

4章 増幅器

4-1 理想増幅器

増幅器を表す記号は図 4-1 のように記され、増幅度 A が信号振幅及び周波数によらず一定、入力インピーダンスが無限大、出力インピーダンスが 0 である増幅器を、理想増幅器と定義する。出力の極性が入力と逆極性になるものを反転増幅器、同極性のものを非反転増幅器と云う。また、図 4-1 (b)において出力と逆極性と云う意味で負符号を付した入力端子を反転入力、正符号を付した出力と同極性の入力を非反転入力と云う。実際の増幅器は理想増幅器とはほど遠く、使用する条件のもとでいかに理想増幅器に近づけるかが回路設計の命題である。理想増幅器に近づける重要な技術がフィードバック (feedback) である。

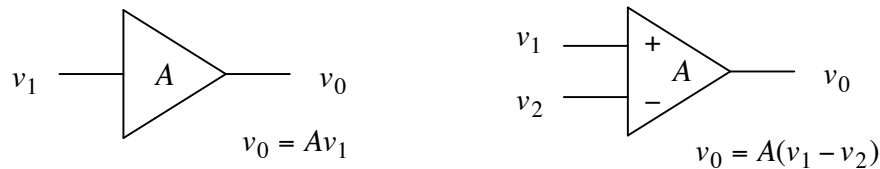


図 4-1 増幅器の記号

4-2 帰還増幅器 (feedback amplifier)

図 4-2 に示すように、増幅器の出力 y の一部 βy ($|\beta| < 1$) を入力 x に重畳することを帰還 (フィードバック) と云う。 β は帰還率と云い、 $\beta > 0$ すなわち入力信号と逆極性で重畳する場合を負帰還 (negative feedback)、同極性 $\beta < 0$ の場合を正帰還 (positive feedback) と云う。これを式で表わせば

$$y = A(x - \beta y) \quad (4.2.1)$$

となり、これを y について解くことで出力 y が

$$y = \frac{A}{1 + \beta A} x \quad (4.2.2)$$

と求まる。ここで

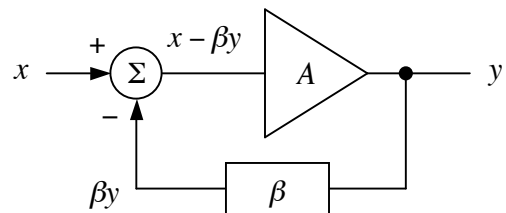


図 4-2 フィードバックループ

$$\begin{aligned}
 A & : \text{開ループ利得 (open loop gain)} \\
 K = \frac{A}{1 + \beta A} & : \text{閉ループ利得 (closed loop gain)} \quad (4.2.3)
 \end{aligned}$$

と呼ぶ。また、 βA は入力へ戻される出力の大きさであり、これを帰還量と呼ぶ。

(a) $|\beta A| \gg 1$ では

$$K = 1/\beta \quad (4.2.4)$$

となり、出力 $y = \beta^{-1}x$ は増幅器自身の利得と無関係に帰還率のみで決まることになる。すなわち、系の出力は A に非線形等があってもほとんど影響されないことになる。

(b) $\beta A = -1$ では

$$K = \infty \quad (4.2.5)$$

となり、入力がなくても ($x=0$) 有限な出力 y があることになり、系が自己発振していることを意味する。一般に $\beta A < -1$ では系は不安定 (発振状態) である。フィードバックループの安定性 (発振) については後で述べる。

4-2-1 フィードバックループの安定性

一般に A, β, K は複素数であって (角) 周波数 ω の関数であるが、ここではとりあえず β は定数であると仮定する。この場合 A が n 次系ならば K も n 次系である。

(a) $A(\omega)$ が1次系のとき

開ループ利得を

$$A(\omega) = \frac{A_0}{1 + j\omega/\omega_0} \quad (4.2.6)$$

とすると、閉ループ利得は

$$K(\omega) = \frac{K_0}{1 + j\omega/\{(1 + \beta A_0)\omega_0\}} \quad (4.2.7)$$

となる。ここで

$$K_0 = \frac{A_0}{1 + \beta A_0} \quad (4.2.8)$$

である。 $|A|$ 及び $|K|$ を図示すると図4-3となる。この場合、閉ループ系は安定で利得 A_0 は $1/(1 + \beta A_0)$ 倍になり、帯域幅 ω_0 は $(1 + \beta A_0)$ 倍になる。

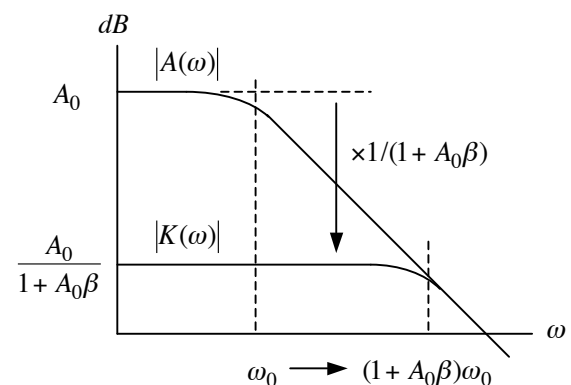


図4-3 1次系におけるフィードバック (負帰還) の効果

(b) $A(\omega)$ が2次系のとき。 ω_0 をカットオフ周波数 (共振周波数)、 ζ ($=1/2Q$) をダンピング定数として、開ループ利得 $A(\omega)$ 及び閉ループ利得 $K(\omega)$ は次式で与えられる。

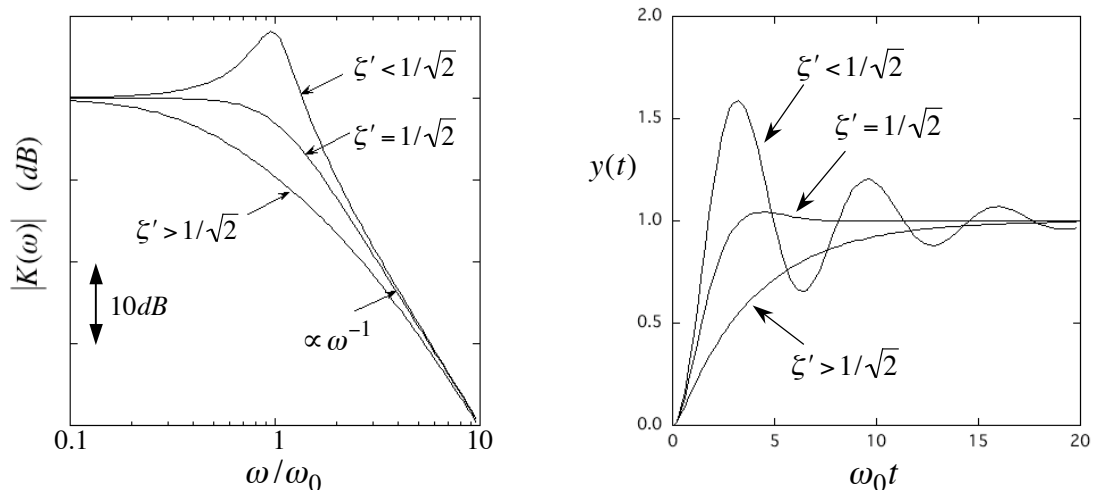
$$A(\omega) = \frac{A_0}{1 + 2j\xi\omega/\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} \quad (4.2.9)$$

$$K(\omega) = \frac{K_0}{1 + 2j\xi'\omega/\omega'_0 - \omega^2/\omega_0'^2} \quad (4.2.10)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \frac{\xi}{\sqrt{1 + \beta A_0}} \\ \omega'_0 &= \sqrt{1 + \beta A_0} \cdot \omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.11)$$

は閉ループ利得のダンピング定数及びカットオフ周波数であり、 K_0 は(4.2.8)式で与えられる。これを図示すると図 4-4 のようになる。(a) のような周波数特性を持つ系に、 $t=0$ で立ち上がるステップ状の電圧が入力されたときの出力の時間応答は(b) のようになる。すなわち、ダンピング定数が $\xi' < 1/\sqrt{2}$ である場合には周波数特性にピークを生じ、時間応答（過度応答）には減衰振動が残る。線形システムでは、このような振動を生じないような回路設計を行うことが重要である。2次系では出力に現れる振動は減衰振動であるので、原則的には安定であるが、本書では出力が振動するときを、狭義の意味で「不安定」と云うことにする。すなわち、系が安定であるためには $\xi' > 1/\sqrt{2}$ でなければならない。もとの開ループ利得が $\xi > 1/\sqrt{2}$ であっても、 βA_0 が大きくなると $\xi' < 1/\sqrt{2}$ になって不安定になってしまう。



(a) 周波数特性

(b) 時間応答

図 4-4 2次系の応答

非振動限界は次のように求めることができる。 $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$ なる ω_1, ω_2 により $A(\omega)$ の分母が次式のように因数分解できる場合を考察してみよう。

$$A(\omega) = \frac{A_0}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_2)} \quad (4.2.12)$$

ここで

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} \quad (4.2.13)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} + \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \right) \quad (4.2.14)$$

である。 ω_2/ω_1 をスタガー比と云う。ブロック図で表すと図 4-5 (b) のように、 $A(\omega)$ は二つの 1 次の周波数特性関数の従属接続であることを意味している。

1 次の特性関数は RC 積分回路と等価であり、図 4-5 (b) は図 4-5 (c) のように、カットオフ周波数がそれぞれ ω_1 、 ω_2 である RC 積分回路の間に利得 A_0 の理想増幅器を挿入したものと等価である。

(4.2.14)式より $\xi \geq 1$ であるので $A(\omega)$ は安定である。

また閉ループ利得 $K(\omega)$ が安定であるためには

$$\xi' = \frac{1}{2\sqrt{1 + A_0\beta}} \left(\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} + \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.2.15)$$

でなければならず、したがって

$$\beta A_0 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \quad (4.2.16)$$

でなければならない (図 4-6)。帰還量 $A_0\beta$ を十分大きくするためには $\omega_2/\omega_1 \gg 1$ でなければならない、その場合の安定なフィードバック限界 (非振動条件) は

$$\beta A_0 \leq \omega_2/2\omega_1 \quad (4.2.17)$$

となる。

例として、図 4-7 に開ループ利得 $A_0 = 60$ dB、スタガー比 $\omega_2/\omega_1 = 100$ の場合の、閉ループ利得の周波数特性 $|K(\omega)|$ を示す。 $\beta A_0 = 50$ (34 dB) で $\xi' = 1/\sqrt{2}$ となり、 $\beta A_0 > 34$ dB では高域端にピークを生ずることが分かる。 $\xi' = 1/\sqrt{2}$ ($Q = 1/\sqrt{2}$) の場合を臨界制動 (critical damping) と云い、振動と非振動の境界であって、図 4-4 (b) に示すようにステップ入力の立ち上がりが僅かに行き過ぎるが、振動することなく定常値

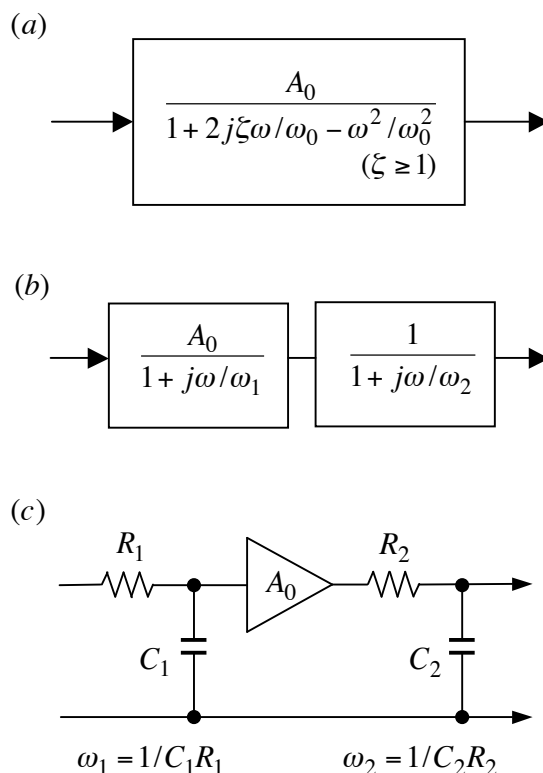


図 4-5 2次系

に収束する。なお、数学的には $\xi' = 1(Q = 1/2)$ を臨界制動と云うが、自動制御や電子回路においては、出力が振動することなく立ち上がり時間が最も速くなる条件として

$$\xi' = 1/\sqrt{2}$$

を臨界制動と云うことが多い。周波数特性におけるピークは減衰振動に対応しており、閉ループ出力にはピークに対応する周波数の減衰振動が残る。また、 $\xi' = 1/\sqrt{2}$ のときの -3 dB 高域遮断周波数は $f_2/2$ である。すなわち、平坦な周波数応答を条件にすると、閉ループの周波数帯域は $f_2/2$ 以上に伸ばすことはできない。

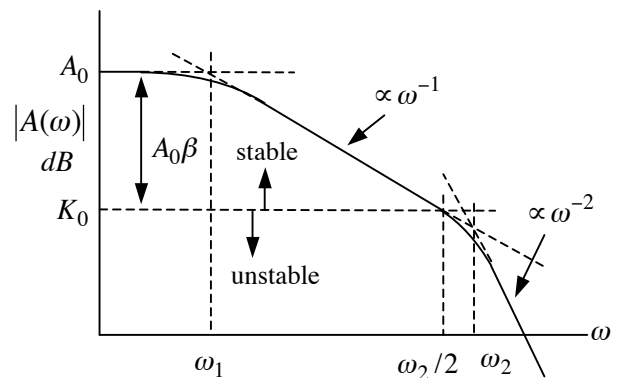


図 4-6 2次系 ($\omega_2/\omega_1 \gg 1$) の周波数特性

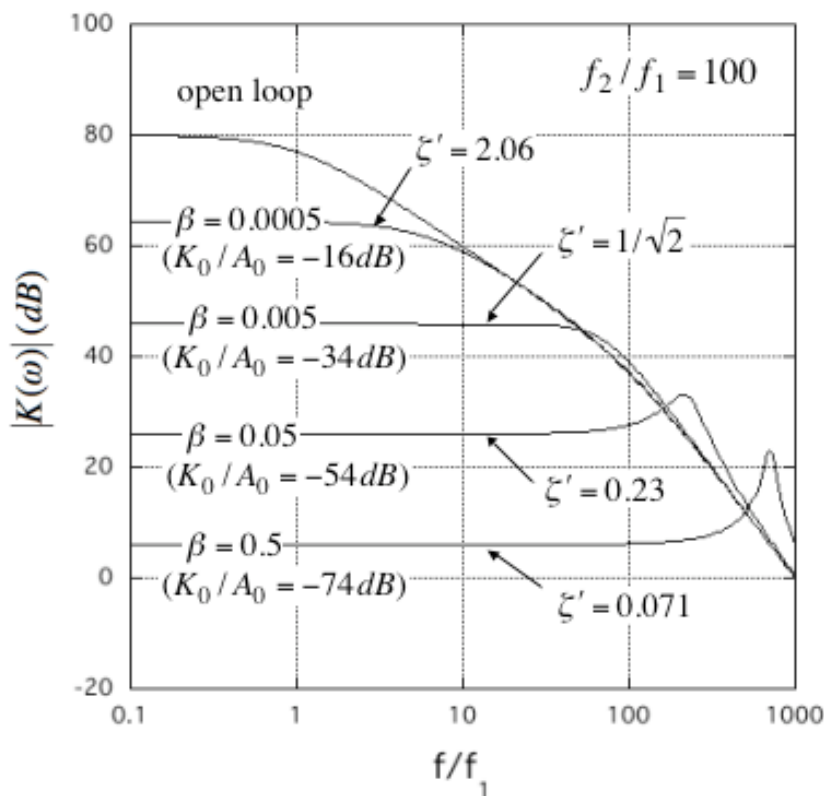


図 4-7 閉ループ利得の周波数特性

また、 $\omega_2 = \omega_1$ の場合の安定限界は

$$\beta A_0 \leq 1 \quad (4.2.18)$$

すなわち帰還量が 1 以下に制限されるため、フィードバックはほとんど意味を成さな

くなる。一般に開ループ利得が2次以上の系では、カットオフ周波数を低い方から順に $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ として、安定なフィードバック限界は $\beta A_0 \leq \omega_2 / 2\omega_1$ で制限され、帰還量を大きくするためには $\omega_1 \ll \omega_2, \dots, \omega_n$ とすることが必要である。

4-2-2 ラプラス変換

ラプラス変換に基づいてフィードバック系の安定性及び過度応答を議論する。1-2節及び1-3節で述べたように、線形応答系の周波数応答は系の応答を記述する線形微分方程式をフーリエ変換することで求めることができる。入力 $x(t)$ 及び出力 $y(t)$ のフーリエ振幅をそれぞれ $X(j\omega)$ 、 $Y(j\omega)$ として、 $G(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega)$ を周波数伝達関数または周波数特性関数と云い、 $G(j\omega)$ によって系の応答が表される。フーリエ変換で議論される周波数伝達関数では、一般に $-\infty < t < \infty$ に渡って定常的な信号のみを考えるので、 $G(j\omega)$ によって過渡現象を議論することはできない。そこで、過渡現象を議論するためには、フーリエ変換を拡張したラプラス変換が適用される。

ラプラス変換はフーリエ変換における $j\omega$ を一般の複素数 s （ラプラス変数）に拡張したものである。 $t \geq 0$ で定義されている関数 $f(t)$ （ $t < 0$ では $f(t) = 0$ とする）のラプラス変換は

$$F(s) \equiv \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (4.2.19)$$

で定義される。 $F(j\omega)$ は $f(t)$ のフーリエ振幅である。 $F(s)$ のラプラス逆変換

$$f(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (4.2.20)$$

で与えられる。ラプラス変換及び逆変換の存在条件は、 $t \geq 0$ で $f(t)$ が1価関数であって

$$\int_0^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (4.2.21)$$

なる σ_0 が存在することである。以上のラプラス変換及び逆変換は表になっているので、いちいち積分計算をする必要はない。以下にいくつかの公式を列挙しておく。

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (4.2.22)$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \left(u(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \right) \quad (4.2.23)$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad (4.2.24)$$

$$\mathcal{L}[t^m e^{at}] = \frac{m!}{(s-a)^{m+1}} \quad (4.2.25)$$

$$\mathcal{L}[t^{-3/2} e^{-a^2/4t}] = \frac{2\sqrt{\pi}}{a} e^{-a\sqrt{s}} \quad (4.2.26)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(+0) \quad \left(f^{(k)}(t) = \frac{d^k f(t)}{dt^k}\right) \quad (4.2.27)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s) \quad (4.2.28)$$

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s) \quad (4.2.29)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a) \quad (4.2.30)$$

$$\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s) \quad (4.2.31)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right] = F_1(s)F_2(s) \quad (4.2.32)$$

ここで $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ である。ほとんどの問題は以上の公式を用いることで解くこ

とができる。なお、(4.2.26)式は通常の電子回路や自動制御では見かけることはないが、
 導体表面の表皮効果を扱う際に現れる変換である（同軸伝送線の節参照）。

4-2-3 伝達関数

1-3 節で述べたように、n 次線形応答系の応答は次の線形微分方程式にて記述される。

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (4.2.33)$$

ここで、 $x(t)$ は系への入力、 $y(t)$ は出力であり、因果律より

$$n \geq m \quad (4.2.34)$$

でなければならない。上の方程式において、過渡項を無視し $x(t)$ 、 $y(t)$ について一つの周波数成分についての定常解を求めるものが交流理論である。交流理論は上式において d/dt を $j\omega$ に置き換えて解を求めたものである。これは上式をフーリエ変換し、フーリエ成分を求めることに対応する。

(4.2.33)式をラプラス変換すると

$$\left. \begin{aligned}
 Y(s) &= G(s)X(s) + \sum_{k=0}^{n-1} H_k(s)y^{(k)}(+0) - \sum_{k=0}^{m-1} F_k(s)x^{(k)}(+0) \\
 G(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\
 H_k(s) &= \frac{\sum_{r=0}^{n-k-1} a_{k+r+1} s^r}{\sum_{r=0}^n a_r s^r}, \quad F_k(s) = \frac{\sum_{r=0}^{m-k-1} b_{k+r+1} s^r}{\sum_{r=0}^m b_r s^r}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.35)$$

となるが、全ての初期値を

$$\left. \begin{aligned}
 x^{(k)}(+0) &= 0 \quad (k = 0, \dots, m) \\
 y^{(k)}(+0) &= 0 \quad (k = 0, \dots, n)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.36)$$

とすると

$$Y(s) = G(s)X(s) \quad (4.2.37)$$

となり、 $G(s)$ を n 次の伝達関数と呼ぶ（伝達関数は全ての初期値を 0 として定義されることに注意）。 $G(s)$ は 1-2-4 節で述べた周波数伝達関数 (1.2.58)式において、 $j\omega$ を s に置き換えたものに等しい。すなわち交流理論で得られる周波数伝達関数の $j\omega$ を s と置き換えることで、伝達関数が求まる。この伝達関数を用いて系の過渡応答、安定性を求めることができる。

なお、以上では伝達関数の次数として有限な次数を前提としたが、伝達関数の次数を決められない系として、時間遅れ系 $y(t) = f[x(t-\tau)]$ がある。前節の公式にあるように $x(t-\tau)$ のラプラス変換は存在するので、時間遅れ要素を含む系についても伝達関数が定義できる。この場合 $\mathcal{L}[x(t-\tau)] = e^{-s\tau}X(s)$ であるため、伝達関数の次数を定義することはできない。

4-2-4 過渡応答と周波数特性

まず伝達関数と周波数伝達関数の関係を確認しておく。単一周波数の正弦波入力

$$x(t) = x_0 e^{j\omega t} \quad (4.2.38)$$

の場合、 $x(t)$ のラプラス変換は

$$X(s) = \frac{x_0}{2} \mathcal{L}[e^{j\omega t}] = \frac{x_0}{s - j\omega} \quad (4.2.39)$$

である。ここで簡単化のために伝達関数のポールは 1 次とすると、 $G(s)$ は

$$G(s) = R_0 + \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - p_i} \quad (4.2.40)$$

と展開できる。ここで R_0 は定数

$$R_i = [(s - p_i)G(s)]_{s=p_i} \quad (4.2.41)$$

は i 番目のポール $s = p_i$ における留数である。したがって出力 $Y(s)$ は

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) \\ &= x_0 \left(\frac{R_0}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{(s - p_i)(s - j\omega)} \right) \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

となる。ここで

$$\frac{1}{(s - p_i)(s - j\omega)} = \frac{1}{p_i - j\omega} \left(\frac{1}{s - p_i} - \frac{1}{s - j\omega} \right) \quad (4.2.43)$$

を用いてラプラス逆変換を行うと、出力の時間応答は次のように求まる。

$$\begin{aligned} y(t) &= x_0 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R_0}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{p_i - j\omega} \left(\frac{1}{s - p_i} - \frac{1}{s - j\omega} \right) \right] \\ &= x_0 \left\{ R_0 e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{p_i - j\omega} (e^{p_i t} - e^{j\omega t}) \right\} \\ &= G(j\omega) x_0 e^{j\omega t} + x_0 \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{p_i - j\omega} e^{p_i t} \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

$G(s)$ が安定な伝達関数ならば $\text{Re}[p_i] < 0$ でなければならないことから、十分時間が経った ($t \rightarrow \infty$) 定常状態では

$$y(t) = G(j\omega) x_0 e^{j\omega t} \quad (4.2.45)$$

となる。すなわち、 $G(j\omega)$ は定常状態における周波数特性（周波数伝達関数）を表している。これで $s \rightarrow j\omega$ の置き換えで周波数伝達関数が得られることが証明できた。これはナイキスト線図の解釈において実際的な意味を持つ。

(a) 1次系

$G(s)$ が 1 次系

$$G(s) = \frac{G_0}{s - a} \quad (4.2.46)$$

である場合の、インパルス応答及びステップ応答を考える。

インパルス入力

$$x(t) = x_0 \delta(t) \quad (4.2.47)$$

に対する応答は

$$X(s) = x_0 \mathcal{L}[\delta(t)] = x_0$$

より

$$Y(s) = G(s)x_0 \quad (4.2.48)$$

となる。一般にインパルス応答は伝達関数自身の応答となる。したがって

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]x_0 = G_0 x_0 e^{at} \quad (4.2.49)$$

となる。なおインパルス信号では、 $\delta(t)$ の次元は $[t^{-1}]$ であるため、 x_0 の次元は $[x(t) \cdot t]$ であることに注意する必要がある。

$a = \alpha + j\omega$ の場合、 $\alpha < 0$ では $e^{at} = e^{\alpha t} e^{j\omega t} \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ より $y(t)$ は安定であるが、 $\alpha > 0$ の場合は $y(t)$ は周波数 ω で振動しながら発散する（不安定）。すなわち $\text{Re}(a)$ の正負により系の安定性が決まる。

$\text{Re}(a) < 0$: 安定

$\text{Re}(a) = 0$: 定常振動（不安定）

$\text{Re}(a) > 0$: 振動しながら発散（不安定）

ステップ入力

$$x(t) = x_0 u(t) \quad (4.2.50)$$

に対しては

$$X(s) = x_0 \mathcal{L}[u(t)] = \frac{x_0}{s}$$

より、出力は

$$Y(s) = G(s) \frac{x_0}{s} = \frac{G_0}{s(s-a)} x_0 \quad (4.2.51)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G_0}{s(s-a)} \right] x_0 = -\frac{G_0}{a} x_0 \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-a} \right] \right) \\ &= -\frac{G_0}{a} x_0 (1 - e^{at}) u(t) \end{aligned} \quad (4.2.52)$$

となる。

(c) 2次系

$G(s)$ が2次系の場合。

$$G(s) = \frac{G_0}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (4.2.53)$$

$G(s)$ の分母は特性方程式

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \quad (4.2.54)$$

の根

$$s_{\pm} = \left(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2} \right) \omega_0 \quad (4.2.55)$$

を用いて

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = (s - s_+)(s - s_-) \quad (4.2.56)$$

と因数分解できるので、次のように部分分数に分解できる。

$$G(s) = \frac{G_0}{(s - s_+)(s - s_-)} = \frac{G_0}{s_+ - s_-} \left(\frac{1}{s - s_+} - \frac{1}{s - s_-} \right) \quad (4.2.57)$$

インパルス応答

$Y(s) = G(s)x_0$ は

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{G_0}{s_+ - s_-} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s - s_+} - \frac{1}{s - s_-} \right] x_0 \\ &= \frac{G_0}{s_+ - s_-} \left(e^{s_+ t} - e^{s_- t} \right) x_0 \\ &= \frac{G_0 x_0 e^{-\zeta\omega_0 t}}{2j\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \left(e^{j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t} - e^{-j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{G_0 x_0 e^{-\zeta\omega_0 t}}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t\right) & (0 \leq \zeta < 1) \\ G_0 x_0 t e^{-\omega_0 t} & (\zeta = 1) \\ \frac{G_0 x_0 e^{-\zeta\omega_0 t}}{\omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}} \cosh\left(\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_0 t\right) & (1 < \zeta) \end{cases} \quad (4.2.58) \end{aligned}$$

となる。また $\zeta < 0$ では $e^{-\zeta\omega_0 t}$ により $t \rightarrow \infty$ で発散する (不安定)。

$-1 \leq \zeta < 0$: 振動しながら発散

$\zeta \leq -1$: 一方向に発散

なお

$\zeta \geq 0$ では $\text{Re}[s_{\pm}] \leq 0 \rightarrow$ 安定もしくは減衰振動

$\zeta < 0$ では $\text{Re}[s_{\pm}] > 0 \rightarrow$ 発散 (不安定)

であり、これは一般の n 次系においても成立する。

ステップ応答

ステップ入力

$$x(t) = x_0 u(t)$$

のラプラス変換は

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \frac{x_0}{s}$$

したがって出力のラプラス変換は

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) \\ &= \frac{G_0}{s_+ - s_-} \left(\frac{1}{s - s_+} - \frac{1}{s - s_-} \right) \frac{x_0}{s} \\ &= \frac{G_0 x_0}{s_+ - s_-} \left(\frac{1}{s_+} \frac{1}{s - s_+} - \frac{1}{s_-} \frac{1}{s - s_-} - \frac{s_+ + s_-}{s_+ s_-} \frac{1}{s} \right) \end{aligned} \quad (4.2.59)$$

となり、この逆変換即ち出力 $y(t)$ は

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{G_0 x_0}{s_+ - s_-} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s_+} \frac{1}{s - s_+} - \frac{1}{s_-} \frac{1}{s - s_-} + \frac{s_+ - s_-}{s_+ s_-} \frac{1}{s} \right] \\ &= \frac{G_0 x_0}{s_+ - s_-} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s_+} e^{s_+ t} - \frac{1}{s_-} e^{s_- t} + \frac{s_+ - s_-}{s_+ s_-} u(t) \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$s_{\pm} = (-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_0$$

は特性方程式

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

の根である。従って出力 $y(t)$ は

$$y(t) = \begin{cases} \frac{G_0 x_0}{\omega_0^2} \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_0 t} \left(\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t) \right) \right\} & (-1 < \zeta < 1) \\ \frac{G_0 x_0}{\omega_0^2} (1 - e^{\mp\omega_0 t}) & (\zeta = \pm 1) \\ \frac{G_0 x_0}{\omega_0^2} \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_0 t} \left(\cosh(\sqrt{\zeta^2-1}\omega_0 t) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} \sinh(\sqrt{\zeta^2-1}\omega_0 t) \right) \right\} & (|\zeta| > 1) \end{cases} \quad (4.2.60)$$

となる。

4-2-5 伝達関数の安定条件 (ナイキストの安定条件)

有限な入力 $x(t)$ に対して出力 $y(t)$ が有限であるための条件は、ナイキストの安定条件としてよく知られている。

$$Y(s) = G(s)X(s) \quad (4.2.61)$$

において、 $G(s)$ 及び $X(s)$ の極 (ポール) をそれぞれ p_i ($i=1, 2, \dots, n$)、 q_j ($j=1, 2, \dots, r$) とする。簡単化のため p_i 、 q_j が全て 1 次のポールであるとする、 $Y(s)$ は

$$Y(s) = K_0 + \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s-p_i} + \sum_{j=1}^r \frac{K'_j}{s-q_j} \quad (4.2.62)$$

と展開できる。これをラプラス逆変換すると

$$y(t) = K_0\delta(t) + \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} + \sum_{j=1}^r K'_j e^{q_j t} \quad (4.2.63)$$

となる。したがって $t \rightarrow \infty$ において、全ての p_i 、 q_j について

- $\text{Re}(p_i) > 0, \text{Re}(q_j) > 0$ ならば $e^{p_i t} \rightarrow \infty, e^{q_j t} \rightarrow \infty$: 不安定
- $\text{Re}(p_i) < 0, \text{Re}(q_j) < 0$ ならば $e^{p_i t} \rightarrow 0, e^{q_j t} \rightarrow 0$: 安定
- $\text{Re}(p_i) < 0, \text{Re}(q_j) = 0$ ならば $e^{p_i t} \rightarrow 0, e^{q_j t} \rightarrow e^{j\text{Im}(q_j)t}$: 定常振動 (定常振動入力)
- $\text{Re}(p_i) = 0$ ならば $e^{p_i t} \rightarrow e^{j\text{Im}(p_i)t}$: $G(s)$ の極の周波数で定常振動 (不安定)

となる。また p_i 、 q_j に m 次のポールが含まれる場合には

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-a)^m} \right] = \frac{t^{m-1} e^{at}}{(m-1)!} \quad (4.2.64)$$

となるので同じ議論が成立する。

したがって、有限な入力 ($\text{Re}(q_j) \leq 0$ ($j=0, 1, \dots, r$)) に対して出力 $y(t)$ が安定であるためには、 $G(s)$ の全てのポール p_i の実数部が負 ($\text{Re}(p_i) < 0$ ($i=1, 2, \dots, n$)) でなければならない。閉ループにおいて以上述べた安定条件が満たされているか否かを、図形的に判別する方法をナイキストの安定判別法と云う。特性方程式

$$1 + \beta A(s) = 0 \quad (4.2.65)$$

の根、すなわち閉ループ伝達関数

$$G(s) = \frac{A(s)}{1 + \beta A(s)} \quad (4.2.66)$$

のポールを p_i ($i=1, 2, \dots, n$) とする。ループが安定であるためには全てのポールの実数

部が $\text{Re}(p_i) < 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ でなければならない。これを複素 s 平面に書くと図 4-8 のように $G(s)$ が安定であるためには、全てのポールは左半平面になければならないことになる。

そこで s 平面上に $s = -j\omega$ から出発して、虚軸上の軌跡 Γ_1 に沿って $s = +j\omega$ に至り、そこから右半平面の半径無限大の円弧 Γ_2 に沿って $s = -j\omega$ に至る軌跡 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ を考える。上の安定条件は「軌跡 Γ が囲む領域の中にポールがないこと」と言い換えることができる。これを複素 $\beta A(s)$ 平面 ($\text{Re}[\beta A(s)]$ を横軸、 $\text{Im}[\beta A(s)]$ を縦軸にとった複素平面) に等角写像すると、ポール p_i は特性方程式 $\beta A(s) = -1$ の根であるから、 s 平面における全ての p_i は、 $\beta A(s)$ 平面では点 $(-1, j0)$ に対応することになる。また $A(s)$ として n 次系を考え、 $n > m$ (m は $A(s)$ の分子の次数) とすると、 Γ_2 上では $|s| = \infty$ のため $A(s)|_{\Gamma_2} = 0$ であり ($n = m$ の場合は有限な実数となる)、 Γ_2 は $\beta A(s)$ 平面の原点に写像される。

したがって s 平面で $s = -j\infty$ から $s = +j\infty$ に至る軌跡 Γ_1 は、 $\beta A(s)$ 平面では図 4-8 に示すように原点から出発して原点に至る軌跡 Γ'_1 に写像される。これをナイキスト線図と云う。 Γ'_1 上では $s = j\omega$ なので、ナイキスト線図では周波数伝達関数 $A(j\omega)$ のみを考えればよく、開ループ周波数伝達関数 $A(j\omega)$ で議論できるので便利である。また $A^*(j\omega) = A(-j\omega)$ より、ナイキスト線図は常に実軸に対して対称である。等角写像では軌跡に沿って進むとき、軌跡の右側の領域は写像してもやはり右側に写像されるので、 s 平面で Γ で囲まれる領域は $\beta A(s)$ 平面では Γ'_1 で囲まれる領域に対応する。

したがって、安定条件は $\beta A(s)$ 平面において、点 $(-1, j0)$ が Γ'_1 で囲まれる領域の外になければならないことになる。これがナイキスト線図によるナイキストの安定判別法である。

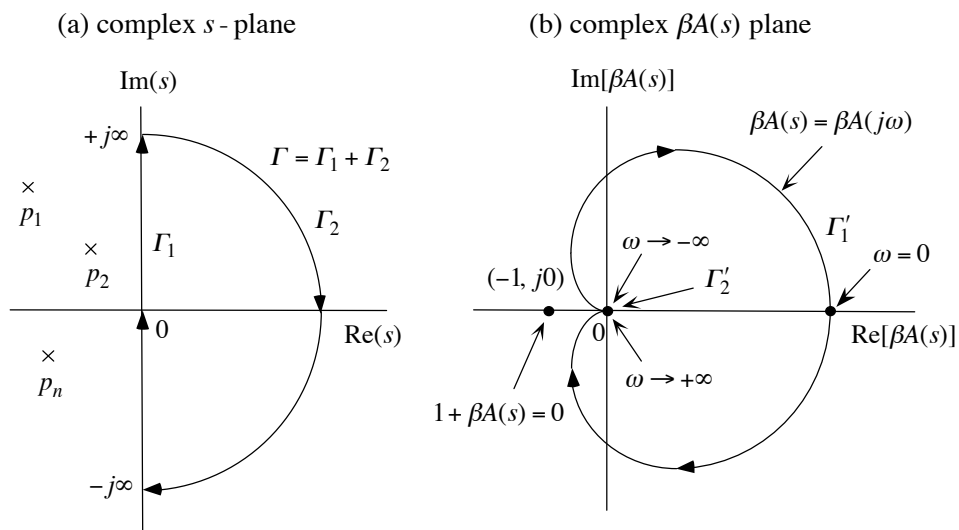


図 4-8 ナイキスト線図

開ループ伝達関数 $A(s)$ が安定、すなわち $A(s)$ のポールが s 平面内の右半平面内に存在しない場合は以上の議論でよいが、 $A(s)$ のポールが右半平面内に存在する場合には更に一般化した議論が必要である。有限次数の開ループ伝達関数 $A(s)$ は s の有理関数であるのでこれを

$$A(s) = \frac{F(s)}{H(s)}$$

と書くと閉ループ伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{F(s)}{H(s) + \beta F(s)}$$

と書ける。ここで $F(s)$ 及び $H(s)$ は s の多項式である。そこで p_i を s 平面の左半平面内に、 p'_k を右半平面内に存在する $G(s)$ のポール ($\text{Re}[p_i] < 0, \text{Re}[p'_k] > 0$) とし、 q_j 、 q'_r をそれぞれ左半平面内及び右半平面内に存在する $A(s)$ のポール ($\text{Re}[q_j] < 0, \text{Re}[q'_r] > 0$) とすると $H(s)$ 及び $H(s) + \beta F(s)$ は次のように因数分解できる

$$H(s) = a \prod_{j=1}^{n-n_q} (s - q_j) \prod_{r=1}^{n_q} (s - q'_r)$$

$$H(s) + \beta F(s) = b \prod_{i=1}^{n-n_p} (s - p_i) \prod_{k=1}^{n_p} (s - p'_k)$$

従って

$$\frac{A(s)}{G(s)} = \frac{H(s) + \beta H(s)}{H(s)} = \frac{b \prod_{i=1}^{n-n_p} (s - p_i) \prod_{k=1}^{n_p} (s - p'_k)}{a \prod_{j=1}^{n-n_q} (s - q_j) \prod_{r=1}^{n_q} (s - q'_r)}$$

であることから、特性方程式は次のように因数分解することができる。

$$1 + \beta A(s) = \alpha \frac{\prod_{i=1}^{n-n_p} (s - p_i) \prod_{k=1}^{n_p} (s - p'_k)}{\prod_{j=1}^{n-n_q} (s - q_j) \prod_{r=1}^{n_q} (s - q'_r)} \quad (4.2.67)$$

ここで $\alpha (= b/a)$ は定数である。 $G(s)$ が安定であるためには p'_k がないこと、即ち $n_p = 0$ であることである。さて $s = q_j$ 、 $s = q'_r$ においては閉ループ伝達関数は $G(s)|_{s=q_j} = G(s)|_{s=q'_r} = 1/\beta$ なる有限値になるので、 $A(s)$ が不安定ポール ($\text{Re}[q'_r] > 0$)

を有していても直接 $G(s)$ を不安定にすることはない。このときのナイキスト線図は次のようになる。 s 平面において Γ を一周すると、 p_i 、 q_j は閉曲線 Γ の外にあるので $(s - p_i)$ 、 $(s - q_j)$ の偏角はもとへ戻るが、 $(s - p'_i)$ 及び $(s - q'_j)$ の偏角は -2π 増加するので、(4.2.67) 式中の偏角はそれぞれ

$$\prod_{i=1}^{n-n_p} (s-p_i) \rightarrow \prod_{i=1}^{n-n_p} (s-p_i), \quad \prod_{j=1}^{n-n_q} (s-q_j) \rightarrow \prod_{j=1}^{n-n_q} (s-q_j)$$

$$\prod_{k=1}^{n_p} (s-p'_k) \rightarrow e^{-j2n_p\pi} \prod_{k=1}^{n_p} (s-p'_k), \quad \prod_{r=1}^{n_q} (s-q'_r) \rightarrow e^{-j2n_q\pi} \prod_{r=1}^{n_q} (s-q'_r)$$

だけ変化する（軌跡 Γ は時計回りであるので偏角の変化は負になる）。

したがって $1+\beta A(s)$ の偏角の変化は

$$1+\beta A(s) \rightarrow \{1+\beta A(s)\} e^{-j2(n_p-n_q)\pi} \quad (4.2.68)$$

となる。ここで、 $1+\beta A(s)$ の偏角は点 $(-1, j0)$ に対する $\beta A(s)$ の偏角であり、ナイキスト線図 Γ_1' は点 $(-1, j0)$ の回りを $N = n_p - n_q$ 回時計回り方向に回転することになる（ $N < 0$ は反時計回り方向の回転を意味する）。開ループ伝達関数 $A(s)$ が 2 個の不安定ポール (q'_1, q'_2) を有するときのナイキスト線図の例を図 4-9 に示す。

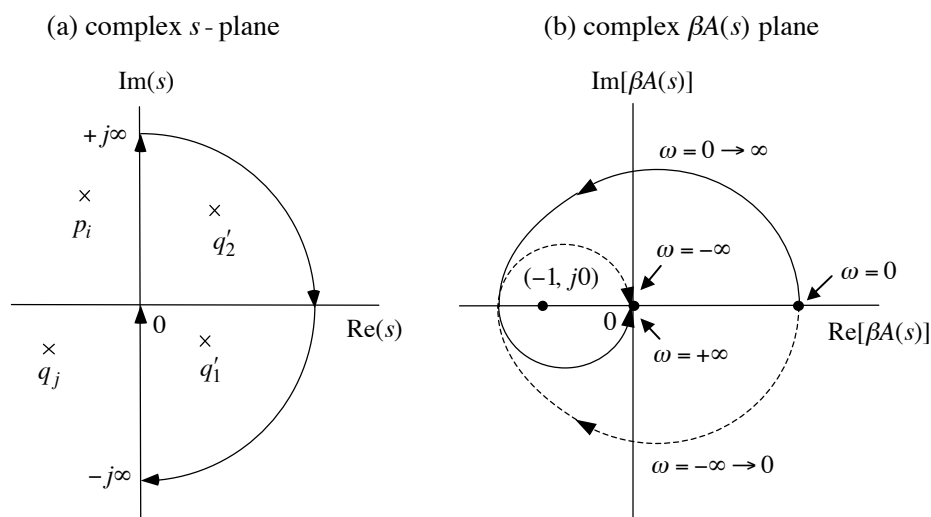


図 4-9 開ループ伝達関数 $A(s)$ が 2 個の不安定ポール (q'_1, q'_2) を有するときのナイキスト線図

この場合ナイキスト線図は $(-1, j0)$ の回りを 2 回転する。安定条件は $n_p = 0$ であるので、

閉ループが安定であるためには $N = -n_q$ 、すなわちナイキスト線図の軌跡は点 $(-1, j0)$ の回りを、右半平面内にある開ループ伝達関数のポールの個数と同じ回数反時計回りに回転しなければならない。

但し、 q_r が m 次のポールである場合にはそのポール数は m 個と数える。これが一般の場合のナイキストの安定条件である。以上の議論は伝達関数が s の有理関数（任意の次系）の場合に限ったが、伝達関数が非有理関数となる時間遅れ要素を含む系についても成立する。

例として、電磁石電源やモーターの回転角制御等によく用いられる

$$A(s) = A_0 / s \quad (4.2.69)$$

なる開ループ伝達関数を考えてみる。電磁石電源では直流領域における残差（基準値と出力の差）をゼロに近づけたいと云う意図から $1/s$ がよく使われ、またモーターの回転角制御では、回転速度 $d\theta/dt$ はモーター駆動電圧 v に比例する ($d\theta/dt = A_0 v$) ため、回転角は $\theta(s) = (A_0 / s)V(s)$ となる。 $A(s)$ は $s=0$ にポールを有するので、 s 平面における軌跡 Γ のとり方として図 4-10(a) に示すように、閉曲線が囲む領域内に $s=0$ を含まないように $s = \epsilon e^{j\theta}$ ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$) なる半円弧 $\Gamma_2^{(1)}$ でポールを避けて一周する軌跡 $\Gamma^{(1)}$ 、または $s = \epsilon e^{j\theta}$ ($-\pi/2 > \theta > -3\pi/2$) なる半円弧 $\Gamma_2^{(2)}$ によってポールを避ける軌跡 $\Gamma^{(2)}$ の二通りがある。

$\Gamma^{(1)}$ は安定、 $\Gamma^{(2)}$ は内部にポールを含むので不安定になるように思われるが、安定性は軌跡の選び方によらずいずれの軌跡でも安定である。これらに対応するナイキスト線図 $\beta A(s)$ は図 4-10(b) のようになる。 $\Gamma^{(1)}$ に対応する軌跡 $\Gamma'^{(1)}$ は点 $(-1, j0)$ を内部に含まないのが安定であり、 $\Gamma^{(2)}$ に対応する $\Gamma'^{(2)}$ は点 $(-1, j0)$ を内部に含むがその回りを反時計回りに一回転するのでやはり安定である ($\Gamma^{(2)}$ 内のポール数 n_q は 1 個)。

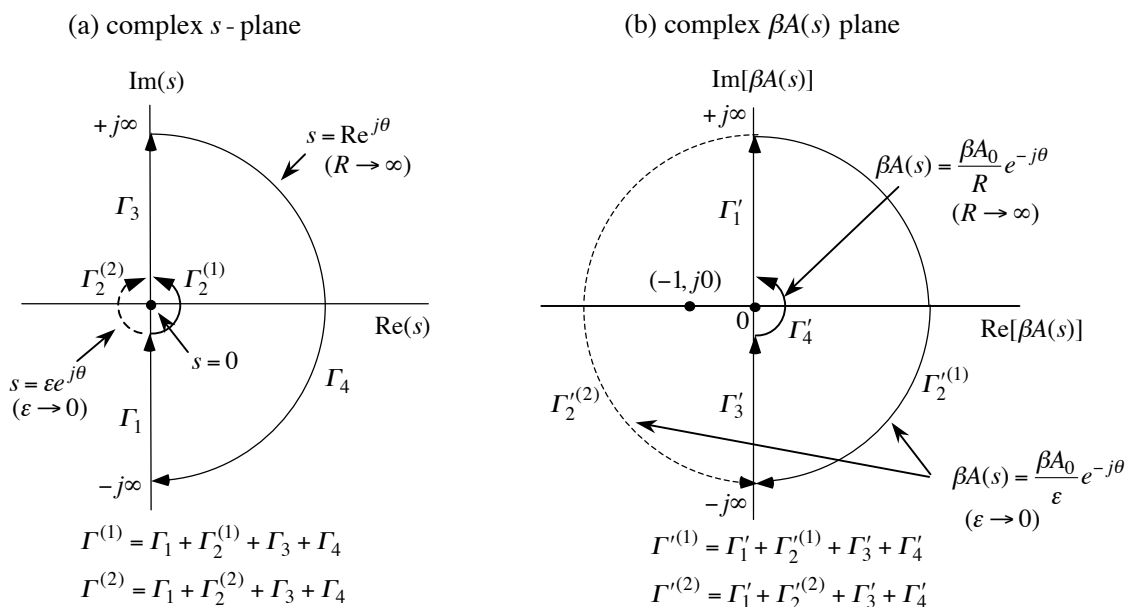


図 4-10 $A(s) = A_0 / s$ のナイキスト線図

以上のように、一般化されたナイキストの条件により、開ループ伝達関数が不安定 ($\text{Re}(q'_k) > 0$ なるポール q'_k を有している) であっても、安定な閉ループ伝達関数を実現することができる。複数のフィードバックを多重にかけた系ではこのようなことがよく起きる。例えば、多重フィードバックループで構成されているシンクロトロンの加速高周波システム等がよい例である。またメカトロニクス分野等において、複数のセンサー信号で一つの動作をフィードバック制御するような場合にも起きる。

4-2-6 ナイキスト線図の例

1 次系

$$A(s) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} A_0 \quad (4.2.70)$$

$\omega_0 > 0$ の場合は図4-11(a)のように $\beta A(j\omega)$ の軌跡が囲む領域内に点 $(-1, j0)$ を含まないので安定である。

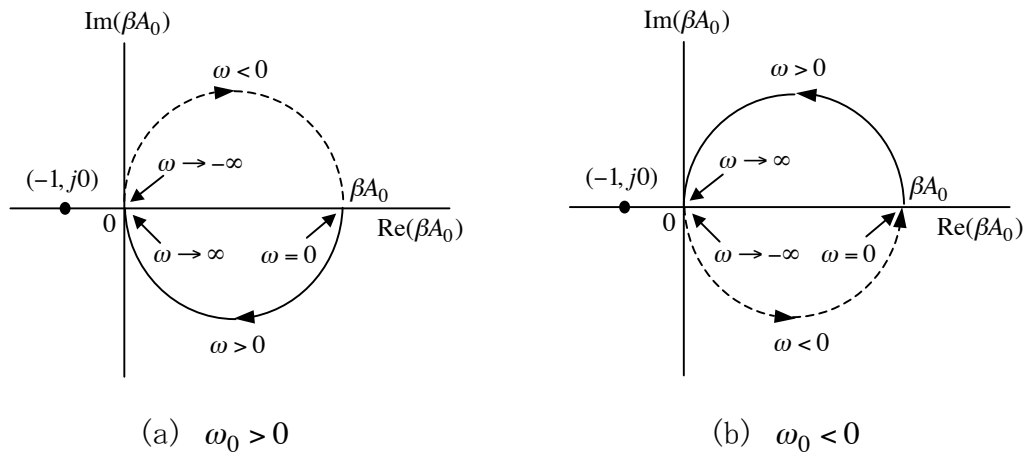


図 4-11 1 次系

一方 $\omega_0 < 0$ の場合は図(b)のように、 ω を $-\infty$ から ∞ まで変えたときの軌跡 $\beta A(j\omega)$ の進む方向が逆転する。この場合は軌跡の囲む領域は円の外側である。点 $(-1, j0)$ は ω を $-\infty$ から ∞ まで変えたときの軌跡 $\beta A(j\omega)$ の進む方向に対して常に右側の領域にあり、必ず不安定となる。

2 次系

$$A(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} A_0 \quad (4.2.71)$$

$\xi > 0$ では図 4-12(a)のように点 $(-1, j0)$ は $\beta A(j\omega)$ の軌跡が囲む領域内にないので安定である。一方 $\xi < 0$ では図(b)のように軌跡の進行方向が逆転するので、図 4-11(b)の議論と同様常に不安定である。図 4-11(a) 及び図 4-12(a) のように、 βA_0 の大きさに係らず常に安定な系を絶対安定系と呼ぶ。

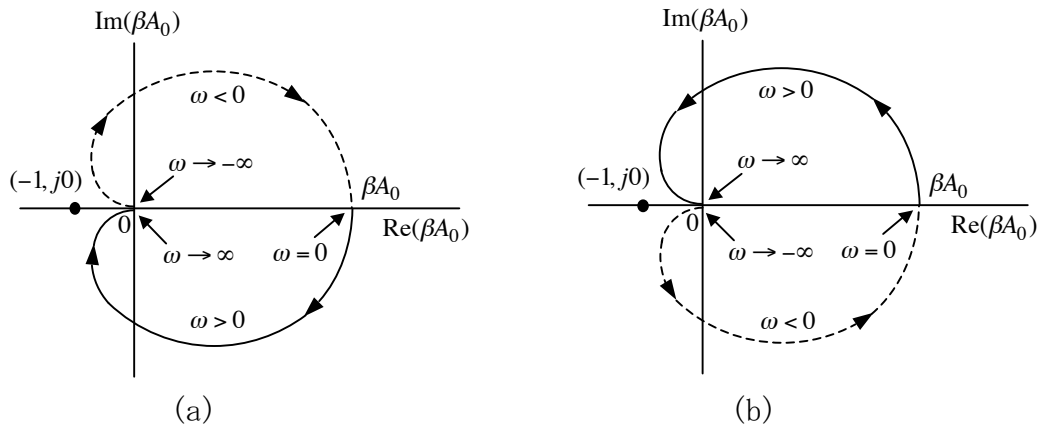


図 4-12 2次系

3次系

A_0 が大きいと点 $(-1, j0)$ が軌跡 $\beta A(j\omega)$ の囲む領域内に含まれるようになるため、不安定となる。即ち安定な βA_0 の上限が存在する。

$$A(s) = \frac{A_0}{(s+a)(s+b)(s+c)} \quad (4.2.72)$$

$(a, b, c > 0)$

3次以上の系は必ず安定限界が存在する。

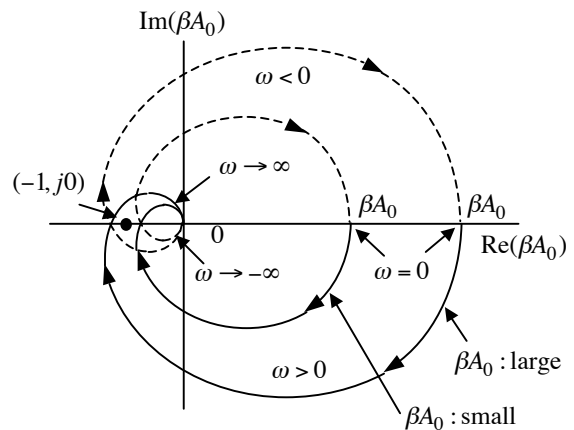


図 4-13 3次系

フェーズシフター

$$A(s) = A_0 \frac{\omega_0 - s}{\omega_0 + s} \quad (4.2.73)$$

$$A(j\omega) = A_0 \frac{1 - j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0} \quad (4.2.74)$$

この場合 $\beta A_0 \geq 1$ では必ず不安定になる。

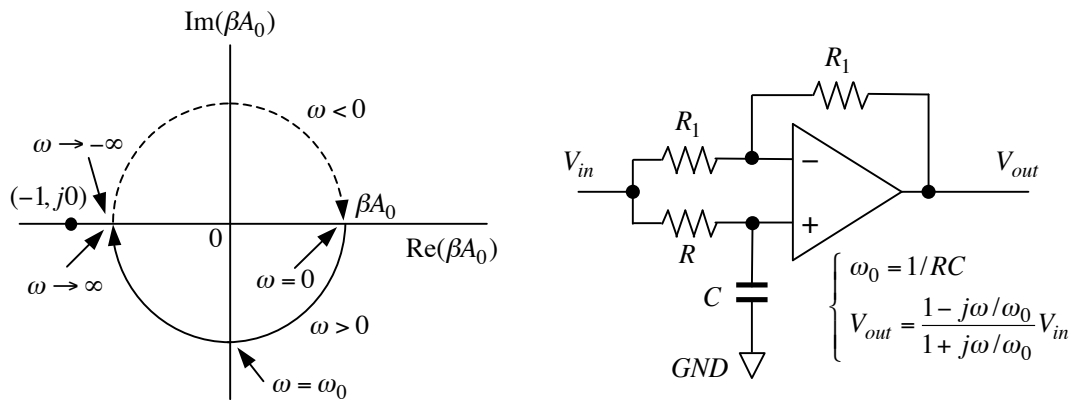


図 4-14 フェーズシフター

遅延回路（時間遅れ要素）

$$y(t) = A_0 x(t - \tau) \quad (4.2.75)$$

$$\mathcal{L}[x(t - \tau)] = e^{-s\tau} X(s)$$

$$\left. \begin{aligned} Y(s) &= A_0 e^{-s\tau} X(s) \\ A(s) &= A_0 e^{-s\tau} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.76)$$

$$A(j\omega) = A_0 e^{-j\omega\tau} \quad (4.2.77)$$

フェーズシフターと同様 $\beta A_0 \geq 1$ では必ず不安定になる。

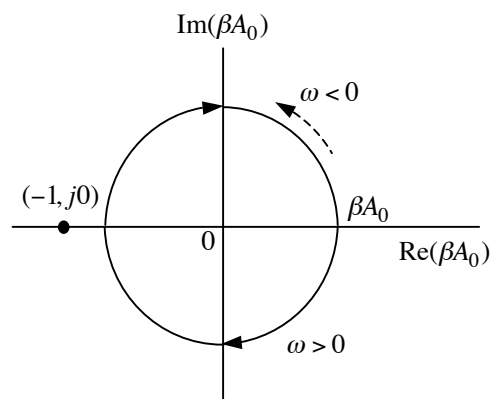


図 4-15 遅延回路

4-2-7 ボーデ線図 (Bode diagram)

ナイキスト線図では一巡ループ利得 βA が 1 に近い領域で安定性を判定するので、オープンループ利得が非常に大きい（数 10dB～100dB 以上）通常の電子回路設計においては、ナイキスト線図は使いにくい。実際の回路設計では、ナイキスト線図と同じことであるが、オープンループ利得の大きさ $|A(\omega)|$ （いわゆる周波数特性）と、 $A(\omega)$ の位相 $\theta = \tan^{-1}[\text{Im}\{A(\omega)\}/\text{Re}\{A(\omega)\}]$ を同時に 2 次元グラフにプロットした「ボーデ線図 (Bode diagram)」が通常用いられる。例として図 4-16 に 3 次系

$$A(j\omega) = \frac{A_0}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_2)(1 + j\omega/\omega_3)}$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_0 &= 1 \times 10^4 \text{ (80dB)} \\ \omega_1 &= 2\pi \times 1\text{kHz}, \quad \omega_2 = 2\pi \times 100\text{kHz}, \quad \omega_3 = 2\pi \times 300\text{kHz} \end{aligned} \right.$$

のボーデ線図とナイキスト線図を示す。 $|\beta A(j\omega)| = 1$ となるときの $A(j\omega)$ の位相 θ が、

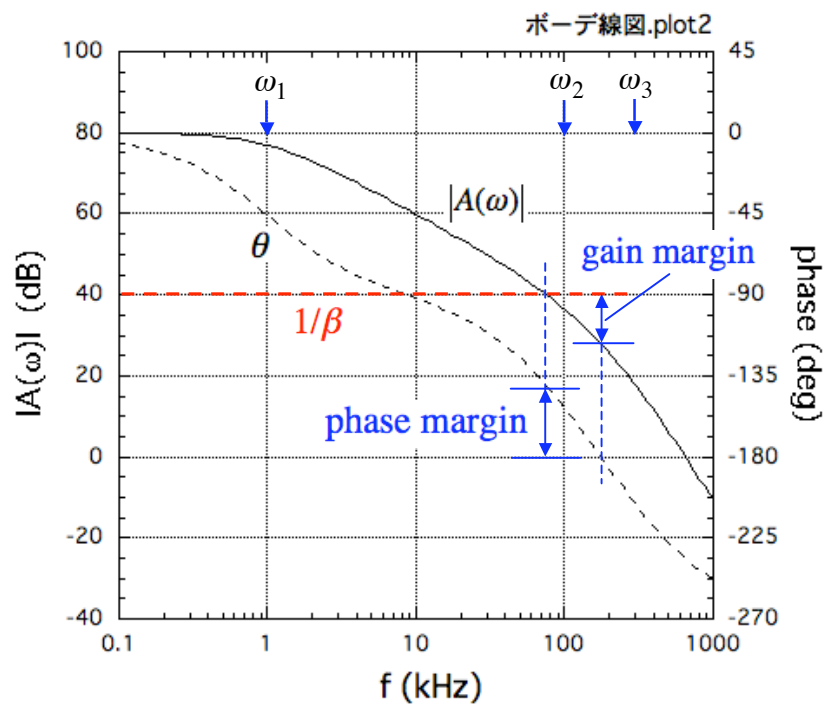
-180°よりどれだけ大きいかを位相余裕 (phase margin) と云い、位相 θ が -180°に達したときの利得 $|A(j\omega)|$ が $1/\beta$ よりどれだけ小さいかを利得余裕 (gain margin) と云う。閉ループ応答

$$K(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 + \beta A(j\omega)}$$

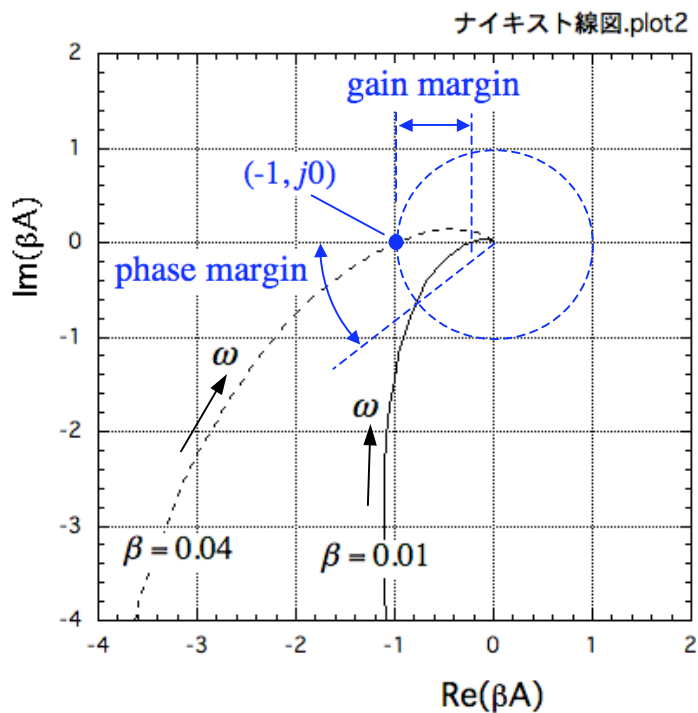
が振動しないためには位相余裕を 45°以上確保することが必要である。図 4-16 の例では、 $\beta = 0.01$

(閉ループ利得 40dB) では位相余裕が約 40°であり、わずかに振動が残るがおおむね安定である。また $\beta \geq 0.04$ (閉ループ利得 28dB 以下) ではループが発振する (不安定)。

通常のエレクトロニクス設計においてはボード線図で十分であるが、オープンループ利得 $A(j\omega)$ が不安定ポールを持つ場合や、多重フィードバック系等の設計においてはボード線図では判定困難な場合が多く、そのような場合にはナイキスト線図が用いられる。



(a) ボーデ線図



(b) ナイキスト線図

図 4-16 ボーデ線図(a)とナイキスト線図(b)

4-2-8 ラウス・フルビッツの安定性判別法

次数が高くパラメータの多い系では、フィードバック・ループの安定性のパラメータ依存性を、ナイキストの安定判別法にて図形的に調べるのは極めて煩雑な作業となる。そこで、解析的に伝達関数の安定性を調べる方法としてラウス・フルビッツの安定判別法がある。

n 次系を考えるものとし、伝達関数 $G(s)$ の特性方程式

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (4.2.78)$$

の係数により次の $n-1$ 個の行列式

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= a_{n-1}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix} \\ \dots & \\ D_{n-1} &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.79)$$

を作る。 $G(s)$ が安定、すなわち特性方程式の全ての根の実数部が負であるための必要十分条件は、 a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 および D_1, D_2, \dots, D_{n-1} の全てが正であることである。

$$\left. \begin{aligned} a_n > 0, \quad a_{n-1} > 0, \quad \dots, \quad a_0 > 0 \\ D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad \dots, \quad D_{n-1} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.80)$$

これをラウス・フルビッツの安定判別法と云う。これにより、任意の次数の多次系の安定性を判定することができる。この方法では、安定限界を解析的に求めることができるが、過渡応答特性を調べることができないため、実際の電子回路の設計ではあまり見かけないが、多次系の解析には極めて有用である。

例えばシンクロトロンの加速高周波システムでは、ビームと加速高周波電圧間の位相振動をダンプするための「位相フィードバック」、加速空洞の共振周波数をフィードバック制御する「チューニンググループ」、ビーム軌道を安定化するために BPM 信号をフィードバックして RF 周波数を制御する「ビームポジション・フィードバック」、変化する周波数に対して RF 電圧を一定に保つ「AVC ループ」の4種類のフィードバック・ループが同時かけられ、ビーム伝達関数を含んだ多重フィードバック・ループを構成している。そのため伝達関数の次数は最低4次、ループの構成要素のカッ

トオフ周波数を考慮すると8次以上にもなり、例えばビームローディングをパラメータにした安定限界を調べるのに、ナイキストの安定判別法では極めて煩雑になるため全体を見通すことが困難である。そこで、F. Pedersen は高周波システムの解析にラウス・フルビッツの判定法を適用して安定限界に対する解析解を求めている (IEEE Trans. on Nuclear Science, NS-22, No. 3, 1975, p.1906)。

多重フィードバックの例として図4-17のような2重フィードバック系を考える。

$$\left. \begin{aligned} Y'(s) &= A_1(s)\{X(s) - H_2(s)Y(s) - H_1(s)Y'(s)\} \\ Y(s) &= A_2(s)Y'(s) \end{aligned} \right\} \quad (4.2.81)$$

より、伝達関数 $G(s) = Y(s)/X(s)$ は

$$G(s) = \frac{A_1(s)A_2(s)}{1 + H_1(s)A_1(s) + H_2(s)A_1(s)A_2(s)} \quad (4.2.82)$$

で与えられる。簡単化のために帰還率 $H_1(s), H_2(s)$ は定数

$$H_1(s) = h_1, \quad H_2(s) = h_2 \quad (4.2.83)$$

であるとする。

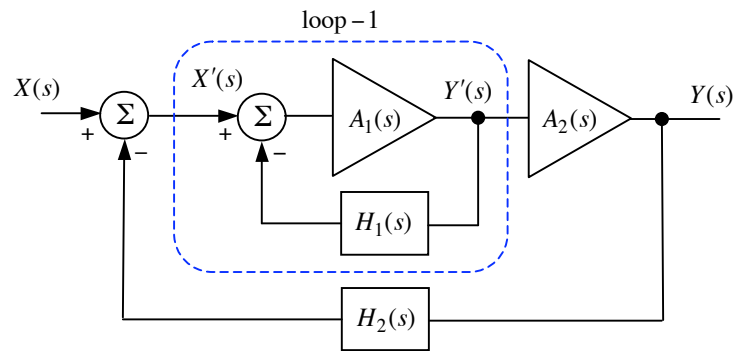


図4-17 2重フィードバック系

ここで $A_1(s)$ として3次系 (条件付安定系) を考え、その周波数特性を

$$A_1(j\omega) = \frac{k_1}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_2)^2} \quad (\omega_1 > 0, \omega_2 > 0) \quad (4.2.84)$$

と仮定する。(4.2.84)式より伝達関数 $A_1(s)$ は

$$A_1(s) = \frac{\omega_1 \omega_2^2 k_1}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)^2} \quad (4.2.85)$$

と書け、loop-1 の伝達特性は

$$Y'(s) = G'(s)X'(s) \quad (4.2.86)$$

$$G'(s) = \frac{A_1(s)}{1 + H_1(s)A_1(s)} = \frac{\omega_1 \omega_2^2 k_1}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)^2 + \omega_1 \omega_2^2 h_1 k_1} \quad (4.2.87)$$

となる。loop-1 の伝達関数 $G'(s)$ の特性方程式は

$$s^3 + (\omega_1 + 2\omega_2)s^2 + (2\omega_1 + \omega_2)\omega_2 s + \omega_1\omega_2^2(1 + h_1k_1) = 0 \quad (4.2.88)$$

であり、ラウス・フルビッツの係数行列式は

$$\begin{cases} D_1' = \omega_1 + 2\omega_2 \\ D_2' = (\omega_1 + 2\omega_2)(2\omega_1 + \omega_2)\omega_2 - \omega_1\omega_2^2(1 + h_1k_1) \end{cases} \quad (4.2.89)$$

で与えられる。従って loop-1 に対する安定条件は $D_2' > 0$ より

$$h_1k_1 < 2\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + 2\right) \quad (4.2.90)$$

となる。一方、図 4-17 のクローズドループ特性は

$$Y(s) = G(s)X(s) \quad (4.2.91)$$

$$G(s) = \frac{\omega_1\omega_2^2k_1A_2(s)}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)^2 + \omega_1\omega_2^2h_1k_1 + \omega_1\omega_2^2h_2k_1A_2(s)} \quad (4.2.92)$$

と書ける。ここで $A_2(s)$ として 1 次系

$$A_2(s) = \frac{\omega_3k_2}{s + \omega_3} \quad (4.2.93)$$

を仮定すると、クローズドループ伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{\omega_1\omega_2^2\omega_3k_1k_2}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)^2(s + \omega_3) + \omega_1\omega_2^2h_1k_1(s + \omega_3) + \omega_1\omega_2^2\omega_3h_2k_1k_2} \quad (4.2.94)$$

となる。この特性方程式は

$$\begin{aligned} & s^4 + (\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_3)s^3 + (\omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 + 2\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_3)s^2 \\ & + (\omega_1\omega_2^2 + \omega_2^2\omega_3 + 2\omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_2^2h_1k_1)s \\ & + (\omega_1\omega_2^2\omega_3 + \omega_1\omega_2^2\omega_3h_1k_1 + \omega_1\omega_2^2\omega_3h_2k_1k_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.95)$$

で与えられ、ラウス・フルビッツの係数行列式は

$$\begin{cases} D_1 = a_3 \\ D_2 = a_3a_2 - a_4a_1 \\ D_3 = a_1D_2 - a_3^2a_0 \end{cases} \quad (4.2.96)$$

となる。ここで

$$\begin{cases} a_4 = 1 \\ a_3 = \omega_1 + 2\omega_2 + \omega_3 \\ a_2 = \omega_2(\omega_2 + 2\omega_3) + \omega_1(2\omega_2 + \omega_3) \\ a_1 = \omega_2\omega_3(2\omega_1 + \omega_2) + \omega_1\omega_2^2(1 + h_1k_1) \\ a_0 = \omega_1\omega_2^2\omega_3(1 + h_1k_1 + k_1h_2k_2) \end{cases} \quad (4.2.97)$$

である。参考に

$$k_1 = 5 \times 10^3, \quad \omega_1 = 2\pi \times 1\text{kHz}, \quad \omega_2 = 2\pi \times 1\text{MHz}$$

$$k_2 = 10, \quad \omega_3 = 2\pi \times 10\text{MHz}, \quad h_2 = \pm 0.02$$

を仮定したときの、loop-1 の帰還率 h_1 の関数としての D_2, D_3 を図 4-18 に示す。 $D_2 > 0, D_3 > 0$ となる領域が安定領域である。図中には(4.2.89)式の D'_2 も示しており、 $D'_2 < 0$ となる領域 ($h_1 > 0.41$) は loop-1 が単独では不安定となる領域である。 $h_2 = -0.02$ では $h_1 < 0.64$ が安定領域である。即ち $0.41 < h_1 < 0.64$ では loop-1 が単独では不安定にもかかわらず全体としては安定であることを示している。また、 $h_2 = +0.02$ では安定領域が $h_1 < 0.16$ に制限されてしまう。

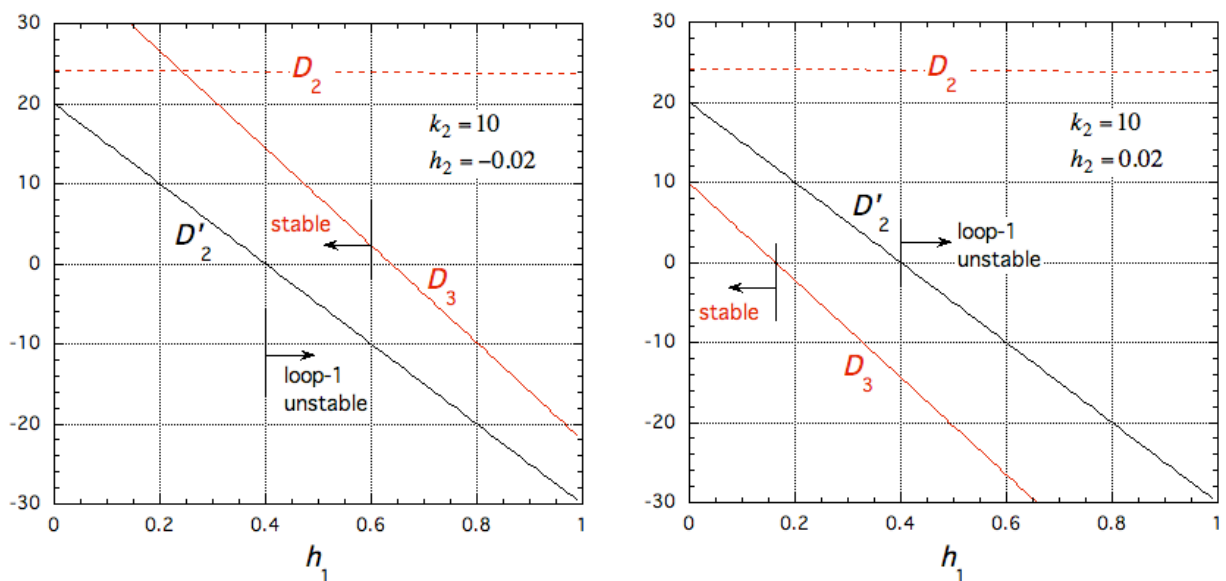


図 4-18 2重フィードバック系 (図 4-15) の安定領域

$$D'_2 \text{ は } D'_2 / (\omega_1^3 \times 10^{10}), \quad D_2 \text{ は } D_2 / (\omega_1^3 \times 10^{10}),$$

$$D_3 \text{ は } D_3 / (\omega_1^6 \times 10^{20}) \text{ である。}$$

以上のように多重フィードバック系では個々のループの安定性のみを考えても不十分であり、個々のループが不安定でも全体としては安定になり得る、またはその逆もあるので、個々の場合について十分な考察が必要になる。

4-2-8 特性方程式の根による安定性判定

ナイキストの安定判別法またはラウス・フルビッツの判別法により、考えている系が安定か否かは判定できるが、過度特性についてはほとんど分からない。そこで、特性方程式の根と過度特性について考察しておく。n 次系を考え、その特性方程式は重

根を持たないものとしよう。(4.2.63)式より、伝達関数の特性方程式の根を p_i とすると出力応答は

$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} \quad (4.2.98)$$

で与えられる。ここで2次系を考えると

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 \quad (4.2.99)$$

であり(4.2.57)式参照)、過度応答が振動やオーバーシュートしないためには $\zeta > 1/\sqrt{2}$ 即ち $\text{Re}(p_i) < -|\text{Im}(p_i)|$ でなければならない。これは(4.2.97)式の各項について成立し、出力 $y(t)$ が特性方程式の根の周波数 $|\text{Im}(p_i)|$ で振動しないためには全ての根に対して

$$\text{Re}(p_i) < -|\text{Im}(p_i)| \quad (4.2.100)$$

であることが要求される。

即ち、最も直接的な安定性及び過度応答特性についての判定は、特性方程式を Mathematica 等の計算ソフトウェアを利用して解き、周波数特性 $|G(\omega)|$ の形を見ながら、おおむね $|G(\omega)| > 1$ の領域にある全ての根について $\text{Re}(p_i) < -|\text{Im}(p_i)|$ が満たされているか否かを判定すれば良い。これまでは次数の高い系の特性方程式の根を求めることが大変であったが、パソコンが普及している現在ではこの方法が最も簡便でかつ確実、見通しの良い方法ではないかと思われる。なお、時間遅れ要素を含む系においては特性方程式の複素根を求めることが困難であり、この方法は使用できない。

4-3 反転増幅器

利得 $A(\omega)$ 、反転・非反転入力間の入力インピーダンス Z_{in} 、出力インピーダンス Z_{out} の増幅器を図 4-19 (b) のように定義する。

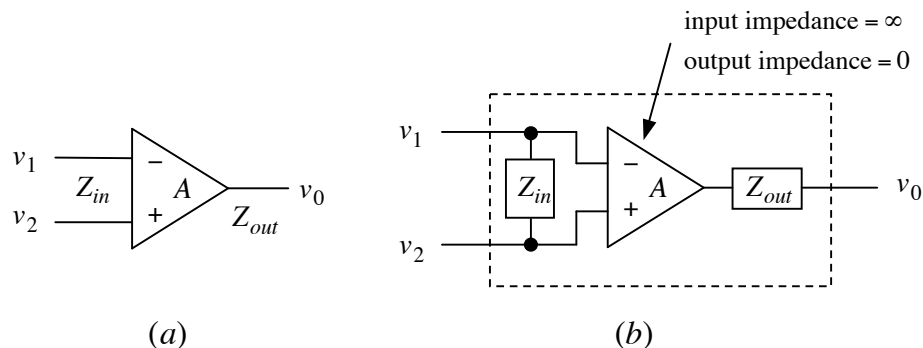


図 4-19 増幅器

このような増幅器を用いて図 4-20 のようなフィードバック反転増幅器を考えると

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{v_i - v_1}{Z_1} = \frac{v_1 - v_0}{Z_2} + \frac{v_1}{Z_{in}} \\ i_L &= i_0 + \frac{v_1 - v_0}{Z_2} \\ v_0 &= -A(\omega)v_1 - Z_{out}i_0 \\ v_0 &= Z_L i_L \end{aligned} \right\} (4.3.1)$$

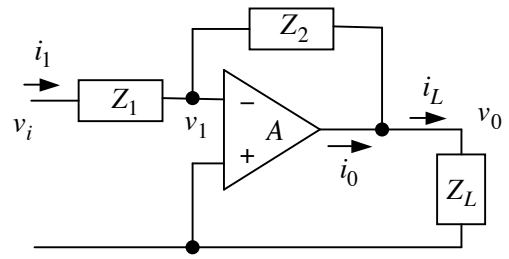


図 4-20 フィードバック増幅器

が成立する。これより

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= G(\omega)v_i \\ G(\omega) &= -\frac{Z_2}{Z_1} \frac{\beta\{A(\omega) - Z_{out}/Z_2\}}{1 + \beta A(\omega) + \frac{Z_{out}}{Z_L} \left\{1 + \beta Z_L \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_{in}}\right)\right\}} \end{aligned} \right\} (4.3.2)$$

$G(\omega)$ は閉ループ利得であり

$$\beta = \frac{1}{1 + Z_2/Z_1 + Z_2/Z_{in}} \quad (4.3.3)$$

である。ここで増幅器の出力インピーダンスは十分小さく、 $|Z_{out}/Z_L| \ll 1$, $|\beta Z_{out}/Z_1| \ll 1$, $|\beta Z_{out}/Z_{in}| \ll 1$ とすると

$$\left. \begin{aligned} G(\omega) &= -\frac{Z_2}{Z_1} \frac{\beta A(\omega)}{1 + \beta A(\omega)} \\ \beta &= \frac{1}{1 + Z_2/Z_1} \end{aligned} \right\} (4.3.4)$$

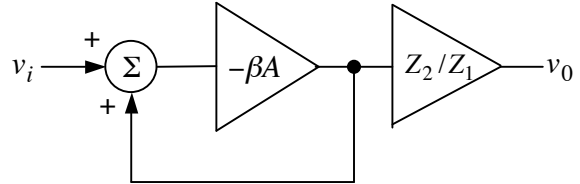


図 4-21 反転増幅器のフィードバックループ

を得る。これを図 4-2 に対応するループ図に書き直すと図 4-21 のようになる。

この場合の増幅器自身の入力インピーダンスは

$$Z'_{in} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{Z_2}{1 + Z_2/Z_{in} + A(\omega)} \quad (4.3.5)$$

となり、フィードバック増幅器としての入力インピーダンス $Z_i = v_i/i_1$ は

$$\begin{aligned} Z_i &= Z_1 + \frac{Z_2}{1 + Z_2/Z_{in} + A(\omega)} \\ &\cong Z_1 + \frac{Z_2}{1 + A(\omega)} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

となる。 Z_i の周波数特性の概念図を図

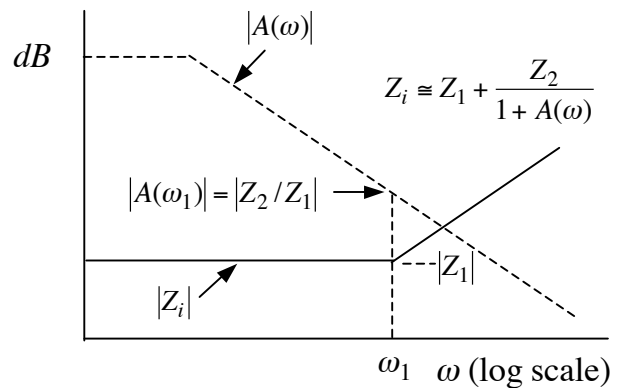


図 4-22 入力インピーダンス

4-22 に示す。 Z_i はオープンループゲイン $A(\omega)$ が $|A(\omega_1)| = |Z_2/Z_1|$ に減少する周波数 ω_1 まで $Z_i = Z_1$ となるが、 $\omega > \omega_1$ では周波数に比例して増加する。

また、出力インピーダンス Z_0 は

$$v_0 = \frac{Z_L}{Z_L + Z_0} v_0|_{Z_L \rightarrow \infty}$$

より

$$\begin{aligned} Z_0 &= Z_L \left(\frac{v_0|_{Z_L \rightarrow \infty}}{v_0} - 1 \right) \\ &= Z_L \frac{G(\omega)|_{Z_L \rightarrow \infty} - G(\omega)}{G(\omega)} \\ &= \frac{Z_{out}}{1 + \beta \{ A(\omega) + Z_{out} (1/Z_1 + 1/Z_{in}) \}} \end{aligned}$$

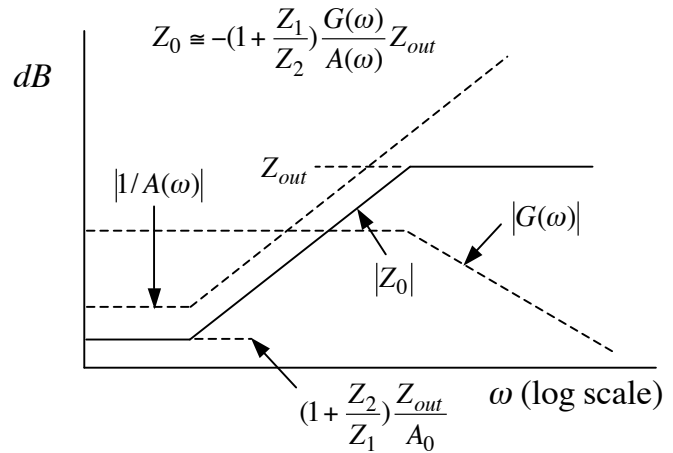


図 4-23 出力インピーダンス

ここで

$$|Z_{out}| \ll |Z_1|, |Z_{in}| \quad \text{及び} \quad |A(\omega)| \gg \left| \frac{Z_{out}}{Z_1} + \frac{Z_{out}}{Z_{in}} \right|$$

であるものとする

$$Z_0 = \frac{Z_{out}}{1 + \beta A(\omega)} \approx -\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \frac{G(\omega)}{A(\omega)} Z_{out} \quad (4.3.7)$$

となる。オープンループゲイン $A(\omega)$ のカットオフ周波数（第 1 ポール）までは、反転増幅器の出力インピーダンス Z_0 は非常に低いインピーダンス $Z_0 \approx (1 + Z_1/Z_2) Z_{out} / A_0$ となる。それ以上の周波数では周波数に比例して増加し、クローズドループゲインのカットオフ周波数以上ではオペアンプ自身の出力インピーダンス Z_{out} に等しくなる。

以上より $|\beta A(\omega)| \gg 1$ なる領域では

$$\left. \begin{aligned} G(\omega) &= \frac{Z_2}{Z_1} \\ Z_i &= Z_1 + \frac{Z_2}{A(\omega)}, \quad Z_0 = \frac{Z_{out}}{\beta A(\omega)} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.8)$$

と近似され、開ループ利得の十分大きい反転増幅器では、フィードバック増幅器の入力インピーダンスは Z_1 のみで決まり、増幅器自身の入力インピーダンスの影響は無視できる。すなわち増幅器自身の反転入力端子は実効的なインピーダンスがゼロと見なせることになる。これをイマジナリーショート（仮想短絡）と云う。またフィードバックにより実効的な出力インピーダンスが小さくなる ($|Z_0| \ll |Z_{out}|$)。

4-4 非反転増幅器

フィードバックをかけた非反転増幅器の構成を図 4-24 に示す。図より次の回路方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{v_i - v_1}{Z_{in}} = \frac{v_1 - v_0}{Z_2} + \frac{v_1}{Z_1} \\ i_L &= i_0 - \frac{v_0 - v_1}{Z_2} \\ v_0 &= A(\omega)(v_i - v_1) - Z_{out}i_0 = Z_L i_L \end{aligned} \right\} \quad (4.4.1)$$

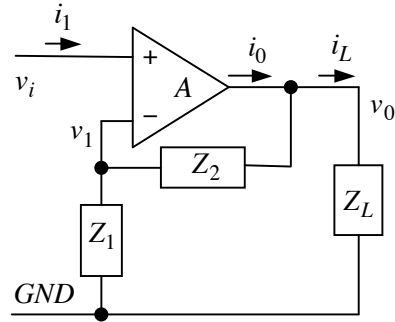


図 4-24 非反転増幅器

これより

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= G(\omega)v_i \\ G(\omega) &= \frac{A(\omega)(1 + Z_2/Z_1) + Z_{out}/Z_{in}}{1 + Z_2/Z_1 + Z_2/Z_{in} + A(\omega) + Z_{out}\{1/Z_L + (1 + Z_2/Z_L)(1/Z_1 + 1/Z_{in})\}} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.2)$$

となる。ここで $|Z_{out}/Z_{in}| \ll 1$, $|Z_{out}/Z_1| \ll 1$, $|Z_{out}/Z_L| \ll 1$ とすると

$$\left. \begin{aligned} G(\omega) &= \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) \frac{\beta A(\omega)}{1 + \beta A(\omega)} \\ \beta &= \frac{1}{1 + Z_2(1/Z_1 + 1/Z_{in})} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.3)$$

と近似され、入力インピーダンスは

$$Z_i = \frac{v_i}{i_1} = \frac{A(\omega)}{G(\omega)} Z_{in} \quad (4.4.4)$$

となる。図 4-25 に示すように非反転増幅器の入力インピーダンス Z_i は、オープンループゲインのカットオフ周波数以上では周波数に反比例して減少するので、高入力インピーダンスが必要な場合には注意が必要である。

なお、 Z_{in} は増幅器自身の非反転入力と反転入力との間のインピーダンスであるが、実際の増幅器では入力

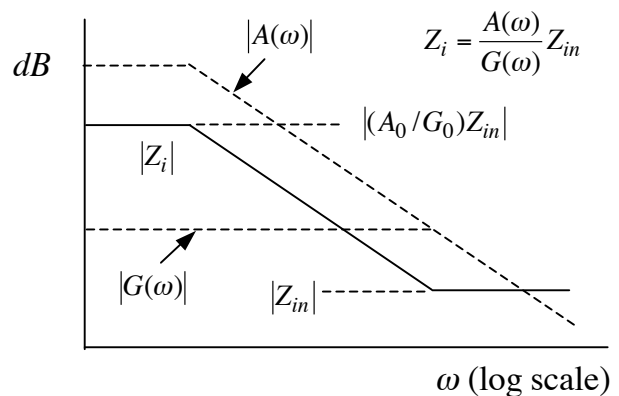


図 4-25 フィードバック増幅器の入力インピーダンス

バイアス回路等によりそれぞれの入力とグランドの間にインピーダンス Z_+ , Z_- が存在する。これらのインピーダンスはフィードバックには影響されず、実際の入力インピーダンスは

$$Z_i = \left(\frac{A(\omega)}{G(\omega)} Z_{in} // Z_+ \right) \quad (4.4.5)$$

となる。オペアンプ IC 等のデータシートには通常 $Z_{in} // Z_+$ が記載されており、 Z_{in} と Z_{\pm} の区別はされていないので注意が必要である。さらに $|Z_2/Z_{in}| \ll 1$ では(4.4.3)式は

$$\left. \begin{aligned} G(\omega) &= \frac{A(\omega)}{1 + \beta A(\omega)} \\ \beta &= \frac{1}{1 + Z_2/Z_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.4.6)$$

となる。即ち、オープンループゲインが十分大きく $|\beta A(\omega)| \gg 1$ である周波数領域では

$$G(\omega) = \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \quad (4.4.7)$$

と近似でき、クローズドループゲインは Z_2/Z_1 のみで決まる。

出力インピーダンス Z_0 は

$$v_0 = \frac{Z_L}{Z_L + Z_{out}} v_0|_{Z_L \rightarrow \infty}$$

より

$$\begin{aligned} Z_0 &= Z_L \left(\frac{v_0|_{Z_L \rightarrow \infty}}{v_0} - 1 \right) \\ &= \frac{Z_{out}}{1 + \beta A(\omega) + \beta Z_{out} (1/Z_{in} + 1/Z_1)} \end{aligned}$$

したがって $|\beta Z_{out} (1/Z_{in} + 1/Z_1)| \ll 1$ ならば

$$\begin{aligned} Z_0 &= Z_{out} \frac{G(\omega)}{A(\omega)} \frac{1 + Z_2/Z_1 + Z_2/Z_{in}}{1 + Z_2/Z_1} \\ &= Z_{out} \frac{G(\omega)}{A(\omega)} \quad (|Z_2/Z_{in}| \ll 1) \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

となる。

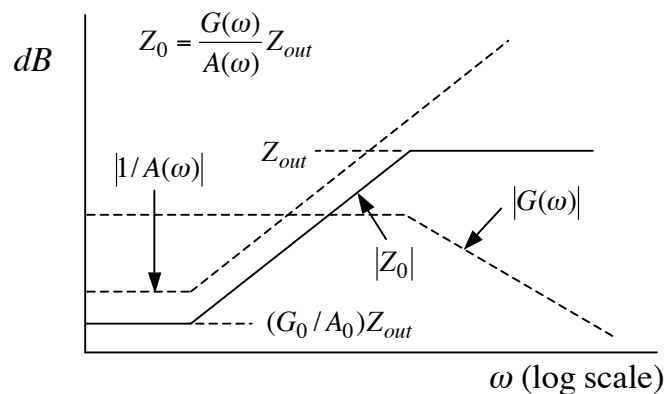


図 4-26 フィードバック増幅器の
出力インピーダンス