

第1章 線型応答系

線型応答系は、これから学ぶ信号処理や制御の基礎をなす理論である。線型システムは時間領域で考える場合と周波数領域で考える場合の2通りのとらえ方がある。電子回路では周波数領域で考えることが多い。たとえばインピーダンスや伝達関数は周波数領域で用いる概念である。これらの概念の基本について説明する。

1.1 線型の定義

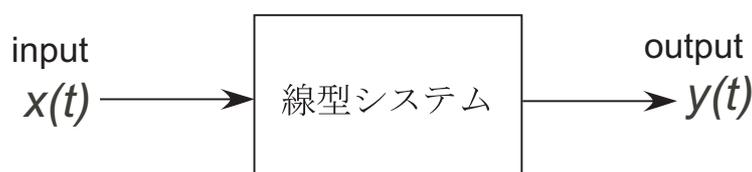


図 1.1: 線型システムの入出力

図 1.1 のような入出力システムにおいて、重ね合わせの原理が成立するとき、これを線型システムとよぶ。つまり以下のような関係が成り立つ場合である。

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow y_1 \\ x_2 \rightarrow y_2 \end{cases} \\ \implies \\ ax_1 + bx_2 \rightarrow ay_1 + by_2$$

1.2 線型・非線型

たとえば、真空中の電磁気学は広い範囲で重ねあわせが成り立つ (Maxwell 方程式)。よって電磁気学、電気回路はほとんど線型である。しかし、電磁気でも強誘電体や強磁性体では非線型である。また、振り子運動、弾性振動等多くが非線型を示す。非線型な関係であっても、ある1点 (x_0, y_0) のごく近傍では線型 (直線) とみなせることが多い。微小変位、微小振動などよばれるのは、このような $\Delta x \rightarrow \Delta y$ が線型関係をみたすような変動である。このようなことから、線型システムは実用的な適用範囲が広い。
例: トランジスタ

1.3 分布定数系・集中定数系

線型系は大きく分けて、分布定数系と集中定数系に分類される。分布定数系は、物理的変化をする媒質が空間的に連続的に分布している場合である。これは弾性論や、流体力学の連続体の物理の中にもあらわれる。一方、集中定数系は離散的な素子が集まった系である。棒の伸縮基本振動モードについて考える。この棒の位置 x における時刻 t の振動は次式であらわされる。

$$u(x, t) = A \sin \frac{\pi x}{\ell} \cos \omega_0 t \quad (1.1)$$

このように、棒の各点によって位相が異なる。これが分布定数系としてみた場合である。しかし、棒の1点に注目すると（たとえば端の $x = \ell/2$ ）その振動は $\xi(t) = A \cos \omega_0 t$ となり、集中定数系として扱うことができる。 $\xi(t)$ の満たすべき方程式は次のように書ける。ここで ω_0 は共振角周波数、 m は換算質量、 $f(t)$ は外力である。

$$m \left(\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi \right) = f(t) \quad (1.2)$$

さらに一般化して減衰のある系を考えると、 ξ の満たすべき方程式は

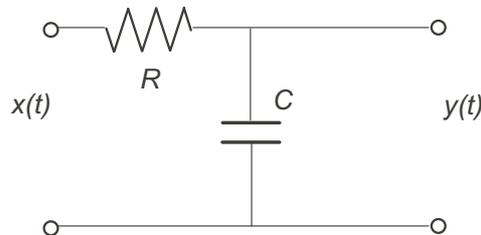
$$m \left(\ddot{\xi} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi \right) = f(t) \quad (1.3)$$

となる。ここで Q は Q 値とよばれ、共振の鋭さをあらわす定数である。この式は減衰のある調和振動子をあらわしていて、やはり $f(t) \rightarrow \xi(t)$ の関係が線型系を示している。

次は集中定数系の例である。

1.3.1 例題：RC 積分回路

図のような RC 積分回路の入力側の電圧を $x(t)$ 、出力側の電圧を $y(t)$ としたとき、 $x(t) \rightarrow y(t)$ は線型の関係にある。この関係式を求めよ。ただし、出力端は開放である。



図：1.3.1

1.4 フーリエ変換

フーリエ変換は時間領域であらわした事象を周波数領域での表現に変換するものである。

$$\begin{aligned} x(t) &\longleftrightarrow X(\omega) \\ \text{時間領域} &\longleftrightarrow \text{周波数領域} \end{aligned}$$

$$\text{フーリエ変換、FT (Fourier Transformation) : } X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.4)$$

$$\text{逆フーリエ変換、IFT (Inverse Fourier Transformation) : } x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.5)$$

以上を記号的にあらわすと次のようになる。

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{\text{FT}} X(\omega) \\ x(t) &\xleftarrow{\text{IFT}} X(\omega) \end{aligned}$$

$x(t), X(\omega)$ に関して、Parseval の公式が成立する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (1.6)$$

以下はフーリエ変換のいくつかの基本的性質である。

表 1.1: フーリエ変換の基本的性質

$x(t)$	$X(\omega)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$i\omega X(\omega)$
$\int^t x(t)dt$	$\frac{X(\omega)}{i\omega}$
1	$\delta(\omega)$
$\delta(t)$	$\frac{1}{2\pi}$

ここで $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数であり、次で定義される超関数の 1 つである。

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} dt \quad (1.7)$$

$\delta(x)$ は次のような性質をもつ。

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (1.9)$$

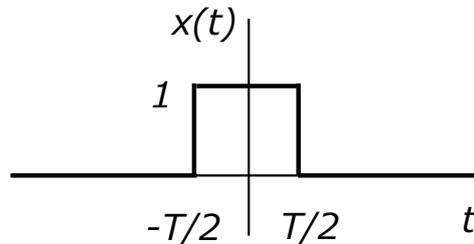
任意の関数 $g(x)$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) g(x) dx = g(x_0) \quad (1.10)$$

$|X(\omega)|$ をフーリエスペクトルとよぶ。フーリエスペクトルには線スペクトルと連続スペクトルがある。

1.4.1 例題：単一矩形パルスのフーリエスペクトル

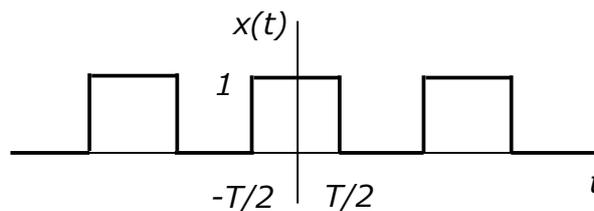
図 1.4.1 のような単一矩形パルスのフーリエスペクトルを求めよ。



図：1.4.1

1.4.2 例題：繰り返し矩形パルスのフーリエスペクトル

図 1.4.2 のような繰り返し矩形波（周期 $2T$ ）のフーリエスペクトルを求めよ。ただし、デューティ・サイクルは 50% とする。



図：1.4.2

1.5 ラプラス変換

$$f(t) \longleftrightarrow F(s)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.11)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st} ds \quad (\sigma : \text{real}) \quad (1.12)$$

ラプラス変換の収束域を $\text{Re}(s) > \alpha$ とすると、 σ は $\sigma > \alpha$ をみたす実数である。
 e^{-st} のおかげで収束が早い。形式的に $s \rightarrow i\omega$ でフーリエ変換に一致する。しかし、フーリエ変換の方がスペクトル分解という点で物理的意味がはっきりしているの、ここではなるべくフーリエ変換を使っていく。

ラプラス変換の逆を求めることは一般に簡単ではなく、表から求めるのが普通である。工学ではよく使われる。

以下はラプラス変換のいくつかの基本的性質である。

表 1.2: ラプラス変換の基本的性質

$f(t)$	$F(s)$
step function: $u(t)$	$\frac{1}{s}$
$\delta(t)$	1
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

1.6 インパルス応答

線型系において入力に $\delta(t)$ を加えたときの出力をインパルス応答とよび、 $h(t)$ であらわす。

1.6.1 例題：RC 積分回路のインパルス応答

図 1.3.1 のような RC 積分回路のインパルス応答を求めよ。ただし、出力端は開放である。

1.6.2 例題：調和振動子のインパルス応答

式 (1.3) であらわされる、減衰のある調和振動子のインパルス応答を求めよ。ただし、 $Q \gg 1$ とする。

1.7 出力の積分表示

次に、線型系に任意の関数 $x(t)$ を入力したときの出力 $y(t)$ を求める。まず入力を次のように分解する。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\delta(t-s)ds \quad (1.13)$$

つまり、任意の関数 $x(t)$ は δ 関数の重ね合わせとあらわすことができる。線型性から、出力 $y(t)$ はインパルス応答 $h(t)$ を用いて次のように書ける。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h(t-s)ds \quad (1.14)$$

$$= \int_{-\infty}^t x(s)h(t-s)ds \quad (\because t < 0 \text{ において } h(t) = 0) \quad (1.15)$$

1.7.1 メモ：畳み込み積分

式 (1.14) の右辺のような形の積分を畳み込み積分 (convolution) とよぶ。畳み込み積分を $f(t) * g(t)$ のようにあらわし、一般に $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$ が成り立つ。 $f(t) * g(t)$ のフーリエ変換は $2\pi F(\omega)G(\omega)$ となる。ただし、 $f(t) \xrightarrow{\text{FT}} F(\omega), g(t) \xrightarrow{\text{FT}} G(\omega)$ である。

1.8 ステップ応答

ステップ関数 $u(t)$ は次のように定義される。

$$u(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (1.16)$$

式 (1.15) より、ステップ関数を入力したときの出力であるステップ応答は次のようになる。

$$y(t) = \int_0^t h(t-s)ds \quad (1.17)$$

1.8.1 例題：RC 積分回路のステップ応答

図 1.3.1 のような RC 積分回路のステップ応答を求めよ。

1.9 伝達関数

$$x(t) \xrightarrow{\text{FT}} X(\omega)$$

$$y(t) \xrightarrow{\text{FT}} Y(\omega)$$

としたとき、

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (1.18)$$

を線型システムの伝達関数 (周波数応答関数) とよぶ。これを図示したのが、図 1.2 である。

次に、単色の入力信号 $x(t) = Ae^{i\omega_0 t}$ に対する出力を考える。もちろん、実際の物理量は $\text{Re}(x(t))$ である。 $X(\omega) = \tilde{x} = A\delta(\omega - \omega_0)$ (ここで \tilde{x} は $x(t)$ のフーリエ変換をあらわす) であるから、

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\ &= AH(\omega_0)e^{i\omega_0 t} \\ &= H(\omega_0)x(t) \end{aligned} \quad (1.19)$$

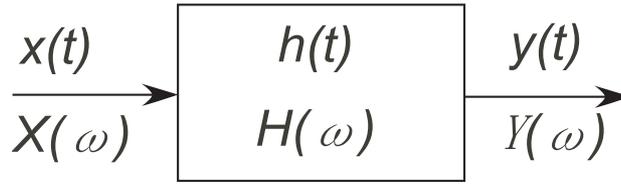


図 1.2: 線型システムの表現

入力 $x(t)$ に対して出力の位相は $\angle H(\omega_0)$ だけ進み、振幅は $|H(\omega_0)|$ 倍になる。これが伝達関数 $H(\omega)$ の意味である。つまり単色入力に対する出力は、単に $H(\omega)$ をかけてやればよい。

1.9.1 例題：RC 積分回路の伝達関数

例題 1.3.1 の RC 積分回路の伝達関数を求めよ。

1.9.2 例題：調和振動子の伝達関数

式 (1.3) であらわされる調和振動子の伝達関数を求めよ。

次に $h(t)$ と $H(\omega)$ の関係を調べる。
式 (1.14) であらわされる

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h(t-s)ds$$

の入出力関係をフーリエ変換すると、

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h(t-s)e^{-i\omega t} ds dt \quad (1.20)$$

$t-s=t'$ において、

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(s)e^{-i\omega s} h(t')e^{-i\omega t'} ds dt' \\ &= X(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} h(t')e^{-i\omega t'} dt' \end{aligned}$$

これを

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

と比べることにより、

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1.21)$$

逆に

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (1.22)$$

つまり、インパルス応答 $h(t)$ と伝達関数 $H(\omega)$ は、(係数を除けば) FT \iff IFT の関係にある。

1.10 インピーダンス

回路素子のインピーダンス Z は、回路の微分または積分表示から求められる。以下にその表現をまとめた。

$$\begin{array}{lll} \text{抵抗 } R & V = RI & \rightarrow \tilde{V} = R\tilde{I} \Rightarrow Z = R \\ \text{コンデンサー } C & V = \frac{1}{C} \int^t Idt & \rightarrow \tilde{V} = \frac{1}{i\omega C} \tilde{I} \Rightarrow Z = \frac{1}{i\omega C} \\ \text{インダクタンス } L & V = L\dot{I} & \rightarrow \tilde{V} = i\omega L\tilde{I} \Rightarrow Z = i\omega L \end{array}$$

回路のインピーダンス Z はこれらを組み合わせたものであるから、微分方程式を扱わずにキルヒホッフの法則を用いて代数的に解析できる。

1.10.1 例題：RC 積分回路の伝達関数（インピーダンス）

例題 1.3.1 の RC 積分回路の伝達関数を、インピーダンスを用いて求めよ。ただし、出力端は開放である。

1.10.2 例題：複素数表示を用いたパワーの表現

電流、電圧を

$$I = I_0 e^{i\omega t}$$

$$V = V_0 e^{i\omega t} \quad (I_0, V_0: \text{complex})$$

とあらわした場合、そのパワーは $P = I_0 V_0$ とはならない。正しいパワーを I_0, V_0 であらわせ。

1.11 線型系と因果律

例えば、

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - i\omega\tau}$$

のような伝達関数をもった系は安定であるかを調べてみる。
インパルス応答を求める。

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 - i\omega\tau} d\omega \\ &= \begin{cases} 0 & (t > 0) \\ \frac{1}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}} & (t < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

これは因果律（原因の前に結果は無い）を破るので、このような系は不安定である。
つまり

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= 0 \quad (t < 0) \end{aligned}$$

は、線型系にとって根本的な関係である。

$H(\omega)$ は ω 平面上の下半平面 ($\text{Im}(\omega) < 0$) で正則である。

例えば、電磁気の $D(\omega) = \varepsilon(\omega) E(\omega)$ の関係で $\varepsilon(\omega)$ は一般に複素数と考えることができるが、これも因果律にしたがう。 $\varepsilon(\omega)$ を実部と虚部に分けて、

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) \quad (1.23)$$

のように書くと、虚部は系の損失をあらわす。 $\varepsilon''(\omega)$ によって入力 E と出力 D の間で位相が遅れて損失を生じるからである。具体的には、電場 E に対する分極 P に時間遅れが生じるのが原因である。このほか、屈折率 $n(\omega)$ 、バネ定数 $k(\omega)$ 、ヤング率 $E(\omega)$ などでも虚部が存在する。

1.11.1 例題：Kramers-Kronig の関係

$H(\omega)$ を実部と虚部に分けて、その間の関係を考える。

$$H(\omega) = H'(\omega) + iH''(\omega) \quad (1.24)$$

また、 $|\omega| \Rightarrow \infty$ で $H(\omega) \Rightarrow H^\infty$ (実定数) とする。このとき次のような Kramers-Kronig の関係 (分散関係) が成立することを示せ。

$$H'(\omega) - H^\infty = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (1.25)$$

$$H''(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H'(\omega') - H^\infty}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (1.26)$$

第2章 信号と雑音の処理

2.1 エルゴードプロセス

ランダムプロセスは不規則に変動する統計事象をさすが、雑音や確率過程とほぼ同意語である。以下では確率変数 $x(t)$ のアンサンブル平均を $\langle x(t) \rangle$ 、時間平均を $\overline{x(t)}$ であらわすが、ここで扱うランダムプロセスはすべて

$$\langle x(t) \rangle = \overline{x(t)} \quad (2.1)$$

であり、エルゴードプロセスとよばれるものである。

2.2 パワースペクトル

$x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ が存在するときは、式 (1.6) の Parseval の定理が成立する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$|x(t)|^2$ を信号のパワーとすると、左辺は信号の全エネルギーとなる。よって、 $2\pi|X(\omega)|^2 d\omega$ は $\omega \sim \omega + d\omega$ に含まれるエネルギーをあらわす。そこで、エネルギースペクトル密度 $U(\omega)$ を次のように定義する。

$$U(\omega) = 2\pi|X(\omega)|^2 \quad (2.2)$$

しかし、一般に $x(t)$ が無限に続くときは

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

となり、フーリエ変換は存在しない。そこで $x(t)$ を区間 $[-T/2, T/2]$ で切り出した関数を

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & (|t| \leq T/2) \\ 0 & (|t| > T/2) \end{cases} \quad (2.4)$$

と定義し、このフーリエスペクトルを $X_T(\omega)$ であらわす。

$$X_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.5)$$

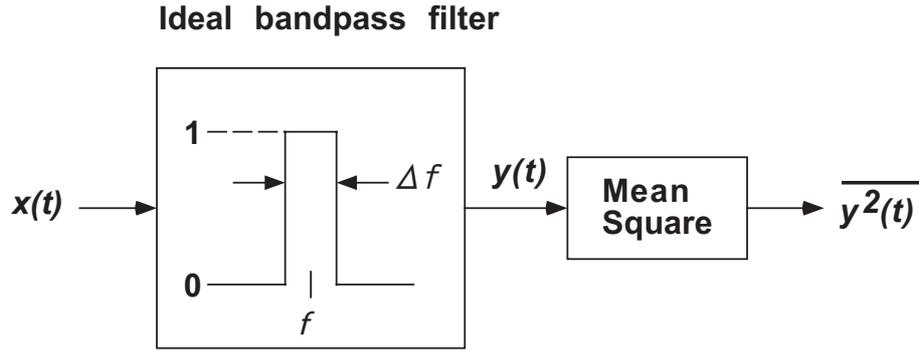
これを用いてパワースペクトル密度 $S(\omega)$ は次のように定義される。

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle |X_T(\omega)|^2 \rangle}{T} \quad (2.6)$$

Parseval の定理を利用すると、 $x(t)$ と $S(\omega)$ には次のような関係があることがわかる。

$$\overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (2.7)$$

つまりこの式の意味することは、パワースペクトル密度 $S(\omega)$ はランダム変動の平均パワー $\overline{x^2(t)}$ の各周波数成分からの寄与を示しているということである。なおパワースペクトル密度は単にパワースペクトルとよば



$$G(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\overline{y^2(t)}}{\Delta f}$$

図 2.1: パワースペクトルを得るための原理的装置

れるのが普通である。また $S(\omega)$ は数学的取扱いには便利であるが、実用上は $\omega = 2\pi f$ とおき $f \geq 0$ に対するスペクトルを考えた方がわかりやすい。これを $G(f)$ とおくと、 $S(-\omega) = S(\omega)$ であるから

$$\overline{x^2(t)} = \int_0^{\infty} G(f) df \quad (2.8)$$

$$G(f) = 4\pi S(\omega) \quad (2.9)$$

が成り立つ。

$G(f)$ を測定するための原理的な装置の例を図 2.1 で説明している。市販の FFT(Fast Fourier Transformation) 方式のスペクトラムアナライザは、式 (2.6) にしたがって入力からパワースペクトル密度を計算し、その結果を出力表示するものである。

さらに、パワースペクトルの具体的な数値をあげるときには、パワースペクトル $G(f)$ の平方根 $\sqrt{G(f)}$ であらわすことが多い。例えば雑音電圧の場合の $V/\sqrt{\text{Hz}}$ とか等価雑音変位の $m/\sqrt{\text{Hz}}$ などはこの例である。

2.3 自己相関関数

自己相関関数 $C(\tau)$ は次のように定義される。

$$C(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \quad (2.10)$$

定義から明らかのように $C(\tau)$ は偶関数である。また、 $\tau = 0$ において最大値をとり、

$$C(0) = \langle x^2(t) \rangle \quad (2.11)$$

となる。

2.3.1 例題：Wiener-Khintchine の定理

パワースペクトルと自己相関関数の間に、Wiener-Khintchine の定理とよばれる次のような関係が成立することを証明せよ。

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.12)$$

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.13)$$

この関係を Wiener-Khintchine の公式という。つまり、相関関数とパワースペクトルは互いにフーリエ変換の関係にあり、一方がわかれば他方も求められる。

2.3.2 例題：線型系とパワースペクトル

伝達関数 $H(\omega)$ をもつ線型システムの入力と出力のパワースペクトル $S_x(\omega)$ 、 $S_y(\omega)$ の間に次のような関係があることを示せ。

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (2.14)$$

2.3.3 例題：単色波のスペクトル

次のような単色の信号のパワースペクトルを求めよ。

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

2.3.4 例題：白色雑音の相関関数

次のように平坦なスペクトルをもつ雑音（白色雑音）の相関関数を求めよ。

$$S(\omega) = D \text{ (定数)}$$

2.4 最適フィルター

信号 $s_i(t)$ と雑音 $n_i(t)$ がある場合、どのようなフィルターに通せば最大の信号対雑音比が得られるかを考える。まず、信号対雑音比 SNR(signal-to-noise ratio) を以下のように定義する。

$$\text{SNR} = \frac{s_o(t)^2}{\langle n_o(t)^2 \rangle} \quad (2.15)$$

ただしここで、 $s_o(t)$ 、 $n_o(t)$ はフィルターを通した後の出力である。

2.4.1 例題：最適フィルター

入力信号 $s_i(t)$ のフーリエスペクトルを $S_i(\omega)$ 、雑音 $n_i(t)$ のパワースペクトルを $N_i(\omega)$ とおき、最適フィルターの伝達関数を $H(\omega)$ とすると、次の式が成立することを示せ。

$$H(\omega) = \frac{S_i^*(\omega)}{N_i(\omega)} e^{-i\omega\tau} \quad (\tau: \text{任意の実数}) \quad (2.16)$$

$$(\text{SNR})_{\max} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_i(\omega)|^2}{N_i(\omega)} d\omega \quad (2.17)$$

2.4.2 例題：最適フィルター (1)

入力雑音が white な場合、

$$N_i(\omega) = D \text{ (定数)}$$

最適フィルターのインパルス応答が入力信号の波形に等しいことを示せ。

2.4.3 例題：最適フィルター (2)

$$N_i(\omega) = D \text{ (定数)}$$

$$s_i(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leq d/2) \\ 0 & (|t| > d/2) \end{cases}$$

このときの最適フィルターを求めよ。

2.4.4 例題：最適フィルター (3)

$$N_i(\omega) = D \text{ (定数)}$$

$$s_i(t) = \sin \omega_0 t$$

このときの最適フィルターを求めよ。

2.5 積算平均効果

時間的に繰り返す信号の場合、繰り返し周期に同期して積算平均することによって SNR を向上することができる。この原理は、トランジェントレコーダ、ボックスカー積分器、サンプリングオシロスコープなどで使われている。

2.5.1 例題：積算平均による分散

1 回測定分散を σ_x^2 、 N 回積算平均分散を $\sigma_{\bar{x}}^2$ とすると、

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N} \sigma_x^2 \tag{2.18}$$

が成り立つことを示せ。