frac{1}{2 - K + C_2/C_1} \tag{9.2.12}$$

となる。LPF と同様 $K = 2$ では $Q = C_1/C_2$ となり広い範囲で Q を設定することができる。

9-2-2 多重帰還型フィルター（multiple feedback filter）

(a) LPF（図 9-5）

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{R_3}(V_1 - V) = \frac{1}{R_1}(V - V_2) + \frac{V}{R_2} + j\omega C_1 V \\
&\frac{V}{R_2} = -j\omega C_2 V_2
\end{aligned}\right\} \tag{6.6.8}$$

より

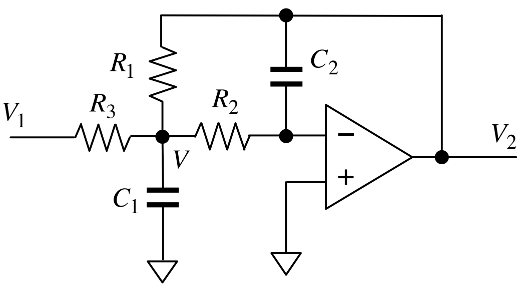


図 9-5　LPF

$$V_2 = -\frac{K}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2}V_1 \tag{9.2.13}$$

$$K = \frac{R_1}{R_3}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}, \qquad Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{R_2(1 + K) + R_1}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \tag{9.2.14}$$

となる。通常 $R_1 = R_2 = R_3 = R$ として設計され、その場合は

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2}R}, \qquad Q = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}, \qquad K = 1 \tag{9.2.15}$$

となり、大きな Q が必要な場合には適さない。

(b) HPF（図 9-6）

$$\left.\begin{aligned} j\omega C_1(V_1 - V) &= \frac{V}{R_1} + j\omega C_2 V + j\omega C_3(V - V_2) \\ j\omega C_2 V &= -\frac{V_2}{R_2} \end{aligned}\right\} \qquad (9.2.16)$$

より

$$V_2 = \frac{K\omega^2/\omega_0^2}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2} V_1 \qquad (9.2.17)$$

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{C_1}{C_3} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{C_2 C_3 R_1 R_2}} \\ Q &= \frac{\sqrt{C_2/C_3}}{1 + K + C_2/C_3}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \end{aligned}\right\} \qquad (9.2.18)$$

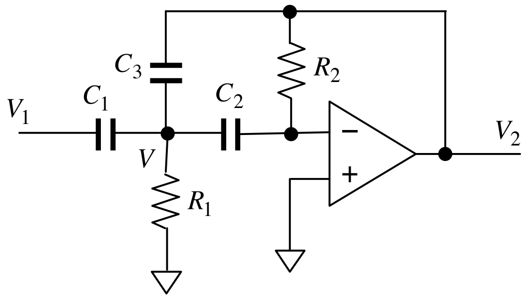


図 9-6　HPF

となる。

ここで $C_1 = C_2 = C_3 = C$ とすると

$$\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1 R_2}}, \qquad Q = \frac{1}{2+K}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}, \qquad K = 1 \qquad (9.2.19)$$

となる。

(c) BPF（図 9-7）

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R_1}(V_1 - V) &= \frac{V}{R_2} + j\omega C_1 V + j\omega C_2(V - V_2) \\ j\omega C_1 V &= -\frac{V_2}{R_3} \end{aligned}\right\} \qquad (9.2.20)$$

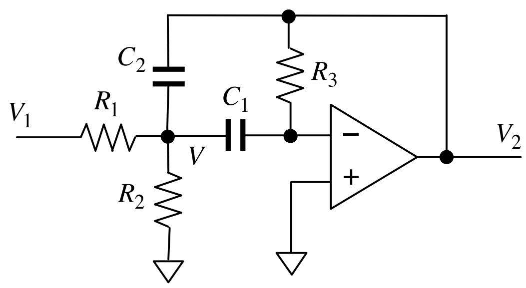


図 9-7　BPF

より

$$V_2 = -K\frac{j\omega/Q\omega_0}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} V_1 \qquad (9.2.21)$$

$$K = \frac{C_1 R_3}{(C_1 + C_2)R_1}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1/R_1 + 1/R_2}{C_1 C_2 R_3}}, \qquad Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_1 + C_2}\sqrt{(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})R_3} \qquad (9.2.22)$$

ここで $R_1 = R_2 = R_3 = R$ とすると

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{C_1 C_2}R}, \qquad Q = K\sqrt{\frac{2C_2}{C_1}}, \qquad K = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \qquad (9.2.23)$$

となる。この場合 $K < 1$ のため大きな Q が必要な場合には適さない。一方、$C_1 = C_2 = C_3 = C$ とすると

$$\omega_0 = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{1}{R_3}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}, \qquad Q = \frac{1}{2}\sqrt{2K + \frac{R_3}{R_2}}, \qquad K = \frac{R_3}{2R_1} \tag{9.2.24}$$

となり、$R_3/R_1 = R_3/R_2 = 20$ とすることで $Q = 3.16$ を得ることができる。

9-2-3 状態変数フィルター（state variable filter）

VCVS 型フィルターや多重帰還型フィルターでは、ゲイン、共振周波数、Q 値が互いに影響し合うので設計が難しく、また大きな Q 値を得ることが難しい。これに対して、状態変数フィルターは必要なオペアンプの数が３個と多くなるが、ゲイン、共振周波数、Q 値を独立に決めることができるので設計が容易で自由度が大きく、大きな Q 値を容易に実現することができる。また LPF、BPF、HPF 出力が同時に得られるのが特徴であり、状態変数フィルターを用いた発振回路では二つの出力の位相が 90° 異なる二相発振器を容易に実現することができ、汎用性の高いフィルターである。

図 9-8 に示すように A_1 の出力を状態変数 $X(s)$ と定義し、さらに

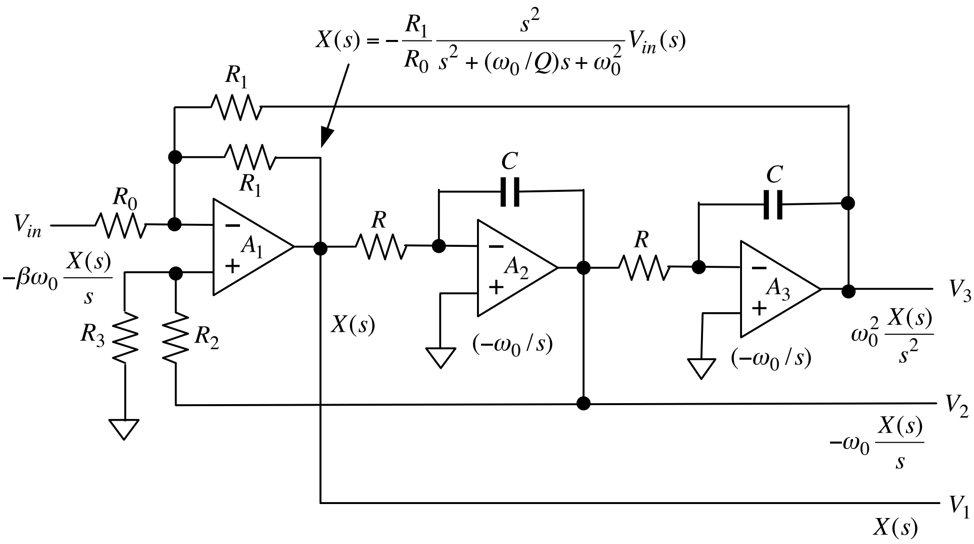


図 9-8　状態変数フィルター

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}, \quad K = \frac{R_1}{R_0}, \quad \beta = \frac{R_3}{R_2+R_3}, \quad \frac{1}{Q} = \left(2+\frac{R_1}{R_0}\right)\beta \tag{9.2.25}$$

と置くと

$$\left.\begin{aligned} &G_0 V_{in}(s) = -\{X(s) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{X(s)}{s} + \omega_0^2 \frac{X(s)}{s^2}\} \\ &V_1(s) = X(s), \qquad V_2(s) = -\omega_0 \frac{X(s)}{s}, \qquad V_3(s) = \omega_0^2 \frac{X(s)}{s^2} \end{aligned}\right\} \tag{9.2.26}$$

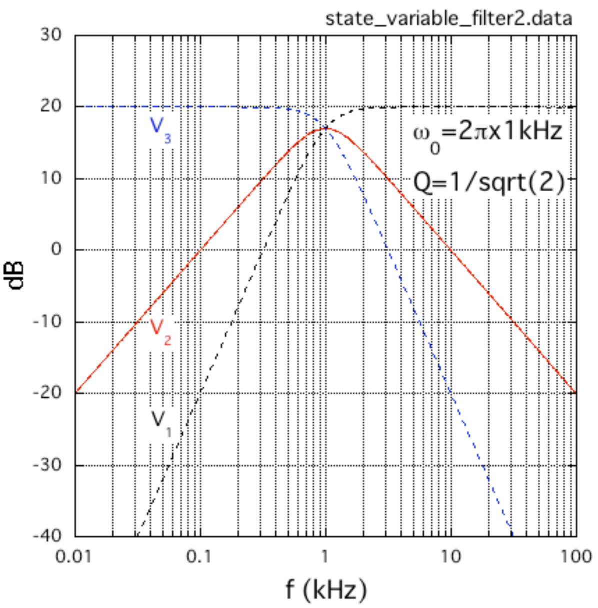
が成立する。これより

$$X(s) = -\frac{Ks^2}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2} V_{in}(s) \tag{9.2.27}$$

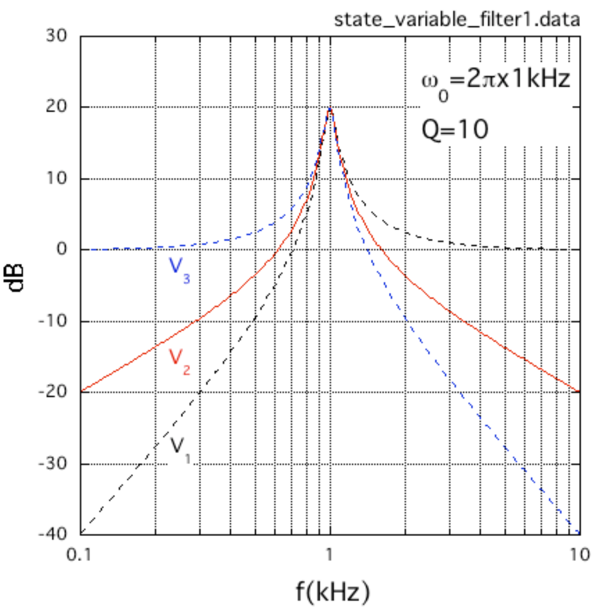
となり、$s = j\omega$ と置くことで

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= K\frac{\omega^2/\omega_0^2}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} V_{in} \\ V_2 &= K\frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} V_{in} \\ V_3 &= -K\frac{1}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} V_{in} \end{aligned}\right\} \tag{9.2.28}$$

を得る。



(a) $K = 10, \quad Q = 1/\sqrt{2}$
$(10R_0 = R_1 = 47k\Omega,$
$R_2 = 75k\Omega, R_3 = 10k\Omega)$



(b) $K = 1, \quad Q = 10$
$(R_0 = R_1 = 47k\Omega,$
$R_2 = 290k\Omega, R_3 = 10k\Omega)$

図 9-9　状態変数フィルター（$\omega_0 = 2\pi \times 1kHz$）の特性

望みのK、Qを与えれば

$$R_1 = KR_0, \quad R_2 = \{(2+K)Q-1\}R_3 \tag{9.2.29}$$

により抵抗値の比が決まる。図 9-9 に出力V_1、V_2、V_3の例を示す。オペアンプが３個必要であるがK、ω_0、Qを独立に設定できるので VCVS 型や多重帰還型に比べて設計が容易であり、またQの設定範囲が広いので汎用性が高い。

9-3 バターワースフィルター

LPF 以外のフィルターの伝達関数は周波数変換により LPF の伝達関数から得ることができるので、以下では LPF についてのみ述べる。

フィルターの周波数特性関数を$G(j\omega)$として、n次バターワース LPF は

$$|G_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}} \tag{9.3.1}$$

で定義される。図 9-10 に振幅周波数特性 $|G_n(j\omega)|$ を示す。次数nに依らずω_cが-3dB カットオフ周波数になっていて、ω_cから離れた周波数での減衰カーブは

$1/\omega^n$ （$-6n\ dB/oct$）

に比例している。伝達関数は(9.3.1)式において$s = j\omega$とおくことで

$$|G_n(s)|^2 = \frac{1}{1+(s/j\omega_c)^{2n}} \tag{9.3.2}$$

で与えられ、特性方程式は

$$1+(s/j\omega_c)^{2n} = 0 \tag{9.3.3}$$

となる。この特性方程式の$2n$個の根は図 9-11 に示すように複素 s 平面の原点を中心とする半径ω_cの円上にあるが、

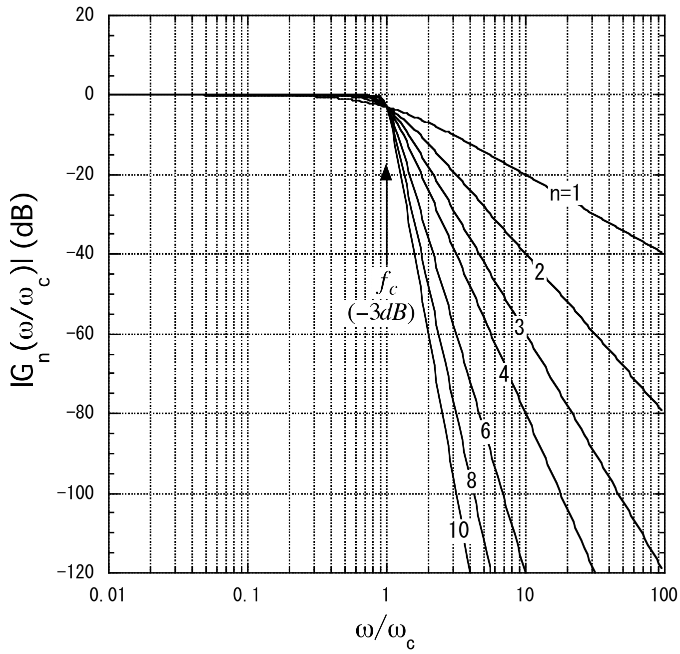


図 9-10　バターワース LPF の周波数特性

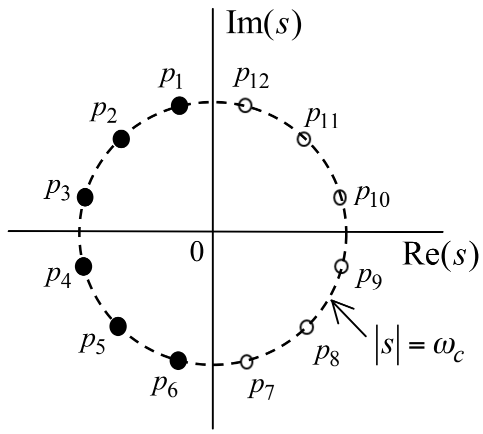


図 9-11　６次バターワースフィルターの伝達関数のポール（黒丸印）

$G(s)$は安定でなければならないことから$\mathrm{Re}(p_m)<0$でなければならない。したがって$G(s)$のポールは

$$p_m = j(-1)^{1/2n}\omega_c = \omega_c e^{j\theta_m} \tag{9.3.4}$$

ここで

$$\theta_m = \frac{2m+n-1}{2n}\pi \qquad (m=1,2,\cdots,2n) \tag{9.3.5}$$

となる。図 9-11 に$n=6$（6 次）の場合のs平面上における根p_mの配置を示す。図中黒丸で示す$p_1, p_2, \cdots, p_6$が$G(s)$のポールである。

$G(s)$の分母をポール$p_1, p_2, \cdots, p_n$により因数分解して

$$G_n(s) = \frac{\omega_c^n}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{R_m}{s-p_m} \tag{9.3.6}$$

と書くことができ、$p_m\ (m=1,2,\cdots,n)$は全て１次のポールであるので逆ラプラス変換は

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \sum_{m=1}^{n} R_m e^{p_m t} \tag{9.3.7}$$

で与えられる。ここでR_mは$s=p_m$における留数

$$R_m = [(s-p_m)G(s)]_{s=p_m} = \frac{\omega_c^n}{\prod_{\substack{k=1\\(k\neq m)}}^{n}(p_m-p_k)}$$

$$= \frac{\omega_c e^{-j(2m+n-1)\pi/2n}}{\prod_{\substack{k=1\\(k\neq m)}}^{n}(1-e^{j(k-m)\pi/n})} \tag{9.3.8}$$

である。R_mを用いて(9.3.7)式によりバターワース・フィルターの時間的応答を求めることができる。以上のフィルターを具体的なアナログ回路で実現するには、以下に述べるように$G(s)$を１次及び２次の伝達関数の積で書き表わし、それらの従属接続で構成するのが一般的である。

(9.3.5)式及び図 9-11 から分かるように

$$p_{n-(m-1)} = p_m^* \tag{9.3.9}$$

であり、nが奇数の場合は $p_{(n-1)/2+1}$ は実数となる。(9.3.9)式より特性方程式の根p_mは、nが偶数の場合は$n/2$対の共役複素根からなり、nが奇数の場合は一つの実根と$(n-1)/2$対の共役複素根からなることが分かる。虚軸から遠い根から順に番号をつけ直すと（２次の伝達関数を Q の小さい順に並べることに対応）

$$p_k = \omega_c e^{j\theta_k} \tag{9.3.10}$$

として

　nが偶数の場合：

$$\begin{cases} \theta_k = \dfrac{n-k+1/2}{n}\pi \qquad (k = 1, 2, \cdots. n/2) \\ p_{-k} = p_k^* \end{cases} \tag{9.3.11}$$

　nが奇数の場合

$$\begin{cases} \theta_k = \dfrac{n-k}{n}\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots. (n-1)/2) \\ p_{-k} = p_k^* \end{cases} \tag{9.3.12}$$

これよりnが奇数か偶数かによって伝達関数は次のようになる。

　nが偶数の場合：特性方程式は$n/2$対の共役複素根を持つので、伝達関数は次のように$n/2$個の２次の伝達関数の積となる。

$$G_n(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + (\omega_c/Q_1)s + \omega_c^2} \cdot \frac{\omega_c^2}{s^2 + (\omega_c/Q_2)s + \omega_c^2} \cdots\cdot \frac{\omega_c^2}{s^2 + (\omega_c/Q_{n/2})s + \omega_c^2} \tag{9.3.13}$$

ここで

$$\begin{aligned} Q_k &= -\frac{\omega_c}{p_k + p_k^*} = -\frac{1}{2\cos\theta_k} \\ &= \frac{1}{2\cos\{(k-1/2)\pi/n\}} \end{aligned} \tag{9.3.14}$$

は(p_k, p_k^*)をポールに持つ２次の伝達関数のQ値である。

　nが奇数の場合：特性方程式は一つの実根と$(n-1)/2$対の共役複素根を持つので、伝達関数は次のように一つの１次の伝達関数と$(n-1)/2$個の２次の伝達関数の積となる。

$$G_n(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c} \cdot \frac{\omega_c^2}{s^2 + (\omega_c/Q_1)s + \omega_c^2} \cdot \frac{\omega_c^2}{s^2 + (\omega_c/Q_2)s + \omega_c^2} \cdots\cdot \frac{\omega_c^2}{s^2 + (\omega_c/Q_{(n-1)/2})s + \omega_c^2} \tag{9.3.15}$$

ここで

$$\begin{aligned} Q_k &= -\frac{\omega_c}{p_k + p_k^*} = -\frac{1}{2\cos\theta_k} \\ &= \frac{1}{2\cos\{(k/n)\pi\}} \end{aligned} \tag{9.3.16}$$

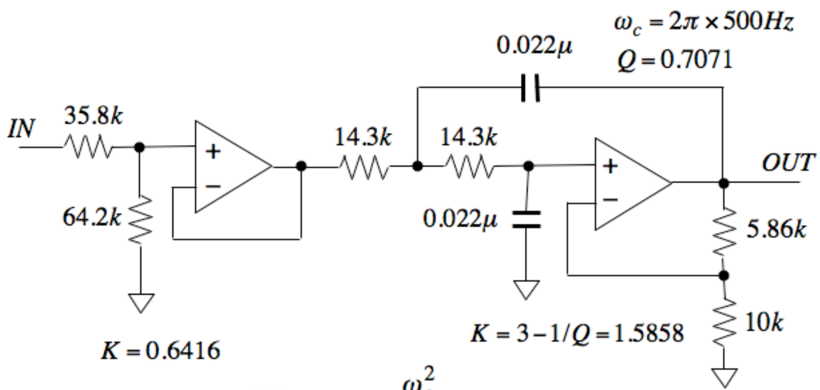
である。

　すなわちnが偶数の場合はQ値がそれぞれ$Q_1, Q_2, \cdots, Q_{n/2}$である２次のLPFを$n/2$個

従属接続する、またnが奇数の場合は１次のLPFと$(n-1)/2$ 個の２次のLPFを従属接続することでn次のバターワースLPFを構成することができる。表9-1にω_cで規格化したポール p_k/ω_c 及び Q_k の例を示す。表9-1により４次までのバターワース型ローパスフィルター（LPF）をVCVSフィルターで構成した回路例を図9-12～9-14に示す。

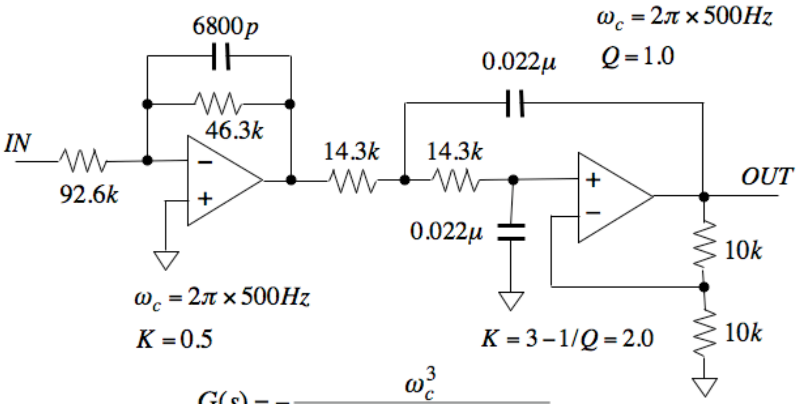
n		p_k/ω_c	Q_k	
1	１ 次	-1		
2	２ 次	$e^{\pm j3\pi/4}$	Q_1	0.7071
3	１ 次	-1		
	２ 次	$e^{\pm j2\pi/3}$	Q_1	1.0
4	２ 次	$e^{\pm j7\pi/8}$	Q_1	0.5412
		$e^{\pm j5\pi/8}$	Q_2	1.3066
5	１ 次	-1		
	２ 次	$e^{\pm j4\pi/5}$	Q_1	0.6180
		$e^{\pm j3\pi/5}$	Q_2	1.6180
6	２ 次	$e^{\pm j11\pi/12}$	Q_1	0.5176
		$e^{\pm j9\pi/12}$	Q_2	0.7071
		$e^{\pm j7\pi/12}$	Q_3	1.9319
8	２ 次	$e^{\pm j15\pi/16}$	Q_1	0.5098
		$e^{\pm j13\pi/16}$	Q_2	0.6013
		$e^{\pm j11\pi/16}$	Q_3	0.9000
		$e^{\pm j9\pi/16}$	Q_4	2.5629

表9-1　バターワース・フィルターの p_k/ω_c及びQ_k



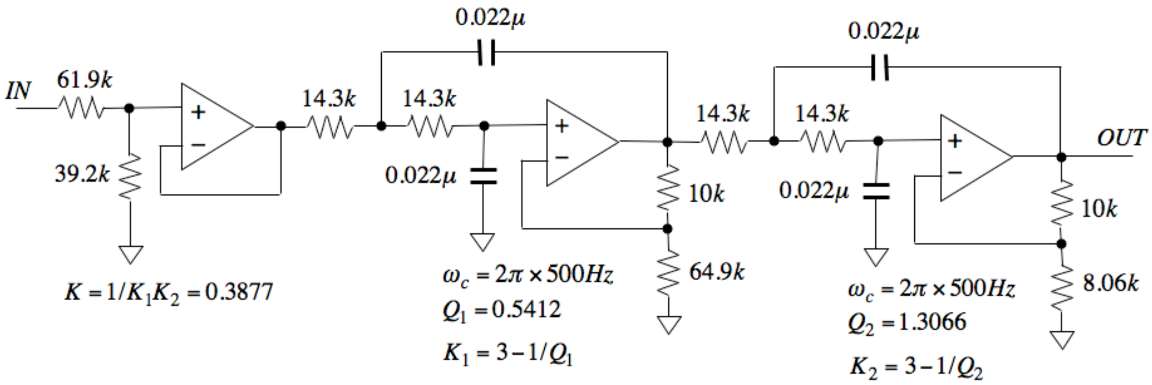
$$G(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}$$

図9-12　２次バターワース・フィルター（LPF）



$$G(s) = -\frac{\omega_c^3}{(s+\omega_c)(s^2+\omega_c s+\omega_c^2)}$$

図 9-13　３次バターワース・フィルター（LPF）



$$G(s) = \frac{\omega_c^4}{(s^2+\frac{\omega_c}{1.3066}s+\omega_c^2)(s^2+\frac{\omega_c}{0.5412}s+\omega_c^2)}$$

図 9-14　４次バターワース・フィルター（LPF）

9-4 ベッセルフィルター

ベッセルフィルターは群遅延時間が最も平坦なフィルターである。群遅延時間は

$$\tau = -\frac{d\theta}{d\omega} \tag{9.4.1}$$

で定義され、信号の伝播時間を表す。信号 $x(t)$ に対して時間を τ だけ遅らせた信号は $x_d(t) = x(t-\tau)$ である。これをラプラス変換 $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ で表現すると

$$X_d(s) = \mathcal{L}[x(t-\tau)] = e^{-\tau s}X(s) \tag{9.4.2}$$

と表される。これより周波数成分は

$$X_d(j\omega) = e^{-j\omega\tau} X(j\omega) \tag{9.4.3}$$

となり、$X_d(j\omega)$ は $X(j\omega)$ に対して周波数に比例した位相遅れ

$$-\theta = \omega\tau \tag{9.4.4}$$

を有する。ここで $x(t-\tau)$ は $x(t)$ を時間軸方向に平行移動しただけであるので、波形は同一である。すなわち位相遅れが周波数に比例する場合は波形歪がないことを意味する。すなわち位相遅れを周波数で微分したもの（群遅延時間）は時間遅れ τ を表わしており、τ が一定であることは波形歪がないことの条件の一つである。

ベッセルフィルター（LPF）は信号の通過帯域内での群遅延時間が最も一定であるフィルターとして定義される。時間遅れの伝達関数 $e^{-\tau s}$ を

$$e^{-\tau s} = \frac{1}{\cosh(\tau s) + \sinh(\tau s)} = \frac{1}{v(\tau s) + u(\tau s)} \tag{9.4.5}$$

とおき、$\coth(\tau s)$ を次のように連分数に展開する。

$$\frac{v(\tau s)}{u(\tau s)} = \coth(\tau s) = \frac{1}{\tau s} + \cfrac{1}{\cfrac{3}{\tau s} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{\tau s} + \cdots}} \tag{9.4.6}$$

連分数展開を n 回で打ち切り、分子を $v_n(\tau s)$ 、分母を $u_n(\tau s)$ とおくと

$$\left.\begin{array}{ll} v_1(\tau s) = 1, & u_1(\tau s) = \tau s \\ v_2(\tau s) = \tau^2 s^2 + 3, & u_2(\tau s) = 3\tau s \\ v_3(\tau s) = 6\tau^2 s^2 + 15, & u_3(\tau s) = \tau^3 s^3 + 15\tau s \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{9.4.7}$$

となる。ここで

$$D_n(\tau s) = v_n(\tau s) + u_n(\tau s) \tag{9.4.8}$$

とおくと $1/D_n(\tau s)$ は s の n 次有理式による $e^{-\tau s}$ の近似になる。n 次の多項式 $D_n(\tau s)$ は

$$\left.\begin{array}{l} D_1(\tau s) = \tau s + 1 \\ D_2(\tau s) = \tau^2 s^2 + 3\tau s + 3 \\ D_3(\tau s) = \tau^3 s^3 + 6\tau^2 s^2 + 15\tau s + 15 \\ D_4(\tau s) = \tau^4 s^4 + 10\tau^3 s^3 + 45\tau^2 s^2 + 105\tau s + 105 \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{9.4.9}$$

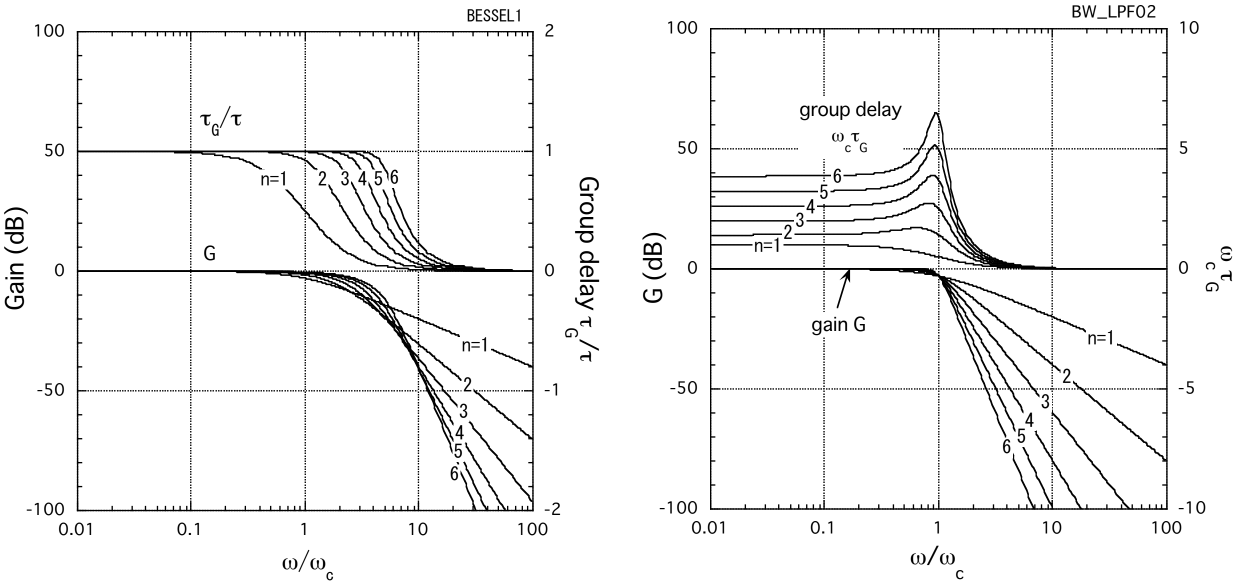
より

$$D_n(\tau s) = (2n-1)D_{n-1}(\tau s) + (\tau s)^2 D_{n-2}(\tau s) \tag{9.4.10}$$

で与えられる。以上より n 次のベッセル型 LPF の伝達関数を

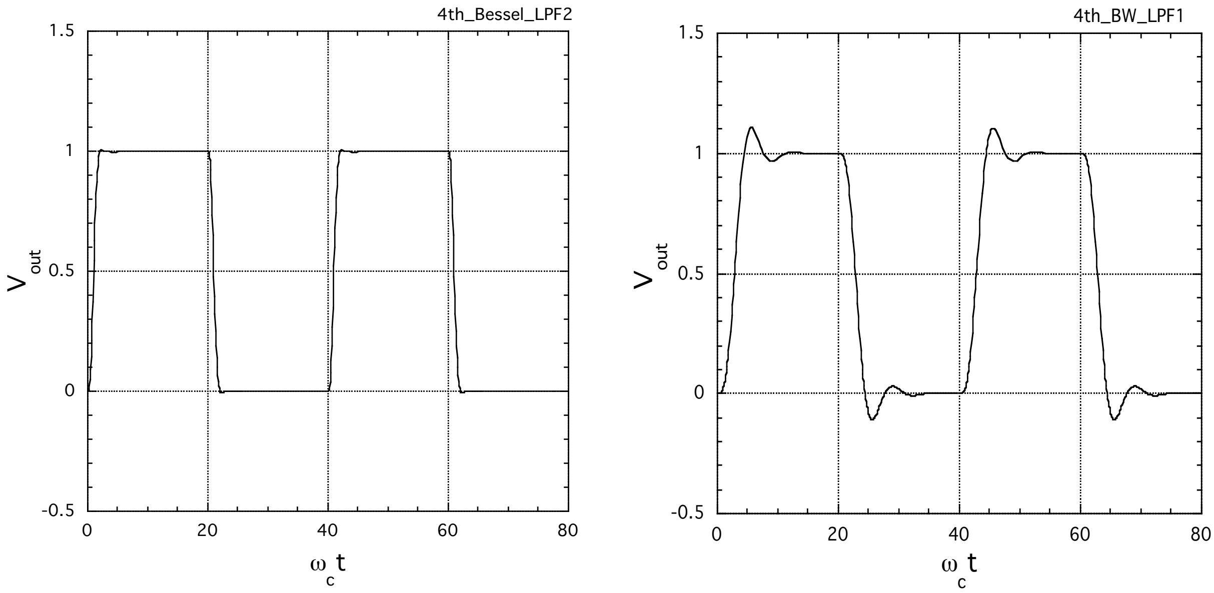
$$G(s) = \frac{D_n(0)}{D_n(\tau s)} \tag{9.4.11}$$

で定義する。 n次のベッセルフィルターは時間遅れをn次の有理式で近似したフィルターであり、振幅特性はLPFとなる。次数を上げるほど$e^{-\tau s}$に対する近似が良くなり、群遅延特性、振幅特性ともに平坦になるが、カットオフ周波数も高くなる。なお、3次以上のベッセルフィルターの特性方程式$D_n(\tau s) = 0$の根を解析的に求めることはほとんど不可能なので、計算機による専用プログラムで設計することになる。



(a)ベッセルフィルター　(b)バターワースフィルター

図 9-13　群遅延特性及び振幅特性



(a) 4 次ベッセルフィルター　(b) 4 次バターワース LPF

図 9-14　矩形波応答

図 9-13 に群遅延特性及び振幅特性を示す。通過帯域では群遅延が一定であることが分かる。これに対して図(b)に示すようにバターワースフィルターではカットオフ周波数に近づくと群遅延が大きく変化する。また、図 9-14(a)には矩形波信号に対する４次ベッセルフィルターの出力を示す。同図(b)に示す４次バターワース LPF の矩形波出力に対して波形歪みが小さいことが分かる。

9-5 チェビシェフ・フィルター

チェビシェフ・フィルター（LPF）は通過帯域内に多少のリプル即ち振幅周波数特性の変動を許容して変動を一定限度に抑え、かつ可能な限り最も急峻な遮断特性となるように考えられたフィルターである。チェビシェフ・フィルターの伝達関数 $|G(j\omega)| = \sqrt{1/\{1+(\omega/\omega_c)^{2n}\}}$ を拡張して、通過帯域のゲインが 1 であるような n 次チェビシェフ・フィルターの伝達関数は

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1+\{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)\}^2}} \tag{9.5.1}$$

で定義される。ここでチェビシェフ多項式 $C_n(\omega)$ は

$$\omega/\omega_c = \begin{cases} \cos\psi & (0 \le \omega/\omega_c \le 1) \\ \cosh\psi & (1 < \omega/\omega_c) \end{cases} \tag{9.5.2}$$

$$C_n(\omega/\omega_c) = \begin{cases} \cos n\psi & (0 \le \omega/\omega_c \le 1) \\ \cosh n\psi & (1 < \omega/\omega_c) \end{cases} \tag{9.5.3}$$

で与えられる。例として図 9-15 に $|C_4(\omega/\omega_c)|^2$ の振る舞いを示す。$\omega/\omega_c < 1$ では 0 と 1 の間を $n/2$ 回振動し、$1 < \omega/\omega_c$ では急激に単調増加する。具体形は

$$\left.\begin{aligned} &C_1(x) = x \\ &C_2(x) = 2x^2 - 1 \\ &C_3(x) = 4x^3 - 3x \\ &C_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ &\quad \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{9.5.4}$$

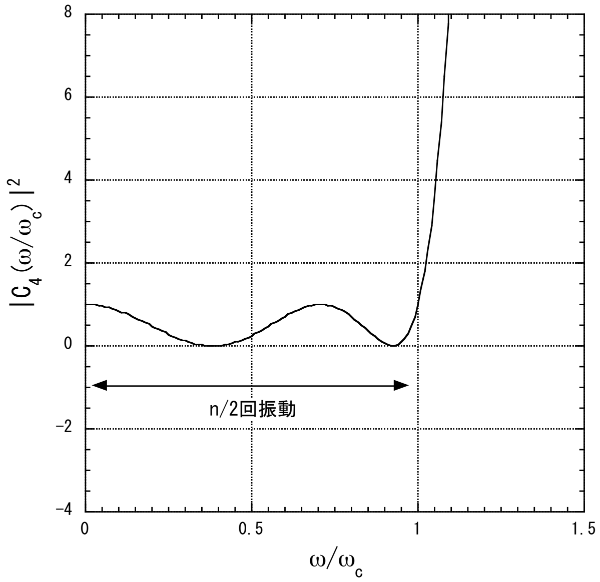


図 9-15　$|C_4(\omega/\omega_c)|^2$

即ち

$$C_n(x) = 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x) \tag{9.5.5}$$

である。また

$|C_n(\omega/\omega_c)| \leq 1 \ \ (0 < \omega/\omega_c < 1)$

であるので通過帯域におけるゲイン変動幅（リプル）は$\sqrt{1+\varepsilon^2}$になる（図 9-16）。

バターワース LPF とチェビシェフ LPF の減衰率を比較するために$\omega/\omega_c = 1$におけるn次の伝達関数の傾きを比較してみる。n次バターワースでは

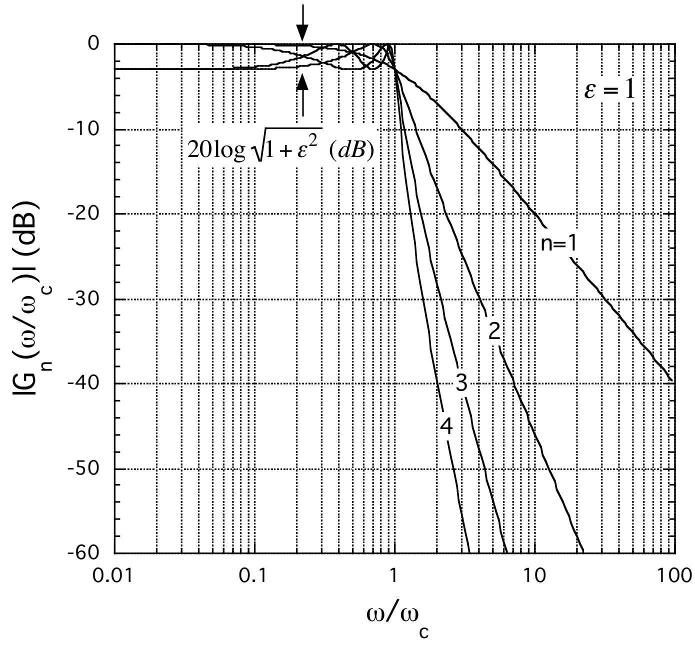


図 9-16　チェビシェフ LPF のリプル

$$\left.\frac{d|G_n(\omega/\omega_c)|}{d(\omega/\omega_c)}\right|_{\omega/\omega_c=1} = -\frac{n}{2\sqrt{2}} \tag{9.5.6}$$

一方n次チェビシェフでは

$$\left.\frac{d|G_n(\omega/\omega_c)|}{d(\omega/\omega_c)}\right|_{\omega/\omega_c=1} = -\frac{\varepsilon^2 n^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \tag{9.5.7}$$

となり、$\varepsilon \approx 1$とすると$\omega/\omega_c = 1$の近傍においてチェビシェフ LPF はバターワース LPF のn倍の減衰率を持つことが分かる。

次に伝達関数のポールを求める。(9.5.1)式において$j\omega = s$と置くと

$$G(s)G(-s) = \frac{1}{1+\{\varepsilon C_n(s/j\omega_c)\}^2} \tag{9.5.8}$$

であることから、特性方程式は

$$1+\{\varepsilon C_n(s/j\omega_c)\}^2 = 0 \tag{9.5.9}$$

で与えられる。更に

$$\{C_n(s/j\omega_c)\}^2 = \left\{\begin{array}{ll} \cos^2 n\psi & (0 \leq \omega/\omega_c \leq 1) \\ \cosh^2 n\psi & (1 < \omega/\omega_c) \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\{C_{2n}(s/j\omega_c)+1\} \tag{9.5.10}$$

より$C_{2n}(s/j\omega_c)$は次のようになる。

$$C_{2n}(s/j\omega_c) = -(2+\varepsilon^2)/\varepsilon^2 \tag{9.5.11}$$

一方、μ、νを実数として

$$s/j\omega_c = \cos(\mu + j\nu) \tag{9.5.12}$$

と置くと

$$\begin{aligned} C_{2n}(s/j\omega_c) &= \cos 2n(\mu + j\nu) \\ &= \cos(2n\mu)\cosh(2n\nu) + j\sin(2n\mu)\sinh(2n\nu) \end{aligned} \tag{9.5.13}$$

したがって

$$\left.\begin{aligned} &\cos(2n\mu)\cosh(2n\nu) = -(2+\varepsilon^2)/\varepsilon^2 \\ &\sin(2n\mu)\sinh(2n\nu) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9.5.14}$$

である。第二式より$\sin(2n\mu) = 0$または$\sinh(2n\nu) = 0$であるが、$\sinh(2n\nu) = 0$のときは$\cosh(2n\nu) = 1$より$\cos(2n\mu) = -(2+\varepsilon^2)/\varepsilon^2 < -1$となるため$\sin(2n\mu) = 0$でなければならない。また第一式より$\cos(2n\mu) < 0$であるから$\cos(2n\mu) = -1$、即ち

$$\left.\begin{aligned} 2n\mu &= (2k+1)\pi \qquad (k = 0, 1, \cdots, 2n-1) \\ 2n\nu &= \cosh^{-1}\{(2+\varepsilon^2)/\varepsilon^2\} \\ &= 2\ln\{(\sqrt{1+\varepsilon^2}+1)/\varepsilon\} \end{aligned}\right\} \tag{9.5.15}$$

となる。したがって特性方程式の根pは(9.5.15)式を満たすν、μを用いて

$$\begin{aligned} p/j\omega_c &= \cos(\mu + j\nu) \\ &= \cosh\nu \cdot \sin(\mu - \pi/2) \\ &\quad - j\sinh\nu \cdot \cos(\mu - \pi/2) \end{aligned} \tag{9.5.16}$$

で与えられる。即ち根

$$\begin{aligned} p &= \omega_c \sinh\nu \cdot \cos(\mu - \pi/2) \\ &\quad + j\omega_c \cosh\nu \cdot \sin(\mu - \pi/2) \end{aligned} \tag{9.5.17}$$

は、焦点が$0 \pm j\omega_c$にあり短軸a及び長軸bがそれぞれ

$$a = \omega_c \sinh\nu, \qquad b = \omega_c \cosh\nu$$

であるs平面上の楕円上にあり、偏角が$\theta = \mu - \pi/2$の点であることが分かる。

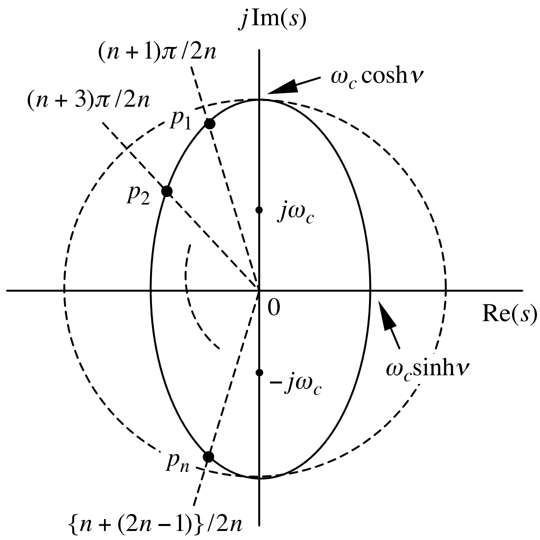


図 9-17　チェビシェフ・フィルターのポールの配置

上で求めた特性方程式の根が伝達関数のポールであるためには、安定条件$\mathrm{Re}(p) < 0$より

$$\pi/2 < \theta < 3\pi/2 \tag{9.5.18}$$

でなければならない。これより $k = n+1, \cdots, 2n$ であり、許される根

$$p_k = \omega_c \sinh\nu \cdot \cos\theta_k + j\omega_c \cosh\nu \cdot \sin\theta_k \tag{9.5.19}$$

は偏角が

$$\theta_k = (2k+n-1)\pi/2n \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{9.5.20}$$

のものだけである。これはバターワース・フィルターのポールの偏角（(9.3.5)式）と同じであり 9-2 節の偏角についての議論がそのまま成立する。図 9-17 に s 平面におけるチェビシェフ・フィルターのポールの配置（9.5.20）式）を示す。また (9.5.4)式及び(9.5.5)式より

$$C_n(\omega/\omega_c)\big|_{\omega\to 0} = \begin{cases} 0 & (\text{for } n = odd) \\ 1 & (\text{for } n = even) \end{cases} \tag{9.5.21}$$

であることから、通過帯域でのゲインが 1 である伝達関数は

$$\begin{aligned} |G(s)| &= \sqrt{\frac{1}{1+\{\varepsilon C_n(s/j\omega_c)\}^2}} \times \begin{cases} 1 & (\text{for } n = odd) \\ \sqrt{1+\varepsilon^2} & (\text{for } n = even) \end{cases} \\ &= \left| \frac{p_1 \cdots p_n}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} \right| \end{aligned} \tag{9.5.22}$$

と書くことができる。バターワース・フィルターの場合と同様に、ポールを虚軸から遠いものから順に番号をつけ直すと

n が偶数の場合：

$$\begin{cases} \theta_k = \dfrac{n-k+1/2}{n}\pi & (k = 1, 2, \cdots. n/2) \\ p_{-k} = p_k^* \end{cases} \tag{9.5.23}$$

n が奇数の場合

$$\begin{cases} \theta_k = \dfrac{n-k}{n}\pi & (k = 0, 1, 2, \cdots. (n-1)/2) \\ p_{-k} = p_k^* \end{cases} \tag{9.5.24}$$

となる。以上よりチェビシェフ・ローパスフィルターの伝達関数は次のようになる。

n が奇数の場合： 特性方程式は一つの実根と $(n-1)/2$ 対の共役複素根を持つので、伝達関数は 1 次の伝達関数一つと $(n-1)/2$ 個の 2 次の伝達関数の積となる。

$$\begin{aligned} G_n(s) = &\frac{\omega_c \sinh\nu}{s+\omega_c \sinh\nu} \cdot \frac{\omega_1^2}{s^2+(\omega_1/Q_1)s+\omega_1^2} \cdot \frac{\omega_2^2}{s^2+(\omega_2/Q_2)s+\omega_2^2} \\ &\cdots\cdots \frac{\omega_{(n-1)/2}^2}{s^2+(\omega_{(n-1)/2}/Q_{(n-1)/2})s+\omega_{(n-1)/2}^2} \end{aligned} \tag{9.5.25}$$

nが偶数の場合： 特性方程式は$n/2$対の共役複素根を持つので、伝達関数は$n/2$個の２次の伝達関数の積となる。

$$G_n(s)=\frac{\omega_1^2}{s^2+(\omega_1/Q_1)s+\omega_1^2}\cdot\frac{\omega_2^2}{s^2+(\omega_2/Q_2)s+\omega_2^2}\cdot\cdots\cdot\frac{\omega_{n/2}^2}{s^2+(\omega_{n/2}/Q_{n/2})s+\omega_{n/2}^2} \tag{9.5.26}$$

上でω_k、Q_kは(p_k, p_k^*)をポールとする２次の伝達関数の共振周波数及びQ値であり、次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}\omega_k&=\sqrt{p_k p_k^*}=\frac{\omega_c}{\sqrt{2}}\sqrt{\cosh 2\nu-\cos 2\theta_k}\\ Q_k&=-\frac{\sqrt{p_k p_k^*}}{p_k+p_k^*}=-\frac{\sqrt{\cosh 2\nu-\cos 2\theta_k}}{2\sqrt{2}\sinh\nu\cdot\cos\theta_k}\end{aligned}\right\} \tag{9.5.27}$$

表 9-2 にチェビシェフ・フィルターのリプルを$0.5dB$ $(\varepsilon=0.34)$としたときのω_k及びQ_kを、図 9-18～9-20 に群遅延特性、振幅特性、矩形波応答波形を示す。群遅延時間の変化が大きく矩形波の波形が乱れていることが分かる。また、図 9-21～9-23 に VCVS 型フィルターで構成したカットオフ周波数$500Hz$のチェビシェフ型ローパスフィルターの回路例を示す。

リプル 0.5dB					
n		ω_k/ω_c		Q_k	
1	1 次	ω_0/ω_c	2.8628		
2	2 次	ω_1/ω_c	1.2313	Q_1	0.8637
3	1 次	ω_0/ω_c	0.6265		
	2 次	ω_2/ω_c	1.0689	Q_1	1.7062
4	2 次	ω_1/ω_c	0.5970	Q_1	0,7051
		ω_2/ω_c	1.0313	Q_2	2.9406
5	1 次	ω_0/ω_c	0.3623		
	2 次	ω_1/ω_c	0.6905	Q_1	1.1778
		ω_2/ω_c	1.0177	Q_2	4.5450
6	2 次	ω_1/ω_c	0.3962	Q_1	0.6836
		ω_2/ω_c	0.7681	Q_2	1.8104
		ω_3/ω_c	1.0114	Q_3	6.5128
8	2 次	ω_1/ω_c	0.2967	Q_1	0.6766
		ω_2/ω_c	0.5989	Q_2	1.6107
		ω_3/ω_c	0.8610	Q_3	3.4657
		ω_4/ω_c	1.0059	Q_4	11.531

表 9-2　チェビシェフ・フィルター（$\varepsilon=0.34$）のω_k及びQ_k

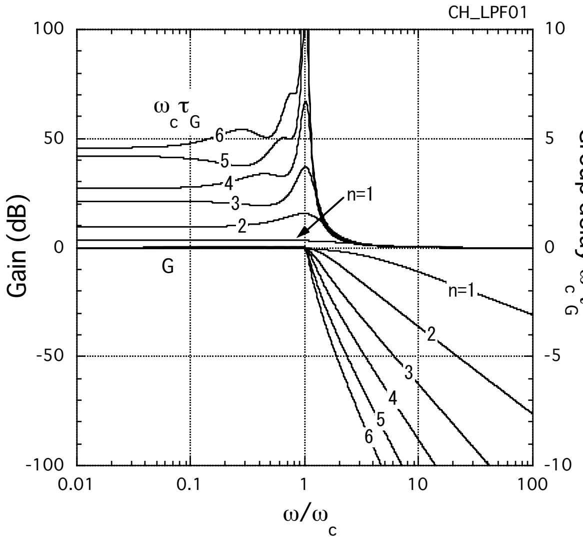


図 9-18　チェビシェフ・フィルター
（リプル0.5*dB*）の振幅及び群遅延時間

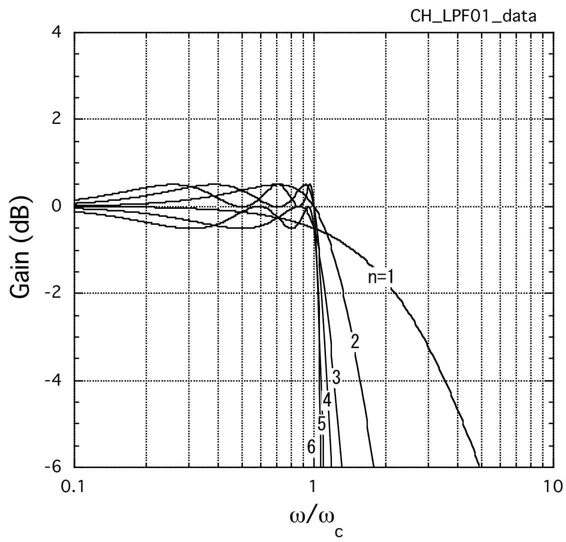


図 9-19　リプルの拡大図

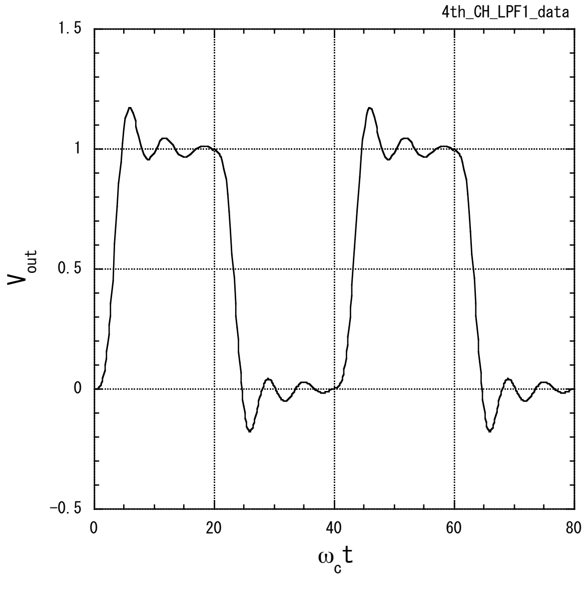


図 9-20　矩形波応答

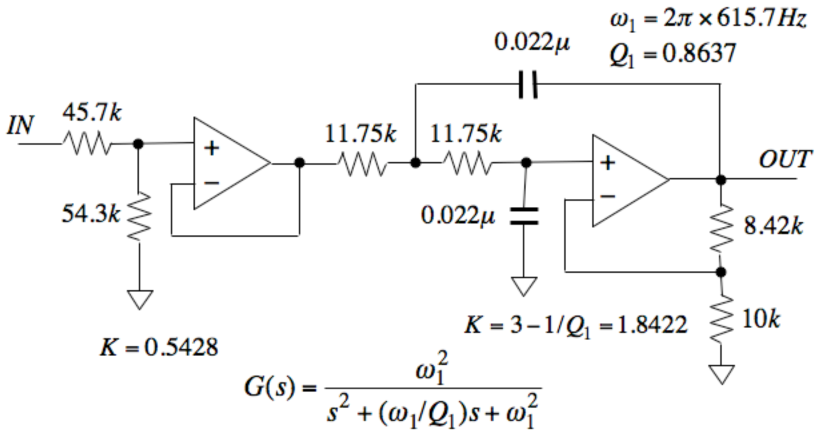


図 9-19　２次チェビシェフ・フィルター（LPF）

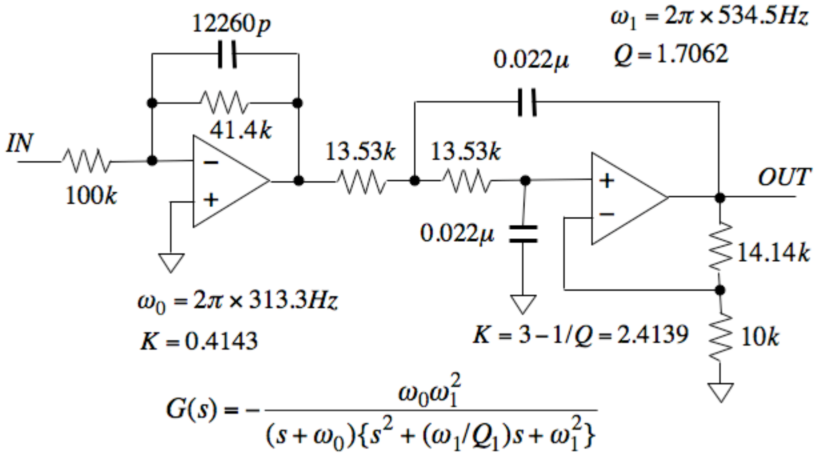


図 9-20　３次チェビシェフ・フィルター（LPF）

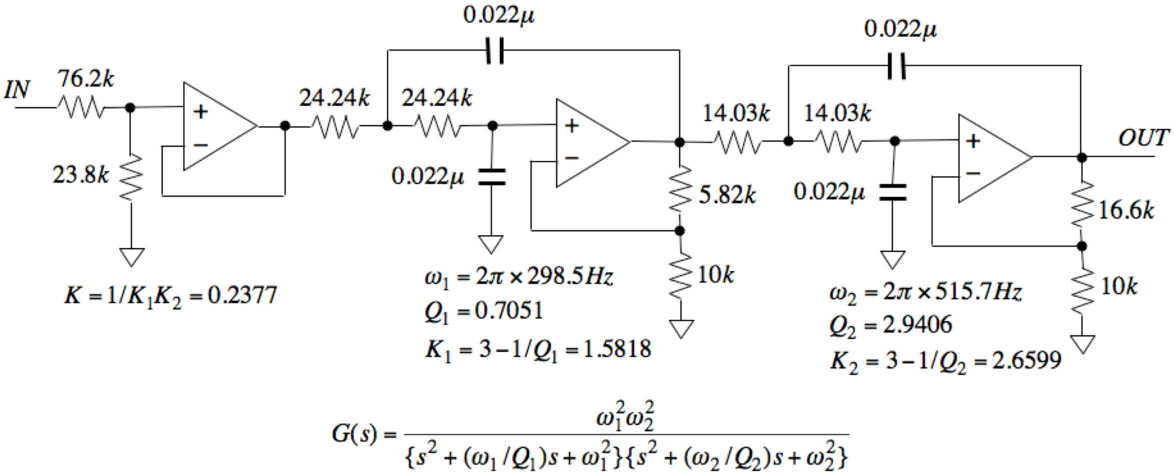


図 9-21　４次チェビシェフ・フィルター（LPF）

チェビシェフ・フィルターは減衰特性が急峻であるが通過帯域にリプルが生ずる。それに対して通過帯域の特性が平坦でかつ減衰特性が急峻なフィルターとして考えられたのが次節で述べる「逆チェビシェフ・フィルター」である。更に「連立チェビシェフ・フィルター」（または「楕円フィルター」）では通過帯域及び減衰帯域のいずれにもリプルを許容することで、チェビシェフ・フィルターより急峻な減衰特性を得ている。連立チェビシェフ・フィルターはチェビシェフ多項式$C_n(\omega)$の代わりにヤコビの楕円関数により定義されるチェビシェフ有理関数$R_{n,k_1}(\omega/\omega_c)$によって周波数特性が定義されるもので、その詳細については他のフィルターの専門書を参照されたい。

9-6 逆チェビシェフ・フィルター

チェビシェフ・フィルターは周波数特性の通過帯域にリプルを許容して急峻な減衰特性を実現している。一方、逆チェビシェフ・フィルターは逆に減衰帯域にリプルを許容して通過帯域のリプルをなくしたフィルターである。バターワース・フィルターやチェビシェフ・フィルターの減衰領域では$(\omega/\omega_c)^{-n}$に比例して無限に減衰していくのに対して、逆チェビシェフ・フィルターの減衰量は有限に留まるが、十分に周波数特性が減衰した領域ではリプルがあっても問題がない場合が多い。

通過帯域にリプルのないフィルターとして

$$|G_{HPF}(j\omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1+\{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)\}^2} \tag{9.6.1}$$

を考える。$\omega/\omega_c \to \infty$では$|G_{HPF}(j\omega)| \to 1$、$\omega/\omega_c \to 0$では$|G_{HPF}(j\omega)| \to \sim \varepsilon^2 << 1$となることから、HPF の性質を持ち減衰領域ではリプルがあるが通過帯域にはリプルがない。(9.6.1)式は

$$|G_{HPF}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\{\frac{1}{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)}\}^2} \tag{9.6.2}$$

と書き直すことができる。これはチェビシェフ・フィルターの定義（(9.5.1)式）において$\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)$を$1/\{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)\}$に置き換えたものに等しくこのようなフィルターを逆チェビシェフ・フィルターという。(9.6.2)式に対して周波数変換を行うことで、通過帯域にリプルを持たない逆チェビシェフ LPF を構成する。

$|G_{HPF}(j\omega)|$はまた

$$|G_{HPF}(j\omega)|^2 = \frac{\{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)\}^2}{1+\{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)\}^2} \tag{9.6.3}$$

と書け、これより逆チェビシェフ HPF の伝達関数$G_{HPF}(s)$はチェビシェフ・フィルタ

ーと同じ特性方程式を持つ。したがってチェビシェフ・フィルターのポールp_kを用いて

$$G_{HPF}(s) = \frac{\varepsilon(s-q_1)\cdots(s-q_n)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} \qquad (9.6.4)$$

と書くことができる。ここでq_k は$C_n(s/j\omega_c)$の零点である（$C_n(q_k/j\omega_c)=0$）。α、βを実数として

$$s/j\omega_c = \cos(\alpha + j\beta) \qquad (9.6.5)$$

とおくと

$$\begin{aligned} C_n(s/j\omega_c) &= \cos n(\alpha + j\beta) \\ &= \cos(n\alpha)\cosh(n\beta) \\ &\quad + j\sin(n\alpha)\sinh(n\beta) \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (9.6.6)$$

より

$$\alpha = (2k-1)\pi/2n, \qquad \beta = 0$$
$$(k = 1, 2, \cdots, n) \qquad (9.6.7)$$

したがって零点q_kは

$$q_k/\omega_c = j\cos\{(2k-1)\pi/2n\}$$
$$(k = 1, 2, \cdots, n) \qquad (9.6.8)$$

で与えられる。(9.6.4)式に対して周波数変換 $s/\omega_c \to \omega_c/s$ を行い LPF の伝達関数に変換すると

$$G(s) = \frac{(\omega_c/s - q_1/\omega_c)\cdots(\omega_c/s - q_n/\omega_c)}{(\omega_c/s - p_1/\omega_c)\cdots(\omega_c/s - p_n/\omega_c)} \qquad (9.6.9)$$

を得る。ここでp_kはチェビシェフ・フィルターのポール

$$\left.\begin{aligned} p_k/\omega_c &= \sinh\nu\cdot\cos\theta_k + j\cosh\nu\cdot\sin\theta_k \\ \theta_k &= (2k+n-1)\pi/2n \end{aligned}\right\}$$
$$(k = 1, 2, \cdots, n) \qquad (9.6.10)$$

である（(9.5.19)式参照）。$G(s)$のポールω_c^2/p_kの実数部は負である $\mathrm{Re}(\omega_c^2/p_k) = (\omega_c/|p_k|)^2\,\mathrm{Re}(p_k) < 0$ ので$G(s)$は安定であることが分かる。図 9-22、図 9.23 に(9.6.9)式の

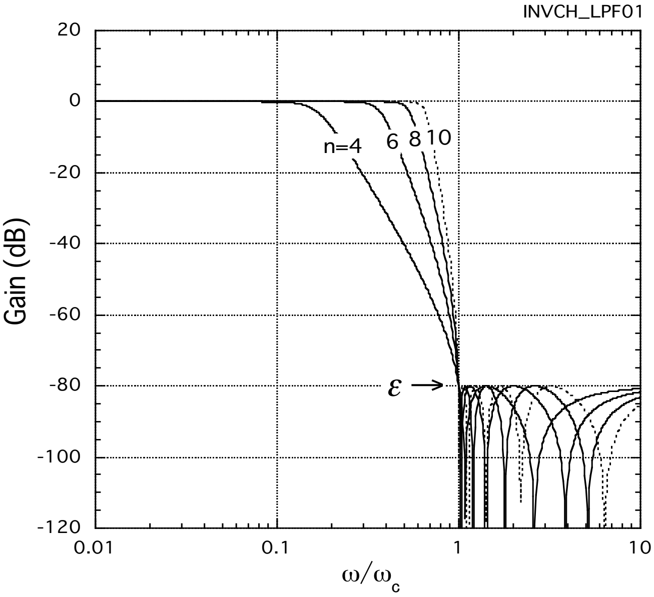


図 9-22　逆チェビシェフ LPF 特性

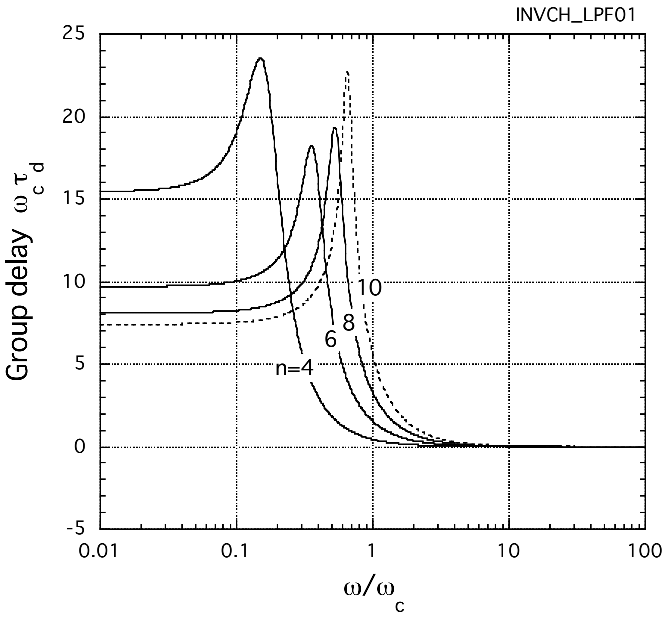


図 9-23　逆チェビシェフ LPF の群遅延特性

周波数特性及び群遅延特性を示す。逆チェビシェフ・フィルターもチェビシェフ・フィルターと同様に１次と２次のアナログ・フィルターのカスケード接続で構成することができるが、伝達関数の零点を作るための GIC 回路等による LC 直列共振フィルターが必要となるため、複雑な構成となる。現在ではこのような複雑な高次フィルターはデジタルフィルターで構成するのが一般的であり、本節ではアナログ・能動フィルターによる構成例は省略する。

注： 逆チェビシェフ・フィルターの規格化

p_kをポール、q_kを零点として

$$x = \omega_c / \omega$$

と置くと

$$\frac{\{\varepsilon C_n(x)\}^2}{1+\{\varepsilon C_n(x)\}^2} \to \begin{cases} \varepsilon^2/(1+\varepsilon^2) & (x \to 0) \\ 2^{2n}\varepsilon^2 x^{2n}/(1+2^{2n}\varepsilon^2 x^{2n}) & (x \to \infty) \end{cases}$$

$$\left|\varepsilon C_n(x)\right|_{x\to\infty} = \left|K_2(jx-q_1)\cdots(jx-q_n)\right|_{x\to\infty} \to \left|K_2 x^n\right|_{x\to\infty}$$

より

$$\left|G(jx)\right|_{x\to\infty} = \left|\frac{K_1K_2(jx-q_1)\cdots(jx-q_n)}{(jx-p_1)\cdots(jx-p_n)}\right|_{x\to\infty} = \left|\frac{K_1K_2x^n}{x^n}\right|_{x\to\infty} = K_1K_2$$

したがって$\left|G(jx)\right|_{x\to\infty} = 1$とすると

$$K_1K_2 = 1$$

故に(9.6.9)式

$$\left|G(jx)\right| = \left|\frac{(jx-q_1)\cdots(jx-q_n)}{(jx-p_1)\cdots(jx-p_n)}\right|$$

が成立する。

9-7 連立チェビシェフ・フィルター（楕円フィルター）

チェビシェフ・フィルター及び逆チェビシェフ・フィルターの周波数特性は

$$\left|G(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+f^2(\omega/\omega_c)} \tag{9.7.1}$$

なる形をしており、チェビシェフ・フィルターでは$f(\omega/\omega_c) = C_n(\omega/\omega_c)$、逆チェビシェフ・フィルターでは$f(\omega/\omega_c) = 1/C_n(\omega_c/\omega)$である。そこで通過帯域及び減衰帯域の

両方にリプルを持ち、急峻な減衰特性を持つフィルターを作るにはどのような性質の関数 $f(\omega/\omega_c)$ を考えれば良いだろうか。チェビシェフ・フィルターと逆チェビシェフ・フィルターにおける $f(\omega/\omega_c)$ の性質をまとめると次のようになる。

	$C_n(\omega/\omega_c)$	$1/C_n(\omega_c/\omega)$
$\omega < \omega_c$	-1~1 で振動 （n 個の零点を持つ）	緩やかに単調増加
$\omega > \omega_c$	急速に単調増加	1~∞ で振動 （n 個のポールを持つ）

$C_n(\omega/\omega_c)$ と $1/C_n(\omega_c/\omega)$ の性質を併せ持つ $f(\omega/\omega_c)$ として、$\omega < \omega_c$ で n 個の零点を持ち $\omega > \omega_c$ で個のポールを持つ関数を用いることで、チェビシェフ・フィルターと逆チェビシェフ・フィルターの性質を持ったフィルターを構成することができる。そのような関数 $f(\omega/\omega_c)$ として、ヤコビの楕円関数 $cd(x,k)$、$sn(x,k)$ により定義されるチェビシェフ有理関数 $R_{n,k_1}(\omega/\omega_c)$

$$R_{n,k_1}(x) = cd\left(\frac{nK_1}{K}cd^{-1}(x,k),k_1\right) \tag{9.7.2}$$

を用い、周波数特性関数 $G(j\omega)$ が

$$\left|G(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\{\varepsilon R_{n,k_1}(\omega)\}^2} \tag{9.7.3}$$

であら得られるフィルターを考えると、通過帯域及び阻止帯域で等リプルとなる特性を得ることができる。このようなフィルターを連立チェビシェフ・フィルターまたは楕円フィルターという。

第 1 種楕円積分

$$u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{9.7.4}$$

の逆関数を

$$z = sn(u,k)$$

と書く。ここで k を関数 sn の母数と云い

$$k' = \sqrt{1-k^2} \tag{9.7.5}$$

を補母数という。$cn(u,k)$、$dn(u,k)$、$cd(u,k)$ を

$$\left.\begin{aligned} cn(u,k) &= \{1 - sn^2(u,k)\} \\ dn(u,k) &= \{1 - k^2 sn^2(n,k)\} \\ cd(u,k) &= cn(u,k)/dn(u,k) \end{aligned}\right\} \tag{9.7.6}$$

で定義する。関数$cd(u,k)$により関数

$$R_{n,k'}(x) = cd(\frac{nK'}{K} cd^{-1}(x,k), k') \tag{9.7.7}$$

を定義すると、$R_{n,k'}(x)$はn個の零点とn個のポールを持ち以下のn次の有理式（チェビシェフ有理関数）で表わすことができる。

$$\left.\begin{aligned} R_{n,k'}(x) &= x \prod_{m=1}^{(n-1)/2} \frac{k^2(\omega_{n,m}/\omega_c)^2 - 1}{1-(\omega_{n,m}/\omega_c)^2} \frac{x^2 - (\omega_{n,m}/\omega_c)^2}{k^2(\omega_{n,m}/\omega_c)^2 x^2 - 1} \qquad (\text{for } n = odd) \\ R_{n,k'}(x) &= \prod_{m=1}^{n/2} \frac{k^2(\omega_{n,m}/\omega_c)^2 - 1}{1-(\omega_{n,m}/\omega_c)^2} \frac{x^2 - (\omega_{n,m}/\omega_c)^2}{k^2(\omega_{n,m}/\omega_c)^2 x^2 - 1} \qquad (\text{for } n = even) \end{aligned}\right\} \tag{9.7.8}$$

ここで

$$x = \omega/\omega_c \tag{9.7.9}$$

$$\omega_{n,m}/\omega_c = sn(\frac{n-2m-1}{n} K, k) \tag{9.7.10}$$

またK、K'は次の第 1 種完全楕円積分

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} \tag{9.7.11}$$

である。$R_{n,k'}(\omega/\omega_c)$のポールを$\alpha_{n,m}$、零点を$\beta_{n,m}$とすると

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{n,m} &= \omega_c^2/k\omega_{n,m} \\ \beta_{n,m} &= \omega_{n,m} \end{aligned}\right\} \tag{9.7.12}$$

であり、$R_{n,k'}(x)$のポール$\omega = \alpha_{n,m}$は$G(j\omega)$の零点になり、$R_{n,k'}(x)$の零点$\omega = \beta_{n,m}$では$G(j\omega)$は 1 となる。なお、(9.7.10)式より $\omega_{m,n}/\omega_c < 1$である。$R_{n,k'}(\omega/\omega_c)$及び$|G(j\omega)|^2$は以下のような周波数依存性を持ち

	$R_{n,k'}(\omega/\omega_c)$	$\lvert G(j\omega)\rvert^2$
$\omega < \omega_c$	n 個の零点を持ち-1~1 の間で振動	$1 \sim 1/(1+\varepsilon^2)$の間で振動
$\omega > \omega_c$	n 個のポールを持ち絶対値が$1/k' \sim \infty$の間で振動	$0 \sim 1/\{1+(\varepsilon/k')^2\}$の間で振動

阻止域の$|G(j\omega)|^2$は

$$\frac{1}{1+(\varepsilon/k')^2} \cong (\frac{k'}{\varepsilon})^2 \quad (k' << \varepsilon) \tag{9.7.13}$$

となる。

例：通過帯域のリプルを$\sqrt{1+\varepsilon^2} = 0.5dB$、阻止域の減衰量を$k'/\varepsilon = -60dB$とすると、
$\varepsilon = 0.34931$、$k' = 3.4931\times10^{-4}$、$k = \sqrt{1-k'^2} = 0.999825$

図 9-24 に 9 次の連立チェビシェフ・フィルターの例を示す。

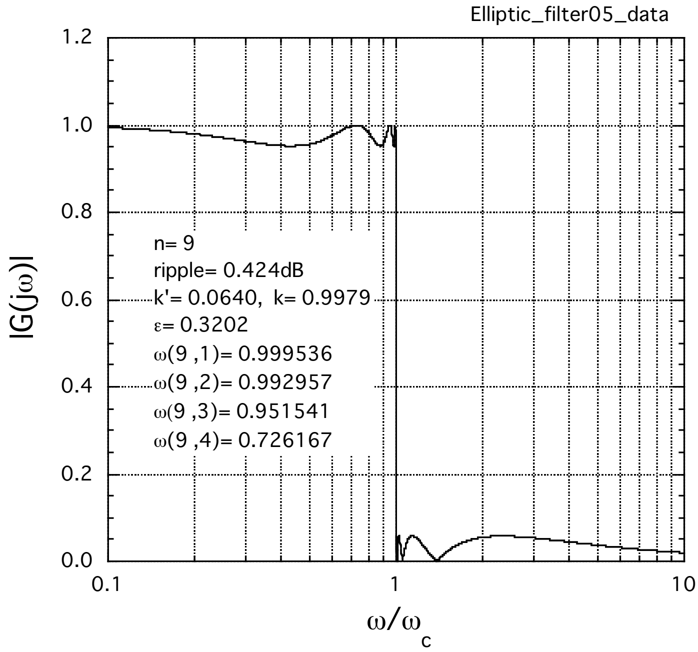


図 9-24　9 次連立チェビシェフ・フィルター
（楕円フィルター）の周波数特性例
（リプル$0.4dB\ (\varepsilon = 0.32)$、$k' = 0.064$）

注：

(9.7.10)式を書き直すと

$$\int_0^{\omega_{n,m}/\omega_c} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{n-2m-1}{n}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$