

1 章 基礎的事項

1-1 受動素子の性質

電子回路への導入としてまず簡単な受動素子の性質を概観する。

(a)RC 回路

(i) コンデンサー (Capacitance)

コンデンサーの記号は C と書き、単位は $F = \text{クーロン} / \text{V}$ である。コンデンサーの極板に蓄えられている電荷 Q は極板間の電圧 V に比例し

$$Q = CV \quad (1.1.1)$$

により静電容量 C が定義される。極板に流れ込む電流 I は

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} \quad (1.1.2)$$

である。

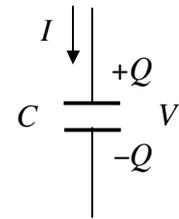


図 1-1 コンデンサー

(ii) 積分回路

電圧電流の関係は

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= IR + V_2 \\ I &= C \frac{dV_2}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3)$$

で与えられる。これより

$$\frac{dV_2}{dt} + \frac{V_2}{RC} = \frac{V_1}{RC} \quad (1.1.4)$$

$t = 0$ で $V_2 = 0$ 、 $t > 0$ で $V_1 = \text{const.}$ なる解は

$$V_2 = (1 - e^{-t/RC})V_1 \quad (1.1.5)$$

となる。 RC は積分回路の時定数と呼ばれる。また、 $t \leq 0$ で $V_1 = \text{const.}$ 、 $t > 0$ で $V_1 = 0$ のときは

$$V_2 = V_1 e^{-t/RC} \quad (1.1.6)$$

である。

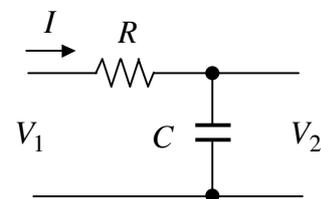


図 1-2 積分回路

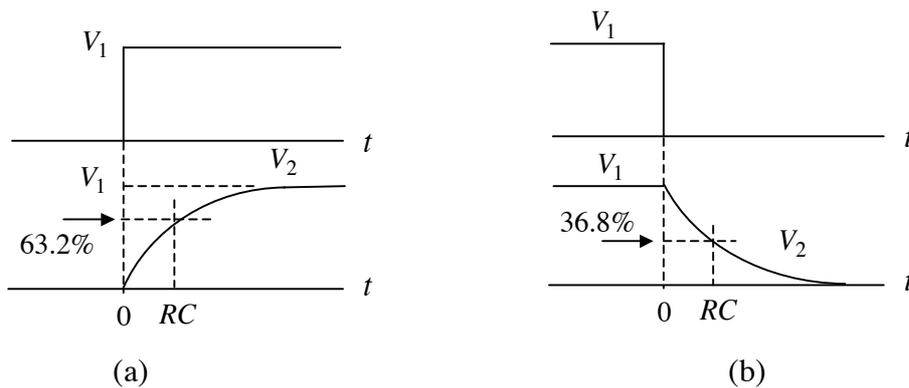


図 1-3 積分回路の応答

(iii) 定電流によるコンデンサーの充電

$$V = \frac{1}{C} \int_0^t I dt = \frac{It}{C} \quad (1.1.7)$$

より、コンデンサー両端の電圧は時間に比例して上昇する。これは三角波や鋸歯状波の発生に利用される。

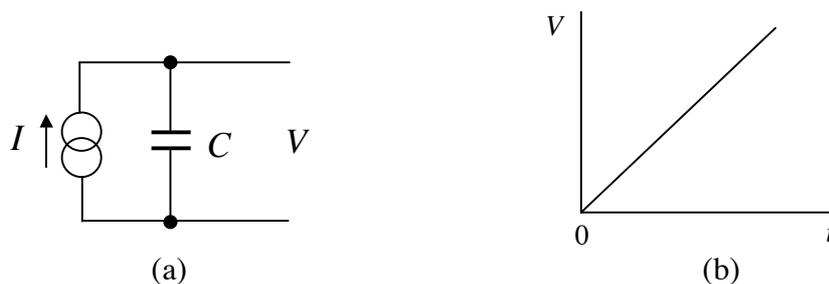


図 1-4 定電流によるコンデンサーの充電

(iv) 微分回路

$$\left. \begin{aligned} I &= C \frac{d(V_1 - V_2)}{dt} \\ V_2 &= RI \end{aligned} \right\} \quad (1.1.8)$$

より

$$\frac{dV_2}{dt} + \frac{V_2}{CR} = \frac{dV_1}{dt} \quad (1.1.9)$$

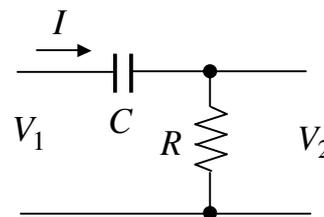


図 1-5 微分回路

従って、ステップ状入力の場合は、出力はつぎのようになる (図 1-6)。

$t < 0$ で $V_1 = 0$ 、 $t \geq 0$ で $V_1 \neq 0$

$$V_2 = V_1 e^{-t/RC} \quad (1.1.9)$$

$t < 0$ で $V_1 \neq 0$ 、 $t \geq 0$ で $V_1 = 0$

$$V_2 = -V_1 e^{-t/RC} \quad (1.1.10)$$

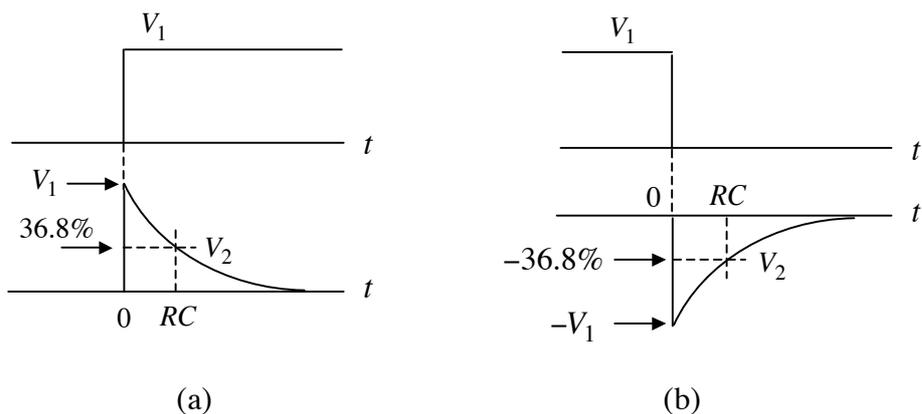


図 1-6 微分回路のステップ応答

パルス幅が T なるパルスに対する応答は
図 1-7 のようになる。ここで

$$\delta = \frac{\Delta V}{V_1} = 1 - e^{-T/RC} \quad (1.1.11)$$

をドゥループ (droop) と云う。

$T \ll RC$ の場合は

$$\delta \approx T/RC \quad (1.1.12)$$

と近似される。 RC を微分回路の時定数と
云う。

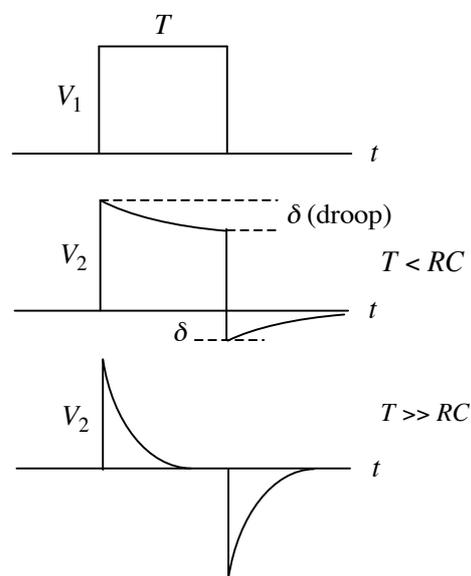


図 1-7 微分回路のパルスに対する応答

(b) LR 回路

(i) コイル

コイルに流れる電流を I とすると、コイル両端
の電圧は

$$V = L \frac{dI}{dt} \quad (1.1.13)$$

で与えられる。 L をインダクタンス (inductance)
と云う。単位は H (ヘンリー、 $1H = 1V \cdot sec / A$)
である。

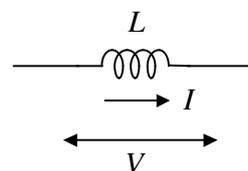


図 1-8 コイル

(ii) LR 積分回路

図 1-9 のような LR 回路を考える。V₁ を入力電圧、V₂ を出力電圧とすると

$$\left. \begin{aligned} V_1 - V_2 &= L \frac{dI}{dt} \\ V_2 &= RI \end{aligned} \right\} \quad (1.1.14)$$

より

$$\frac{dV_2}{dt} + \frac{R}{L}V_2 = \frac{R}{L}V_1 \quad (1.1.15)$$

これは、積分回路で 1/RC を R/L に置き換えたものと等価である。

次に図 1-10 のような LR 回路を考える。

$$\left. \begin{aligned} V_1 - V_2 &= RI \\ V_2 &= L \frac{dI}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.16)$$

より

$$\frac{dV_2}{dt} + \frac{R}{L}V_2 = \frac{dV_1}{dt} \quad (1.1.17)$$

これは、微分回路で 1/RC を R/L に置き換えたものと等価である。

以上のように、回路網の動作は一般に微分方程式で表わされるが、複雑な回路網の場合はいちいち微分方程式をとくことは事実上不可能である。そこで、次節に述べるように電圧、電流等を複素数で表わした交流理論で扱われる。交流理論は時間的に変化する電圧、電流のフーリエ振幅による表現そのものである。

1-2 交流理論

1-2-1 実効値

サイン波 (sinusoidal wave form) を前提として、交流電圧及び電流を

$$\left. \begin{aligned} v(t) &= V_m \cos \omega t \\ i(t) &= I_m \cos(\omega t - \theta) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.1)$$

とする。ここで $f = \omega/2\pi$ は周波数、 V_m, I_m は電圧、電流のピーク値、 θ は電圧と電流の位相差である。

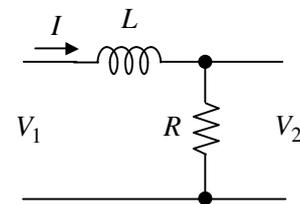


図 1-9 LR 積分回路

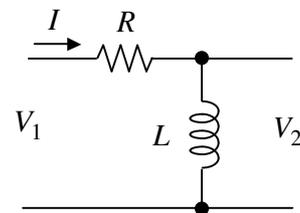


図 1-10 LR 微分回路

例1：インダクタンスを流れる電流と電圧は

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (1.2.2)$$

の定常解

$$i = \frac{V_m}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (1.2.3)$$

により与えられる。これより

$$I_m = V_m / \omega L, \quad \theta = \pi / 2 \quad (1.2.4)$$

例2：抵抗とインダクタンスの直列回路を流れる電流と電圧の関係は

$$v = L \frac{di}{dt} + Ri \quad (1.2.5)$$

である。この定常解は

$$\{V_m - I_m(\omega L \sin \theta + R \cos \theta)\} \cos \omega t - I_m(\omega L \cos \theta - R \sin \theta) \sin \omega t = 0$$

より

$$I_m = \frac{V_m}{R} \cos \theta, \quad \cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (1.2.6)$$

故に

$$\left. \begin{aligned} v(t) &= V_m \cos \omega t \\ i(t) &= \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \theta) \quad (\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.7)$$

次に実効値を定義する。

$$\left. \begin{aligned} V^2 &= \overline{v^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v^2(t) dt \\ I^2 &= \overline{i^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i^2(t) dt \end{aligned} \right\} \quad (1.2.8)$$

で定義される V 及び I を実効値と云う。 $v(t)$ 、 $i(t)$ が周期 T の周期関数のときは

$$\left. \begin{aligned} V^2 &= \overline{v^2(t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v^2(t) dt \\ I^2 &= \overline{i^2(t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i^2(t) dt \end{aligned} \right\} \quad (1.2.9)$$

$T = 1/f = 2\pi/\omega$ として (1.2.1)式を(1.2.9)式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} V^2 &= \overline{V_m^2 \cos^2 \omega t} = \frac{V_m^2}{2} \\ I^2 &= \overline{I_m^2 \cos^2(\omega t - \theta)} = \frac{I_m^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.10)$$

即ち交流電圧、電流の実効値は

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}, \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (1.2.11)$$

で与えられる。

次に電力を考える。電力には瞬時電力

$$P(t) = v(t)i(t) \quad (1.2.12)$$

と、実効電力（1周期間の平均電力）

$$\begin{aligned} P &= \overline{v(t)i(t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v(t)i(t) dt \\ &= \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

がある。ここで $\cos \theta$ を力率（power factor）と云う。

1-2-2 複素数表示

電圧合成を考える。

$$v_1 = V_1 \cos(\omega t + \theta_1), \quad v_2 = V_2 \cos(\omega t + \theta_2) \quad (1.2.14)$$

の合成電圧

$$v = v_1 + v_2 \quad (1.2.15)$$

を

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (1.2.16)$$

と書くと

$$\left. \begin{aligned} V_m &= \sqrt{V_1^2 + 2V_1V_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + V_2^2} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{V_1 \sin \theta_1 + V_2 \sin \theta_2}{V_1 \cos \theta_1 + V_2 \cos \theta_2} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.17)$$

である。以上のような合成は、複素平面上のベクトルで考えると考え易い。例えば電圧

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (1.2.18)$$

を

$$v = \operatorname{Re} [V_m e^{j\omega t + \theta}] \quad (1.2.19)$$

と書き

$$\begin{aligned} \dot{v} &= V_m e^{j\omega t + \theta} \\ &= V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \sin(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

を複素交流電圧と云う。複素数で電圧、電流を表記することを複素表示と云う。図 1-11 のように実部を x 軸に、虚部を y 軸にとると、複素交流電圧 \dot{v} は x-y 平面内を角速度 ω で回転する長さ V_m のベクトルで表わされ、 $t=0$ での方向が θ である。ここで、x-y 座標系に対して角速度 ω で回転する X-Y 座標系を考えると、X-Y 座標系ではベクトル \dot{v} は固定したベクトルとなり、その成分は $X = V_m \cos\theta$ 、 $Y = V_m \sin\theta$ である。X 軸を実軸、Y を虚軸とすると、これは $\dot{V} = V_m e^{j\theta}$ のベクトル表示であり、回転する X-Y 座標系では複素交流電圧は長さが V_m で偏角 θ を持つベクトルで表現される。通常 $\dot{V} = V_m e^{j\theta}$ を交流ベクトルまたはフェイザ (phasor) と呼び、X-Y 座標を固定して (X-Y 座標に乗って) 表示する。なお、単に複素表示と云う場合は交流ベクトルを意味することが多い。以下、とくにことわらない限り交流ベクトルを複素表示という。

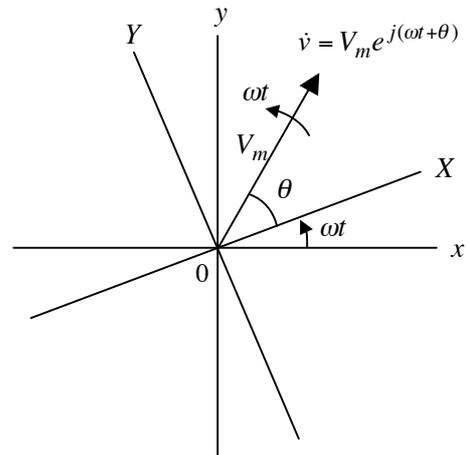


図 1-11 交流のベクトル表示

上で述べた電圧合成を交流ベクトルで考えると、 v_1 、 v_2 を表わす交流ベクトルは

$$\dot{V}_1 = V_m e^{j\theta_1}, \quad \dot{V}_2 = V_m e^{j\theta_2} \quad (1.2.21)$$

であり、これらを平行四辺形の法則でベクトル合成した

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \quad (1.2.22)$$

は \dot{v} の交流ベクトルであることが分かる。また、交流電流のベクトル表示も全く同様である。回路理論ではベクトル表示を前提として議論するのが通常である。

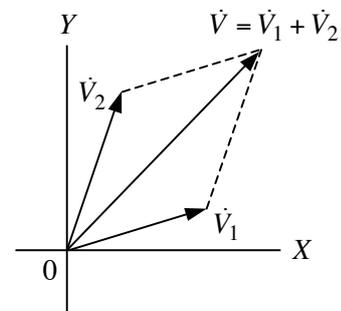


図 1-12 交流ベクトルの和

1-2-3 インピーダンス

インピーダンスとは直流におけるオームの法則を複素表示の電圧、電流に適用したときの抵抗に相当するもので、一般に複素数であり Z と表記される。

$$V = ZI \quad (1.2.23)$$

ちなみに $z = v(t)/i(t)$ とすると、 $i(t) = 0$ の瞬間は z が無限大になるため、 z を定義できない。

$$\left. \begin{aligned} v(t) &= V \cos \omega t \\ i(t) &= I \cos(\omega t - \theta) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.24)$$

とすると、これらの複素表示は

$$\left. \begin{aligned} \dot{V} &= V \\ \dot{I} &= I \cos \theta - jI \sin \theta = I e^{-j\theta} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.25)$$

であることから、インピーダンスは

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{V}{I} e^{j\theta} \quad (1.2.26)$$

と定義される。 $\text{Re}(Z) = (V/I) \cos \theta$ を抵抗、 $\text{Im}(Z) = (V/I) \sin \theta$ をリアクタンスと呼ぶ。

また、の逆数

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V} e^{-j\theta} \quad (1.2.27)$$

をアドミッタンスと云い、 $\text{Re}(Y) = (I/V) \cos \theta$ をコンダクタンス、 $\text{Im}(Y) = -(I/V) \sin \theta$ をサセプタンスと呼ぶ。一般に

$$Z = R + jX, \quad Y = G + jB \quad (1.2.28)$$

と書き、 G 、 B は

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (1.2.29)$$

で与えられる。

インピーダンス Z_1 、 Z_2 を直列接続すると合成直列インピーダンス及びアドミッタンスは

$$Z = Z_1 + Z_2, \quad \frac{1}{Y} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} \quad (1.2.30)$$

となり、並列接続では合成並列インピーダンスは

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}, \quad Y = Y_1 + Y_2 \quad (1.2.31)$$

となる。すなわち、インピーダンス合成は抵抗の合成則と同じになる。

インピーダンス Z に加わる電圧と電流の関係を考える。

$$\left. \begin{aligned} Z &= |Z| e^{j\theta} \\ v(t) &= |V| \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (1.2.32)$$

とすると、流れる電流は

$$i(t) = \operatorname{Re}(Ie^{j\omega t}) = \operatorname{Re}\left(\frac{|V|}{|Z|}e^{-j\theta}e^{j\omega t}\right) \quad (1.2.33)$$

$$= \frac{|V|}{|Z|}\cos(\omega t - \theta)$$

となる。すなわちインピーダンスの位相 θ は、電圧に対する電流の遅れ位相を表わす。 V 、 I 、 Z の位相関係を複素平面上に書くと図 1-13 のようになる。

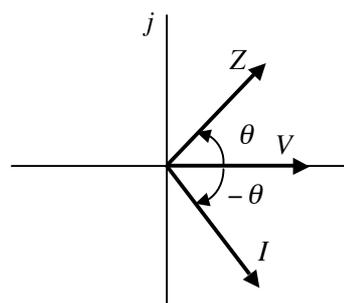


図 1-13 V 、 I 、 Z の位相関係

(a) コイル及びコンデンサーを含む回路のインピーダンス

例 1 : コンデンサーのインピーダンスとアドミッタンス

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (1.2.34)$$

より

$$I = j\omega CV \quad (1.2.35)$$

従って、インピーダンス及びアドミッタンスは

$$Z = \frac{1}{j\omega C}, \quad Y = j\omega C \quad (1.2.36)$$

となる。

例 2 : コイルのインピーダンスとアドミッタンス

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (1.2.37)$$

より

$$V = j\omega LI \quad (1.2.38)$$

従って

$$Z = j\omega L, \quad Y = \frac{1}{j\omega L} \quad (1.2.39)$$

例 3 : 抵抗とコイルの直列回路のインピーダンスとアドミッタンス

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (1.2.40)$$

より

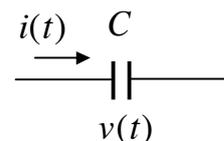


図 1-14 コンデンサー

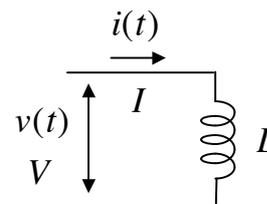


図 1-15 コイル

$$V = (R + j\omega L)I \quad (1.2.41)$$

従って

$$Z = R + j\omega L \quad (1.2.42)$$

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (1.2.43)$$

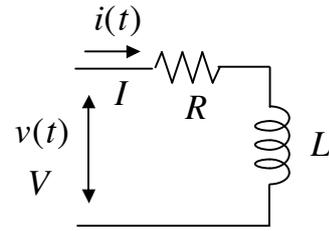


図 1-16 抵抗とコイルの直列回路

例 4 : 抵抗とコンデンサーの直列回路のインピーダンスとアドミッタンス

コンデンサーに加わる電圧は $v(t) - Ri(t)$ であるから

$$i(t) = C \frac{d\{v(t) - Ri(t)\}}{dt} \quad (1.2.44)$$

より

$$I = j\omega CV - j\omega CRI \quad (1.2.45)$$

従って

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} \quad (1.2.46)$$

$$Y = \frac{1}{R + 1/j\omega C} = \frac{R + j/\omega C}{R^2 + 1/\omega^2 C^2} \quad (1.2.47)$$

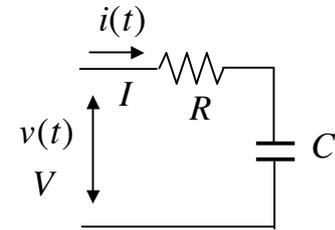


図 1-17 抵抗とコンデンサーの直列回路

(b) 共振回路のインピーダンスとアドミッタンス

(i) 直列共振回路

図 1-18 に示す直列共振回路のインピーダンス及びアドミッタンスは

$$\left. \begin{aligned} Z &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ Y &= \frac{1}{R + j\omega L + 1/j\omega C} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.48)$$

で与えられる。Zを表わす複素平面上のベクトルは図 1-19 の破線上にあり、Zの大きさ即ち絶対値 $|Z|$ は $\omega = 1/\sqrt{LC}$ で最小になる。また複素平面上のYベクトルは

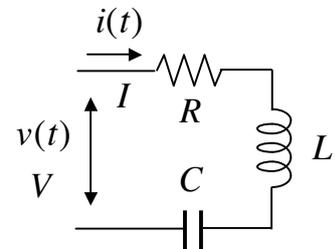


図 1-18 直列共振回路

$$\left| Y - \frac{1}{2R} \right| = \frac{1}{2R} \quad (1.2.49)$$

を満たすことより、図 1-20 のように中心を $(1/2R, j0)$ とする半径 $1/2R$ の円周上にあることが分かる。 $|Y|$ は $\omega = 1/\sqrt{LC}$ で最大となる。図 1-21、1-22 に $|Z|$ 及び $|Y|$ の周波数依存性を示す。(1.2.48) 式の Y は

$$Y = \frac{1}{R} \frac{j\omega/Q\omega_0}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} \quad (1.2.50)$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1.2.51)$$

と書き直すことができる。 Q は Q 値と呼ばれる共振の鋭さを表わす量で、大きいほど鋭いピークとなる。アドミッタンスの絶対値がピーク値 $1/R$ の $1/\sqrt{2}$ ($-3dB$) となる二つの周波数を ω_1 、 ω_2 とすると、 $\omega_{1,2} = \omega_0(\sqrt{1+Q^2/4} \pm Q/2)$ であり、 $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0/Q$ となる。図 1-19、1-20 から分かるように、 ω_1 、 ω_2 は Z 及び Y の偏角が $\pm 45^\circ$ となる周波数に対応する。インピーダンスの絶対値は図 1-21 のように $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ で最小値 R となり、絶対値が最小値の $\sqrt{2}$ 倍になる周波数の差は同じく Q 値を与える。

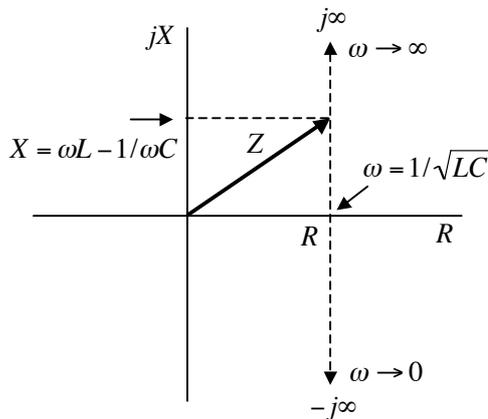


図 1-19 インピーダンスベクトル

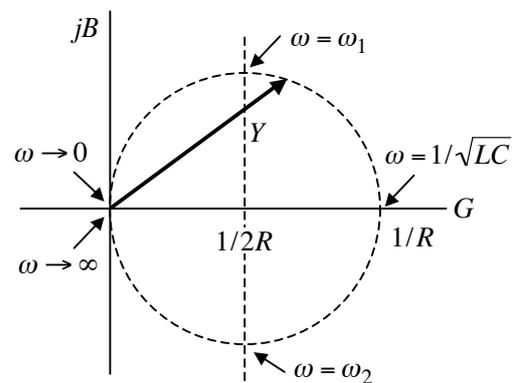


図 1-20 アドミッタンスベクトル

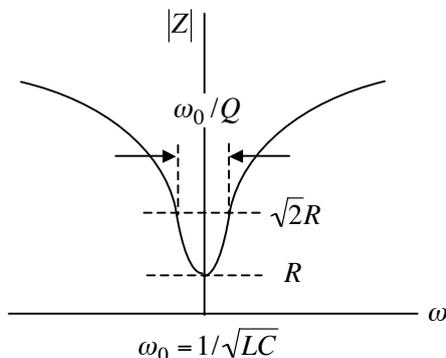


図 1-21 インピーダンスの絶対値

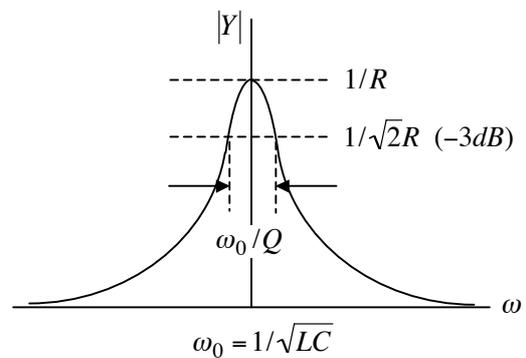


図 1-22 アドミッタンスの絶対値

(ii) 並列共振回路

図 1-23 に示す並列共振回路のインピーダンス及びアドミッタンスは

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{1}{1/R + j\omega C + 1/j\omega L} \\ Y &= \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.52)$$

で与えられる。Z及びYを表わす複素平面上のベクトルは図 1-24、1-25 のようになる。Zは

$$Z = R \frac{j\omega/Q\omega_0}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} \quad (1.2.53)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= 1/\sqrt{LC} \\ Q &= \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.54)$$

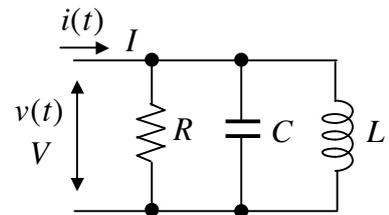


図 1-23 並列共振回路

と書き直すことができ、それらの絶対値は図 1-26 及び図 1-27 のようになる。

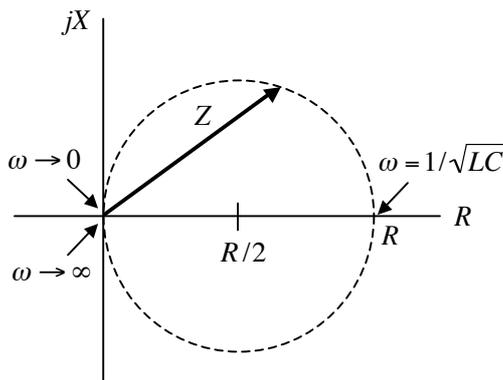


図 1-24 インピーダンスベクトル

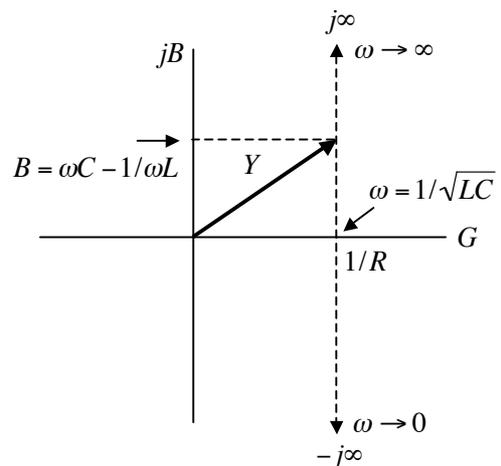


図 1-25 アドミッタンスベクトル

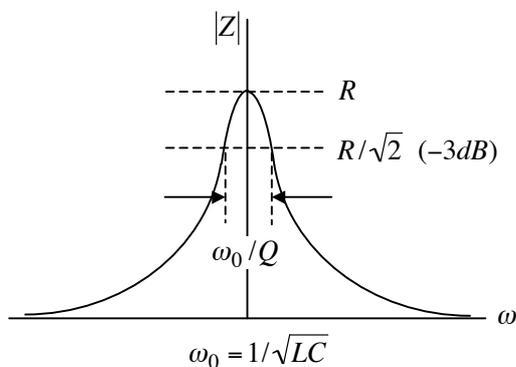


図 1-26 インピーダンスの絶対値

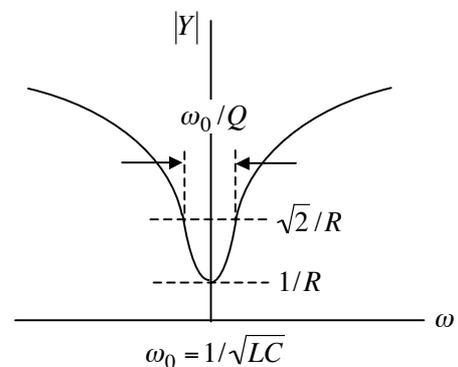


図 1-27 アドミッタンスの絶対値

補遺：フーリエ変換と複素表示

フーリエ変換は

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$V(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j\omega t} dt, \quad I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i(t)e^{-j\omega t} dt$$

で定義され、フーリエ振幅 $V(\omega)$, $I(\omega)$ は複素振幅を表わす。また

$$V(\omega) = Z(\omega)I(\omega), \quad z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

とすると

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega Z(\omega')e^{j\omega'(t-\tau)} I(\omega)e^{j\omega\tau} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t-\tau)i(\tau)d\tau \end{aligned}$$

1-2-4 周波数伝達関数（周波数特性関数）

回路網の入出力の関係を表わす微積分方程式により、入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ のフーリエ振幅を関係づける周波数伝達関数（周波数特性関数）が与えられる。集中定数回路網においては、入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ の関係を表わす微分方程式は一般に次の形をしている。

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 \quad (1.2.55)$$

ここで因果律により

$$n \geq m \quad (1.2.56)$$

である。 $X(\omega)$ 、 $Y(\omega)$ を $x(t)$ 、 $y(t)$ の交流ベクトルとして

$$\begin{aligned} y(t) &= Y(\omega)e^{j\omega t} \\ x(t) &= X(\omega)e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (1.2.57)$$

と置いて上式に代入すると

$$\begin{aligned} & \{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0\}Y(\omega) \\ & = \{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0\}X(\omega) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= G(j\omega)X(\omega) \\ G(j\omega) &= \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0} \end{aligned} \quad (1.2.58)$$

を得る。 $G(\omega)$ は入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ のフーリエ振幅を関係づける関数であり、周波数特性関数又は周波数伝達関数と呼び、分母の ω の次数が n の場合、 $G(\omega)$ を n 次系の周波数特性関数と云う。また系に分布定数回路等による時間遅延要素が含まれる場合にも周波数特性関数が定義されるが、有限次数の特性関数とはならない（ラプラス変換の項参照）。

例として微分回路（図 1-28）の周波数特性関数を求める。

$$\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{CR} = \frac{dv_1}{dt} \quad (1.2.59)$$

より、 V_1 、 V_2 を複素表示電圧（交流ベクトル）とすると

$$j\omega V_2 + \frac{V_2}{RC} = j\omega V_1 \quad (1.2.60)$$

となり

$$V_2 = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} V_1 \quad (1.2.61)$$

を得る。これより周波数特性関数は

$$G(j\omega) = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} \quad (1.2.62)$$

で与えられる。

以降、電圧電流は特に断らない限り複素表示と考える。また、 $t=0$ から $x(t) = X(\omega)e^{j\omega t}$ なる信号が回路網に入力された場合、一般に(1.2.55)式の解は

$$y(t) = Y(\omega)e^{j\omega t} + (\text{transient term})$$

となる。ここで **transient term**（過渡項）は初期値によって生ずる項であるが、十分時間を経た後は過渡項は 0 となり、定常項 $Y(\omega)e^{j\omega t}$ のみが残る。即ち、周波数特性関数は過渡現象が収まった後の定常状態における系の応答を記述するものである（ラプラス変換の項を参照）。

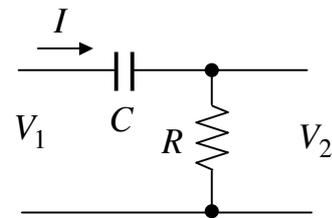


図 1-28 微分回路

1-3 簡単な周波数特性関数の性質

(a) 1次系

1次系の簡単な例として積分回路を考える。前節と同様にして図 1-29 の積分回路の周波数特性関数

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega CR} \quad (1.3.1)$$

が求まる。 $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\theta}$ の振幅 $|G(j\omega)|$ 及び位相 θ

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \quad (1.3.2)$$

$$\theta = -\tan^{-1}(\omega CR)$$

を図示すると図 1-30、1-31 のようになる。ここで $\omega_0 = 1/RC$ である。

またパルス応答は § 1-1 (ii) で述べている。パルス応答の立ち上がり、立ち下がり は時定数 RC の指数関数で与えられる。

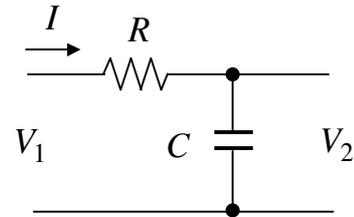


図 1-29 積分回路

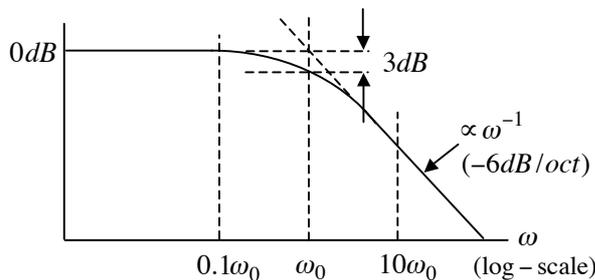


図 1-30 振幅特性

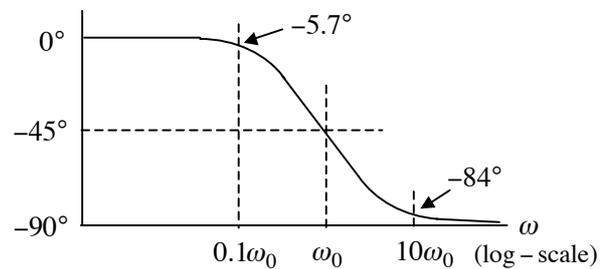


図 1-31 位相特性

(b) 2次系

2次系の例として2次のローパスフィルター (LPF) 及びバンドパスフィルター (HPF) を考える。

(i) 2次 LPF

図 1-32 に示す回路の入力、出力の関係は

$$\begin{aligned} V_1 &= j\omega LI + V_2 \\ I &= V_2/R + j\omega CV_2 \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

を解くことで与えられる。これより周波数

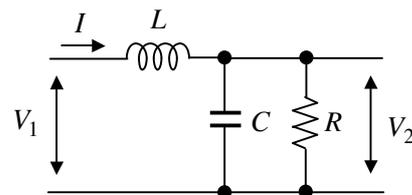


図 1-32 2次 LPF

特性関数 $G(j\omega)$ は

$$\left. \begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1 + 2j\xi\omega/\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} \\ \omega_0 &= 1/\sqrt{LC}, \quad \xi = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (= \frac{1}{2Q}) \end{aligned} \right\} \quad (1.3.4)$$

となる。ここで ω_0 は共振周波数、 ξ はダンピング定数であり、 Q と $\xi = 1/2Q$ なる関係にある。 $G(j\omega)$ の位相は

$$\omega \ll \omega_0 : G(j\omega) \rightarrow 1 \quad \arg G(j\omega) \rightarrow 0^\circ$$

$$\omega \gg \omega_0 : G(j\omega) \rightarrow -1 \quad \arg G(j\omega) \rightarrow -180^\circ$$

となり、 $G(j\omega)$ のベクトル図は図 1-34 のようになる。

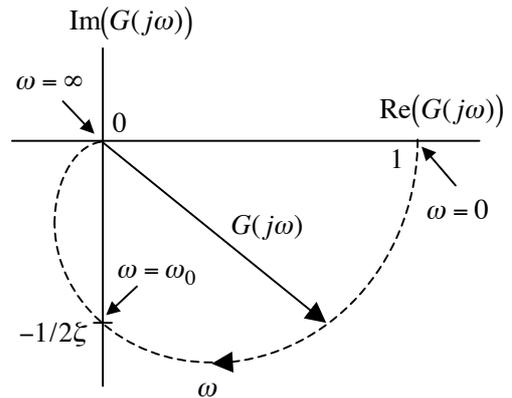


図 1-33 $G(j\omega)$ のベクトル図

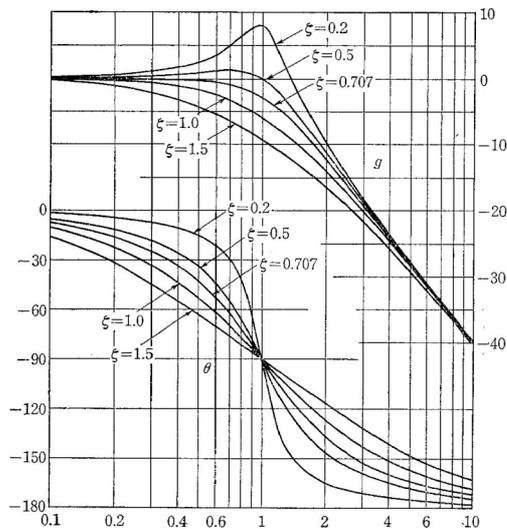


図 1-34 $|G(j\omega)|$ 及び位相 θ

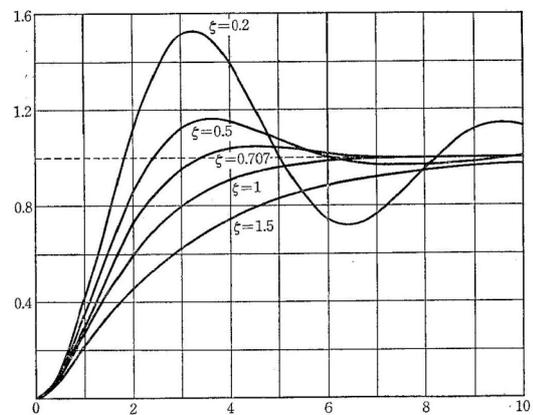


図 1-35 ステップ入力に対する時間応答

$\xi < 1$ ではステップ入力に対して出力が振動する。このとき周波数特性は $\omega = \omega_0$ にピークを生ずる。 $\xi = 1 (Q = 0.5)$ は振動を生じない境目であり臨界制動 (critical damping) と云う。臨界制動では周波数特性にピークを生じない。 $\xi > 1$ では振動を生じないが ξ が大きくなるとともに、立ち上がりが遅くなる。また周波数特性は ω_0 の手前からなだらかに減衰する。これを過制動 (over damping) と云う。なお、実用的には $\xi = 1/\sqrt{2} (Q = 1/\sqrt{2})$ を臨界制動と云う場合が多い。このときのステップ応答は立ち上

がり部で1回だけ1を超えるが、その後振動はしない。また周波数特性にピークは生じない。

(ii) 2次 BPF

図 1-36 に示す回路の周波数特性関数は

$$\frac{V_2}{R} = \frac{V_1 - V_2}{j\omega L + 1/j\omega C} \quad (1.3.5)$$

より

$$G(j\omega) = \frac{2j\xi\omega/\omega_0}{1 + 2j\xi\omega/\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} \quad (1.3.6)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (1.3.7)$$

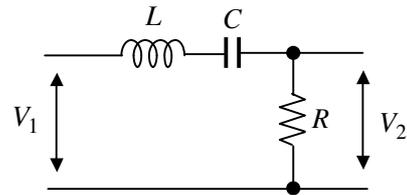


図 1-36 2次 BPF

となる。ここで

$$\left| G(j\omega) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \quad (1.3.8)$$

より、 $G(j\omega)$ を表わす複素平面上ベクトルは、中心が $(1/2, j0)$ 、半径が $1/2$ の円周上にあることが分かる (図 1-37)。振幅 $|G(j\omega)|$ の周波数特性を図 1-38 に示す。 $Q = 1/2\xi$ が大きくなるほど鋭い共振特性となる。 $|G(j\omega)|$ は $\omega = \omega_0$ で最大値 $|G(j\omega_0)| = 1$ となり、位相が $\pm 90^\circ$ となる周波数 ω_2 、 ω_1 で $|G(j\omega_0)|/\sqrt{2}$ ($-3dB$) となる。 ω_1 、 ω_2 は

$$G(j\omega) = (1 \pm j)/2 \quad (1.3.9)$$

より求められ

$$\omega_1 = \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 + 1} \right), \quad \omega_2 = \omega_0 \left(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1} \right) \quad (1.3.10)$$

で与えられる。これより 1-2-3 節の例 5 で述べた関係式

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\xi\omega_0 = \omega_0/Q \quad (1.3.11)$$

が得られる。なお、 $Q \gg 1$ のときは

$$\omega_1 = \omega_0(1 - 1/2Q), \quad \omega_2 = \omega_0(1 + 1/2Q) \quad (1.3.12)$$

であり、 $Q \ll 1$ のときは

$$\omega_1 = \omega_0 Q = \frac{1}{CR}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \quad (1.3.13)$$

である。なお、単に周波数特性と云う場合は振幅周波数特性を云う。

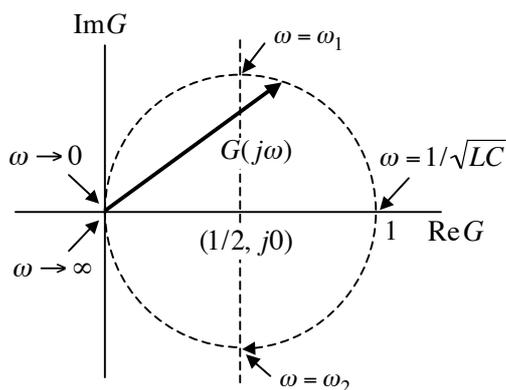


図 1-37 $G(j\omega)$ のベクトル図

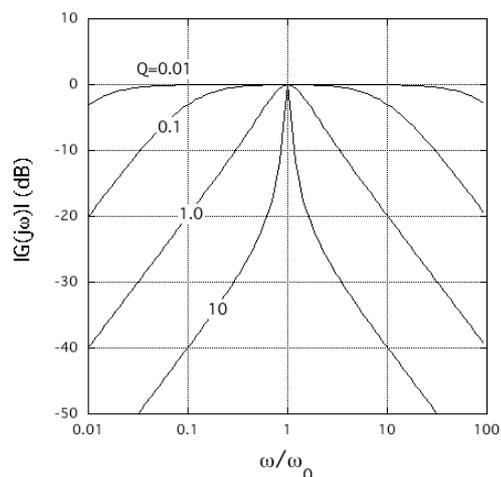


図 1-38 $G(j\omega)$ の振幅特性

1-4 四端子回路

(a) 基本行列

図 1-39 に示すように、線形回路網への入出力電圧を V_1 、 V_2 、入力端子に流れ込む電流を I_1 、出力端から流れ出す電流を I'_2 として

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= AV_2 + BI'_2 \\ I_1 &= CV_2 + DI'_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.4.1)$$

と書き、基本四端子定数 (A, B, C, D) を定義する。
行列式で書けば

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I'_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.2)$$

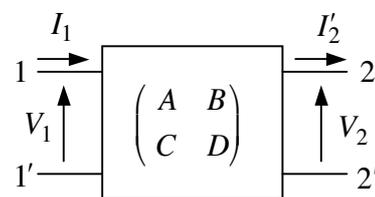


図 1-39 基本四端子回路

となる。回路網が能動素子を含まないときは可逆定理 (reciprocity theorem)

$$AD - BC = 1 \quad (1.4.3)$$

が成立する。四端子定数で表現した回路網を四端子回路と呼ぶ。

図 1-40 のように 2 つの四端子回路を従属接続すると

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3 \\ I'_3 \end{pmatrix} \quad (1.4.4)$$

より、全体の四端子回路は

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.5)$$

となる。基本四端子定数 (A, B, C, D) で定義される行列を基本行列又は F-matrix と云う。

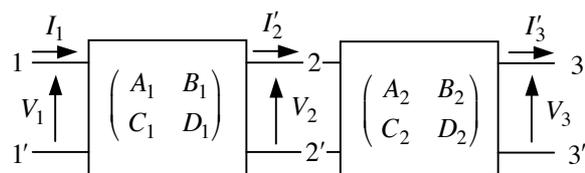


図 1-40 四端子回路の従属接続

(b) インピーダンス行列及びアドミッタンス行列

I_2 の代わりに回路網の出力に流れ込む電流を $I_2 (= -I_2')$ として、入力出力関係を

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.6)$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.7)$$

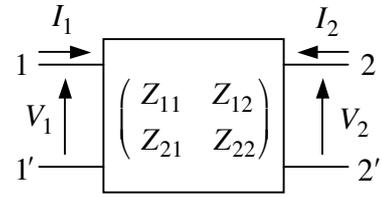


図 1-41 インピーダンス行列

と書いたとき $\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$ をインピーダンス

行列、 $\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$ をアドミッタンス行列と云

い、互いに逆行列の関係にある。

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}^{-1} \quad (1.4.8)$$

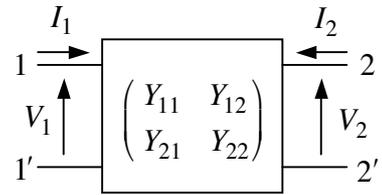


図 1-42 アドミッタンス行列

reciprocity theorem は

$$Z_{12} = Z_{21}, \quad Y_{12} = Y_{21} \quad (1.4.9)$$

で与えられ、基本行列との関係は

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A/C & 1/C \\ 1/C & D/C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D/B & -1/B \\ -1/B & A/B \end{pmatrix} \quad (1.4.10)$$

となる。

(c) ハイブリッド行列 (H-matrix)

回路網への入出力を

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (1.4.11)$$

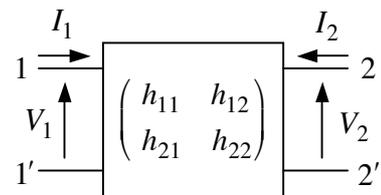


図 1-43 ハイブリッド行列

で定義するとき、行列 (h_{ij}) をハイブリッド

行列または H-matrix、行列要素 h_{ij} を h パラメーターと云い、トランジスタを四端子表現する際によく用いられる。基本行列との関係は

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B/D & (AD-BC)/D \\ -1/D & C/D \end{pmatrix} \quad (1.4.12)$$

で与えられ、Reciprocity theorem は

$$h_{12} = -h_{21} \quad (1.4.13)$$

である。なお、能動素子であるトランジスタでは $h_{12} \neq -h_{21}$ である。h パラメーターの物理的意味は

$$h_{11} = 1/Y_{11} = (V_1/I_1)_{V_2=0} \quad : \text{出力端短絡入力インピーダンス}$$

$$h_{22} = 1/Z_{22} = (I_2/V_2)_{V_1=0} \quad : \text{入力端開放出力アドミッタンス}$$

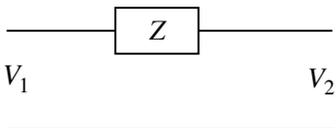
$$h_{12} = (V_1/V_2)_{I_1=0} \quad : \text{入力端開放電圧逆伝達率}$$

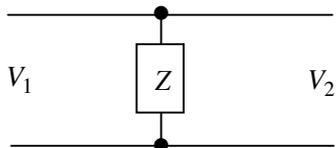
$$-h_{21} = (-I_2/I_1)_{V_2=0} \quad : \text{出力端短絡電流伝達率}$$

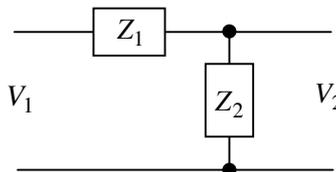
である。なお、トランジスタでは h パラメーターは

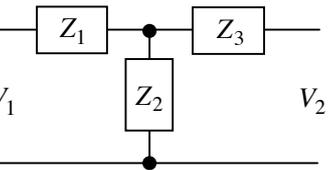
$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_i & h_r \\ h_f & h_o \end{pmatrix} \quad (1.4.14)$$

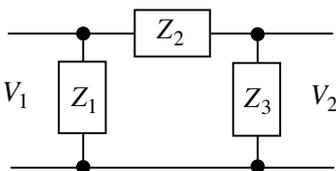
と書かれる。以下にいくつかの四端子回路網の基本行列を挙げる。

直列素子  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1.4.15)

並列素子  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{pmatrix}$ (1.4.16)

L型回路  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + Z_1/Z_2 & Z_1 \\ 1/Z_2 & 1 \end{pmatrix}$ (1.4.17)

T型回路  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + Z_1/Z_2 & (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1)/Z_2 \\ 1/Z_2 & 1 + Z_3/Z_2 \end{pmatrix}$ (1.4.18)

π 型回路  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + Z_2/Z_3 & Z_2 \\ (Z_1 + Z_2 + Z_3)/Z_1Z_3 & 1 + Z_2/Z_1 \end{pmatrix}$ (1.4.19)