

## 9章 アナログフィルター

フィルターはその基本的なフィルタリング特性によって大きく4種類に分類され、カットオフ周波数より高い周波数成分を減衰させるローパスフィルター (LPF)、それとは逆に低い周波数を減衰させるハイパスフィルター (HPF)、特定の周波数帯域の周波数成分だけを通過させ、高い周波数成分及び低い周波数成分を減衰させるバンドパスフィルター (BPF)、特定の周波数成分だけを減衰させるバンドエリミネーションフィルター (ノッチフィルターと呼ばれることもある) (BEF) がある。

更にローパスフィルター (LPF) としてのフィルタリング特性によって次の三つのタイプに分けられる。

チェビシェフ型フィルター：通過帯域（第一種）または除去帯域（第二種）の周波数特性にリップルを有するが、減衰カーブが急峻。

バターワース型フィルター：周波数特性にリップルがなく、通過帯域の周波数特性が最も平坦、減衰カーブが穏やか。

ベッセル型フィルター：通過帯域の群遅延時間が最も一定、減衰カーブは最も穏やか。

最も減衰特性が急峻なチェビシェフ型フィルターは、通信分野において隣り合ったチャンネル間のクロストークを極力抑制するためによく用いられ、またデータサンプリングにおいてエリアシングを除去するためのアンチエリアシングフィルターとしてもよく用いられる。計測分野では周波数特性の平坦性が重視されることが多いため、バターワース型フィルターが用いられ、またパルスの信号のような多くの高調波成分を有する信号の波形再現性が重視される場合にはベッセル型フィルターがよく用いられる。概ねMHz以上の高周波帯域で用いるフィルターはL, C, R（受動素子）で構成されるが、多くの場合LやCの誤差（特にLの誤差が大きい）のために設計通りの性能を得ることが難しく、試行錯誤による調整が必要になる。一方、低周波領域では必要となるLが大きくなってしまふこと、及びLの誤差を回避するためにオペアンプを用いた能動フィルターを用いるのが一般的である。また、次数の高いフィルターをLCフィルターで実現するには多数のLとCが多段に接続された構成となり、それらが互いに影響しあうので設計には高度の知識と膨大な計算が必要である。そのため設計には専用の設計ソフトが用いられる。そこでLCフィルターの一般論については他書に譲ることとし、本書では基本的な能動フィルターについて解説する。能動フィルターでは1次及び2次のフィルターを多段従属接続することで次数の高いフィルタ

一を実現することができるので、以下1次と2次の能動フィルタを解説し、その後9-3節～9.5節にて高次のフィルタの一般論を述べる。

### 9-1 1次フィルタ

#### (a) 1次 LPF

図9-1より

$$\frac{V_1}{R_1} = -\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right)V_2 \quad (9.1.1)$$

したがって周波数特性関数は

$$G(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\omega CR_2} \quad (9.1.2)$$

となる。 $R_1 = R_2 = R$ として伝達関数は

$$G_{LPF}^{(1)}(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \quad (9.1.3)$$

で与えられる。

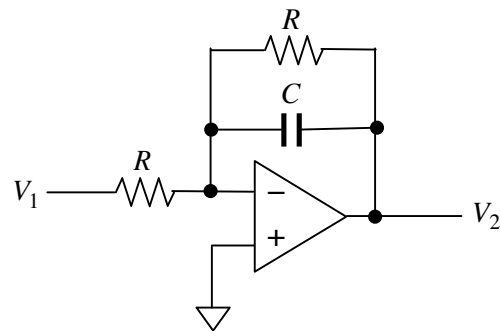


図9-1 1次 LPF

#### (b) 1次 HPF

図9-2より

$$\frac{V_1}{R_1} = -\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right)V_2 \quad (9.1.4)$$

したがって周波数特性関数は

$$G(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{j\omega CR_1}{1 + j\omega CR_1} \quad (9.1.5)$$

となる。 $R_1 = R_2 = R$ として伝達関数は

$$G_{HPF}^{(1)}(s) = \frac{s}{s + \omega_c} \quad (9.1.6)$$

で与えられる。

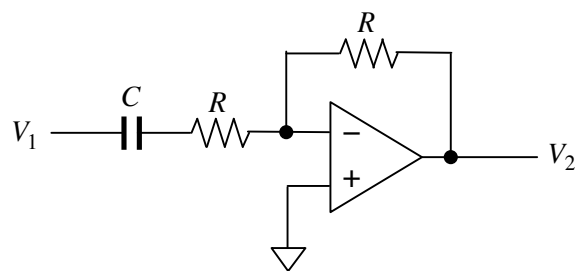


図9-2 1次 HPF

## 9-2 2次フィルター

2次フィルターの伝達関数は

$$\left. \begin{aligned} G_{LPF}^{(2)}(s) &= \frac{\omega_c^2}{s^2 + (\omega_s/Q)s + \omega_c^2}, & G_{HPF}^{(2)}(s) &= \frac{s^2}{s^2 + (\omega_s/Q)s + \omega_c^2} \\ G_{BPF}^{(2)}(s) &= \frac{(\omega_s/Q)s}{s^2 + (\omega_s/Q)s + \omega_c^2}, & G_{BEF}^{(2)}(s) &= \frac{s^2 + \omega_c^2}{s^2 + (\omega_s/Q)s + \omega_c^2} \\ G_{APF}^{(2)}(s) &= \frac{s^2 - (\omega_s/Q)s + \omega_c^2}{s^2 + (\omega_s/Q)s + \omega_c^2} \end{aligned} \right\} \quad (9.2.1)$$

で与えられ、 $Q=1/\sqrt{2}$ の場合はバターワース型フィルター、 $Q=1/\sqrt{3}$ のときをベッセル型フィルターとなる。また LPF、HPF、BPF 以外は2次より高い次数のフィルターが使われることはほとんどない。

### 周波数変換

上記の各種のフィルターは LPF が基準であり、他のフィルターの伝達関数は周波数変換法によって LPF を変換して求めることができる。対数スケールで周波数を表示すると HPF は $\omega_c$ を対称軸として左右反転したもので与えられる。即ち LPF に対して  $s/\omega_c \rightarrow \omega_c/s$ なる変換を行うと、1次の LPF、2次の LPF ともに

$$\left. \begin{aligned} G_{LPF}^{(1)}(s) \Big|_{s/\omega_s \rightarrow \omega_s/s} &\rightarrow G_{HPF}^{(1)}(s) \\ G_{LPF}^{(2)}(s) \Big|_{s/\omega_s \rightarrow \omega_s/s} &\rightarrow G_{HPF}^{(2)}(s) \end{aligned} \right\} \quad (9.2.2)$$

となり、それぞれ1次の HPF および2次の HPF が得られる。また、1次の HPF に  $s/\omega_s \rightarrow Q(s/\omega_s + \omega_s/s)$ なる変換を行うと

$$G_{HPF}^{(1)}(s) \Big|_{s/\omega_s \rightarrow Q(s/\omega_s + \omega_s/s)} = G_{BPF}^{(2)}(s) \quad (9.2.3)$$

また  $s/\omega_s \rightarrow 1/\{Q(s/\omega_s + \omega_s/s)\}$ なる変換を行うと

$$G_{HPF}^{(1)}(s) \Big|_{s/\omega_s \rightarrow 1/\{Q(s/\omega_s + \omega_s/s)\}} = G_{BEF}^{(2)}(s) \quad (9.2.4)$$

となる。これより LPF から他のフィルターの伝達関数を得ることができるので、LPF の特性を知ることによって他のフィルターの特性を知ることができる。

### 9-2-1 VCVS 型フィルター(電圧制御電圧源型フィルター)

オペアンプによる非反転アンプに帰還を施すことで2次のLPF及びHPFを実現することができる。

#### (a) LPF (図 9-3)

図 9-3 の回路方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_1 - V}{R_1} &= j\omega C_1(V - V_2) + \frac{1}{R_2}\left(V - \frac{V_2}{K}\right) \\ \frac{1}{R_2}\left(V - \frac{V_2}{K}\right) &= j\omega C_2 \frac{V_2}{K} \\ K &= 1 + \frac{R_3}{R_4} \end{aligned} \right\} \quad (9.2.5)$$

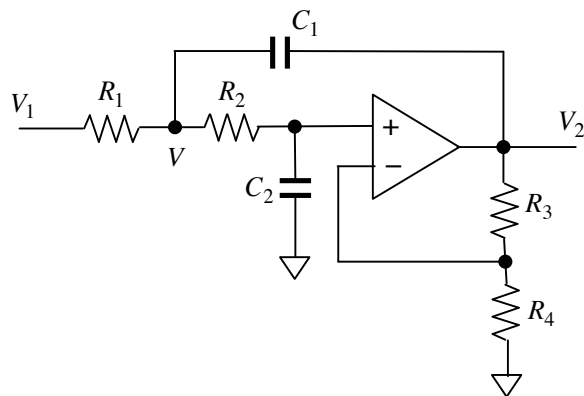


図 9-3 VCVS 型 LPF

で与えられ、これを解くことで次の応答を得る。

$$V_2 = \frac{K}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} V_1 \quad (9.2.6)$$

ここで

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}, \quad Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{C_1 R_1 (1 - K) + C_2 (R_1 + R_2)} \quad (9.2.7)$$

である。通常  $C_1 R_1 = C_2 R_2 = CR$  として設計され、このとき

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}, \quad Q = \frac{1}{2 - K + C_2/C_1} \quad (9.2.8)$$

となる。 $K=2$ では $Q=C_1/C_2$ となり広い範囲で $Q$ を設定することができる。但し $K$ が $2 + C_2/C_1$ に近くなると $R_3$ 、 $R_4$ の誤差が $Q$ に大きく影響するので注意が必要である。

#### (b) HPF (図 9-4)

図 9-4 の回路方程式

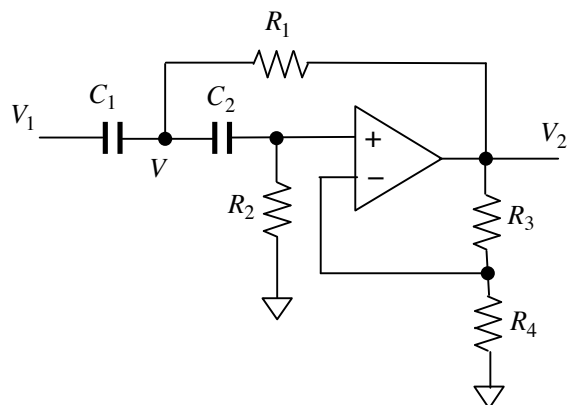


図 9-4 VCVS 型 HPF

$$\left. \begin{aligned} j\omega C_1(V_1 - V) &= j\omega C_2(V - \frac{V_2}{K}) + \frac{V - V_2}{R_1} \\ j\omega C_2(V - \frac{V_2}{K}) &= \frac{V_2}{KR_2} \\ K &= 1 + \frac{R_3}{R_4} \end{aligned} \right\} \quad (9.2.9)$$

より、出力応答は次式となる。

$$V_2 = -K \frac{\omega^2 / \omega_0^2}{1 + j\omega / Q\omega_0 - \omega^2 / \omega_0^2} V_1 \quad (9.2.10)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}, \quad Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{(C_1 + C_2)R_1 + C_2 R_2(1 - K)} \quad (9.2.11)$$

LPF と同様、通常  $C_1 R_1 = C_2 R_2 = CR$  として設計され、このとき

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}, \quad Q = \frac{1}{2 - K + C_2 / C_1} \quad (9.2.12)$$

となる。LPF と同様  $K = 2$  では  $Q = C_1 / C_2$  となり広い範囲で  $Q$  を設定することができる。

### 9-2-2 多重帰還型フィルター (multiple feedback filter)

(a) LPF (図 9-5)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_3}(V_1 - V) &= \frac{1}{R_1}(V - V_2) + \frac{V}{R_2} + j\omega C_1 V \\ \frac{V}{R_2} &= -j\omega C_2 V_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.6.8)$$

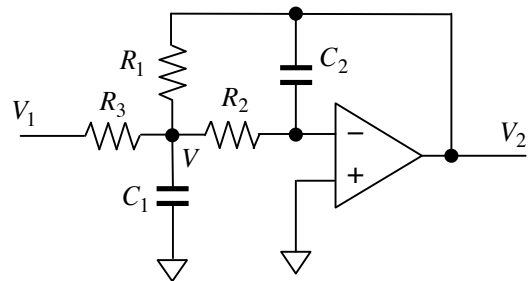


図 9-5 LPF

より

$$V_2 = -\frac{K}{1 + j\omega / Q\omega_0 - \omega^2 / \omega_0^2} V_1 \quad (9.2.13)$$

$$K = \frac{R_1}{R_3}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}, \quad Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{R_2(1 + K) + R_1} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \quad (9.2.14)$$

となる。通常  $R_1 = R_2 = R_3 = R$  として設計され、その場合は

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2} R}, \quad Q = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}, \quad K = 1 \quad (9.2.15)$$

となり、大きな  $Q$  が必要な場合には適さない。

(b) HPF (図 9-6)

$$\left. \begin{aligned} j\omega C_1(V_1 - V) &= \frac{V}{R_1} + j\omega C_2 V + j\omega C_3(V - V_2) \\ j\omega C_2 V &= -\frac{V_2}{R_2} \end{aligned} \right\} \quad (9.2.16)$$

より

$$V_2 = \frac{K\omega^2 / \omega_0^2}{1 + j\omega / Q\omega_0 - \omega^2} V_1 \quad (9.2.17)$$

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{C_1}{C_3} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{C_2 C_3 R_1 R_2}} \\ Q &= \frac{\sqrt{C_2 / C_3}}{1 + K + C_2 / C_3} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \end{aligned} \right\} \quad (9.2.18)$$

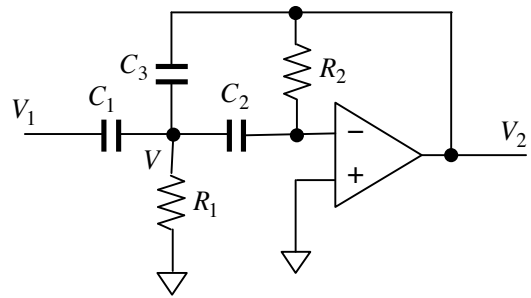


図 9-6 HPF

となる。

ここで  $C_1 = C_2 = C_3 = C$  とすると

$$\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1 R_2}}, \quad Q = \frac{1}{2 + K} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}, \quad K = 1 \quad (9.2.19)$$

となる。

(c) BPF (図 9-7)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1}(V_1 - V) &= \frac{V}{R_2} + j\omega C_1 V + j\omega C_2(V - V_2) \\ j\omega C_1 V &= -\frac{V_2}{R_3} \end{aligned} \right\} \quad (9.2.20)$$

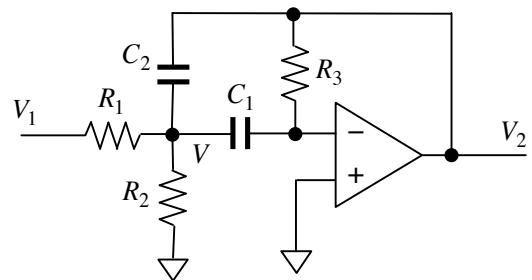


図 9-7 BPF

より

$$V_2 = -K \frac{j\omega / Q\omega_0}{1 + j\omega / Q\omega_0 - \omega^2 / \omega_0^2} V_1 \quad (9.2.21)$$

$$K = \frac{C_1 R_3}{(C_1 + C_2) R_1}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1/R_1 + 1/R_2}{C_1 C_2 R_3}}, \quad Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_1 + C_2} \sqrt{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) R_3} \quad (9.2.22)$$

ここで  $R_1 = R_2 = R_3 = R$  とすると

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{C_1 C_2} R}, \quad Q = K \sqrt{\frac{2C_2}{C_1}}, \quad K = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad (9.2.23)$$

となる。この場合  $K < 1$  のため大きな  $Q$  が必要な場合には適さない。一方、 $C_1 = C_2 = C_3 = C$  とすると

$$\omega_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1}{R_3} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}, \quad Q = \frac{1}{2} \sqrt{2K + \frac{R_3}{R_2}}, \quad K = \frac{R_3}{2R_1} \quad (9.2.24)$$

となり、 $R_3/R_1 = R_3/R_2 = 20$  とすることで  $Q = 3.16$  を得ることができる。

### 9-2-3 状態変数フィルター (state variable filter)

VCVS 型フィルターや多重帰還型フィルターでは、ゲイン、共振周波数、 $Q$  値が互いに影響し合うので設計が難しく、また大きな  $Q$  値を得ることが難しい。これに対して、状態変数フィルターは必要なオペアンプの数が 3 個と多くなるが、ゲイン、共振周波数、 $Q$  値を独立に決めることができるので設計が容易で自由度が大きく、大きな  $Q$  値を容易に実現することができる。また LPF、BPF、HPF 出力が同時に得られるのが特徴であり、状態変数フィルターを用いた発振回路では二つの出力の位相が  $90^\circ$  異なる二相発振器を容易に実現することができ、汎用性の高いフィルターである。

図 9-8 に示すように  $A_1$  の出力を状態変数  $X(s)$  と定義し、さらに

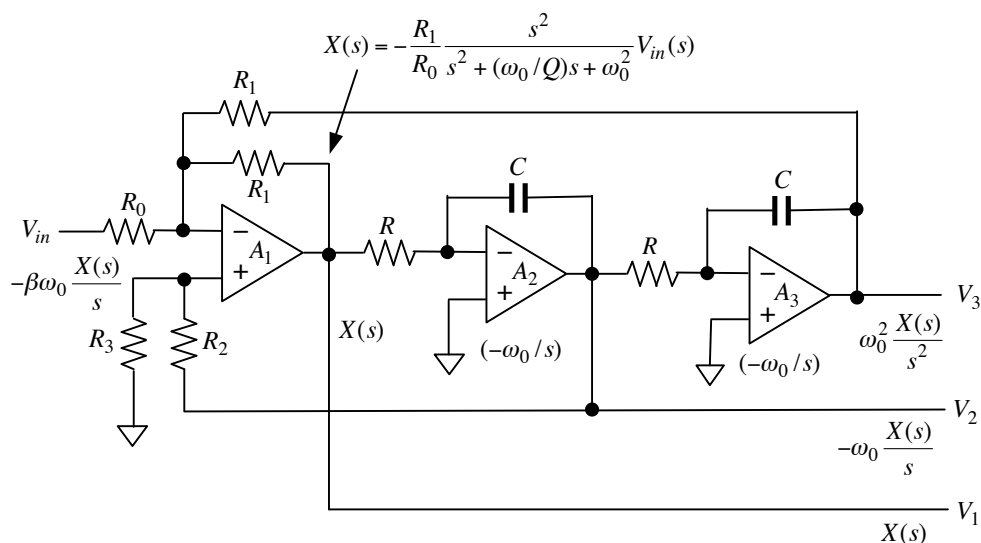


図 9-8 状態変数フィルター

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}, \quad K = \frac{R_1}{R_0}, \quad \beta = \frac{R_3}{R_2 + R_3}, \quad \frac{1}{Q} = \left( 2 + \frac{R_1}{R_0} \right) \beta \quad (9.2.25)$$

と置くと

$$\left. \begin{aligned} G_0 V_{in}(s) &= -\left\{ X(s) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{X(s)}{s} + \omega_0^2 \frac{X(s)}{s^2} \right\} \\ V_1(s) &= X(s), \quad V_2(s) = -\omega_0 \frac{X(s)}{s}, \quad V_3(s) = \omega_0^2 \frac{X(s)}{s^2} \end{aligned} \right\} \quad (9.2.26)$$

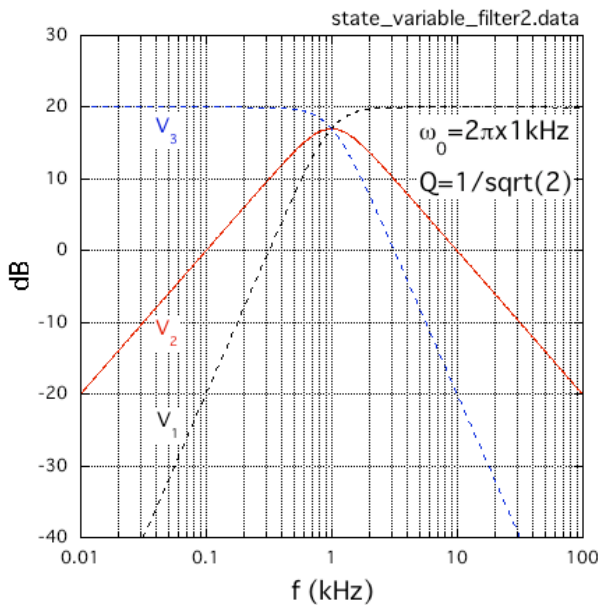
が成立する。これより

$$X(s) = -\frac{Ks^2}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2} V_{in}(s) \quad (9.2.27)$$

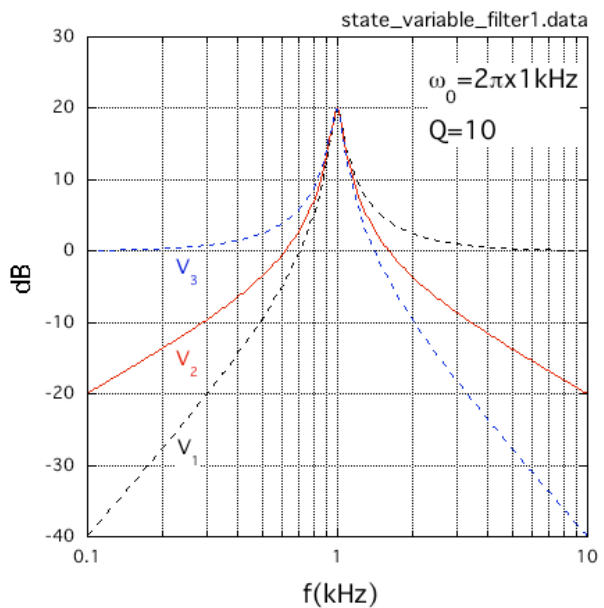
となり、 $s = j\omega$  と置くことで

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= K \frac{\omega^2 / \omega_0^2}{1 + j\omega / Q\omega_0 - \omega^2 / \omega_0^2} V_{in} \\ V_2 &= K \frac{j\omega / \omega_0}{1 + j\omega / Q\omega_0 - \omega^2 / \omega_0^2} V_{in} \\ V_3 &= -K \frac{1}{1 + j\omega / Q\omega_0 - \omega^2 / \omega_0^2} V_{in} \end{aligned} \right\} \quad (9.2.28)$$

を得る。



(a)  $K = 10, Q = 1/\sqrt{2}$   
 $(10R_0 = R_1 = 47k\Omega,$   
 $R_2 = 75k\Omega, R_3 = 10k\Omega)$



(b)  $K = 1, Q = 10$   
 $(R_0 = R_1 = 47k\Omega,$   
 $R_2 = 290k\Omega, R_3 = 10k\Omega)$

図 9-9 状態変数フィルタ ( $\omega_0 = 2\pi \times 1kHz$ ) の特性



望みの  $K$ 、 $Q$  を与えれば

$$R_1 = KR_0, \quad R_2 = \{(2+K)Q-1\}R_3 \quad (9.2.29)$$

により抵抗値の比が決まる。図 9-9 に出力  $V_1$ 、 $V_2$ 、 $V_3$  の例を示す。オペアンプが 3 個必要であるが  $K$ 、 $\omega_0$ 、 $Q$  を独立に設定できるので VCVS 型や多重帰還型に比べて設計が容易であり、また  $Q$  の設定範囲が広いので汎用性が高い。

### 9.3 バターワースフィルター

LPF 以外のフィルターの伝達関数は周波数変換により LPF の伝達関数から得ることができるので、以下では LPF についてのみ述べる。

フィルターの周波数特性関数を  $G(j\omega)$  として、 $n$  次バターワース LPF は

$$|G_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}} \quad (9.3.1)$$

で定義される。図 9-10 に振幅周波数特性  $|G_n(j\omega)|$  を示す。次数  $n$  に依らず  $\omega_c$  が -3dB カットオフ周波数になっていて、 $\omega_c$  から離れた周波数での減衰カーブは

$$1/\omega^n \quad (-6n \text{ dB/oct})$$

に比例している。伝達関数は(9.3.1)式において  $s = j\omega$  とおくことで

$$|G_n(s)|^2 = \frac{1}{1 + (s/j\omega_c)^{2n}} \quad (9.3.2)$$

で与えられ、特性方程式は

$$1 + (s/j\omega_c)^{2n} = 0 \quad (9.3.3)$$

となる。この特性方程式の  $2n$  個の根は図 9-11 に示すように複素  $s$  平面の原点を中心とする半径  $\omega_c$  の円上にあるが、

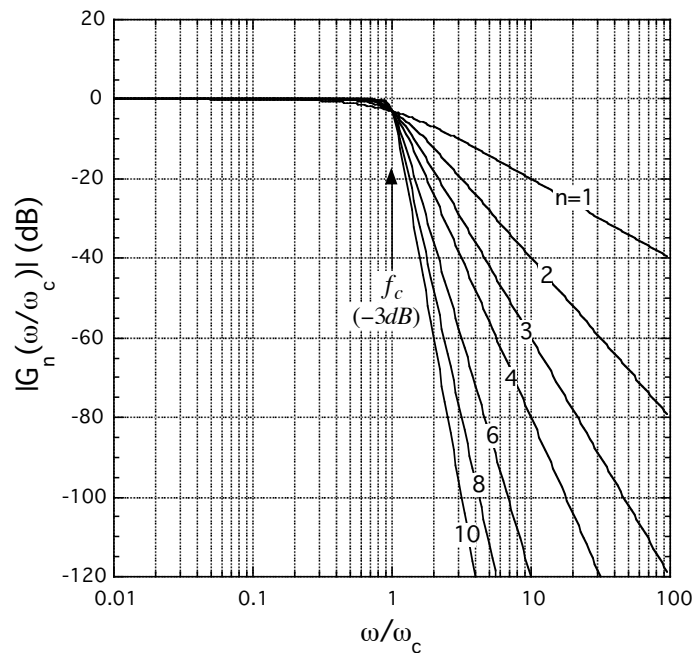


図 9-10 バターワース LPF の周波数特性

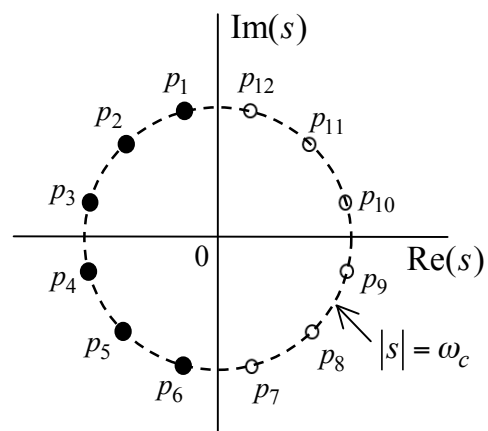


図 9-11 6 次バターワースフィルターの伝達関数のポール (黒丸印)

$G(s)$ は安定でなければならないことから  $\text{Re}(p_m) < 0$  でなければならない。したがって  $G(s)$ のポールは

$$p_m = j(-1)^{1/2n} \omega_c = \omega_c e^{j\theta_m} \quad (9.3.4)$$

ここで

$$\theta_m = \frac{2m+n-1}{2n} \pi \quad (m=1, 2, \dots, 2n) \quad (9.3.5)$$

となる。図 9-11 に  $n=6$  (6次) の場合の  $s$  平面上における根  $p_m$  の配置を示す。図中黒丸で示す  $p_1, p_2, \dots, p_6$  が  $G(s)$  のポールである。

$G(s)$  の分母をポール  $p_1, p_2, \dots, p_n$  により因数分解して

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \frac{\omega_c^n}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{R_m}{s-p_m} \end{aligned} \quad (9.3.6)$$

と書くことができ、 $p_m$  ( $m=1, 2, \dots, n$ ) は全て 1 次のポールであるので逆ラプラス変換は

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \sum_{m=1}^n R_m e^{p_m t} \quad (9.3.7)$$

で与えられる。ここで  $R_m$  は  $s = p_m$  における留数

$$\begin{aligned} R_m &= [(s-p_m)G(s)]_{s=p_m} = \frac{\omega_c^n}{\prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq m)}}^n (p_m - p_k)} \\ &= \frac{\omega_c e^{-j(2m+n-1)\pi/2n}}{\prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq m)}}^n (1 - e^{j(k-m)\pi/n})} \end{aligned} \quad (9.3.8)$$

である。 $R_m$  を用いて(9.3.7)式によりバターワース・フィルターの時間的応答を求めることができる。以上のフィルターを具体的なアナログ回路で実現するには、以下に述べるように  $G(s)$  を 1 次及び 2 次の伝達関数の積で書き表わし、それらの従属接続で構成するのが一般的である。

(9.3.5)式及び図 9-11 から分かるように

$$p_{n-(m-1)} = p_m^* \quad (9.3.9)$$

であり、 $n$  が奇数の場合は  $p_{(n-1)/2+1}$  は実数となる。(9.3.9)式より特性方程式の根  $p_m$  は、 $n$  が偶数の場合は  $n/2$  対の共役複素根からなり、 $n$  が奇数の場合は一つの実根と  $(n-1)/2$  対の共役複素根からなることが分かる。虚軸から遠い根から順に番号をつけ直すと (2 次の伝達関数を  $Q$  の小さい順に並べることに対応)

$$p_k = \omega_c e^{j\theta_k} \quad (9.3.10)$$

として

$n$ が偶数の場合：

$$\begin{cases} \theta_k = \frac{n-k+1/2}{n} \pi & (k=1, 2, \dots, n/2) \\ p_{-k} = p_k^* \end{cases} \quad (9.3.11)$$

$n$ が奇数の場合

$$\begin{cases} \theta_k = \frac{n-k}{n} \pi & (k=0, 1, 2, \dots, (n-1)/2) \\ p_{-k} = p_k^* \end{cases} \quad (9.3.12)$$

これより  $n$ が奇数か偶数かによって伝達関数は次のようになる。

$n$ が偶数の場合：特性方程式は  $n/2$  対の共役複素根を持つので、伝達関数は次のように  $n/2$  個の 2 次の伝達関数の積となる。

$$G_n(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + (\omega_c/Q_1)s + \omega_c^2} \cdot \frac{\omega_c^2}{s^2 + (\omega_c/Q_2)s + \omega_c^2} \cdots \frac{\omega_c^2}{s^2 + (\omega_c/Q_{n/2})s + \omega_c^2} \quad (9.3.13)$$

ここで

$$\begin{aligned} Q_k &= -\frac{\omega_c}{p_k + p_k^*} = -\frac{1}{2\cos\theta_k} \\ &= \frac{1}{2\cos\{(k-1/2)\pi/n\}} \end{aligned} \quad (9.3.14)$$

は  $(p_k, p_k^*)$  をポールに持つ 2 次の伝達関数の  $Q$  値である。

$n$ が奇数の場合：特性方程式は一つの実根と  $(n-1)/2$  対の共役複素根を持つので、伝達関数は次のように一つの 1 次の伝達関数と  $(n-1)/2$  個の 2 次の伝達関数の積となる。

$$G_n(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \cdot \frac{\omega_c^2}{s^2 + (\omega_c/Q_1)s + \omega_c^2} \cdot \frac{\omega_c^2}{s^2 + (\omega_c/Q_2)s + \omega_c^2} \cdots \frac{\omega_c^2}{s^2 + (\omega_c/Q_{(n-1)/2})s + \omega_c^2} \quad (9.3.15)$$

ここで

$$\begin{aligned} Q_k &= -\frac{\omega_c}{p_k + p_k^*} = -\frac{1}{2\cos\theta_k} \\ &= \frac{1}{2\cos\{(k/n)\pi\}} \end{aligned} \quad (9.3.16)$$

である。

すなわち  $n$ が偶数の場合は  $Q$  値がそれぞれ  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n/2}$  である 2 次の LPF を  $n/2$  個

従属接続する、また  $n$  が奇数の場合は 1 次の LPF と  $(n-1)/2$  個の 2 次の LPF を従属接続することで  $n$  次のバターワース LPF を構成することができる。表 9-1 に  $\omega_c$  で規格化したポール  $p_k/\omega_c$  及び  $Q_k$  の例を示す。表 9-1 により 4 次までのバターワース型ローパスフィルタ (LPF) を VCVS フィルタで構成した回路例を図 9-12 ~ 9-14 に示す。

$n$		$p_k/\omega_c$	$Q_k$	
1	1 次	-1		
2	2 次	$e^{\pm j3\pi/4}$	$Q_1$	0.7071
3	1 次	-1		
	2 次	$e^{\pm j2\pi/3}$	$Q_1$	1.0
4	2 次	$e^{\pm j7\pi/8}$	$Q_1$	0.5412
		$e^{\pm j5\pi/8}$	$Q_2$	1.3066
5	1 次	-1		
	2 次	$e^{\pm j4\pi/5}$	$Q_1$	0.6180
		$e^{\pm j3\pi/5}$	$Q_2$	1.6180
6	2 次	$e^{\pm j11\pi/12}$	$Q_1$	0.5176
		$e^{\pm j9\pi/12}$	$Q_2$	0.7071
		$e^{\pm j7\pi/12}$	$Q_3$	1.9319
8	2 次	$e^{\pm j15\pi/16}$	$Q_1$	0.5098
		$e^{\pm j13\pi/16}$	$Q_2$	0.6013
		$e^{\pm j11\pi/16}$	$Q_3$	0.9000
		$e^{\pm j9\pi/16}$	$Q_4$	2.5629

表 9-1 バターワース・フィルタの  $p_k/\omega_c$  及び  $Q_k$

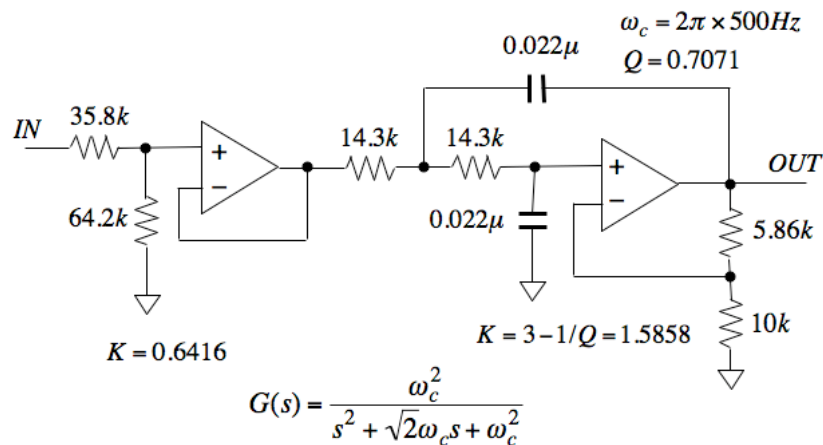


図 9-12 2次バターワース・フィルタ (LPF)

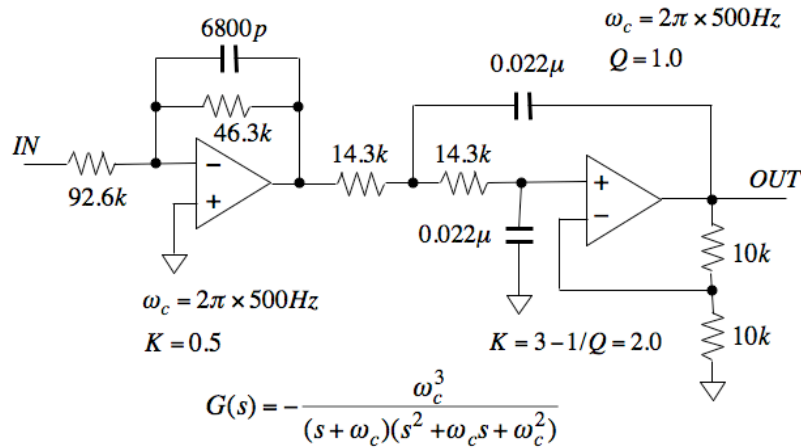


図 9-13 3次バターワース・フィルター (LPF)

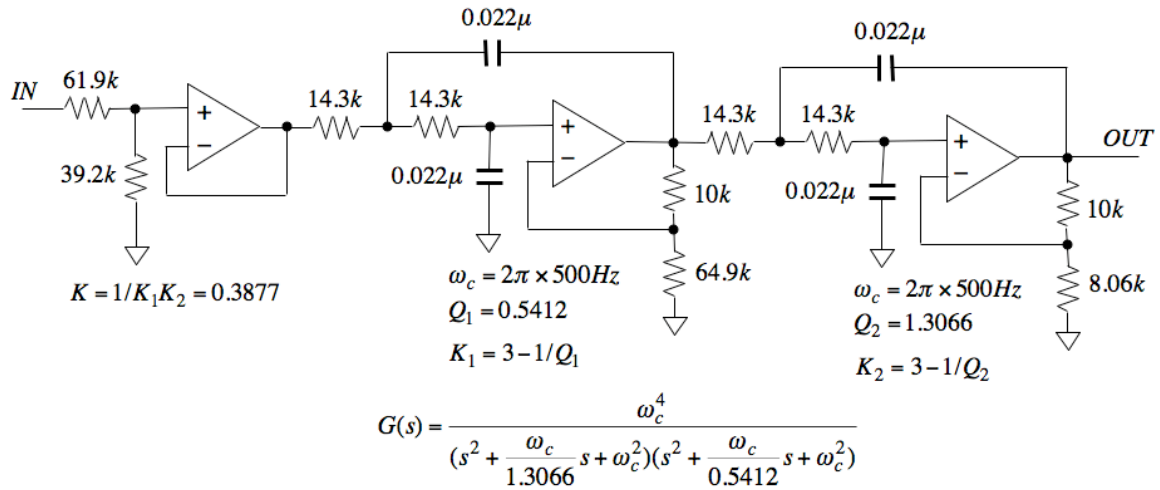


図 9-14 4次バターワース・フィルター (LPF)

## 9-4 ベッセルフィルター

ベッセルフィルターは群遅延時間が最も平坦なフィルターである。群遅延時間は

$$\tau = -\frac{d\theta}{d\omega} \quad (9.4.1)$$

で定義され、信号の伝播時間を表す。信号  $x(t)$  に対して時間を  $\tau$  だけ遅らせた信号は  $x_d(t) = x(t - \tau)$  である。これをラプラス変換  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$  で表現すると

$$X_d(s) = \mathcal{L}[x(t - \tau)] = e^{-\tau s} X(s) \quad (9.4.2)$$

と表される。これより周波数成分は

$$X_d(j\omega) = e^{-j\omega\tau} X(j\omega) \quad (9.4.3)$$

となり、 $X_d(j\omega)$ は $X(j\omega)$ に対して周波数に比例した位相遅れ

$$-\theta = \omega\tau \quad (9.4.4)$$

を有する。ここで $x(t-\tau)$ は $x(t)$ を時間軸方向に平行移動しただけであるので、波形は同一である。すなわち位相遅れが周波数に比例する場合は波形歪がないことを意味する。すなわち位相遅れを周波数で微分したもの（群遅延時間）は時間遅れ $\tau$ を表わしており、 $\tau$ が一定であることは波形歪がないことの条件の一つである。

ベッセルフィルタ（LPF）は信号の通過帯域内での群遅延時間が最も一定であるフィルタとして定義される。時間遅れの伝達関数 $e^{-\tau s}$ を

$$e^{-\tau s} = \frac{1}{\cosh(\tau s) + \sinh(\tau s)} = \frac{1}{v(\tau s) + u(\tau s)} \quad (9.4.5)$$

とおき、 $\coth(\tau s)$ を次のように連分数に展開する。

$$\frac{v(\tau s)}{u(\tau s)} = \coth(\tau s) = \frac{1}{\tau s} + \frac{1}{\frac{3}{\tau s} + \frac{1}{\frac{5}{\tau s} + \dots}} \quad (9.4.6)$$

連分数展開を $n$ 回で打ち切り、分子を $v_n(\tau s)$ 、分母を $u_n(\tau s)$ とおくと

$$\left. \begin{array}{ll} v_1(\tau s) = 1, & u_1(\tau s) = \tau s \\ v_2(\tau s) = \tau^2 s^2 + 3, & u_2(\tau s) = 3\tau s \\ v_3(\tau s) = 6\tau^2 s^2 + 15, & u_3(\tau s) = \tau^3 s^3 + 15\tau s \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array} \right\} \quad (9.4.7)$$

となる。ここで

$$D_n(\tau s) = v_n(\tau s) + u_n(\tau s) \quad (9.4.8)$$

とおくと $1/D_n(\tau s)$ は $s$ の $n$ 次有理式による $e^{-\tau s}$ の近似になる。 $n$ 次の多項式 $D_n(\tau s)$ は

$$\left. \begin{array}{l} D_1(\tau s) = \tau s + 1 \\ D_2(\tau s) = \tau^2 s^2 + 3\tau s + 3 \\ D_3(\tau s) = \tau^3 s^3 + 6\tau^2 s^2 + 15\tau s + 15 \\ D_4(\tau s) = \tau^4 s^4 + 10\tau^3 s^3 + 45\tau^2 s^2 + 105\tau s + 105 \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} \quad (9.4.9)$$

より

$$D_n(\tau s) = (2n-1)D_{n-1}(\tau s) + (\tau s)^2 D_{n-2}(\tau s) \quad (9.4.10)$$

で与えられる。以上より $n$ 次のベッセル型 LPF の伝達関数を

$$G(s) = \frac{D_n(0)}{D_n(\tau s)} \quad (9.4.11)$$

で定義する。 $n$ 次のベッセルフィルタは時間遅れを $n$ 次の有理式で近似したフィルタであり、振幅特性はLPFとなる。次数を上げるほど $e^{-\tau s}$ に対する近似が良くなり、群遅延特性、振幅特性ともに平坦になるが、カットオフ周波数も高くなる。なお、3次以上のベッセルフィルタの特性方程式 $D_n(\tau s) = 0$ の根を解析的に求めることはほとんど不可能なので、計算機による専用プログラムで設計することになる。

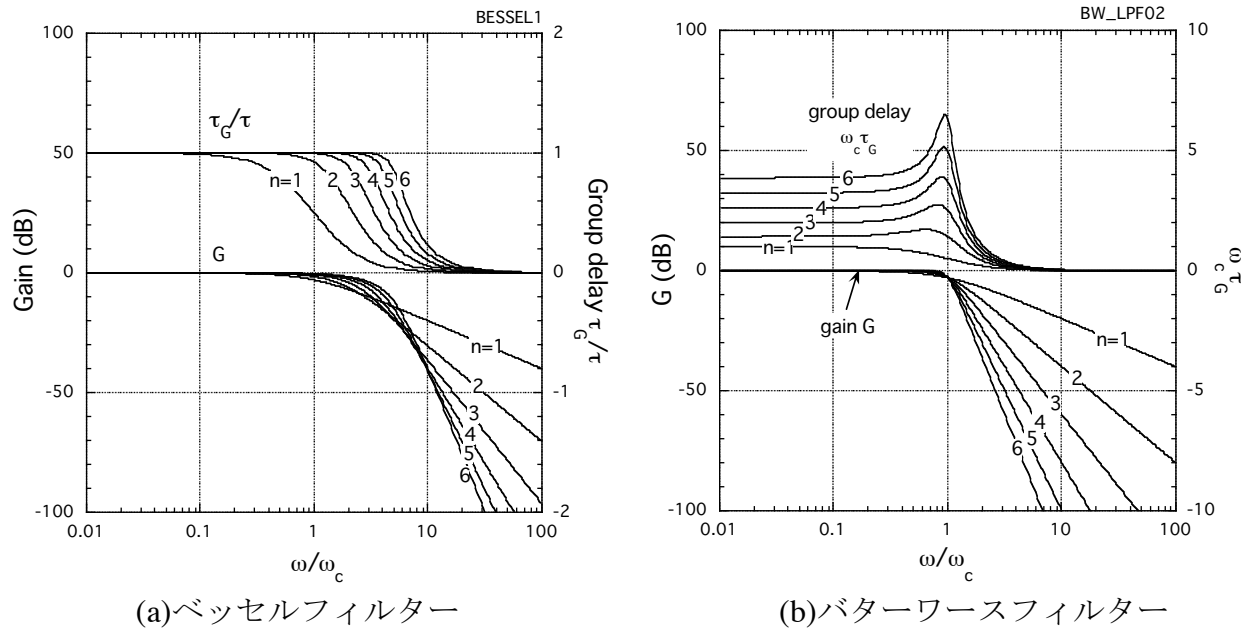


図 9-13 群遅延特性及び振幅特性

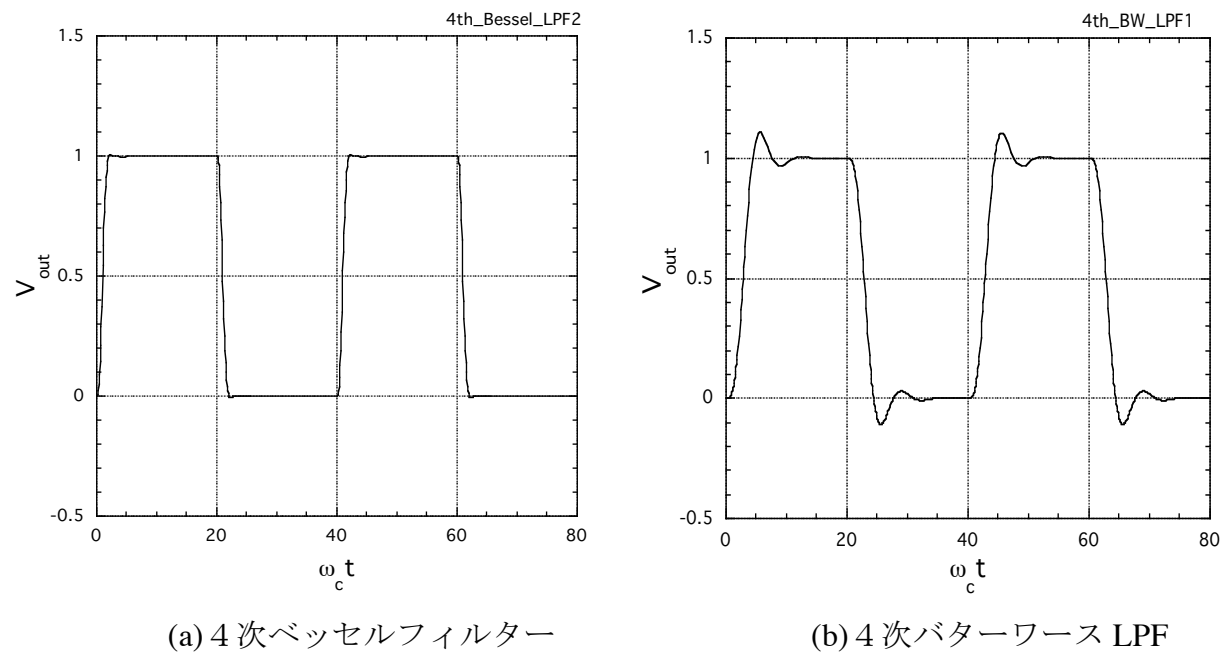


図 9-14 矩形波応答

図 9-13 に群遅延特性及び振幅特性を示す。通過帯域では群遅延が一定であることが分かる。これに対して図(b)に示すようにバターワースフィルタではカットオフ周波数に近づくと群遅延が大きく変化する。また、図 9-14(a)には矩形波信号に対する 4 次ベッセルフィルタの出力を示す。同図(b)に示す 4 次バターワース LPF の矩形波出力に対して波形歪みが小さいことが分かる。

### 9-5 チェビシェフ・フィルタ

チェビシェフ・フィルタ (LPF) は通過帯域内に多少のリプル即ち振幅周波数特性の変動を許容して変動を一定限度に抑え、かつ可能な限り最も急峻な遮断特性となるように考えられたフィルタである。チェビシェフ・フィルタの伝達関数  $|G(j\omega)| = \sqrt{1/\{1+(\omega/\omega_c)^{2n}\}}$  を拡張して、通過帯域のゲインが 1 であるような  $n$  次チェビシェフ・フィルタの伝達関数は

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \{\epsilon C_n(\omega/\omega_c)\}^2}} \quad (9.5.1)$$

で定義される。ここでチェビシェフ多項式  $C_n(\omega)$  は

$$\omega/\omega_c = \begin{cases} \cos\psi & (0 \leq \omega/\omega_c \leq 1) \\ \cosh\psi & (1 < \omega/\omega_c) \end{cases} \quad (9.5.2)$$

$$C_n(\omega/\omega_c) = \begin{cases} \cos n\psi & (0 \leq \omega/\omega_c \leq 1) \\ \cosh n\psi & (1 < \omega/\omega_c) \end{cases} \quad (9.5.3)$$

で与えられる。例として図 9-15 に  $|C_4(\omega/\omega_c)|^2$  の振る舞いを示す。 $\omega/\omega_c < 1$  では 0 と 1 の間を  $n/2$  回振動し、 $1 < \omega/\omega_c$  では急激に単調増加する。具体形は

$$\left. \begin{aligned} C_1(x) &= x \\ C_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ C_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ C_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (9.5.4)$$

即ち

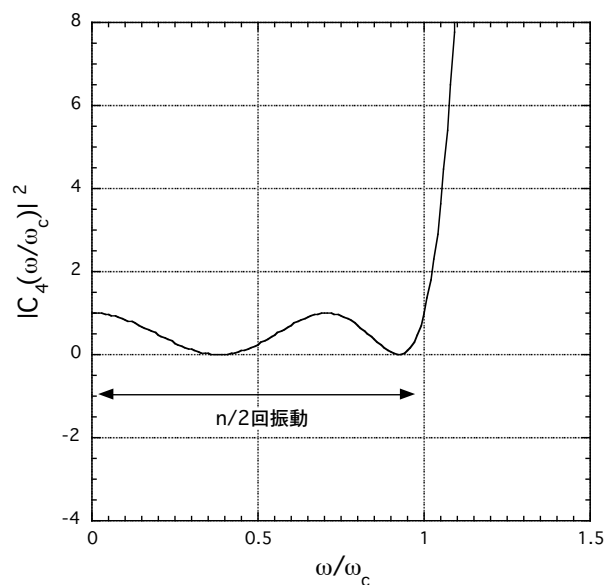


図 9-15  $|C_4(\omega/\omega_c)|^2$



$$C_n(x) = 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x) \quad (9.5.5)$$

である。また

$$|C_n(\omega/\omega_c)| \leq 1 \quad (0 < \omega/\omega_c < 1)$$

であるので通過帯域におけるゲイン変動幅（リップル）は  $\sqrt{1+\varepsilon^2}$  に

なる（図 9-16）。

バターワース LPF とチェビシェフ LPF の減衰率を比較するために  $\omega/\omega_c = 1$  における  $n$  次の伝達関数の傾きを比較してみる。

$n$  次バターワースでは

$$\left. \frac{d|G_n(\omega/\omega_c)|}{d(\omega/\omega_c)} \right|_{\omega/\omega_c=1} = -\frac{n}{2\sqrt{2}} \quad (9.5.6)$$

一方  $n$  次チェビシェフでは

$$\left. \frac{d|G_n(\omega/\omega_c)|}{d(\omega/\omega_c)} \right|_{\omega/\omega_c=1} = -\frac{\varepsilon^2 n^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \quad (9.5.7)$$

となり、 $\varepsilon \approx 1$  とすると  $\omega/\omega_c = 1$  の近傍においてチェビシェフ LPF はバターワース LPF の  $n$  倍の減衰率を持つことが分かる。

次に伝達関数のポールを求める。(9.5.1)式において  $j\omega = s$  と置くと

$$G(s)G(-s) = \frac{1}{1 + \{\varepsilon C_n(s/j\omega_c)\}^2} \quad (9.5.8)$$

であることから、特性方程式は

$$1 + \{\varepsilon C_n(s/j\omega_c)\}^2 = 0 \quad (9.5.9)$$

で与えられる。更に

$$\{C_n(s/j\omega_c)\}^2 = \begin{cases} \cos^2 n\psi & (0 \leq \omega/\omega_c \leq 1) \\ \cosh^2 n\psi & (1 < \omega/\omega_c) \end{cases} = \frac{1}{2} \{C_{2n}(s/j\omega_c) + 1\} \quad (9.5.10)$$

より  $C_{2n}(s/j\omega_c)$  は次のようになる。

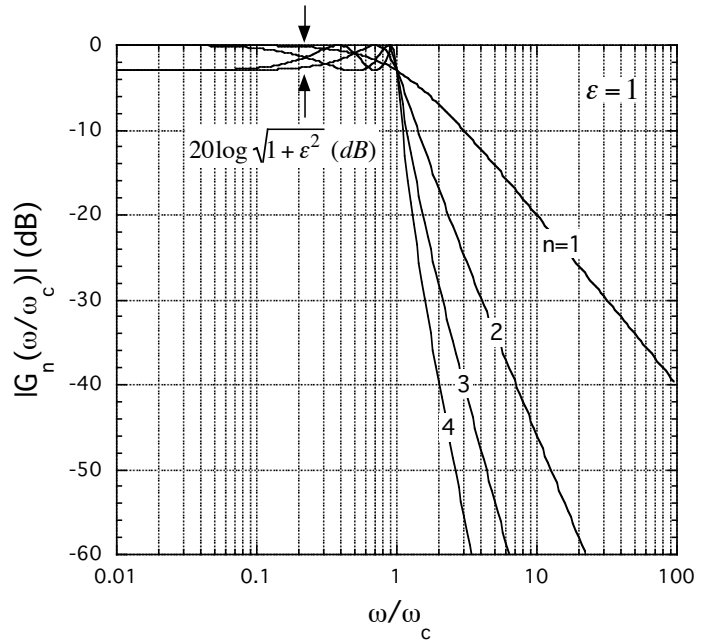


図 9-16 チェビシェフ LPF のリップル

$$C_{2n}(s/j\omega_c) = -(2 + \varepsilon^2)/\varepsilon^2 \quad (9.5.11)$$

一方、 $\mu$ 、 $\nu$  を実数として

$$s/j\omega_c = \cos(\mu + j\nu) \quad (9.5.12)$$

と置くと

$$\begin{aligned} C_{2n}(s/j\omega_c) &= \cos 2n(\mu + j\nu) \\ &= \cos(2n\mu) \cosh(2n\nu) + j \sin(2n\mu) \sinh(2n\nu) \end{aligned} \quad (9.5.13)$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} \cos(2n\mu) \cosh(2n\nu) &= -(2 + \varepsilon^2)/\varepsilon^2 \\ \sin(2n\mu) \sinh(2n\nu) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.5.14)$$

である。第二式より  $\sin(2n\mu) = 0$  または  $\sinh(2n\nu) = 0$  であるが、 $\sinh(2n\nu) = 0$  のときは  $\cosh(2n\nu) = 1$  より  $\cos(2n\mu) = -(2 + \varepsilon^2)/\varepsilon^2 < -1$  となるため  $\sin(2n\mu) = 0$  でなければならない。また第一式より  $\cos(2n\mu) < 0$  であるから  $\cos(2n\mu) = -1$ 、即ち

$$\left. \begin{aligned} 2n\mu &= (2k + 1)\pi & (k = 0, 1, \dots, 2n - 1) \\ 2n\nu &= \cosh^{-1}\{(2 + \varepsilon^2)/\varepsilon^2\} \\ &= 2 \ln\{(\sqrt{1 + \varepsilon^2} + 1)/\varepsilon\} \end{aligned} \right\} \quad (9.5.15)$$

となる。したがって特性方程式の根  $p$  は (9.5.15) 式を満たす  $\nu$ 、 $\mu$  を用いて

$$\begin{aligned} p/j\omega_c &= \cos(\mu + j\nu) \\ &= \cosh \nu \cdot \sin(\mu - \pi/2) \\ &\quad - j \sinh \nu \cdot \cos(\mu - \pi/2) \end{aligned} \quad (9.5.16)$$

で与えられる。即ち根

$$\begin{aligned} p &= \omega_c \sinh \nu \cdot \cos(\mu - \pi/2) \\ &\quad + j\omega_c \cosh \nu \cdot \sin(\mu - \pi/2) \end{aligned} \quad (9.5.17)$$

は、焦点が  $0 \pm j\omega_c$  にあり短軸  $a$  及び長軸  $b$  がそれぞれ

$$a = \omega_c \sinh \nu, \quad b = \omega_c \cosh \nu$$

である  $s$  平面上の楕円上にあり、偏角が  $\theta = \mu - \pi/2$  の点であることが分かる。

上で求めた特性方程式の根が伝達関数のポールであるためには、安定条件  $\text{Re}(p) < 0$  より

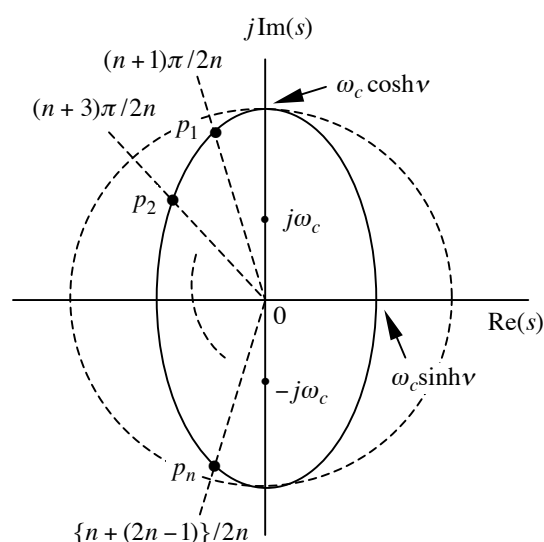


図 9-17 チェビシェフ・フィルターのポールの配置

$$\pi/2 < \theta < 3\pi/2 \quad (9.5.18)$$

でなければならない。これより  $k = n+1, \dots, 2n$  であり、許される根

$$p_k = \omega_c \sinh v \cdot \cos \theta_k + j \omega_c \cosh v \cdot \sin \theta_k \quad (9.5.19)$$

は偏角が

$$\theta_k = (2k + n - 1)\pi/2n \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (9.5.20)$$

のものだけである。これはバターワース・フィルターのポールの偏角 ((9.3.5)式) と同じであり 9-2 節の偏角についての議論がそのまま成立する。図 9-17 に  $s$  平面におけるチェビシェフ・フィルターのポールの配置 (9.5.20) 式) を示す。また (9.5.4)式及び(9.5.5)式より

$$C_n(\omega/\omega_c)|_{\omega \rightarrow 0} = \begin{cases} 0 & (\text{for } n = \text{odd}) \\ 1 & (\text{for } n = \text{even}) \end{cases} \quad (9.5.21)$$

であることから、通過帯域でのゲインが 1 である伝達関数は

$$\begin{aligned} |G(s)| &= \sqrt{\frac{1}{1 + \{\epsilon C_n(s/j\omega_c)\}^2}} \times \begin{cases} 1 & (\text{for } n = \text{odd}) \\ \sqrt{1 + \epsilon^2} & (\text{for } n = \text{even}) \end{cases} \\ &= \left| \frac{p_1 \cdots p_n}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} \right| \end{aligned} \quad (9.5.22)$$

と書くことができる。バターワース・フィルターの場合と同様に、ポールを虚軸から遠いものから順に番号をつけ直すと

$n$  が偶数の場合 :

$$\begin{cases} \theta_k = \frac{n - k + 1/2}{n} \pi & (k = 1, 2, \dots, n/2) \\ p_{-k} = p_k^* \end{cases} \quad (9.5.23)$$

$n$  が奇数の場合

$$\begin{cases} \theta_k = \frac{n - k}{n} \pi & (k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)/2) \\ p_{-k} = p_k^* \end{cases} \quad (9.5.24)$$

となる。以上よりチェビシェフ・ローパスフィルターの伝達関数は次のようになる。

$n$  が奇数の場合 : 特性方程式は一つの実根と  $(n-1)/2$  対の共役複素根を持つので、伝達関数は 1 次の伝達関数一つと  $(n-1)/2$  個の 2 次の伝達関数の積となる。

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \frac{\omega_c \sinh v}{s + \omega_c \sinh v} \cdot \frac{\omega_1^2}{s^2 + (\omega_1/Q_1)s + \omega_1^2} \cdot \frac{\omega_2^2}{s^2 + (\omega_2/Q_2)s + \omega_2^2} \\ &\quad \cdots \frac{\omega_{(n-1)/2}^2}{s^2 + (\omega_{(n-1)/2}/Q_{(n-1)/2})s + \omega_{(n-1)/2}^2} \end{aligned} \quad (9.5.25)$$

$n$ が偶数の場合：特性方程式は $n/2$ 対の共役複素根を持つので、伝達関数は $n/2$ 個の2次の伝達関数の積となる。

$$G_n(s) = \frac{\omega_1^2}{s^2 + (\omega_1/Q_1)s + \omega_1^2} \cdot \frac{\omega_2^2}{s^2 + (\omega_2/Q_2)s + \omega_2^2} \cdots \frac{\omega_{n/2}^2}{s^2 + (\omega_{n/2}/Q_{n/2})s + \omega_{n/2}^2} \quad (9.5.26)$$

上で $\omega_k$ 、 $Q_k$ は $(p_k, p_k^*)$ をポールとする2次の伝達関数の共振周波数及び $Q$ 値であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \omega_k &= \sqrt{p_k p_k^*} = \frac{\omega_c}{\sqrt{2}} \sqrt{\cosh 2v - \cos 2\theta_k} \\ Q_k &= -\frac{\sqrt{p_k p_k^*}}{p_k + p_k^*} = -\frac{\sqrt{\cosh 2v - \cos 2\theta_k}}{2\sqrt{2} \sinh v \cdot \cos \theta_k} \end{aligned} \right\} \quad (9.5.27)$$

表9-2にチェビシェフ・フィルターのリップルを0.5dB ( $\epsilon = 0.34$ )としたときの $\omega_k$ 及び $Q_k$ を、図9-18～9-20に群遅延特性、振幅特性、矩形波応答波形を示す。群遅延時間の変化が大きく矩形波の波形が乱れていることが分かる。また、図9-21～9-23にVCVS型フィルターで構成したカットオフ周波数500Hzのチェビシェフ型ローパスフィルターの回路例を示す。

リップル 0.5dB					
$n$		$\omega_k/\omega_c$		$Q_k$	
1	1次	$\omega_0/\omega_c$	2.8628		
2	2次	$\omega_1/\omega_c$	1.2313	$Q_1$	0.8637
3	1次	$\omega_0/\omega_c$	0.6265		
	2次	$\omega_2/\omega_c$	1.0689	$Q_1$	1.7062
4	2次	$\omega_1/\omega_c$	0.5970	$Q_1$	0.7051
		$\omega_2/\omega_c$	1.0313	$Q_2$	2.9406
5	1次	$\omega_0/\omega_c$	0.3623		
	2次	$\omega_1/\omega_c$	0.6905	$Q_1$	1.1778
$\omega_2/\omega_c$		1.0177	$Q_2$	4.5450	
6	2次	$\omega_1/\omega_c$	0.3962	$Q_1$	0.6836
		$\omega_2/\omega_c$	0.7681	$Q_2$	1.8104
		$\omega_3/\omega_c$	1.0114	$Q_3$	6.5128
8	2次	$\omega_1/\omega_c$	0.2967	$Q_1$	0.6766
		$\omega_2/\omega_c$	0.5989	$Q_2$	1.6107
		$\omega_3/\omega_c$	0.8610	$Q_3$	3.4657
		$\omega_4/\omega_c$	1.0059	$Q_4$	11.531

表9-2 チェビシェフ・フィルター ( $\epsilon = 0.34$ ) の $\omega_k$ 及び $Q_k$

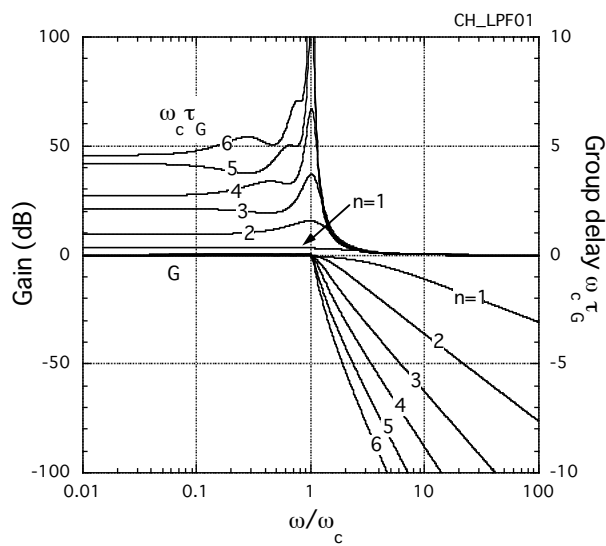


図 9-18 チェビシェフ・フィルタ  
(リップル0.5dB) の振幅及び群遅延時間

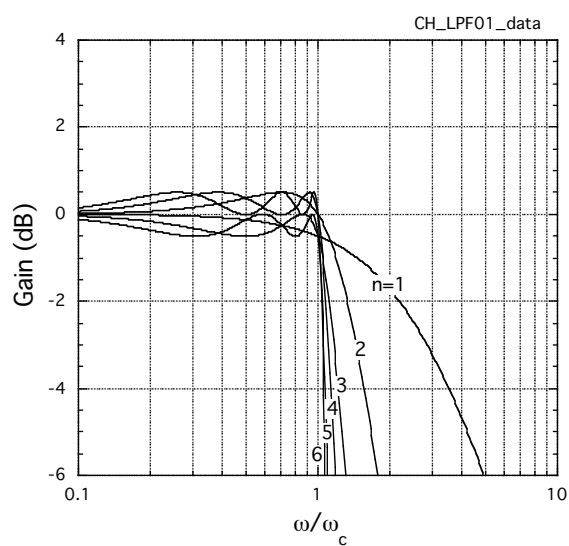


図 9-19 リップルの拡大図

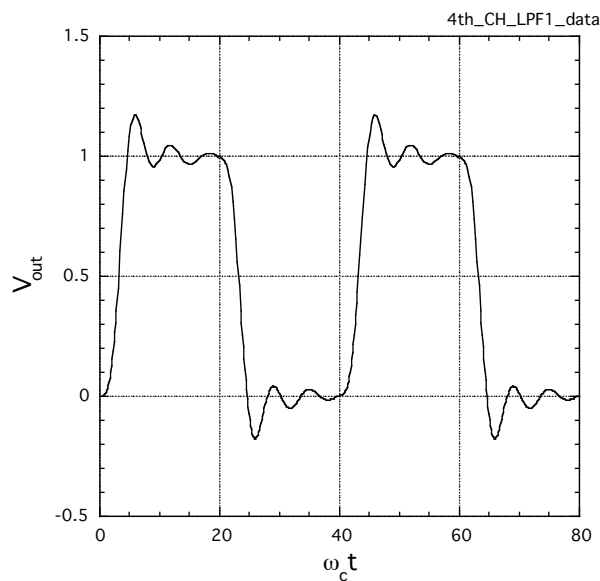


図 9-20 矩形波応答

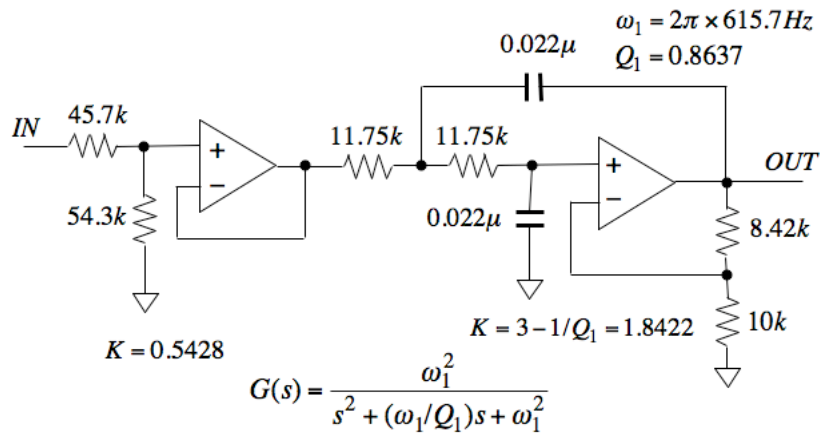


図 9-19 2次チェビシェフ・フィルタ (LPF)

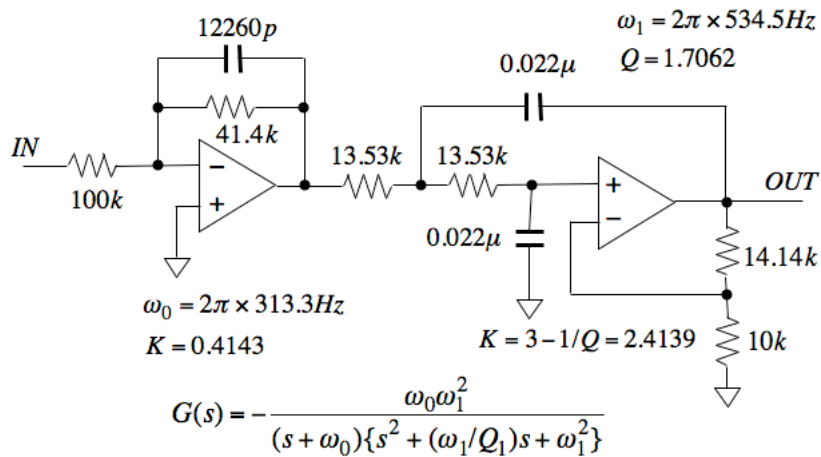


図 9-20 3次チェビシェフ・フィルタ (LPF)

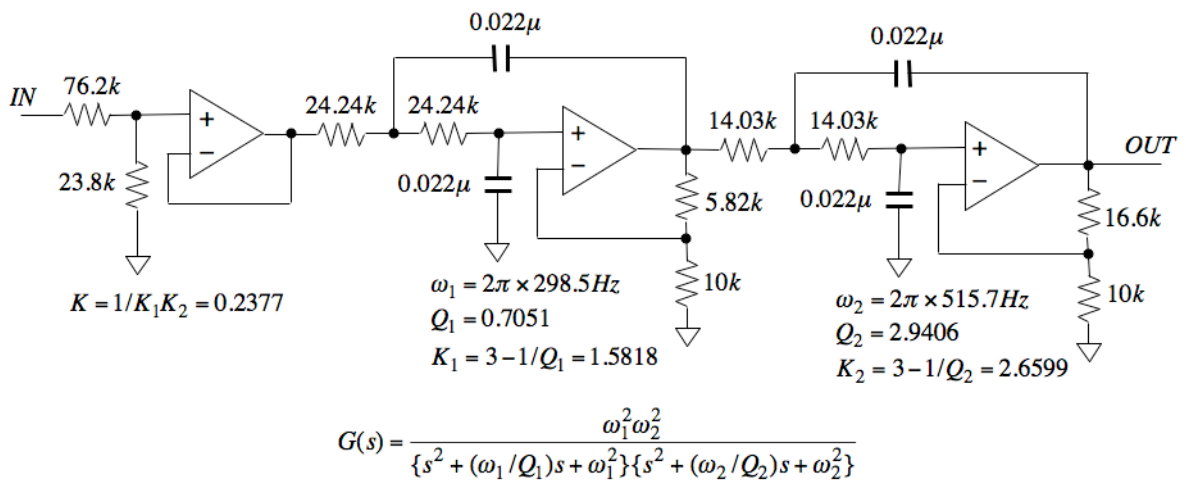


図 9-21 4次チェビシェフ・フィルタ (LPF)

チェビシェフ・フィルタは減衰特性が急峻であるが通過帯域にリップルが生ずる。それに対して通過帯域の特性が平坦でかつ減衰特性が急峻なフィルタとして考えられたのが次節で述べる「逆チェビシェフ・フィルタ」である。更に「連立チェビシェフ・フィルタ」(または「楕円フィルタ」)では通過帯域及び減衰帯域のいずれにもリップルを許容することで、チェビシェフ・フィルタより急峻な減衰特性を得ている。連立チェビシェフ・フィルタはチェビシェフ多項式 $C_n(\omega)$ の代わりにヤコビの楕円関数により定義されるチェビシェフ有理関数 $R_{n,k_1}(\omega/\omega_c)$ によって周波数特性が定義されるもので、その詳細については他のフィルタの専門書を参照されたい。

## 9-6 逆チェビシェフ・フィルタ

チェビシェフ・フィルタは周波数特性の通過帯域にリップルを許容して急峻な減衰特性を実現している。一方、逆チェビシェフ・フィルタは逆に減衰帯域にリップルを許容して通過帯域のリップルをなくしたフィルタである。バターワース・フィルタやチェビシェフ・フィルタの減衰領域では $(\omega/\omega_c)^{-n}$ に比例して無限に減衰していくのに対して、逆チェビシェフ・フィルタの減衰量は有限に留まるが、十分に周波数特性が減衰した領域ではリップルがあっても問題がない場合が多い。

通過帯域にリップルのないフィルタとして

$$|G_{HPF}(j\omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)\}^2} \quad (9.6.1)$$

を考える。 $\omega/\omega_c \rightarrow \infty$ では $|G_{HPF}(j\omega)| \rightarrow 1$ 、 $\omega/\omega_c \rightarrow 0$ では $|G_{HPF}(j\omega)| \rightarrow \sim \varepsilon^2 \ll 1$ となることから、HPFの性質を持ち減衰領域ではリップルがあるが通過帯域にはリップルがない。(9.6.1)式をもとにして周波数変換を行うことで、通過帯域にリップルを持たない逆チェビシェフ LPF を構成する。(9.6.1)式の $|G_{HPF}(j\omega)|$ はチェビシェフ・フィルタの定義((9.5.1)式)において $\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)$ を $1/\{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)\}$ に置き換えたものに等しく

$$|G_{HPF}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left\{ \frac{1}{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)} \right\}^2} \quad (9.6.2)$$

このようなフィルタを逆チェビシェフ・フィルタという。 $|G_{HPF}(j\omega)|$ はまた

$$|G_{HPF}(j\omega)|^2 = \frac{\{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)\}^2}{1 + \{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)\}^2} \quad (9.6.3)$$

と書け、これより逆チェビシェフ HPF の伝達関数 $G_{HPF}(s)$ はチェビシェフ・フィルタと同じ特性方程式を持つ。したがってチェビシェフ・フィルタのポール $p_k$ を用いて

$$G_{HPF}(s) = \frac{\varepsilon(s - q_1) \cdots (s - q_n)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} \quad (9.6.4)$$

と書くことができる。ここで  $q_k$  は  $C_n(s/j\omega_c)$  の零点である ( $C_n(q_k/j\omega_c) = 0$ )。  $\alpha$ 、  $\beta$  を実数として

$$s/j\omega_c = \cos(\alpha + j\beta) \quad (9.6.5)$$

とおくと

$$\begin{aligned} C_n(s/j\omega_c) &= \cos n(\alpha + j\beta) \\ &= \cos(n\alpha) \cosh(n\beta) \\ &\quad + j \sin(n\alpha) \sinh(n\beta) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9.6.6)$$

より

$$\begin{aligned} \alpha &= (2k - 1)\pi/2n, & \beta &= 0 \\ (k &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (9.6.7)$$

したがって零点  $q_k$  は

$$\begin{aligned} q_k/\omega_c &= j \cos\{(2k - 1)\pi/2n\} \\ (k &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (9.6.8)$$

で与えられる。(9.6.4)式に対して周波数変換  $s/\omega_c \rightarrow \omega_c/s$  を行い LPF の伝達関数に変換すると

$$G(s) = \frac{(\omega_c/s - q_1/\omega_c) \cdots (\omega_c/s - q_n/\omega_c)}{(\omega_c/s - p_1/\omega_c) \cdots (\omega_c/s - p_n/\omega_c)} \quad (9.6.9)$$

を得る。ここで  $p_k$  はチェビシェフ・フィルターのポール

$$\left. \begin{aligned} p_k/\omega_c &= \sinh v \cdot \cos \theta_k + j \cosh v \cdot \sin \theta_k \\ \theta_k &= (2k + n - 1)\pi/2n \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (9.6.10)$$

である ((9.5.19)式参照)。  $G(s)$  のポール  $\omega_c^2/p_k$  の実数部は負である  $\text{Re}(\omega_c^2/p_k) = (\omega_c/|p_k|)^2 \text{Re}(p_k) < 0$  のので  $G(s)$  は安定であることが分かる。図 9-22、図 9-23 に(9.6.9)式の周波数特性及び群遅延特性を示す。逆チェビシェフ・フィルターも

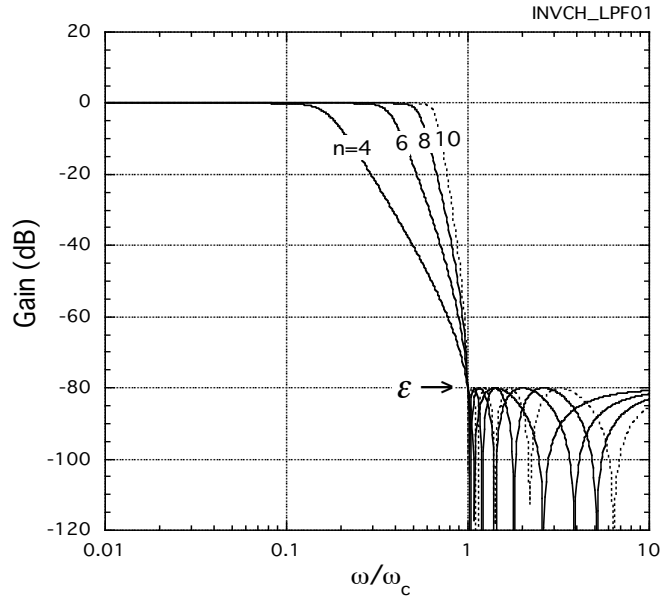


図 9-22 逆チェビシェフ LPF 特性

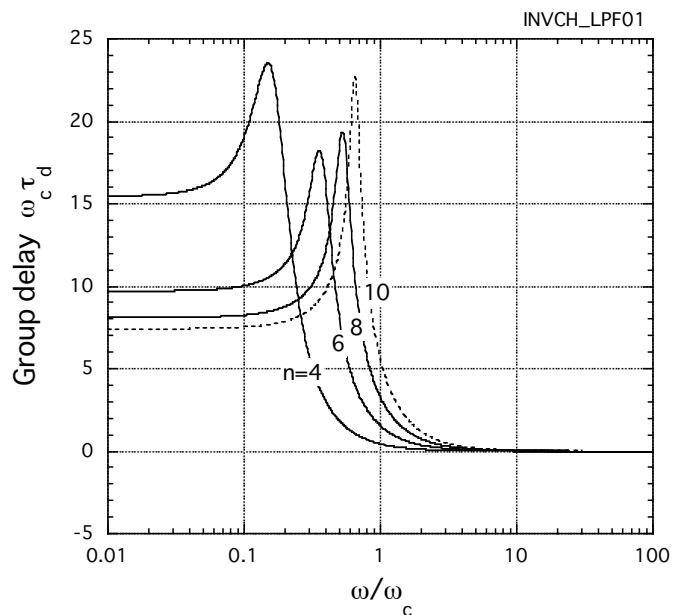


図 9-23 逆チェビシェフ LPF の群遅延特性



チェビシェフ・フィルタと同様に1次と2次のアナログ・フィルタのカスケード接続で構成することができるが、伝達関数の零点を作るためのGIC回路等によるLC直列共振フィルタが必要となるため、複雑な構成となる。現在ではこのような複雑な高次フィルタはデジタルフィルタで構成するのが一般的であり、本節ではアナログ・能動フィルタによる構成例は省略する。

注：逆チェビシェフ・フィルタの規格化

$p_k$ をポール、 $q_k$ を零点として

$$x = \omega_c / \omega$$

と置くと

$$\frac{\{\varepsilon C_n(x)\}^2}{1 + \{\varepsilon C_n(x)\}^2} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon^2 / (1 + \varepsilon^2) & (x \rightarrow 0) \\ 2^{2n} \varepsilon^2 x^{2n} / (1 + 2^{2n} \varepsilon^2 x^{2n}) & (x \rightarrow \infty) \end{cases}$$

$$|\varepsilon C_n(x)|_{x \rightarrow \infty} = |K_2(jx - q_1) \cdots (jx - q_n)|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow |K_2 x^n|_{x \rightarrow \infty}$$

より

$$|G(jx)|_{x \rightarrow \infty} = \left| \frac{K_1 K_2 (jx - q_1) \cdots (jx - q_n)}{(jx - p_1) \cdots (jx - p_n)} \right|_{x \rightarrow \infty} = \left| \frac{K_1 K_2 x^n}{x^n} \right|_{x \rightarrow \infty} = K_1 K_2$$

したがって $|G(jx)|_{x \rightarrow \infty} = 1$ とすると

$$K_1 K_2 = 1$$

故に(9.6.9)式

$$|G(jx)| = \left| \frac{(jx - q_1) \cdots (jx - q_n)}{(jx - p_1) \cdots (jx - p_n)} \right|$$

が成立する。