

TAMA300 の
Suspension System 及び鏡の
熱雑音の推定

山元 一広
東京大学大学院理学系研究科物理学専攻
坪野研究室 修士課程 2 年
56158

1997 年 1 月

目次

1	はじめに	5
2	重力波とはなにか	7
2.1	重力波の伝搬	7
2.1.1	一般相対論の基礎	7
2.1.2	Einstein 方程式の線形近似	8
2.1.3	平面重力波	9
2.1.4	TT Gauge	9
2.1.5	重力波の測地線偏差方程式	9
2.1.6	重力波の偏向	10
2.1.7	重力波のエネルギー	10
2.2	重力波の発生	11
2.2.1	重力波の放射公式	11
2.2.2	主な重力波源	12
2.3	重力波の検出	12
2.3.1	共鳴型重力波検出器	13
2.3.2	干渉計型重力波検出器	14
3	熱雑音について	23
3.1	干渉計型重力波検出器における熱雑音	23
3.2	揺動散逸定理	24
3.3	調和振動子の熱雑音	25
3.3.1	調和振動子の熱雑音のパワースペクトル密度	25
3.4	散逸の具体例	29
3.4.1	外部からの抵抗力による散逸	29
3.4.2	物質内部の散逸	31
3.4.3	接触面における散逸	32
3.5	本論文の主題	37

4	Suspension System の熱雑音	38
4.1	TAMA の Suspension System の概略	38
4.2	鏡の自由度	39
4.3	2 mode oscillator の熱雑音	41
4.3.1	2 mode oscillator とは何か	41
4.3.2	2 mode oscillator の熱雑音	42
4.3.3	damping magnet への recoil	45
4.3.4	Recoil Loss	47
4.4	Pitch Rotation	49
4.4.1	Pitch Rotation の熱雑音	49
4.4.2	Pitch Rotation の Q 値	53
4.5	Yaw Rotation	53
4.5.1	Yaw Rotation の熱雑音	54
4.5.2	Yaw Rotation の Q 値	56
4.6	Vertical Vibration	59
4.6.1	Vertical Vibration の熱雑音	59
4.6.2	Vertical Vibration の Q 値	61
4.7	Pendulum Mode	62
4.7.1	Pendulum Mode の熱雑音	62
4.7.2	Pendulum Mode の Q 値	64
4.8	continuous system の熱雑音	65
4.9	Violin Mode の熱雑音	68
4.9.1	magnet damping のみ考えた Violin Mode の熱雑音	68
4.9.2	中間 mass より下の散逸による Violin Mode の熱雑音	75
4.9.3	両方の散逸を考えた時の熱雑音	77
4.9.4	Violin Mode の Q 値	78
4.9.5	ワイヤーの選択	79
4.9.6	Yaw Rotation の Violin Mode	80
4.10	coupling を考慮した熱雑音	83
4.11	改良後の熱雑音	89
4.12	Suspension System の熱雑音のまとめ	91
5	鏡の熱雑音	92
5.1	鏡の熱雑音のパワースペクトル密度	93
5.2	従来の推定	94
5.3	Hutchinson's Simulation	96
5.3.1	弾性体の波動方程式	96

5.3.2	Hutchinson's Simulation	100
5.3.3	省くべき零点	107
5.4	Hutchinson's Simulation の検証	110
5.4.1	プログラムがきちんと Hutchinson's Simulation を実行するか	111
5.4.2	Hutchinson's Simulation は正しいのか	111
5.5	鏡の熱雑音の推定	116
5.5.1	Cut-off 周波数について	117
5.5.2	基底関数の数に対する依存性について	118
5.5.3	Poisson Ratio に対する依存性について	119
5.5.4	TAMA300 における鏡の熱雑音の推定	120
5.6	低いモードの熱雑音への寄与	120
5.7	ビームが中心からずれた場合	125
5.7.1	中心がずれた場合の換算質量	125
5.7.2	結果	126
5.7.3	考察	127
5.8	鏡の形を変えた場合	129
5.8.1	Aspect Ratio を変えずに鏡のサイズを変えた場合	129
5.8.2	鏡の半径を変えず Aspect Ratio だけ変えた場合	131
5.8.3	まとめ	131
5.9	他の大型計画との比較	132
5.9.1	Hutchinson's Simulation のプログラムの検証	133
5.9.2	各計画の鏡の熱雑音の比較	138
5.9.3	TAMA の Q 値の下限はなぜ高いのか	139
5.10	鏡の熱雑音についてのまとめ	141
6	TAMA300 における熱雑音	142
6.1	今までのまとめ	142
6.2	TAMA300 の熱雑音	143
6.3	目標の Q 値への到達は可能か	145
6.4	今後の課題	146
6.4.1	continuous system の散逸	146
6.4.2	実験への要請	148
6.4.3	その他	149
A	Suspension System の仕様	150
A.1	全体図	150
A.2	中間 mass を懸架する bellows と wire	150

A.3	中間 mass	153
A.4	magnet damping	153
A.5	damping magnet support	154
A.6	鏡を懸架する wire	155
A.7	鏡	155
B	散逸として magnet damping のみを考えた Double Pendulum の Violin Mode の impedance	156

第 1 章

はじめに

A.Einstein は一般相対論を発表した翌年の 1916 年、弱い重力場において Einstein 方程式を線形近似すると metric の Minkowski space-time からの摂動が真空中を光速で伝搬することを指摘した [1]。これが重力波である。

重力波の直接検出を目的とする実験は 1965 年頃から Weber によって始められた。1969 年に彼は重力波の検出に成功したという報告を行なったが [2]、現在はそれは間違いと解釈されている。しかしながら重力波検出は原理的に不可能なことではないということを示し、検出実験への motivation を盛り上げたことは間違いない。

1978 年、J.H.Taylor & R.A.Hulse は Binary Pulsar PR1913+16 の周期変化の観測値が重力波放射による周期変化の理論値と一致することを発見した [3]。このことにより重力波の存在に対する信頼性はより高くなり、現在様々な重力波の直接検出が試みられている。

重力波を直接検出する目的は一般相対論を含む重力理論の検証という物理的 [4] なことだけではない。重力波の相互作用は極端に小さいことから連星中性子星の衝突や超新星からの重力波を検出することによって電磁波やニュートリノの観測からは得られない情報を得ることが期待されている。つまり重力波を使った新しい天文学 (重力波天文学) の創生といった天文学的な目的もある。

地上において重力波を検出する装置として考えられているものは共鳴型と干渉計型の 2 種類である。共鳴型重力波検出器は Weber が考案したものであり、重力波によって励起された弾性体の振動を検出する装置である。現在でもその開発は世界各国で行なわれている。一方、干渉計型は重力波による自由質点間の固有距離の変化を検出する装置である。今まで開発を目的とした干渉計型検出器が作られてきたが現在観測を目的とした大型干渉計の建設計画が進められている。具体的にあげるとアメリカでは LIGO 計画、イタリアとフランスの共同計画である VIRGO 計画、ドイツとイギリスの共同計画である GEO 計画がある。日本でも 1995 年から TAMA 計画が推進されている。この TAMA 計画の目的は 2 つある。1 つは km クラスの干渉計建設のための技術開発、もう 1 つはアンドロメダなどの近傍銀河からの重力波を実際に検出することである。

さて干渉計型重力波検出器においては鏡などの光学部品は全て懸架される。これはまず鏡が自由質点として振る舞うようにするためである。さらに地面振動などの外乱を防振するという目的もある。この鏡を懸架する系を Suspension System と呼ぶ。TAMA の Suspension System は鏡は中間 mass からのワイヤーで懸架され、さらに中間 mass も支持点からのワイヤーで懸架されるという Double Pendulum である。

この Double Pendulum の設計には様々な点を考慮しなければならない。まず当然のことながら重力波検出器の主要な雑音の 1 つである地面振動が十分に防振できるほどの防振比が必要である。防振は Double Pendulum だけで行なうわけではないが、目的に到達するためには実験と計算に基づいた注意深い設計が必要である。この詳細については新井宏二の修士論文 [74] を参照のこと。

さらに考慮しなくてはいけないこととして Suspension System の熱雑音があげられる。これも干渉計型の主要な雑音の 1 つである。これは Suspension System が熱浴中にあるために振動モードが熱的に励起され、鏡の位置、角度が揺らぐ現象である。この熱雑音の大きさを揺動散逸定理を用いて計算し、熱雑音低減の指針を与えるのが本論文の第 1 の目的である。

重力波検出において問題となるもう 1 つの熱雑音は鏡の弾性振動による熱雑音である。鏡は弾性体であるからやはり振動モードがあり、熱的に励起される。これによる鏡の表面の振動は、重力波検出装置の雑音になる。この熱雑音の大きさを推定するのは非常に困難である。散逸の大きさを表す Q 値を適当に仮定したとしても弾性体の運動方程式を解くという困難な作業があるからである。このため今までは naive な推定しか行なわれてこなかった。しかしながら Hutchinson の考案した Simulation を使うことにより鏡の振動モードについての困難な計算が可能になった。この Simulation を実行するプログラムを開発し、TAMA における熱雑音の大きさを計算した。また TAMA の目標感度と推定した熱雑音の大きさを比較することによって TAMA において必要な鏡の Q 値の大きさを求めた。それによると従来より Q 値に関して厳しい制限が課せられることがわかった。この計算の詳細を報告することが本論文の第二の目的である。なお鏡の Q 値の測定や、 Q 値を目標に近づける研究の詳細については大石奈緒子の修士論文 [75] を参照されたい。

この論文の構成であるが、次の第 2 章では重力波についての説明を行なう。第 3 章では熱雑音の基礎知識について紹介する。Suspension System の熱雑音については第 4 章で、鏡の熱雑音については第 5 章で議論する。最後の第 6 章で今までの議論をまとめ、TAMA300 の熱雑音の推定を行ない、問題点や今後の課題について報告する。

第 2 章

重力波とはなにか

一般相対論の基礎方程式である Einstein 方程式を線形近似すると Minkowski 時空からの metric の摂動が波動方程式を満たすことが分かる。これが重力波である。しかし重力波は相互作用が極めて小さく今だ直接検出には成功していない。この章では Einstein 方程式から重力波を導出し、その性質や発生源、そして検出方法や具体的な検出計画を概観する。

2.1 重力波の伝搬

まず重力波の伝搬を議論する [5, 6]。

2.1.1 一般相対論の基礎

一般相対性理論によると重力は時空の歪みとして記述される。時空のある点 x^μ とそれから微小に離れた点 $x^\mu + dx^\mu$ までの世界間隔 ds は以下のように定義される。

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

$g_{\mu\nu}$ は metric tensor (計量テンソル) である。 $g_{\mu\nu}$ から Christoffel symbol $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$, Riemann tensor $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$ が以下のように定義される。

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\mu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\mu} - g_{\mu\lambda,\alpha}) \quad (2.2)$$

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} \Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\gamma\beta} \Gamma^\gamma_{\nu\alpha} \quad (2.3)$$

さらに Ricci tensor $R_{\mu\nu}$, Ricci scalar R , Einstein tensor $G_{\mu\nu}$ が以下のように定義される。

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \quad (2.4)$$

$$R = R^\alpha_{\alpha} \quad (2.5)$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2.6)$$

質量やエネルギーの時空における分布をしめす Energy-momentum tensor を $T_{\mu\nu}$ とおくと Einstein 方程式は以下ようになる。

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

2.1.2 Einstein 方程式の線形近似

ここで弱い重力場における Einstein 方程式を考える。弱い重力場であるので metric は Mikowski space-time の metric $\eta_{\mu\nu}$ と摂動 $h_{\mu\nu}$ の和 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ を考えればよい。但し

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

であり、 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ が成立する。ここで線形近似を行なう。つまり $h_{\mu\nu}$ の 1 次の項まで考える。よって今後添字の上げ下げは $\eta_{\mu\nu}$ で行なう。この近似のもとで Einstein 方程式 (2.7) は以下のように変形される。

$$h_{\mu\alpha,\nu}{}^\alpha + h_{\nu\alpha,\mu}{}^\alpha - h_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^\beta) = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

ここで trace reverse tensor $\bar{h}_{\mu\nu}$ を定義する。

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.10)$$

但し h は $h_{\mu\nu}$ の trace である。reverse trace tensor と呼ばれる理由は $\bar{h}_{\mu\nu}$ の trace \bar{h} に関して $\bar{h} = -h$ という式が成立するからである。

また微小な座標変換 $x_{(\text{new})}^\mu \rightarrow x_{(\text{old})}^\mu + \xi^\mu$ を行なうと $h_{\mu\nu}$ と $\bar{h}_{\mu\nu}$ は

$$h_{\mu\nu(\text{new})} = h_{\mu\nu(\text{old})} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad (2.11)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu(\text{new})} = \bar{h}_{\mu\nu(\text{old})} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi_{,\alpha}^\alpha \quad (2.12)$$

のように変換される。この変換によって

$$\bar{h}{}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \quad (2.13)$$

という条件を満たすように $\bar{h}_{\mu\nu}$ を一般性を失うことなく変形することができる。また式 (2.13) を Lorentz 条件と呼ぶ。

$\bar{h}_{\mu\nu}$ を用いて式 (2.9) を整理し、Lorentz 条件 (2.13) を課すと、

$$-\bar{h}{}^{\mu\nu}{}_{,\alpha}{}^\alpha = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.14)$$

となる。とくに真空中では

$$-\bar{h}_{\mu\nu}{}^{;\alpha}{}_{\alpha} = 0 \quad (2.15)$$

となる。この方程式は metric の摂動が波動方程式を満たすことを表している。これが重力波であり、真空中を光速で伝搬することが分かる。

2.1.3 平面重力波

式 (2.13)(2.15) を満たす最も簡単な解は

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_{\alpha}x^{\alpha}) \quad (2.16)$$

という平面波解である。但し $A_{\mu\nu}$ は任意の tensor。また

$$k_{\alpha}k^{\alpha} = 0 \quad (2.17)$$

$$A_{\mu\alpha}k^{\alpha} = 0 \quad (2.18)$$

が成立する。式 (2.17) は重力波が光速で伝搬することを示し、式 (2.18) は重力波が横波であることを示している。

2.1.4 TT Gauge

先ほど Lorentz 条件 (2.13) を課したが、まだ任意性が残っている。それは

$$\xi^{\mu}{}_{;\alpha}{}^{\alpha} = 0 \quad (2.19)$$

という条件を満たす ξ^{μ} を使って座標変換 $x^{\mu}_{(\text{new})} \rightarrow x^{\mu}_{(\text{old})} + \xi^{\mu}$ を行なっても Lorentz 条件は満たされことから分かる。そこでこの ξ^{μ} を利用して

$$A^{\alpha}{}_{\alpha} = 0 \quad (2.20)$$

$$A_{\mu\alpha}u^{\alpha} = 0 \quad (2.21)$$

という条件を満たすように $A_{\mu\nu}$ を変換することができる。但し u^{α} は任意の time-like な 4次元単位ベクトルである。これらの条件を Transverse-Traceless Gauge (TT Gauge) と呼ぶ。これで座標の任意性はなくなった。また式 (2.20) から $h_{\mu\nu}$ と $\bar{h}_{\mu\nu}$ の区別がなくなったことが分かる。

2.1.5 重力波の測地線偏差方程式

質点 A が座標 x_A^{μ} に存在し、質点 B が座標 x_B^{μ} に存在するとする。さらに $n^{\mu} = x_B^{\mu} - x_A^{\mu}$ は微小であり、両者とも自由落下しているとしよう。ここに重力波がやってきたときに、どのようなことが起こるだろうか。

測地線偏差の方程式は以下の通りである。

$$\frac{d^2 n^\mu}{d\tau^2} - R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} \frac{dx_A^\alpha}{d\tau} \frac{dx_B^\beta}{d\tau} n^\gamma = 0 \quad (2.22)$$

$h_{\mu\nu}$ の 1 次まで考慮し ($\tau \approx ct$)、質点の速度は光よりずっと小さい ($dx/d\tau \approx (1, 0, 0, 0)$) とすれば

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 n^\mu}{dt^2} + R^\mu{}_{0\gamma 0} n^\gamma = 0 \quad (2.23)$$

が成立する。TT Gauge において重力波が存在するときの $R^\mu{}_{0\gamma 0}$ は式 (2.3) などを利用して計算すると式 (2.23) は以下ようになる。

$$\frac{d^2 n^\mu}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{\mu\gamma}^{\text{TT}}}{\partial t^2} n^\gamma = 0 \quad (2.24)$$

よって解は以下ようになる。

$$n^\mu(t) = n^\alpha \delta_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} h_{\alpha\mu}^{\text{TT}} n^\alpha \quad (2.25)$$

これは微小に離れている 2 つの自由質点の偏差は、重力波がきたときに重力波の振幅と質点の偏差に比例して振動することを意味する。

2.1.6 重力波の偏向

TT-Gauge(2.20)(2.21) において $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$, $k^\alpha = (\omega, 0, 0, k)$ とする。後者の条件は重力波が z 軸に沿って進んでいることを示す。また $\omega = ck$ である。このとき

$$h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[i(\omega t - kz)] \quad (2.26)$$

となる。重力波には 2 つの自由度を持つことが分かる。これは重力波の偏向と呼ばれ $h_+ \neq 0, h_\times = 0$ は Plus Mode、 $h_+ = 0, h_\times \neq 0$ は Cross Mode と呼ばれる。図 2.1 に重力波が来た時の原点を中心とする円周上の自由質点と原点間の固有距離の時間変化を示す。上が Plus Mode、下が Cross Mode である。 z 軸は紙面に垂直である。

2.1.7 重力波のエネルギー

重力波はエネルギーを伝搬する。重力波の energy-momentum tensor は以下の通り。但しこれは TT Gauge における表記である。また $\langle \rangle$ は数波長にわたる平均をとることを意味する。

$$T_{\mu\nu}^{(\text{GW})} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle h_{jk,\mu} h^{jk}{}_{,\nu} \rangle \quad (2.27)$$

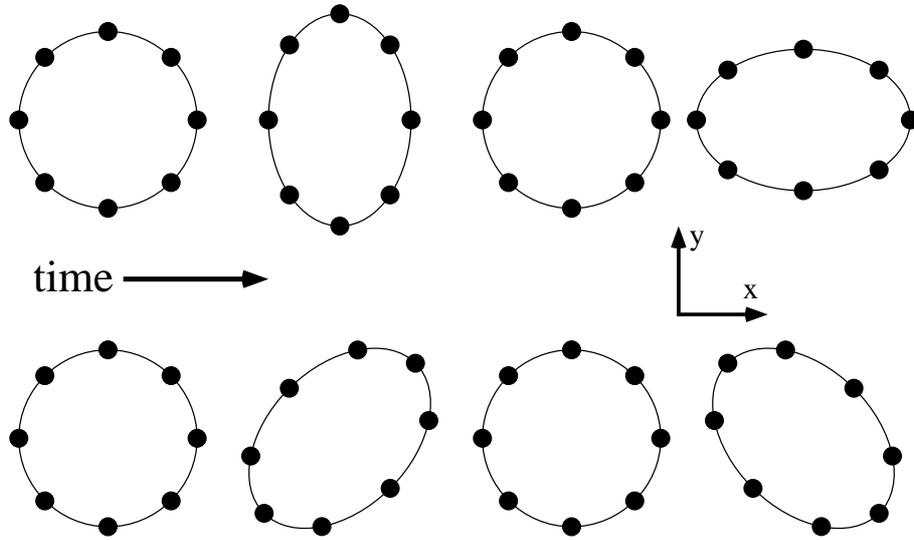


図 2.1: 重力波の偏向 (上が Plus Mode、下が Cross Mode)

2.2 重力波の発生

ここでは重力波の発生を概観する [5, 11]。

2.2.1 重力波の放射公式

重力波の放射公式は重力波源の物質の速度が小さく、重力ポテンシャルが小さいとき展開して求めることができる。電磁波と違うところは質量は常に正であるので 2 重極放射は存在しないことである。つまり 1 番大きい項は 4 重極放射となる。この放射によるエネルギー放出は

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \left(\frac{d^3 D_{ij}}{dt^3} \right)^2 \quad (2.28)$$

$$D_{ij} = \int \rho \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right) d^3 x \quad (2.29)$$

である。また重力波源から r 離れたところにおける重力波の振幅は

$$h_{ij} = -\frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \ddot{D}_{ij} \quad (2.30)$$

である。これらの式から球対称な系や軸対称で定常的な系からは重力波は放出されないことがわかる。

2.2.2 主な重力波源

地上に設置された重力波検出器で検出可能と期待されているのは超新星爆発と連星中性子星の衝突である。

超新星爆発は銀河系内で起こればかなり大きな重力波¹が地球にやってくると予想されている。しかし銀河系内で超新星爆発が起こる頻度はかなり小さい²。そこで乙女座銀河団あたりまでの超新星爆発からの重力波³を検出することを目的としていくつかの計画が推進されている。超新星爆発からの重力波を検出することによって電磁波やニュートリノからは得られない超新星の情報⁴が得られることが期待されている。

連星中性子星は公転運動によって重力波を放出している。これによりエネルギーが失われて公転周期が変化していく。Taylor & Hulse は公転周期の変化の観測値と理論値が一致することを示して、重力波の存在を間接的ではあるが証明した [3]。実際にはこの重力波は地上で検出することは難しい。その理由はこの重力波は極めて低い周波数であり、低周波では地面振動が大きいからである。しかしこの重力波放出によって連星系のエネルギーが失われていき最後に衝突する。そのときに周波数が高く⁵、振幅の大きい⁶重力波が放出されることが期待される。連星中性子星自体の寿命は長い⁷が 200Mpc までの範囲では検出可能な event が年数回おこることが期待されている⁷。この衝突からくる重力波からも中性子星などに関する情報⁸が得られることが期待されている。

この他の重力波源としては以下のものがあげられる⁹。

- 巨大ブラックホールの形成
- 新生パルサー
- 宇宙ひも
- 背景重力波放射

2.3 重力波の検出

重力波を検出する方法としてはいくつかの方法が考案されているが、ここでは地上に設置される検出器である共鳴型重力波検出器 [5, 6] と干渉計型重力波検出器 [11, 10] につい

¹ $h \sim 10^{-18}$ 。

²30年に1回程度。周波数は $\sim 1\text{kHz}$ 。

³年に数回程度。振幅は $h \sim 10^{-21}$ 。

⁴電磁波やニュートリノが相互作用によって情報を失っても、重力波は相互作用が弱いので情報を持ち続けることができる。

⁵100Hz程度。

⁶200Mpc以内なら $h \sim 10^{-21}$ 。

⁷現在 γ 線バーストは連星中性子星の衝突ではないかといわれている。

⁸具体的には [11] 参照。

⁹周波数が低く、地上では観測不可能と思われるものも含まれている。

て概観する。

この他にはドップラートラッキング、パルサータイミングという宇宙空間に設置される、もしくは天文現象を利用する検出方法もある。

2.3.1 共鳴型重力波検出器

共鳴型重力波検出器は Weber により考案開発された検出器であり、現在も研究が進められている。基本原理は図 2.2を参照。

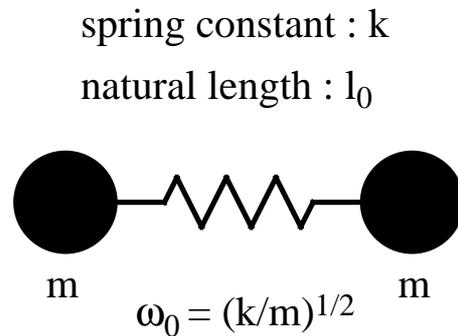


図 2.2: 共鳴型重力波検出器の原理

2つの質点がバネ定数 k 、自然長 l_0 のバネでつながれている。TT-Gauge で解釈すると重力波がやってくるとバネの固有長が変化し、その変化に比例した復元力をバネは質点に及ぼし、質点は振動する。そのときのバネの自然長からの変化を ξ とし、 h の 1 次までの考慮すると、その運動方程式は以下ようになる。バネは x 軸と平行とする。

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + m \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\xi}{dt} + m\omega_0^2 \xi = \frac{1}{2} m l_0 \frac{\partial^2 h_+^{\text{TT}}}{\partial t^2} \quad (2.31)$$

但し ω_0 は共鳴角周波数で、 $k = m\omega_0^2$ である。また左辺第 2 項は速度に比例した抵抗力を表す。 Q は散逸の大きさを表す parameter で Q 値と呼ばれる¹⁰。これは散逸のある調和振動子が重力波、自然長、質量に比例した外力をうける形になっている。

実際の検出器は金属の弾性振動を利用する。弾性振動も換算質量という概念を導入すればその運動方程式は式 (2.31) と等価になる。明らかに共鳴型検出器は共鳴周波数 ω_0 付近の重力波しか検出ができない。共鳴周波数は材質、形状、大きさを変えることによりある程度調整することが可能である。しかし実際には外力が質量やサイズに比例することも考えて、質量は 10ton、大きさは数 m、共鳴周波数は 1kHz 程度にとられることが多い。また散逸が小さい方が検出上有利であるために Q 値の高い物質¹¹ が使用される。そのため

¹⁰詳細は第 3 章参照。

¹¹アルミ合金 5056 がよく利用される。

共鳴型の主な雑音の1つである熱雑音を下げするためには温度を下げる以外に方法はなく低温に保たれる。弾性振動を電気信号に変換する装置をトランスデューサと呼ばれ、この開発も進められている。

2.3.2 干渉計型重力波検出器

式(2.25)より2つの自由質点が微小に離れて存在した場合、重力波がやってくると質点間の偏差は変化する。2つの質点間を光を往復させ、偏差の変化に伴う往復時間の変化を検出するのが干渉計型の原理である。干渉計型が共鳴型に比べて優れている点はより広い周波数帯において観測が可能であるということである。

干渉計型検出器の原理

ここで重力波がやってきたときの自由質点の運動方程式について考える。座標は TT-Gauge を採用する。重力場の測地線方程式は以下のとおりである。

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.32)$$

質点は最初静止していたとしよう。すると式(2.32)において $\tau \approx ct$ となり、第2項は Γ^μ_{00} を含む項以外は0になることがわかる。そして式(2.26)より $\Gamma^\mu_{00} = 0$ となることがわかる。これは重力波がきても自由質点の座標は変わらないことを意味する。ここで図2.3のような干渉計を考える。

x, y 軸を干渉計の腕に沿ってとり、さらにこれに垂直に z 軸をとる。 x 軸に沿った腕から Photo Detector に来た光の複素振幅を $A_1 \exp(i\phi)$ 、 y 軸に沿った腕から Photo Detector に来た光の複素振幅を A_2 とする。但し A_1, A_2 は実数。このとき Photo Detector が受ける光の強度 I は

$$I = |A_1 \exp(i\phi) + A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2A_1 A_2 \cos \phi \quad (2.33)$$

となる。重力波がくると ϕ が変化する。よって Photo Detector で光の強度を測定することによって重力波を検出することができる。

具体的にどの程度位相差 ϕ が生じるか計算してみよう。 z 軸にそって Plus Mode の重力波が進んできたとする。以後 h_+ を h と表記する。このときの微小世界距離 ds^2 は以下のようなになる。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1+h)dx^2 + (1-h)dy^2 + dz^2 \quad (2.34)$$

干渉計を構成する鏡は自由質点のように振る舞うと仮定すれば先ほどの議論から鏡の座標は変化しない。その座標を $(l_1, 0)$ 、 $(0, l_2)$ とする。

光源からやってきた鏡は Beam Splitter で分割される。その時間を t としよう。光が x 軸に平行な腕を往復して Beam Splitter に帰ってきた時間を t_1 としよう。光であるから

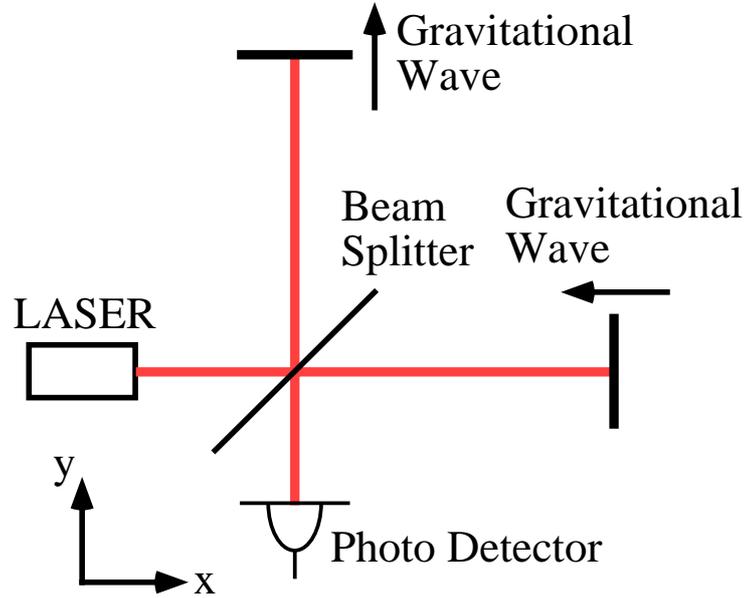


図 2.3: 干渉計型重力波検出器の原理

$ds^2 = 0$ であり、 x 軸に沿って往復したので $dy = dz = 0$ となるので式 (2.34) より

$$\int_t^{t_1} \frac{dt'}{\sqrt{1+h(t')}} = \int_0^{l_1} dx + \int_{l_1}^0 (-dx) \quad (2.35)$$

となる。ここで $|h| \ll 1$ という近似を用いる。さらにこの条件のもとでは $t_1 \approx t + 2l_1/c$ である。よって

$$(t_1 - t) - \frac{1}{2} \int_t^{t+\frac{2l_1}{c}} h(t') dt' = \frac{2l_1}{c} \quad (2.36)$$

となる。光が y 軸にそって往復して帰ってきた時間を t_2 とすると同様の式を求めることができる。この時 h の符号が変わることに注意。

干渉計は 2 本の腕の光の位相差 ϕ を測定する装置である。重力波がやってきた場合の位相差は光の角周波数を Ω として

$$\phi(t) = 2\pi\Omega(t_1 - t_2) = 4\pi\Omega(l_1 - l_2) + 2\pi\Omega \int_t^{t+\frac{2l_1}{c}} h(t') dt' \quad (2.37)$$

となる。但し $l \approx l_1 \approx l_2$ という近似を使った。第 2 項が重力波による位相差の変化であり、これが検出すべきものである。

第 2 項を ϕ_{GR} とおく。ここで h から ϕ_{GR} への伝達関数 $H_{\text{Michelson}}(\omega)$ を求める。これは

h, ϕ_{GR} の Fourier 成分 $\tilde{h}, \tilde{\phi}_{\text{GR}}$ の比で定義される¹²。式 (2.37) から計算すると

$$H_{\text{Michelson}}(\omega) = \frac{\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{l\omega}{c}\right) \exp\left(-i\frac{l\omega}{c}\right) \quad (2.38)$$

となる。これからわかることは $\omega \rightarrow 0$ では $H_{\text{Michelson}}$ は l に比例することである。よって基線長は長いほどよいように見える。しかし l を大きくして \sin の線形近似が成り立たなくなってくると l を大きくしても $H_{\text{Michelson}}$ は大きくなる。観測する周波数を ω_0 としたときに最適な l は $\omega_0 l/c = \pi/2$ を満たす。例えば 1kHz の重力波を検出したいときに最適な基線長は $l = 75\text{km}$ である。

Delay-Line と Fabry-Perot

単純な Michelson 干渉計だと 1kHz の重力波を検出するために基線長は 75km でなければならないことがわかった。しかし現実にはこのような干渉計をつくるのは極めて困難である。そこで短い基線長でも長い光路長を実現させる方法として Delay-Line 方式と Fabry-Perot 方式が考えられている。

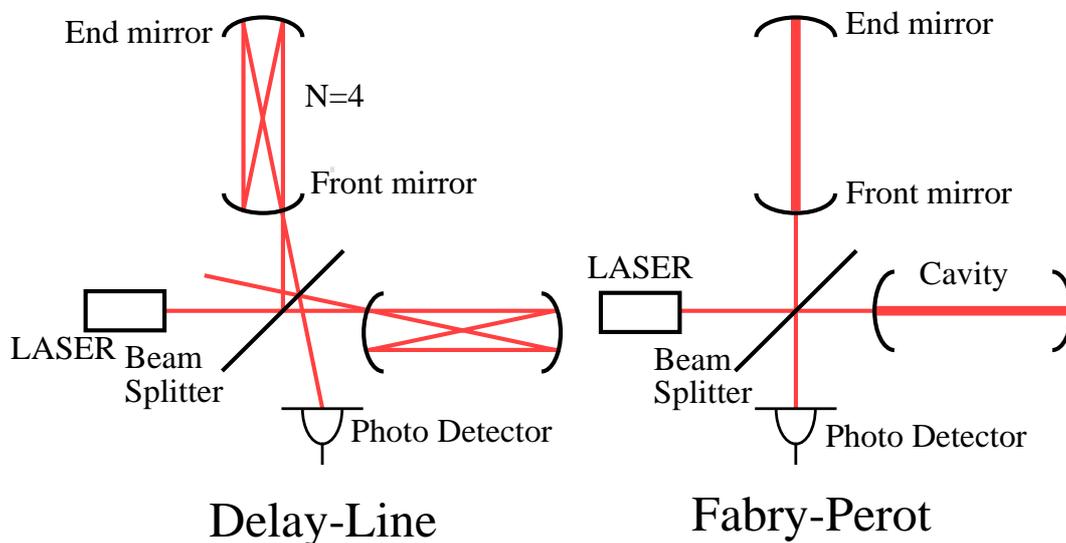


図 2.4: Delay-Line と Fabry-Perot

Delay-Line 方式は鏡の間を $N/2$ 回光を往復させる方法である。 N は折り返し数と呼ばれる。但し同じ経路を何度も往復するのではない。図 2.4 のように 1 本の長い経路が 2 枚

¹²今後 x の Fourier 成分を \tilde{x} と表記する。

の鏡の間に折り畳まれている形になっている。この場合の伝達関数 $H_{DL}(\omega)$ を求めるのは簡単である。図 2.3 は $N = 2$ の Delay-Line だと思えばよい。つまり式 (2.38) において l を $Nl/2$ と置き換えればよい。

$$H_{DL}(\omega) = \frac{\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{Nl\omega}{2c}\right) \exp\left(-i\frac{Nl\omega}{2c}\right) \quad (2.39)$$

Fabry-Perot 方式は両腕に Fabry-Perot cavity を設置する方式である。Fabry-Perot cavity はもともと 2 枚の鏡を平行に向き合わせたものであり、波長の半整数倍が cavity の長さに等しい周波数の光のみを透過させる。簡単な構造だが性能のいいバンドパスフィルターとして使われている。Fabry-Perot cavity を透過する光は cavity 内で共鳴している状態であり、cavity 内に長い間滞在している。これは cavity 内を往復していることと等価となり、長い光路長を実現させることができる。このときの伝達関数 H_{FP} を求めるのは難しい。結論だけ述べる [11] と

$$H_{FP}(\omega) = \frac{\alpha\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\omega l}{c}\right) \exp\left(-i\frac{\omega l}{c}\right) \frac{1}{1 - r_1 r_2 \exp(-2i\omega l/c)} \quad (2.40)$$

$$\alpha = \frac{t_1^2}{(t_1^2 + r_1^2)r_2 - r_1} \quad (2.41)$$

但し r, t は鏡の (振幅) 反射率と透過率であり添字の 1, 2 は Front mirror, End mirror を示す。絶対値を考えると

$$|H_{FP}(\omega)| = \frac{\alpha\Omega}{\omega(1 - r_1 r_2)} \frac{|\sin(\omega l/c)|}{\sqrt{1 + F \sin^2(\omega l/c)}} \quad (2.42)$$

$$F = \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} = \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \quad (2.43)$$

\mathcal{F} はフィネスと呼ばれ Fabry-Perot cavity の共鳴の鋭さを表す parameter である。また Delay-Line 方式に出てきた折り返し数に対応する parameter は $2\mathcal{F}/\pi$ で表されるので光が等価的に何回往復したかを表す parameter でもある。

ここで干渉計を構成する光学部品が動くことを考えよう。これらはもちろん重力波検出という目的からいうと雑音である。この振動の振幅 δx に相当する重力波の検出限界 h_{limit} を考える。光路長の大部分は Delay-Line にせよ、Fabry-Perot にせよ 2 枚の鏡の間にあるためこの鏡の動きに干渉計は敏感である。しかし Beam Splitter の動きには敏感ではない。よってこれら 4 枚の鏡の振動のみ考えればよい。振幅 h の重力波が来た時に、式 (2.34) より片方の腕の長さは $hl/2$ 縮み、もう片方は $hl/2$ 縮む。よって両方の腕の長さの差は hl だけ変化する。一方 1 つの鏡だけ振幅 δx で振動すると両方の腕の長さの差は δx だけ変化する。よってこの振動による検出限界 h_{limit} は

$$h_{\text{limit}} = \frac{\delta x}{l} \quad (2.44)$$

となる。4枚の鏡が無相関で振幅 δx で振動していたら4倍すればよい。しかしここで4倍すべきは揺らぎの2乗平均であることに注意。つまり振幅は $\sqrt{4} = 2$ 倍しなくてはならない。この考えは熱雑音の計算をするうえで重要である。

世界の大型干渉計計画

研究開発を目的としたプロトタイプの干渉計型重力波検出器は存在するが観測を目的につくられたものはまだない。しかし現在観測目的の大型干渉計の建設計画が各国で進められているので紹介する [10]。表 2.1も参照のこと。

アメリカは LIGO 計画を進めている [7]。これは基線長 4km の干渉計をアメリカの Hanford(Washington) と Livingston(Louisiana) に建設する計画である。両者は 3000km 離れている。相互にデータを参照することにより雑音除去などを行なう。

イタリアとフランスは共同で VIRGO 計画を進めている [8]。基線長 3km の干渉計を Pisa (Italy) に建設する計画である。地面振動により低周波の重力波を観測するのは難しいが VIRGO では性能のいい防振装置を開発し、低周波の重力波検出を可能にするを目的の 1 つとしている。

ドイツとイギリスは GEO 計画を推進している [9]。Hannover(Germany) に基線長 600m の干渉計を建設する計画である。他の計画は Fabry-Perot 型 Michelson 干渉計を採用しているが GEO は Delay-Line 型 Michelson 干渉計を採用している。

日本は現在 TAMA 計画を推進中である [10]。

表 2.1: 世界の大型干渉計計画

計画名	国	タイプ、基線長	完成予定
LIGO	アメリカ	Fabry-Perot 4km (2 基)	2000
VIRGO	イタリア/フランス	Fabry-Perot 3km	1999
GEO	ドイツ/イギリス	Delay-Line 600m	1998
TAMA	日本	Fabry-Perot 300m	1998

TAMA300

TAMA 計画は基線長 300m の干渉計型検出器を東京の国立天文台三鷹キャンパスに建設する計画である。建設目的は 2 つある。まず将来 km クラスの干渉計を建設するために必要な技術の確立である。もう 1 つは実際に観測を行なうことである。具体的にはアンドロメダ銀河の距離 (700kpc) 程度までの重力波イベントをターゲットとしている。観測期間は 1998 年度前半 (Phase I) と 1999 年度後半 (Phase II) である。観測帯域は中心周波数

300Hz、帯域幅 300Hz であり、Phase II における観測帯域の目標感度は $h_{\text{rms}} = 3 \times 10^{-21}$ である¹³。

図 2.5 は TAMA が目標とする感度である¹⁴。図 2.5 において感度を limit している雑音についてこの後紹介する。

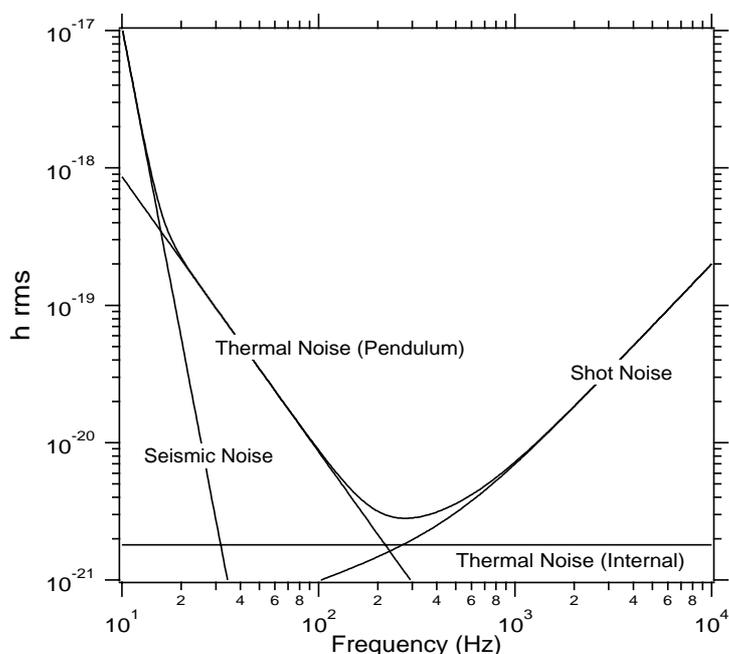


図 2.5: TAMA300 の Sensitivity

Seismic Noise

図 2.5 より低周波域は Seismic Noise で limit されていることがわかる。地面振動は東京では¹⁵以下のようなパワースペクトル密度になることが知られている。

$$G_{\text{seismic}}(f) = \frac{10^{-7}}{f^2} \left[\text{m}/\sqrt{\text{Hz}} \right] \quad (2.45)$$

この地面振動による鏡の振動を抑制するために防振が必要となる。TAMA では防振系として Stack と X-pendulum と Suspension System を採用している。

ここではとくに Suspension System について紹介する。Suspension System は Double Pendulum である。中間 mass が懸架されその下に鏡が懸架される。中間 mass の近くに

¹³パワースペクトル密度 (定義は第 3 章を参照のこと。) でなく観測帯域で積分した値である。

¹⁴この図の縦軸 h_{rms} は本当は中心周波数 f 、帯域幅 f でパワースペクトル密度を積分して平方根をとったものであるが、パワースペクトル密度に \sqrt{f} をかけるという近似を行なっている。

¹⁵他の場所でも f^{-2} に比例するが、 10^{-7} という係数は変わる。

は、永久磁石が配置される。具体的な形や parameter は第 4 章や Appendix A を参照のこと。

これらはどのような防振性能を持つのか考察する¹⁶。そのためまず一番簡単な防振として Pendulum として鏡を懸架することを考える。鏡は水平方向には自由質点のように振る舞うことが検出器の原理から要請されるが、これは懸架することにより実現される。

鏡がワイヤーで懸架されているとし、鏡の位置を x 、支点の位置を X と置く。 X の揺らぎが地面振動に相当する。さらに支点と鏡の相対速度に比例する摩擦力が鏡にかかるすると運動方程式は以下の通りになる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{m\omega_0}{Q} \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dX}{dt} \right) + m\omega_0^2(x - X) = 0 \quad (2.46)$$

但し ω_0 は pendulum の共鳴角周波数であり、 Q は Q 値を表す。この方程式を Fourier 変換し、 \tilde{x} と \tilde{X} の比である防振比 H_{single} を求めると

$$H_{\text{single}}(\omega) \equiv \frac{\tilde{x}}{\tilde{X}} = \frac{\frac{i\omega_0\omega}{Q} + \omega_0^2}{-\omega^2 + \frac{i\omega_0\omega}{Q} + \omega_0^2} \quad (2.47)$$

pendulum の共鳴周波数はほぼ 1Hz であり、観測帯域は 300Hz であることから、 $\omega \gg \omega_0$ が成り立つ。そして散逸が小さい、つまり観測帯域において $\omega \ll Q\omega_0$ が成立すると仮定すると式 (2.47) は

$$H_{\text{single}} \approx -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \quad (2.48)$$

となる。

Double Pendulum にすると防振比をさらに向上させることができる。観測帯域においては Double Pendulum の防振比 H_{double} は Single Pendulum の防振比 (2.48) の 2 乗になる [11, 74]。

$$H_{\text{double}} = \frac{\omega_0^4}{\omega^4} \quad (2.49)$$

TAMA の Suspension System は Double Pendulum であり、このことにより観測帯域において十分な防振比を実現することができると考えられている。

地面振動のパワースペクトル密度 (2.45) に防振比の絶対値をかけると、鏡の振動のパワースペクトル密度になる。このパワースペクトル密度を全周波数領域で積分することによって鏡の振動の rms (root mean square) 振幅を計算することができる。この rms 振幅は防振した状態でもかなり大きくそのままでは干涉計を共鳴状態にすることはできない。そこで鏡には制御がかけられる。しかしあまり rms 振幅が大きい場合には制御をかけることさえ不可能になる。そこで防振系は観測帯域における地面振動をおさえるだけでなく、rms 振幅も大きくしないように設計されなくてはならない。pendulum には共振が存在す

¹⁶以下の話は Stack や X-pendulum にも適用できる。

るのでその周波数における地面のパワースペクトル密度が rms 振幅に大きく寄与することが考えられる。そこで Suspension System の中間 mass の近くに強力な永久磁石を配置し、中間 mass の振動を中間 mass 中の eddy current と磁場の coupling によって damp する (magnet damping)。これによって共鳴ピークをつぶすことができる。しかしこのとき磁石が地面に対して固定されていると、磁石が地面と一緒に振動し、中間 mass はそれにひきずられるため、観測帯域の防振比が悪化する。そこでこの磁石も懸架することによって防振する。

TAMA の Suspension System はいままで議論した技術が導入されており、観測帯域の地面振動を抑え、なおかつ rms 振幅も制御が可能な程度に抑えることができると考えられる。Suspension System の具体的な parameter を決定するにはさらに様々な点を考慮する必要があるがその詳細は [74] を参照してほしい。

熱雑音

図 2.5 より肝心の観測帯域は熱雑音によって limit されることがわかる。この図では Pendulum と Internal mode の熱雑音を示されている。熱雑音とは熱浴からエネルギーを得ることにより物理量が揺らぐ現象である。Suspension System は熱浴中に存在するので、エネルギーを受けとり振動する。このことにより鏡の位置や角度が揺らぐ。これは干渉計の光路長差の揺らぎを起こすため、重力波検出という目的から見れば雑音となる。この雑音は Suspension System の熱雑音と呼ばれる。とくに鏡の位置が光軸の方向に揺らぐことを Pendulum の熱雑音と呼ぶ。また鏡自体も熱浴からエネルギーを得て、弾性振動を行なう。これも光路長差の揺らぎを引き起こす。これは鏡の (internal mode の) 熱雑音と呼ばれる。

この熱雑音は本論文の主題である。第 3 章において熱雑音の一般論、第 4 章にて Suspension System の熱雑音、第 5 章において鏡の熱雑音について議論する。第 6 章においてはそれらをまとめ、TAMA における熱雑音を議論する。

Shot Noise

図 2.5 によると高周波域では Shot Noise で limit される。Shot Noise は光が量子化されていることに起因する Photo Detector の光電流の雑音である。Shot Noise のパワースペクトル密度 G_I は e を電荷素量、 I_P を光電流として

$$G_I(f) = \sqrt{2eI_P} \quad (2.50)$$

と表される [11]。これにより干渉計で観測できる最小の位相差 $\delta\phi_{GR}$ は

$$\delta\phi_{GR} = \sqrt{\frac{2\hbar\Omega}{\eta P}} \quad (2.51)$$

となる [11]。但し Ω は光の角周波数、 η は Photo Detector の量子効率、 P はレーザーのパワーである。またこれで limit される h の大きさは式 (2.51) に先ほど議論した重力波検出器の伝達関数 (2.39)(2.40) の絶対値の逆数をかければよい。式 (2.51) からレーザーのパワーが大きいと shot noise が下がることがわかる。このためレーザーのパワーを上げることが必要になるがその方法としてレーザー源のパワーの向上とパワーリサイクリングが考えられる。パワーリサイクリングは干渉計から光源に帰っていく光を鏡で干渉計にもどすことにより干渉計内部のレーザーのパワーを実効的に高くする技術であり、PhaseI と PhaseII の間に導入が行なわれる予定である。

その他のノイズ

雑音は今までに述べたものだけでなく、光源に由来する雑音 (周波数雑音、強度雑音、ビームジッター)、残留ガスの揺らぎ、ミスマッチングとミスアラインメントによるものなどが存在する。

第 3 章

熱雑音について

重力波検出のように極めて精密な測定の場合、問題となる雑音として熱雑音があげられる。これは熱浴からエネルギーを得ることにより物理量が揺らぐ現象である。昔からよく知られているものとしては Brown 運動がある。これは微粒子に熱運動している回りの分子が衝突することによって微粒子が不規則な運動を行なうことである。この現象に対する上記のような解釈を初めて与えたのは A.Einstein である (1905) [12]。また普通精密測定で問題となる熱雑音は電気回路における抵抗の熱雑音である。これは抵抗中の電子の熱運動によって抵抗の両端に電位差の揺らぎが生じる現象である。これは Nyquist によって発見された (1928) [13]。この論文においては重力波検出器の機械系 (Suspension System と鏡) の熱雑音を議論する。

この章では今後の議論において必要な熱雑音の基礎知識について紹介する。まず熱雑音を議論する上で欠かすことのできないエネルギー等分配則と揺動散逸定理について紹介する。揺動散逸定理を用いることにより系の散逸から揺動 (熱雑音) を計算することができる。そのあと具体的に調和振動子の熱雑音を計算する。この調和振動子の熱雑音はこの後の章で常に用いられる。最後に散逸の具体例を概観する。

3.1 干渉計型重力波検出器における熱雑音

熱浴中に調和振動子があるとそれはエネルギーを得て、平衡位置から揺らぐ。これも熱雑音であるが、その大きさ、つまり揺らぎの時間 2 乗平均 $\overline{x^2}$ は¹エネルギー等分配則を用いて容易に計算できる。振動子の質量を m 、共鳴角周波数を ω_0 、Boltzmann 定数² を k_B 、温度を T として、

$$\overline{x^2} = \frac{k_B T}{m \omega_0^2} \quad (3.1)$$

¹ x はエルゴード仮説を満たす、つまり時間平均 \overline{x} とアンサンブル平均 $\langle x \rangle$ は等しいとする。

² $k_B = 1.38 \times 10^{-23} [\text{J/K}]$

である。重力波検出器の雑音は周波数領域で記述されるので、熱雑音 $\overline{x^2}$ の周波数成分を知る必要がある。そこでパワースペクトル密度という概念を導入する。詳細は [23] に譲るが以下のような関数である。但し f は周波数。

$$\overline{x^2(t)} = \int_0^\infty G_x(f) df \quad (3.2)$$

つまり $G_x(f)$ は $\overline{x^2}$ への各周波数成分の寄与を表した関数である³。このパワースペクトル密度は調和振動子の場合共鳴周波数 $f_0 = \omega_0/2\pi$ で極大になりその他の周波数ではかなり小さくなる。そこで干渉計型重力波検出器においては Suspension System や鏡の振動モードの周波数が観測帯域に入らないよう⁴に注意して設計を行なう必要がある。

だが共鳴から離れた周波数においても G_x は 0 になるわけではない。重力波検出においてはこのような小さい値でも問題となる可能性があるので詳細を知る必要がある。しかし式 (3.1) からわかるのは、パワースペクトル密度を全周波数領域で積分した値だけであって、特定の周波数におけるパワースペクトル密度ではない。それを知るためには揺動散逸定理を利用する。

揺動散逸定理は物理系における揺動と散逸の関係を記述する定理である。調和振動子を例にとってみよう。振動子の熱雑音は質点に揺動力が加わって生じると考えることができるが、この揺動力の性質はこの振動子の散逸の性質によって一意に決まってしまうのである。つまり揺動と散逸は独立ではなく、関係づけられたものなのである。この関係が成立する理由は、揺動も散逸も外界 (熱浴) との相互作用によって生じるものであるがその相互作用の方程式が同じであるからである。揺動散逸定理の具体的な内容 [14, 15] は次の section で述べる。

3.2 揺動散逸定理

ここでは揺動散逸定理の具体的な内容について議論する。ある物理系の揺動を知りたいければその系に関する運動方程式を散逸まで含めて正しく知る必要がある。ここでこの物理系を表す座標の 1 つである x の揺動を知りたいとしよう。まず運動方程式に揺動を導入する必要があるが、そのためにこの物理系の Hamiltonian に $-f(t)x$ (Lagrangian なら $f(t)x$) という摂動項を加えて運動方程式を導けば良い。この $f(t)$ は一般化された揺動力と呼ばれる。

このあと運動方程式を Fourier 変換し、この系の impedance⁵

$$Z(\omega) \equiv \tilde{f}(\omega)/\tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega)/i\omega\tilde{x}(\omega) \quad (3.3)$$

³よく $\sqrt{G_x}$ もパワースペクトル密度と呼ばれるので注意。 $\sqrt{G_x}$ は振幅に相当する。また加法や積分ができるのは G_x の方であることも注意。

⁴この要求は防振の方からも出される [74]。

⁵これは電気回路の impedance を一般化したものである。

を求める⁶。また impedance の実部 R を resistance⁷、impedance の逆数 Y を admittance、admittance の実部 σ を conductance と呼ぶ。

$$R(\omega) \equiv \operatorname{Re}[Z(\omega)] \quad (3.4)$$

$$Y(\omega) \equiv 1/Z(\omega) \quad (3.5)$$

$$\sigma(\omega) \equiv \operatorname{Re}[Y(\omega)] \quad (3.6)$$

また

$$H(\omega) \equiv \tilde{x}(\omega)/\tilde{f}(\omega) \quad (3.7)$$

を伝達関数と呼ぶ。 x の周波数 f におけるパワースペクトル密度を $G_x(f)$ とすると以下の関係式 [14] が成立する⁸。

$$G_x(f) = \frac{4k_B T \sigma(\omega)}{\omega^2} \quad (3.8)$$

一般に impedance や admittance の実部は系の散逸を表すのでこの式は系の揺動と散逸の関係を表している。これは第 1 種揺動散逸定理と呼ばれる。あまり行なわれないが伝達関数を用いて第 1 種揺動散逸定理を書き表すこともできる。それは以下の通り。

$$G_x(f) = -\frac{4k_B T \operatorname{Im}[H(\omega)]}{\omega} \quad (3.9)$$

また揺動力 $f(\omega)$ のパワースペクトル密度 G_f とおくと以下の式 [14] が成立する。

$$G_f(f) = 4k_B T R(\omega) \quad (3.10)$$

これが第 2 種揺動散逸定理である。

3.3 調和振動子の熱雑音

3.3.1 調和振動子の熱雑音のパワースペクトル密度

抽象的な話が続いたのでここで具体的な例について論ずる。調和振動子の熱雑音について調べよう [15]。質量を m 、共鳴角周波数を ω_0 、位置を x 、揺動力を $f(t)$ とすると運動方程式は以下の通り。

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = f(t) \quad (3.11)$$

この方程式には散逸が入っていないがとりあえず Fourier 変換を行ない、散逸を表す項を導入しよう。

$$-m\omega^2 \tilde{x} + m\omega_0^2 [1 + i\phi(\omega)] \tilde{x} = \tilde{f} \quad (3.12)$$

⁶ \dot{x} は x の 1 階時間微分を表す。

⁷電気回路の resistance を一般化したもの。

⁸ f の関数であるのに右辺は $\omega = 2\pi f$ を使っている。consistent な表記ではないがよく行なわれる表記であるので従った。但し積分を行なうときの変数は f であることに注意。

バネ定数 $m\omega_0^2$ が $m\omega_0^2[1 + i\phi(\omega)]$ となった。これを複素バネ定数と呼ぶ。新たに加わった虚部が散逸の大きさを表すわけである。 ϕ が大きければ散逸は大きい。その具体的な形や物理的意味は後にしてとりあえず熱雑音のパワースペクトル密度を求めよう。まず impedance を求めると

$$Z(\omega) = \frac{-m\omega^2 + m\omega_0^2[1 + i\phi(\omega)]}{i\omega} \quad (3.13)$$

式 (3.13) を式 (3.8) に代入すると

$$G_x(f) = \frac{4k_B T}{m\omega} \frac{\omega_0^2 \phi(\omega)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4 \phi^2(\omega)} \quad (3.14)$$

これが調和振動子の熱雑音のパワースペクトル密度である。

viscous damping と structure damping

ここでは $\phi(\omega)$ の model として viscous damping model と structure damping model について考える。

viscous damping model では $\phi(\omega)$ は以下のような形になる。

$$\phi(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0 Q} \quad (3.15)$$

Q は正の定数であり Q 値⁹と呼ばれる。この場合散逸を表す項は $i\omega\dot{x}$ に比例する。つまり速度に比例した減衰力が加わるという有名な散逸の model を表しているわけである。 Q 値はその散逸の大きさを表す。 Q 値が大きいほど散逸は小さい。

viscous damping のときのパワースペクトル密度は式 (3.14) より

$$G_x(f) = \frac{4k_B T}{mQ} \frac{\omega_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2 \omega^2 / Q^2} \quad (3.16)$$

先ほど述べたように干渉計型重力波検出器において問題となるのは共鳴から離れた周波数における熱雑音の大きさである。そこで共鳴から離れた周波数でどのような形に近似できるか調べよう。但し Q はどんなに小さくても 1 程度とする。まず $\omega \ll \omega_0$ のときは

$$G_x(f) = \frac{4k_B T}{m\omega_0^3 Q} = \text{constant} \quad (3.17)$$

$\omega \gg \omega_0$ のときは

$$G_x(f) = \frac{4k_B T \omega_0}{mQ} \frac{1}{\omega^4} \propto f^{-4} \quad (3.18)$$

一方 structure damping の場合 $\phi(\omega)$ は次のような形になる。

$$\phi(\omega) = \frac{1}{Q} \quad (3.19)$$

⁹Q-value or Q factor

この場合も Q は Q 値と呼ばれる。この model の詳細は後述。

さて structure damping model における熱雑音は式 (3.14) より

$$G_x(f) = \frac{4k_B T}{mQ\omega} \frac{\omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4/Q^2} \quad (3.20)$$

viscous damping 同様に共鳴から離れた周波数帯における近似式を求めると以下の通り。但し $Q \gg 1$ とする。まず $\omega \ll \omega_0$ のときは

$$G_x(f) = \frac{4k_B T}{m\omega_0^2 Q} \frac{1}{\omega} \propto f^{-1} \quad (3.21)$$

$\omega \gg \omega_0$ のときは

$$G_x(f) = \frac{4k_B T \omega_0^2}{mQ} \frac{1}{\omega^5} \propto f^{-5} \quad (3.22)$$

となる。

調和振動子の熱雑音のグラフ (viscous damping の場合と structure damping の場合) は図 3.1 参照のこと。

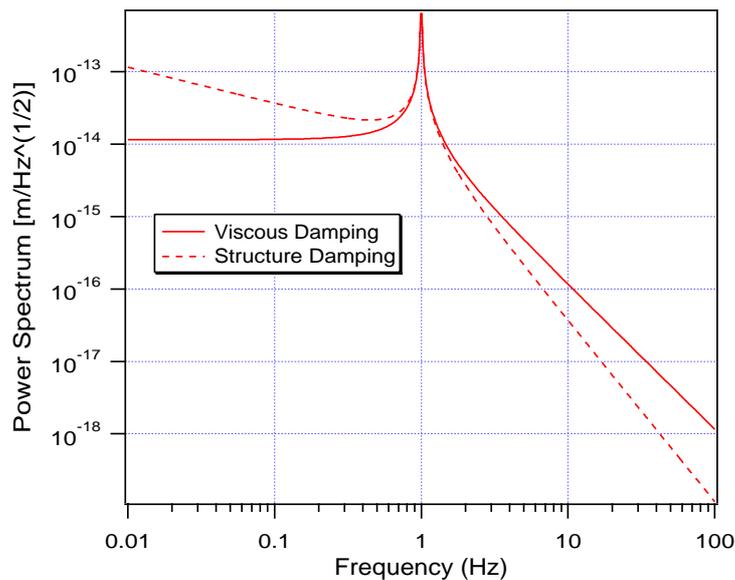


図 3.1: $T=300[\text{K}]$, $m=1[\text{kg}]$, $\omega_0/2\pi = 1[\text{Hz}]$, $Q=5 \times 10^5$ とした場合の調和振動子の熱雑音のパワースペクトル密度

Q 値とは

いままでは $\phi(\omega)$ や Q を天狗下りの的に扱ってきたが、ここではその意味や性質について考えてみよう。

まず $\phi(\omega)$ が散逸を表すことを示そう。但し $\phi(\omega) \ll 1$ とする。位置 x やバネの復元力 F は周波数領域においては以下のように記述される。

$$\tilde{F} = -m\omega_0^2[1 + i\phi(\omega)]\tilde{x} \quad (3.23)$$

である。これは復元力の位相が ϕ だけ位置の位相より遅れることを意味する。復元力による仕事率は $F\dot{x}$ であるのでこれを 1 周期にわたり積分して復元力が 1 周期になす仕事を求めて、系の全エネルギーで規格化を行なうと $-2\pi\phi$ となる。この仕事はまさしく散逸したエネルギーであり、 $2\pi\phi$ は 1 周期の間に失われるエネルギーの全エネルギーに対する割合を示している。

また viscous damping でも structure damping でも以下の式が成り立つ¹⁰。

$$\phi(\omega_0) = \frac{1}{Q} \quad (3.24)$$

先ほど Q 値は散逸の大きさを表すと書いたが、式 (3.24) からいうと共鳴周波数における散逸の大きさを表すといったほうがより厳密である。

この Q 値を計測する方法を 2 つ紹介する。

まず調和振動子に外力を加えることを考える。式 (3.11) の $f(t)$ を以下の様にする。

$$f(t) = \begin{cases} A \exp(i\omega_0 t) & (t < 0) \\ 0 & (t > 0) \end{cases} \quad (3.25)$$

このときこの運動方程式を解くには、Fourier 変換をしてやり、 \tilde{x} について解き、逆 Fourier 変換をしてやればよい。結果 ($t > 0$) は以下の通りである¹¹。

$$x(t) \propto \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \sin(\omega_0 t) \quad (3.26)$$

つまり共鳴状態に励起したあと、励起信号を切って、減衰する速さから Q 値を求めることができる。 Q 値が高いほど減衰時間が長いので高い Q 値の測定にむいている。

もう 1 つは伝達関数を測定することである。調和振動子において伝達関数の絶対値の 2 乗は以下ようになる。

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{m^2[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4 \phi^2(\omega)]} \quad (3.27)$$

この関数は $\omega = \omega_0$ のときピークとなる。このピークの半値幅 $\Delta\omega_0$ を求めよう。 $\Delta\omega_0$ の定義は以下の通り。

$$\left|H\left(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega_0}{2}\right)\right|^2 = \frac{|H(\omega_0)|^2}{2} \quad (3.28)$$

¹⁰ というよりこの式を満たすように Q 値は定義されている。

¹¹ 先ほど 1 周期に散逸するエネルギーの全エネルギーに対する割合は $2\pi\phi$ だと述べたが、これを利用して微分方程式をたてて解くこともできる。

但し $\phi \ll 1$ とする。するとピークの幅は小さくなるので $\phi(\omega) \approx \phi(\omega_0) = 1/Q, \Delta\omega_0 \ll \omega_0$ という近似を使うことができる。よって半値幅は

$$\Delta\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (3.29)$$

となる。よって伝達関数を測定して半値幅 $\Delta\omega_0$ を求めれば Q 値がわかる。 Q 値が低いほど $\Delta\omega_0$ は大きくなるので低い Q 値¹²の測定にむいている。

散逸の大きさを測定するとき Q 値を測定することが多い。その理由はもともと Suspension System と鏡は散逸が極めて小さい系¹³なので散逸の大きさを正確に測定することは極めて困難であり、そして唯一の例外は共鳴周波数だからである。共鳴周波数における系の振る舞いを決定するのは散逸である¹⁴。では Q 値だけによって散逸の性質が全て明らかになるのだろうか。実はそうではない。 Q 値からわかるのは共鳴周波数における散逸だけである。例えば viscous damping であるか structure damping であるかは他の周波数において散逸を計測しないとわからない。しかし他の周波数においては散逸は小さく、測定するのは困難である。そして viscous damping か structure damping のいずれをとるかで図 3.1 から明らかなように共鳴から離れたところでの熱雑音の大きさは大きく変わってきてしまう。干渉計型重力波検出器の熱雑音を推定する困難の 1 つはここにある¹⁵。しかし現実の系においては共鳴が 1 つだけではないのでいくつかの共鳴において Q 値をはかることによってだいたいの散逸の周波数領域での振る舞い、すなわち $\phi(\omega)$ の形がわかる。このようにして共鳴周波数から離れた領域における $\phi(\omega)$ の形を推定することが可能である。ただ重力波検出器においては観測帯域に共鳴周波数がないようにするため、観測帯域においては他の周波数帯から散逸の大きさを推定することによる不確定性が残る。

3.4 散逸の具体例

揺動散逸定理によると熱雑音は系の散逸で決定されるので、どのような散逸が存在するのか、そしてどのような性質を持つのかを把握することが肝要となる。ここでは様々な散逸について述べる [15]。大きくわけて外部から加わる抵抗力による散逸と物質内部で生じる散逸、そして物質の接触面で生じる散逸がある。

3.4.1 外部からの抵抗力による散逸

これは散逸の原因が Suspension System や鏡の外部にあるものである。これらの散逸も複素バネ定数を使用して記述することができる。しかし注意すべきはバネ定数に散逸を加

¹²低いといっても $Q \gg 1$ を満たす必要はある。

¹³magnet damping を除く。

¹⁴式 (3.12) を見ると共鳴周波数では加速度項と復元力項が相殺して揺動力と散逸が等しくなることがわかる。

¹⁵共鳴型は共鳴における熱雑音が問題になるのでこのような問題はない。

えるのでポテンシャルエネルギーが散逸するように見えるが散逸の原因が外部にあるときは運動エネルギーが散逸しているということである。つまりこの散逸を複素バネ定数で表すことは数学的には可能であるが物理的意味を考えるとあまりよくない。しかしここでは表記を統一するために複素バネ定数を用いる。

残留ガスによる散逸

重力波検出器は真空容器中に設置される。容器中の残留ガスにより、速さに比例した抵抗力がかかる。よって残留ガスによる散逸は viscous damping である。TAMA においては真空度は 10^{-6}Pa である¹⁶。この程度の真空になると分子の平均自由行程は Suspension System や鏡のサイズより大きく、残留ガスの粘性よりも残留ガスの分子が Suspension System や鏡に衝突して運動量を奪うことによる散逸の方がはるかに大きくなる。このような気圧のときにおこる散逸の Q 値 [15, 16, 17] は

$$Q_{\text{gas}} = Ch \frac{\rho\omega_0}{n\sqrt{m_{\text{mol}}k_{\text{B}}T}} \quad (3.30)$$

となる¹⁷。但し C は振動子の形状に依存した無次元数 (但しほとんど 1)、 h は振動子の大きさ、 ρ は振動子の密度、 ω_0 は振動子の共鳴角周波数、 n はガスの分子数密度、 m_{mol} は分子の質量である。TAMA においてどの程度になるか計算してみよう。 $h \sim 0.1[\text{m}]$, $\rho = 2.2[\text{g}/\text{cm}^3]$, $\omega_0 \sim 2\pi[\text{rad}/\text{s}]$ として計算すると、

$$Q_{\text{gas}} = 4 \times 10^{11}$$

となる。現実問題としては $Q = 10^7$ に到達することですら、非常に困難であるので残留ガスによる散逸は無視できることがわかる。また式 (3.30) から、実際に Q 値を測定するときは 10^{-3}Pa 程度¹⁸の真空度が確保できれば充分である。

eddy current による散逸

磁場中を導体が運動すると、導体内部に誘導起電力による渦状の電流が発生する。これが eddy current である。eddy current により生じる磁場と外部磁場との相互作用によって導体の運動が damp される。eddy current によって生じる抵抗力を F_{magnet} とし、導体の位置を x とすると

$$F_{\text{magnet}} = A\sigma B \frac{\partial B}{\partial x} \dot{x} \quad (3.31)$$

¹⁶ $7.5 \times 10^{-9}\text{Torr}$

¹⁷共鳴角周波数 ω_0 に比例することに注意。これは viscous damping の特徴である。抵抗力と速度の間の比例係数が定数であることが原因となっている。

¹⁸ 10^{-5}Torr

A は導体の形状に依存する因子、 σ は導体表面の導電率、 B は磁場である。明らかに viscous damping である。これが $im\omega_0^2\phi(\omega) = im\omega_0\omega/Q$ に相当する項であることから、

$$Q_{\text{magnet}} = \frac{m\omega_0}{A\sigma B \frac{\partial B}{\partial x}} \quad (3.32)$$

となる。TAMA の Suspension System ではわざと強い磁石 (damping magnet) を設置して、振動を damp する。その Q 値の大きさは磁石の数や配置を調節することによって変えることができる。実際には防振の点から Q 値の大きさが決定されるのでその値になるように磁石の数や配置は設定される [74]。この他の磁場 (地磁気など) は damping magnet に比べると小さいということから無視できると考えられる。

3.4.2 物質内部の散逸

今までに述べてきた散逸は外部に起因する散逸であった。これらは (damping magnet による散逸を除けば) 無視できることがわかった。よってこれから述べる物質内部の散逸が現実の重力波検出器で問題となる。物質内部の散逸は複素バネ定数 $m\omega_0^2(1+i\phi)$ を用いて表すのが便利である。このバネ定数の虚部は散逸を表すが、これは何に起因するものであるのか。理想的な弾性体は応力が変化すると瞬時に応答し、ひずみが増加する。しかし実際には応力の変化からひずみの変化までの間には有限の時間を有する。この位相の遅れが複素バネ定数の虚部によって表されている。またこのような遅れを示す性質を弾性と区別して擬弾性¹⁹ と呼ぶ。問題はこの虚部 ϕ がどのような周波数依存性を持つかということである。

structure damping

これは先ほど述べた散逸の大きさが周波数に依存しない model [$\phi(\omega) = 1/Q$] である。様々な物質の内部散逸はこのような振る舞いをするということはかなり昔から実験によって確認されていた [18]。さらに最近この model の検証実験が行なわれ、model と矛盾しない結果が出ている [19, 20]。このような性質が普遍的に存在することに関しては疑いの余地はないものの、どのような過程によってこのような性質が生じるかについてはアイデアがないわけではないが²⁰、説得力のある理論は今のところない。

さて model にはいくつか数学的な問題点がある。具体的にいうと数学的要請から $\phi(\omega) = 1/Q$ という形が全周波数領域で成立することはない。まず位置 x も揺動力 f も実関数であるので $\phi(\omega)$ は奇関数でなければならない。また structure damping は周波数領域では意味は明瞭であるが、時間領域でどのように書き表されるかは viscous damping と違い、解釈が難しい。これは周波数領域で記述された方程式を解いて、その解を逆 Fourier 変換

¹⁹anelasticity

²⁰転位に関連づけようとする試みがあるらしい [21]。

によって時間領域の解にしようとするすると積分が発散してしまうのである。この積分の発散をなくすためには $\omega \rightarrow 0$ と $\omega \rightarrow \infty$ で $\phi \rightarrow 0$ となる必要がある [20]。よって式 (3.19) は観測帯域を含む広い周波数帯において散逸の大きさは周波数にほとんど依存しないことを意味していると考えたほうがよい。

thermoelastic damping

これも擬弾性の 1 例であるがこちらはどのような過程を経て起こる現象かはよくわかっている。物質が変形し、非一様な伸縮が生じたとする。伸縮に伴い物質の温度が変化するが、伸縮が非一様なので温度変化も非一様となる。このために物質内部に対流が生じ、内部エネルギーが散逸する。これが thermoelastic damping である。この過程の詳細は Zener が論じている [22]。Zener によるとワイヤーの thermoelastic damping の $\phi(\omega)$ は次のように記述される。

$$\phi(\omega) = \Delta \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (3.33)$$

但し

$$\Delta = \frac{E\alpha^2 T}{c} \quad (3.34)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\tau} = 2.16 \frac{D}{\tau} \quad (3.35)$$

である。ここで E は Young's Modulus、 α は熱膨張係数、 T は絶対温度、 c は単位体積当りの比熱、 d はワイヤーの直径、 D は熱拡散係数で、熱伝導率を κ として $D = \kappa/c$ という関係にある。

散逸過程はこれだけではないのでこれらの式のみから散逸の大きさを推定することはできない。しかしこのような散逸過程についてはよくわかっているので散逸の下限 (Q 値の上限) を知ることはできる。

3.4.3 接触面における散逸

違う物質が接触していると変形時に摩擦などによって散逸が生じると考えられる。具体的には pendulum のワイヤーとワイヤークランプ、ワイヤーと鏡、鏡と磁石等が考えられる。

これらについてはあまり計算はなされていない。そこでクランプ点で散逸が生じる調和振動子というモデルを作って計算を行ない、散逸の周波数依存性を調べた。

散逸のあるバネは図 3.2 のように理想的なバネに damper が並列に接続されたと考えられる。damper は両端の相対速度に比例した抵抗力を生じさせる。その比例係数 R が周波数に依存しなければ viscous damping を表し、周波数に反比例すれば structure damping を表す。これはバネの位置エネルギーの散逸を表している²¹。

²¹のちほど登場する Pendulum Mode におけるワイヤーの曲げの弾性エネルギーの散逸もこのモデルで

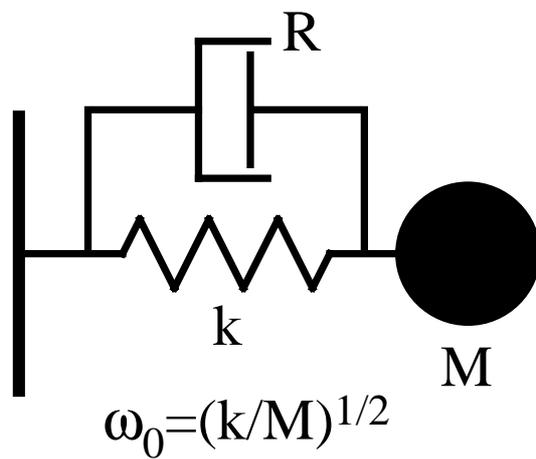


図 3.2: 弾性エネルギーが散逸するバネ

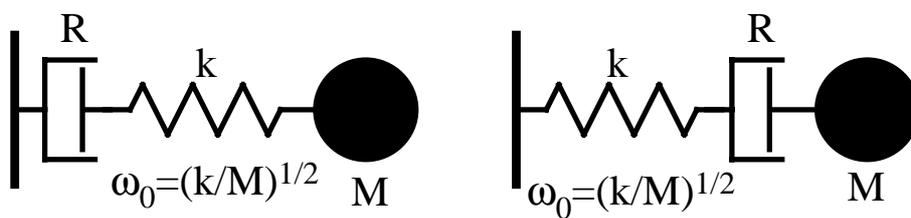


図 3.3: クランプ点で散逸がおこるバネ

ここではクランプ点における散逸を表すモデルとして、図 3.3 のように damper と理想的なバネが直列につながれているモデル²²を考えた。damper の位置としては、固定点とバネの間 (図 3.3 の左) と、バネと質点の間 (図 3.3 の右) が考えられる²³。

運動方程式から散逸の周波数依存性を導く。まず図 3.3 の左の図から計算する。質点の位置を x とし、damper とバネの連結点を x_c とする。質点の質量は M 、共鳴角周波数は ω_0 である。さらに質点に加わる揺動力を f とする。

運動方程式はフーリエ変換したものを考える。連結点におけるつりあいの式と質点の運動方程式は以下の通り。

$$i\omega R\tilde{x}_c = M\omega_0^2(\tilde{x} - \tilde{x}_c) \quad (3.36)$$

$$-M\omega^2\tilde{x} + M\omega_0^2(\tilde{x} - \tilde{x}_c) = \tilde{f} \quad (3.37)$$

図 3.3 の右の図についても同様につりあいの式と運動方程式を考える。結果は以下の通り。

$$M\omega_0^2\tilde{x}_c = i\omega R(\tilde{x} - \tilde{x}_c) \quad (3.38)$$

$$-M\omega^2\tilde{x} + i\omega R(\tilde{x} - \tilde{x}_c) = \tilde{f} \quad (3.39)$$

どちらの場合もつりあいの式を用いて、質点の運動方程式から \tilde{x}_c を消去することができる。このようにして求められた式は damper とバネを複合バネとして見た運動方程式に相当する。その運動方程式は左右どちらの図においても以下の通りである。

$$-M\omega^2 + M\omega_0^2 \left(\frac{\omega^2 R^2}{\omega^2 R^2 + M^2 \omega_0^4} + i \frac{\omega R M \omega_0^2}{\omega^2 R^2 + M^2 \omega_0^4} \right) \tilde{x} = \tilde{f} \quad (3.40)$$

damper が支持点と連結していても、質点と連結していても散逸の周波数依存性は同じということは、クランプの両端での散逸が同じならば、どちらの散逸も熱雑音への同等の寄与をするということである。この調和振動子を鏡の Suspension System と対応させると、熱雑音を減らすためには鏡を懸架するワイヤーの両端のクランプの散逸を配慮しなければならないことがわかる。また R が大きくなると運動方程式 (3.40) の虚部が小さくなる、つまり散逸が小さくなることに注意。これはクランプ点での散逸が大きくなるとクランプ点での相対運動が抑制されるので調和振動子全体からみると散逸が小さくなるからである。

Suspension System の場合、観測帯域は共鳴周波数よりずっと高く、クランプ点における散逸は非常に大きい²⁴と考えられるので $\omega R \gg M\omega_0^2$ が成立すると考えて良い。このと

表すことができることに注意。曲げの弾性エネルギーはクランプ点付近に集中しているがあくまでもワイヤー内部に存在するエネルギーである。

²²これはクランプ点でバネと支持点、バネと質点が相対運動をして摩擦が生じていることに相当すると考えられる。

²³図 3.3、図 3.4 のようなモデルが妥当か否かは実験で検証しないとわからない。

²⁴そうでなければクランプ点で固定できない。

き式 (3.40) は以下のように近似できる。

$$-M\omega^2 + M\omega_0^2 \left(1 + i\frac{M\omega_0^2}{\omega R}\right) \tilde{x} = \tilde{f} \quad (3.41)$$

これよりクランプ点の散逸つまり damper が viscous damping に従う ($R = \text{constant}$) のであれば、運動方程式 (3.41) の虚部が ω に比例するので調和振動子全体でも viscous damping していることになる。クランプ点の散逸が structure damping ($R \propto \omega$) であれば調和振動子全体でも structure damping になる。

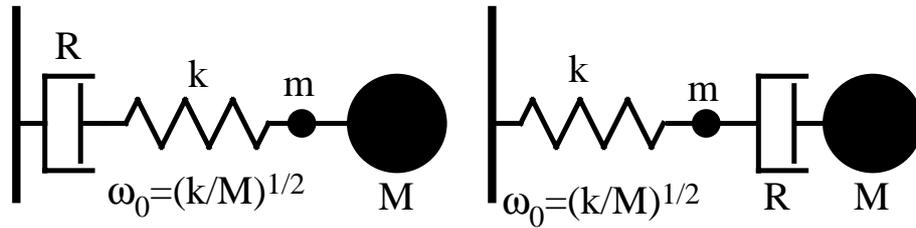


図 3.4: クランプ点で散逸がおこる質量のあるバネ

これまでの計算ではバネの質量は無視して考えてきた。ここでは質量も考慮しよう。図 3.4 のようにもとからある質点よりずっと軽い質量 m の質点を導入する。これがバネの等価的な質量を表す。この調和振動子の散逸の周波数依存性を計算する。但し $k = M\omega_0^2$ である。図 3.4 の左の図のような場合 $M \rightarrow M + m$ となるだけであり、 $M \gg m$ なのでバネの質量がない場合と変わらない周波数依存性になる。図 3.4 の右の図のような場合はどうか。今度は質量 m の質点の位置を x_c として、質量 m と M の質点の運動方程式を求めると以下ようになる。

$$-m\omega^2 \tilde{x}_c + M\omega_0^2 \tilde{x}_c + i\omega R(\tilde{x}_c - \tilde{x}) = 0 \quad (3.42)$$

$$-M\omega^2 \tilde{x} + i\omega R(\tilde{x} - \tilde{x}_c) = \tilde{f} \quad (3.43)$$

先ほどと同様に \tilde{x}_c を消去すれば、

$$-M\omega^2 + \left(\frac{\omega^2 R^2 (-m\omega^2 + M\omega_0^2)}{\omega^2 R^2 + (M\omega_0^2 - m\omega^2)^2} + i \frac{\omega R (-m\omega^2 + M\omega_0^2)^2}{\omega^2 R^2 + (M\omega_0^2 - m\omega^2)^2} \right) \tilde{x} = \tilde{f} \quad (3.44)$$

$M\omega_0^2 \gg m\omega^2$ という低周波数域ではバネの質量がない場合と同じ結果、つまり式 (3.41) に帰着される。しかし $M\omega_0^2 \ll m\omega^2$ では²⁵以下ようになる。

$$-M\omega^2 + M\omega_0^2 \left(\frac{-m\omega^2}{M\omega_0^2} + i \frac{m^2 \omega^3}{R} \right) \tilde{x} = \tilde{f} \quad (3.45)$$

²⁵但し $m\omega^2 \ll \omega R$ は成立すると仮定した。現実的には R はかなり大きいはずなので成立すると思われる。

クランプ点の散逸が viscous damping なら調和振動子全体の散逸は ω^3 に比例し、structure damping なら ω^4 に比例する。つまりワイヤーの質量を考慮すると鏡とワイヤーのクランプ点の散逸によって調和振動子全体の散逸が高周波数でかなり大きくなる。つまり高周波数では鏡とワイヤーのクランプ点の散逸が問題となってくる。これは熱雑音にとっては都合の良いことである。

この調和振動子モデルを Suspension System に対応させて、観測帯域でこのような散逸の増大がおこるか確認した。具体的にいうと観測帯域で $M\omega_0^2 \ll m\omega^2$ つまり

$$\omega \gg \sqrt{\frac{M}{m}}\omega_0 \quad (3.46)$$

が成立するか否かを計算した。Appendix A を参照にすると鏡の質量 $M \approx 1\text{kg}$ であり、ワイヤーの質量 $m \approx 4 \times 10^{-5}\text{kg}$ である。よって観測帯域において

$$\omega \gg 1.6 \times 10^2 \times \omega_0 \quad (3.47)$$

が成立すると散逸が大きくなる。観測帯域は 300Hz であるから $\omega_0/2\pi < 2\text{Hz}$ だと観測帯域で散逸が大きくなるおそれがある。のちほど登場する Pendulum Mode(鏡の光軸方向への並進運動)は $\omega_0/2\pi \approx 1\text{Hz}$ である²⁶。

鏡の回転はどうであろうか。この場合

$$\omega \gg \sqrt{\frac{I_{\text{mir}}}{I_{\text{wir}}}}\omega_0 \quad (3.48)$$

が観測帯域で成立するか否か確認すればよい。但し I_{mir} は鏡の慣性モーメントであり、Appendix A より $I_{\text{mir}} \approx 10^{-3}\text{kg m}^2$ である。 I_{wir} はワイヤーの慣性モーメントであり、ワイヤーの重心と鏡の重心の距離は高々 10cm のオーダーであるので $I_{\text{wir}} \approx 4 \times 10^{-7}\text{kg m}^2$ である。よって観測帯域において

$$\omega \gg 50 \times \omega_0 \quad (3.49)$$

が成立すると散逸が大きくなる。よって $\omega_0/2\pi < 6\text{Hz}$ だと観測帯域において散逸が大きくなる。実は鏡の回転の共鳴周波数はこの条件を満たしてしまう²⁷。

まとめると鏡とワイヤーの境界の散逸によって熱雑音が観測帯域で大きくなる可能性がある²⁸ので鏡とワイヤーのクランプをかなりしっかりと固定する必要があるかもしれないということである。

²⁶第4章参照。

²⁷第4章参照。

²⁸調和振動子のモデルが正しいのかという問題と式(3.47)(3.49)はオーダー推定程度のものにすぎないという問題があるが。

3.5 本論文の主題

式 (3.14) を見てわかるように、調和振動子の熱雑音は以下の parameter で決定される。

- 温度 T
- system に関する parameter
 - 散逸を表す parameter Q
 - 散逸を表さない parameter m, ω_0

少なくとも TAMA に関しては装置を低温まで冷却する予定はないので $T = 300[\text{K}]$ と考えてよい。すると熱雑音の研究として以下の 2 つの approach が必要となる。

- 散逸を表す parameter に関する研究 Q 値の計測や散逸の性質、低減方法の研究
- 散逸を表さない parameter に関する研究 実際の system では m, ω_0 がどの程度になるか。また熱雑音を低減させるためには m, ω_0 をどのように変更したらよいか、変更するためにどのような方法をとるかについての研究

揺動散逸定理より熱雑音は散逸によって決定されるので前者の散逸の物理の研究は必要不可欠なはいうまでもないが、散逸によってのみ熱雑音の大きさが決まるわけではないので後者の approach も必要である。またこの両者から出される制限の調整も必要である。

本論文では後者の approach をとる。よって基本的に散逸の大きさつまり Q 値は物理的に妥当と思われる値を仮定する。もしくは現実の system から導かれる Q 値の下限を求め、現実の Q 値と比較する。

前者の approach についても現在研究が進められている。ワイヤーや pendulum の散逸に関しては現在坪野研究室で計測中である [32, 33]。鏡の Q 値に関しては [75] を参照のこと。

第 4 章

Suspension System の熱雑音

この章では、TAMA の Suspension System の熱雑音についての推定を行なう。Suspension System の熱雑音とは、System が熱浴からエネルギーを与えられて、鏡の位置や角度が揺らぐことを指す。Suspension System の設計には様々な点を考慮する必要があるが熱雑音はそのうちの 1 つである。熱雑音を低減させる方法としては Q 値を大きくすることもあげられるが、それ以外の parameter を操作することによって低減させることも可能である。そこでこの章では Suspension System の parameter を可能な限り操作して熱雑音の大きさを減少させることを試みた。またその時の値を目標感度と比較して必要な Q 値の下限も求める。Suspension System の Q 値の測定は Pendulum Mode やワイヤー以外はあまり進んでいないが、過去のデータや理論から Q 値の下限は実現可能であるかどうかを議論する。

4.1 TAMA の Suspension System の概略

TAMA300 の Suspension System の概略については図 4.1、4.2 を参照。

詳細は [74] を参照してほしい。概略だけここで説明する。まず一番上にペローズがある。これはやわらかいバネとして働き、縦振動を防振する役割を果たす。本来縦振動はノイズとならないはずであるが、Suspension System の非対称性などにより縦振動が鏡の横振動に変換されるので、縦振動の防振も必要となる。この長さは荷重されているときに 65mm である。ペローズからはタングステンワイヤー (径 $100\mu\text{m}$, 長さ 186mm) が伸びており、中間 mass を懸架する。(ペローズ + タングステンワイヤー) は 4 本ある。中間 mass は Al で出来ており、サイズは $6\text{cm} \times 8\text{cm} \times 10\text{cm}$ である。中間 mass の近くには強力な永久磁石が配置される。これによって中間 mass の振動は magnet damping によって抑制される。中間 mass から 2 本のタングステンワイヤー (径 $50\mu\text{m}$) がループとなって鏡を懸架している。中間 mass と鏡の重心の距離は 25cm である。鏡は fused silica で出来ており、直径 10cm、高さ 6cm である。

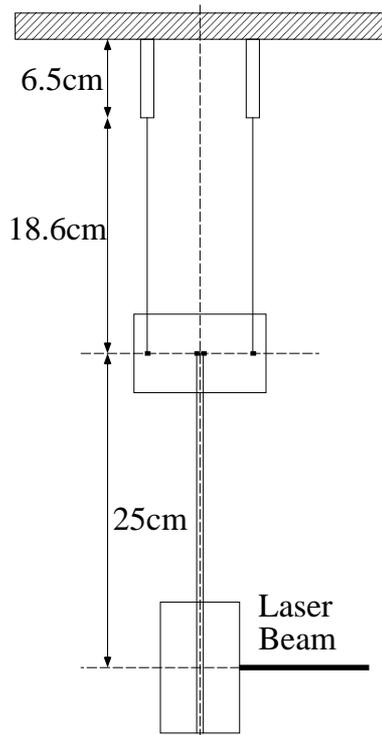


図 4.1: 光軸と垂直な方向から見た図

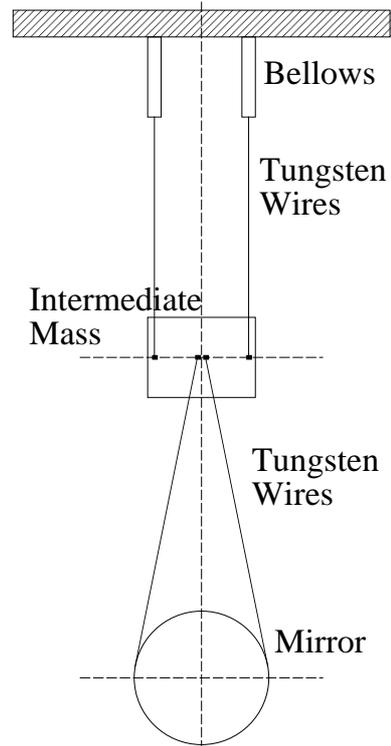


図 4.2: 光軸の方向から見た図

4.2 鏡の自由度

Suspension System が熱的に励起され、鏡の位置や角度が揺らぎそれによって生じる光路長差の揺動を熱雑音と呼ぶわけであるが、具体的にどのような鏡の運動によって光路長差の変化が生じるかをこの section で論じる。

まず鏡に関して図 4.3 のような座標系を導入する。

光軸方向に x 軸、鉛直方向に z 軸、これらの座標系が右手系をなすように y 軸を定義する。また x 軸回りの回転を Roll Rotation、 y 軸回りの回転を Pitch Rotation、 z 軸回りの回転を Yaw Rotation とする。この章では鏡は 3 次元の剛体とみなすので、鏡の運動の自由度は並進 (x, y, z) と回転 (Roll, Pitch, Yaw) の 6 個である。これらの運動はどのようにして光路長差の揺らぎを引き起こすのであろうか。

並進について考えてみよう。まず x 軸方向の並進は直接光路長差を変化させる。この振動を Pendulum Mode と呼ぶことにする。 y 軸方向の並進は光路長差に何の変化も及ぼさない。 z 軸方向の並進も一見光路長差に影響を及ぼさないかのように見えるがそうではない。Fabry-Perot cavity を構成する 2 個の鏡はかなり高い精度で平行に保たれる。しかし地球の曲率によって、Front mirror と End mirror がある場所の重力の向きは平行ではない。 z 軸はもちろん局所的な重力の方向と一致するので、これは Front mirror と End

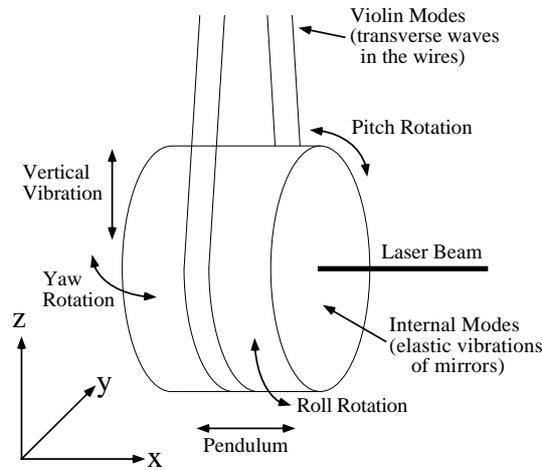


図 4.3: 鏡の自由度

mirror の z 軸が平行でない、つまり鏡の表面は局所的な z 軸を含まないことを意味する。そこで鏡が z 軸に並進運動すると、地球の曲率によって光路長差が揺らぐ。鏡の z 軸方向への振動を Vertical Vibration と呼ぶことにする。

次に回転について考えてみる。まず Roll は光路長差の揺らぎには寄与しない。また仮にレーザービームが鏡の中心に当たっていれば(つまり光軸上に鏡の重心が来ていれば) Pitch, Yaw も寄与しない。しかしながら現実的にはビームは中心からずれる。鏡の重心と光軸の距離を d とし、角度 θ だけ Pitch ないしは Yaw がおこると $d \times \theta$ だけ光路長差が変化する。よって干渉計型重力波検出器においては d が小さいほうが雑音は小さくなるわけである。 d を小さくすることを Beam Centering と呼ぶ。 d はどの程度まで小さくできるかが問題であるが、0.1mm のオーダーで Beam Centering を行なうのは難しいと思われるので最小値は 1mm とした。

鏡の自由度はこれだけである。しかし鏡や中間 mass を吊すワイヤーの自由度が残っている。このうち熱雑音を考える上で注目すべきは Violin Mode(ワイヤーの横波) である。ワイヤーの質量が 0 ならばなにも問題がないが、0 ではないので鏡はワイヤーの横波振動の反作用によって振動する。この熱雑音も考慮する必要がある。

Suspension System の熱雑音を考えるうえで必要な自由度について述べたわけであるがそれらについてまとめておく。

- Pitch Rotation
- Yaw Rotation
- Vertical Vibration

- Pendulum Mode
- Violin Mode

以下この順序でそれぞれの熱雑音の推定をする。その前に少し準備を行なう。

4.3 2 mode oscillator の熱雑音

4.3.1 2 mode oscillator とは何か

ここでは図 4.4 のような System の熱雑音 [15] を考える。

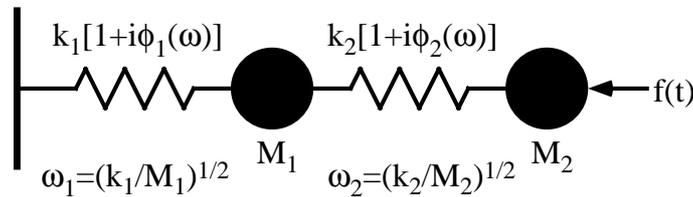


図 4.4: 2 mode oscillator system

質点が2つあり、バネでつながれている。複素バネ定数は $k_2[1+i\phi_2(\omega)]$ 。左の質点 (質量 M_1 、右の質点の質量は M_2) にはさらにバネがつながれており、その複素バネ定数は $k_1[1+i\phi_1(\omega)]$ である。左端は固定されている。また $\omega_1 \equiv \sqrt{k_1/M_1}$, $\omega_2 \equiv \sqrt{k_2/M_2}$ と定義する。ここでは右端の質点の熱雑音を調べるので揺動力 f は右端の質点に働く。また質点の変位はそれぞれ x_1, x_2 とする。なぜここでこのような System を考えるのかというと TAMA の Suspension System は Double Pendulum であるので、Suspension System に関する様々な運動方程式がこのような System と同じになるからである。つまり左の質点は中間 mass を、右の質点は鏡、そして左のバネは中間 mass を吊すワイヤー、右のバネは鏡を吊すワイヤーを表しているのである。Violin Mode を考えない限り Suspension System を 2 mode oscillator として取り扱うことができる¹。

ここで ϕ_1, ϕ_2 について考える。 ϕ_1 は事実上中間 mass にかかる magnet damping によって決まる。magnet damping は viscous damping であることを思い出すと

$$\phi_1(\omega) = \frac{\omega}{\omega_1 Q_1} \quad (4.1)$$

となる。

¹この取り扱いには近似的なものであって厳密ではない。具体的にどのような近似を行なっているかはそれぞれの自由度の熱雑音のところでもふれる。

ϕ_2 は中間 mass と鏡の間のワイヤーによる散逸である。つまり物質内部の散逸なので structure damping と仮定する。

$$\phi_2(\omega) = \frac{1}{Q_2} \quad (4.2)$$

4.3.2 2 mode oscillator の熱雑音

まず 2 mode oscillator の運動方程式を求める。中間 mass と鏡の位置をそれぞれ x_1 、 x_2 とする。散逸はとりあえず考えない。すると

$$M_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (4.3)$$

$$M_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = f(t) \quad (4.4)$$

となる。

この運動方程式をフーリエ変換する。このとき散逸も考慮するため複素バネ定数を用いる。つまりバネ定数 k_n を $k_n[1 + i\phi_n(\omega)]$ に置き換える ($n=1,2$)。さらに $\omega_n = \sqrt{k_n/m_n}$ を用いて k_n を消去すると

$$M_1 \{-\omega^2 + \omega_1^2(1 + i\phi_1)\} \tilde{x}_1 - M_2 \omega_2^2(1 + i\phi_2)(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = 0 \quad (4.5)$$

$$-M_2 \omega^2 \tilde{x}_2 + M_2 \omega_2^2(1 + i\phi_2)(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = \tilde{f} \quad (4.6)$$

式 (4.5)(4.6) から impedance を求めることが出来る。

$$Z(\omega) = \frac{\tilde{f}}{i\omega \tilde{x}_2} = \frac{-M_2 \omega^2 + M_2 \omega_2^2(1 + i\phi_2) - \frac{M_2^2 \omega_2^4(1 + i\phi_2)^2}{-M_1 \omega^2 + M_1 \omega_1^2(1 + i\phi_1) + M_2 \omega_2^2(1 + i\phi_2)}}{i\omega} \quad (4.7)$$

これと式 (3.8) から、熱雑音を求めることができる。しかしながらかなり複雑な式になり、さらに物理的な意味もあまりはっきりしない。そこで近似を行なうことにする。後ほど議論するが Suspension System の共鳴周波数は大体 1Hz のオーダーである。一方重力波検出器の観測帯域は 300Hz 付近である。つまり観測帯域は共鳴周波数よりずっと大きい ($\omega \gg \omega_n$)。このもとで近似を行なってみよう。

このとき式 (4.7) の第 3 項は 0 とみなすことができる²。よって

$$Z_{\text{wire}}(\omega) = \frac{\tilde{f}}{i\omega \tilde{x}_2} = \frac{-M_2 \omega^2 + M_2 \omega_2^2(1 + i\phi_2)}{i\omega} \quad (4.8)$$

となる。注意すべき点はこちらには中間 mass より下の parameter しか含まれていないこと、そしてさらには impedance は single Pendulum と同じである (つまり中間 mass を固定したことと同じ) ということである。これは高周波数域では中間 mass の振る舞いは鏡の運

² $M_1 \approx M_2$ であるので分子の第 2 項の実部と第 3 項の比は $(\omega/\omega_2)^2 \approx 10^5$ 程度になる。

動に影響を与えないことを意味している。つまり中間 mass の運動は防振されて、鏡には伝わらないわけである。これを式 (3.8) に代入して熱雑音を求めると、

$$G_{x_2 \text{wire}}(f) = \frac{4k_B T}{M_2 Q_2 \omega} \frac{\omega_2^2}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + \omega_2^4 \phi_2^2} \quad (4.9)$$

さらに $\omega \gg \omega_n$ を考慮すると

$$G_{x_2 \text{wire}}(f) = \frac{4k_B T \omega_2^2}{M_2 Q_2} \frac{1}{\omega^5} \quad (4.10)$$

当然であるが、式 (3.22) と同じである。高周波域では中間 mass 以下の散逸のみ熱雑音に影響するということの意味している。もちろん中間 mass 自体には magnet damping がかかっているのでかなり大きな揺動力が働いている。しかし Suspension System の防振効果によって鏡にはほとんどその振動は伝達しない。

それでは magnet damping による中間 mass の揺動は高周波域においてどの程度鏡に伝達しているのかを計算してみよう。今度は中間 mass のみに揺動力 f が働くとする。つまり中間 mass の揺らぎを計算するわけである。厳密にいうとこの揺動力は中間 mass に働くあらゆる熱雑音力 (magnet damping によるものと中間 mass と鏡の間のワイヤーによるもの) を含む。しかし散逸の大きい magnet damping による熱雑音がほぼすべてであるので magnet damping による熱雑音と考えて良い。Fourier 変換した運動方程式は以下の通り。

$$M_1 \{-\omega^2 + \omega_1^2(1 + i\phi_1)\} \tilde{x}_1 - M_2 \omega_2^2(1 + i\phi_2)(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = \tilde{f} \quad (4.11)$$

$$-M_2 \omega^2 \tilde{x}_2 + M_2 \omega_2^2(1 + i\phi_2)(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = 0 \quad (4.12)$$

式 (4.12) から、 $\tilde{x}_1 \rightarrow \tilde{x}_2$ の防振比の表式を得る。

$$\tilde{x}_2 = \frac{\omega_2^2(1 + i\phi_2)}{-\omega^2 + \omega_2^2(1 + i\phi_2)} \tilde{x}_1 \quad (4.13)$$

式 (4.13) を式 (4.11) に代入すると、 \tilde{f} と \tilde{x}_2 の関係式が求まる。

$$\left[M_1 \{-\omega^2 + \omega_1^2(1 + i\phi_1)\} \frac{-\omega^2 + \omega_2^2(1 + i\phi_2)}{\omega_2^2(1 + i\phi_2)} - M_2 \omega^2 \right] \tilde{x}_2 = \tilde{f} \quad (4.14)$$

この時、 $\omega \gg \omega_1, \omega_2$ なら

$$\left| \frac{M_1}{M_2} \left\{ 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}(1 + i\phi_1) \right\} \frac{-\omega^2 + \omega_2^2(1 + i\phi_2)}{\omega_2^2(1 + i\phi_2)} \right| \gg 1 \quad (4.15)$$

が成り立ち、式 (4.14) の [] 内の第二項が無視できる³。すると $\tilde{f} \rightarrow \tilde{x}_2$ を計算するときには中間 mass のみ存在するときの $\tilde{f} \rightarrow \tilde{x}_1$ を計算し、 $\tilde{x}_1 \rightarrow \tilde{x}_2$ の防振比をかければよいことが分かる。このとき式 (4.14) は以下ようになる。

$$M_1 \{-\omega^2 + \omega_1^2(1 + i\phi_1)\} \tilde{x}_1 = \tilde{f} \quad (4.16)$$

³ $M_1 \approx M_2$ なので式 (4.15) の右辺は $(\omega/\omega_0)^2 \approx 10^5$ 程度になる。

これは鏡が存在しないときの中間 mass の運動方程式と同じである。つまり先ほどと同じく鏡の振動は防振されて、中間 mass には伝わらないわけである。これから中間 mass の熱雑音は

$$G_{x_1\text{magnet}}(f) = \frac{4k_B T \omega_1}{M_1 Q_1} \frac{1}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + \omega_2^4 \phi_2^2} \quad (4.17)$$

となる。この振動が鏡に伝わるわけであるが、 x_2 のパワースペクトル密度は x_1 のパワースペクトル密度に $x_1 \rightarrow x_2$ の伝達関数の絶対値の2乗をかけたものになる [23]。伝達関数は式 (4.13) から求められる。よって中間 mass の熱雑音によって生じる鏡の揺らぎは

$$G_{x_2\text{magnet}}(f) = \frac{4k_B T \omega_1}{M_1 Q_1} \frac{\omega_2^4 (1 + \phi_2^2)}{\{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \omega_1^4 \phi_1^2\} \{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + \omega_2^4 \phi_2^2\}} \quad (4.18)$$

となる。さらに $\omega \gg \omega_n$ かつ $|\phi_2| \ll 1$ より

$$G_{x_2\text{magnet}}(f) = \frac{4k_B T \omega_1 \omega_2^4}{M_1 Q_1} \frac{1}{\omega^8} \quad (4.19)$$

これが高周波数域における magnet damping による鏡の熱雑音である⁴。式 (4.10) は f^5 に反比例し、式 (4.19) は f^8 に反比例する。つまり $f \rightarrow \infty$ においては明らかに式 (4.10) の方が大きい。しかしながらこのことは $\omega \gg \omega_n$ で常に成り立つわけではない。 $\omega \gg \omega_n$ が成立してもそれほど周波数が高くないときには式 (4.10) の方が大きくなる。よって観測帯域においてはどちらが大きいか確認する必要がある。

まとめると次のようになる。

- 重力波の観測帯域は Suspension System の共鳴周波数よりずっと大きいので熱雑音の式を近似することができる。近似式は中間 mass 以下の散逸によって決まる熱雑音と magnet damping による熱雑音の和である。
- 中間 mass と鏡の間のワイヤーのロスによる鏡に直接働く熱雑音の近似の式は

$$G_{x_2\text{wire}}(f) = \frac{4k_B T \omega_2^2}{M_2 Q_2} \frac{1}{\omega^5} \quad (4.10)$$

- magnet damping による熱雑音は防振されているので高周波域で急速に減衰する。近似式は

$$G_{x_2\text{magnet}}(f) = \frac{4k_B T \omega_1 \omega_2^4}{M_1 Q_1} \frac{1}{\omega^8} \quad (4.19)$$

- 高周波域では (4.10) の方が大きい観測帯域でそうであるかは必ずしも成立しないので確認する必要がある。

⁴式 (4.7) を ϕ_1 に関して展開しても求めることができる。

熱雑音を低減させるためにこれらの parameter を調整する必要があるわけだが実は調整可能な parameter は限られている。まず M_2 は鏡の質量または慣性モーメントを表すが鏡の材質やサイズは決定されているので変更はできない。また M_1 は中間 mass の質量または慣性モーメントを表す量であるが、これは防振から決められたものであり [43, 74]、やはり調整はできない。さらに防振から $\omega_1 Q_1$ の大きさが決定される [43, 74] ために、調整可能な量は ω_1, ω_2, Q_2 となる。そして Suspension に関わる parameter を操作して定められた量に確実に調整できるのは ω_1, ω_2 のみである。とくに ω_2 を小さくすることが重要となる。 ω_2 を小さくすればワイヤーの散逸による熱雑音も小さくなるが magnet damping による熱雑音はさらに効果的に下がるからである。 Q_2 は容易に調整できる量ではなく、さらにどの程度の値かは実際に計測してみないとわからない。そこで以下のような方針で熱雑音の評価を行なうことにした。

1. Q_2 を未知数として残す。
2. ω_1, ω_2 を可能な限り調整し熱雑音を小さくし、他の条件も考慮して Suspension System の parameter を決定する。
3. magnet damping からの熱雑音が Phase II より大きくなることを確認する。
4. 中間 mass と鏡の間のワイヤーの散逸による熱雑音と Phase II の目標感度を比較して Q_2 の下限を計算する。
5. その後それは実現が容易な値であるか否かについて調べる。但し Pendulum Mode 以外の Q 値の測定は行なわれていないのでその場合過去のデータや理論を参考にする。

このような手順で Pitch Rotation、Yaw Rotation、Vertical Vibration、Pendulum Mode の熱雑音の大きさを議論する。

その前に damping magnet への recoil が熱雑音に及ぼす影響と Suspension System の Q 値の測定の困難の 1 つである Recoil Loss について議論する。

4.3.3 damping magnet への recoil

2 mode oscillator の熱雑音を計算するときには、中間 mass には damping magnet により速さに比例した抵抗力が加わると仮定した。これは damping magnet は固定されていることを意味する。しかし第 2 章で述べたように、damping magnet support は防振からの要請により flexible、つまり pendulum として懸架されている [74]。このため中間 mass の揺動の反作用により、damping magnet も振動する。この damping magnet への recoil はどのような影響を熱雑音に及ぼすのかを計算した。

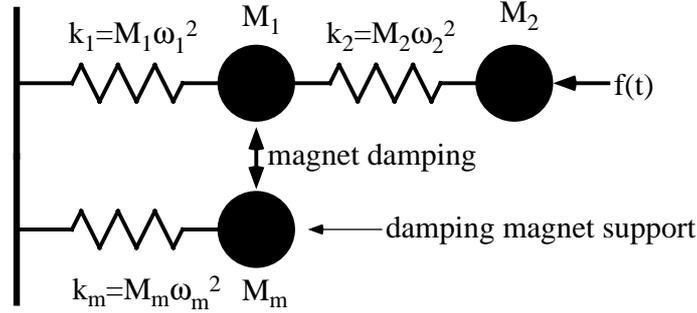


図 4.5: flexible な damping magnet support のある suspension system と等価な系

図 4.5のように damping magnet support は single oscillator とし、中間 mass と magnet には両者の相対速度に比例した抵抗力が加わるとして熱雑音を計算する。散逸はこれしか考えない。中間 mass、鏡、damping magnet のフーリエ変換した運動方程式は以下の通りである。但し magnet damping support の質量を M_m 、damping magnet support の共鳴角周波数を ω_m 、damping magnet support の位置を x_m とした。

$$M_1(-\omega^2 + \omega_1^2)\tilde{x}_1 - i\frac{M_1\omega_1\omega}{Q_1}(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_m) - M_2\omega_2^2(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = 0 \quad (4.20)$$

$$-M_2\omega^2\tilde{x}_2 + M_2\omega_2^2(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = \tilde{f} \quad (4.21)$$

$$-M_m\omega^2\tilde{x}_m + M_m\omega_m^2\tilde{x}_m - i\frac{M_1\omega_1\omega}{Q_1}(\tilde{x}_m - \tilde{x}_1) = 0 \quad (4.22)$$

式 (4.22) を \tilde{x}_m について解いて、式 (4.20) に代入する。そして式 (4.20) の虚部を $M_1\omega_1^2$ で規格化したものを $\phi_{\text{recoilmag}}$ と置く。すると $\phi_{\text{recoilmag}}$ は $\omega \gg \omega_1, \omega_m$ のとき⁵以下のようになる。

$$\phi_{\text{recoilmag}} = \frac{\omega}{\omega_1 Q_1} \left[1 - \left(\frac{M_1}{M_m} \right)^2 \left(\frac{1}{Q_1} \right)^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \right] \quad (4.23)$$

第 1 項は magnet が固定されているときの magnet damping による $\phi_1(\omega)$ つまり式 (4.1) と同じである。第 2 項は damping magnet への recoil による効果である。この効果により散逸が減少するので熱雑音も減少する。この効果の物理的意味は中間 mass が動くと、それに引きずられるように magnet も移動するので magnet が固定されているときよりも両者の相対速度が小さくなり、散逸が小さくなるということである。

この減少効果の大きさの見積りは簡単にできる。まず中間 mass と damping magnet support は質量にせよ慣性モーメントにせよ高々 2 倍の差であるのでオーダーでいうと

⁵観測帯域は共鳴周波数よりずっと大きいので常に成立する。

$(M_1/M_m)^2 \approx 1$ である。また $Q_1 \approx 1$ である。さらに観測帯域は共鳴周波数よりずっと大きいので $\omega \gg \omega_1$ である。よってこの減少効果はもともと存在する熱雑音よりずっと小さいことがわかる⁶。よって damping magnet の recoil を考慮しても magnet damping による熱雑音は変わらないと考えて良いので、これからは考慮しない。

4.3.4 Recoil Loss

式 (4.10) から 2 mode oscillator の熱雑音は高周波数域では中間 mass より下の散逸のみによって決定されることがわかった。つまり高周波数域の熱雑音が知りたければ、Single Pendulum の Q 値を測定すればよいということになる。しかしながら Single Pendulum の Q 値を測定するときいくつかの困難が存在する。ここではそのうちの 1 つである Recoil Loss [15, 25] について論ずる。

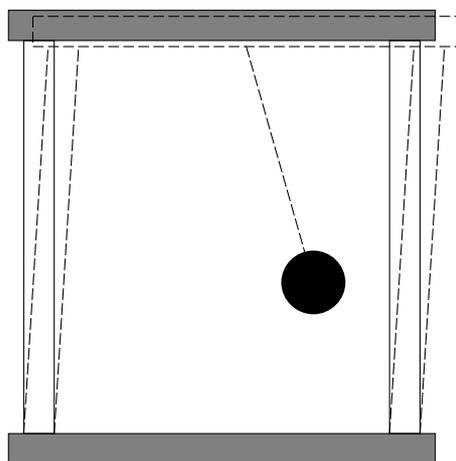


図 4.6: Recoil を受ける支持台

Single Pendulum の Q 値を測定するとき用いられる方法は実際に振って、減衰時間を測定して Q 値を計算するという方法である。Pendulum の支持台は Pendulum 運動の反作用 (Recoil) によって図 4.6 の様に振動する。もちろん支持台は Pendulum よりずっと重く、高い共鳴周波数を持っているが散逸はかなり大きいと思われる。よって Pendulum を振って Q 値を測定すると、Pendulum 固有の散逸だけではなく、支持台の振動による散逸も含めた Q 値の大きさを測定してしまう。つまり見かけ上散逸が大きくなったように見える。これを Recoil Loss と呼ぶ。

⁶もちろんそれぞれの自由度についてきちんと見積もることもできる。中間 mass と damping magnet support の質量や慣性モーメントは Appendix A を、 Q_1, ω_1 はそれぞれの自由度の熱雑音についてふれている section を参照して計算すると Pitch Rotation、Yaw Rotation、Vertical Vibration、Pendulum Mode のいずれにおいても減少効果の元々の熱雑音に対する比は観測帯域では高々 10^{-4} 程度である。

Recoil Loss が起こると何が問題なのだろうか。先ほど議論したように高周波数域では中間 mass より下の散逸によってのみ熱雑音の大きさが決定される。しかしその大きさだけを測定しようとしているのにも関わらず、実際には支持台における散逸も含んだものを測定してしまっているわけである。つまりこの測定で得られた Q 値を用いて熱雑音の推定を行なうと過剰評価してしまうわけである。よって Recoil Loss の大きさを評価することと Recoil Loss を小さくするという 2 つの作業が必要となる。

まず Recoil Loss の大きさを評価してみよう。Recoil Loss という現象の model 化は容易にできる。それは支持台まで含めた Pendulum の Q 値測定の system を 2 mode oscillator と見ればよい。図 4.4 において右端の質点とそれにつながれたバネが散逸を測定しようとしている Single Pendulum を表す。左の質点とそれと固定端をつなぐバネは支持台の質量と硬さを表す。右端の質点を振動させて Q 値を測定しようとする、左の質点も Recoil によって振動し、左のバネで散逸が生じて Q 値が低くなったように見える。Recoil Loss の大きさを求めよう。まずこの System の Fourier 変換した運動方程式は式 (4.5)(4.6) となる。これから \tilde{x}_1 を消去すると

$$-M_2\omega^2\tilde{x}_2 + M_2\omega_2^2(1+i\phi_2)\tilde{x}_2 - \frac{M_2^2\omega_2^4(1+i\phi_2)^2}{-M_1\omega^2 + M_1\omega_1^2(1+i\phi_1) + M_2\omega_2^2(1+i\phi_2)}\tilde{x}_2 = \tilde{f} \quad (4.24)$$

しかし測定者は Single Pendulum だと考えて測定しているので運動方程式は次のように表されるはずである。

$$-M_2\omega^2\tilde{x}_2 + M_2\omega_2^2[\phi_{\text{Realpart}}(\omega) + i\phi_{\text{Recoil}}(\omega)]\tilde{x}_2 = \tilde{f} \quad (4.25)$$

式 (4.24) と式 (4.25) は等価なので、比較することによって $\phi_{\text{Recoil}}(\omega)$ を求めることができる。さらに減衰運動から Q 値を求める実験を行なうので $\omega = \omega_2$ とすることができる。 $\phi_2(\omega_2) = 1/Q_2$, $\phi_{\text{Recoil}}(\omega_2) = 1/Q_{\text{Recoil}}$ と表記すると、

$$\frac{1}{Q_{\text{Recoil}}} = \frac{1}{Q_2} + \frac{M_2^2\omega_2^4(1-1/Q_2^2)(M_1\omega_1^2\phi_1(\omega_2) + M_2\omega_2^2/Q_2^2)}{(-M_1\omega_2^2 + M_1\omega_1^2 + M_2\omega_2^2)^2 + (M_1\omega_1^2\phi_1(\omega_1) + M_2\omega_2^2/Q_2^2)^2} \quad (4.26)$$

現実的には $M_1 \gg M_2, \omega_1 \gg \omega_2$ が成立するはずである⁷。さらに $Q_2 \gg 1$ とすると式 (4.26) は

$$\frac{1}{Q_{\text{Recoil}}} = \frac{1}{Q_2} + \frac{M_2\omega_2^2}{M_1\omega_1^2} \frac{\phi_1(\omega_2)}{1 + \phi_1^2(\omega_2)} \quad (4.27)$$

先ほど近似に用いた条件から $\phi_{\text{Realpart}}(\omega_2) \approx 1$ である。つまり Pendulum の共鳴周波数は支持台の Recoil によってほとんど変化しない。

Recoil Loss の大きさはわかったわけであるが実際問題として M_1, ω_1 を求めるのはかなり困難である。よっておよその推定程度にしかなりえない。

⁷Pendulum の支持台はそれなりにしっかりしたものはずだからである。

もう1つの作業である Recoil Loss の抑制については、いくつかの工夫が存在する。その内の1つとして支持台から2つの Pendulum を吊して逆相で励起して減衰時間を測定するという方法がある [31, 32]。この方法だと2つの Pendulum の Recoil が相殺しあって、支持台は動かないので余計な散逸を生じない。

4.4 Pitch Rotation

ここでは Pitch Rotation の熱雑音の大きさを計算する。Pitch Rotation は図 4.7のように、水平面内にあり光軸と垂直な直線を回転軸とする運動である。

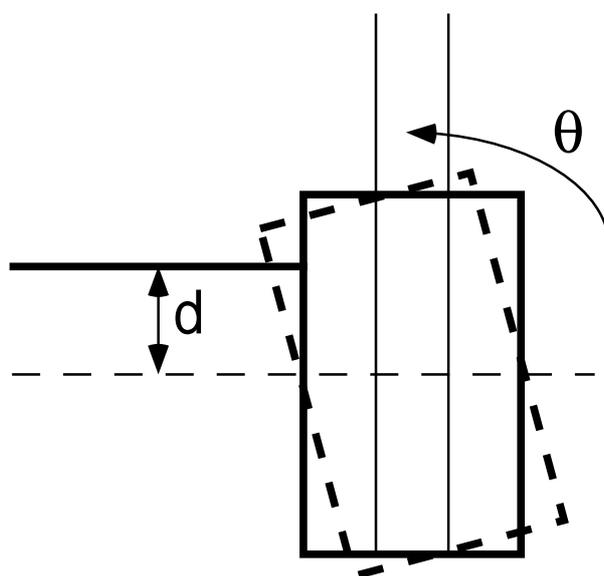


図 4.7: Pitch Rotation

仮に光軸と鏡の重心を含む水平面の距離が d であったとき、鏡が θ 回転したとき光路長は $d \times \theta$ だけ変化する。よって d はできるだけ小さくしなければならない。Beam Centering によって $d < 1\text{mm}$ にすることは可能であると予想されるので、ここでは $d = 1\text{mm}$ として Pitch Rotation による光路長差の揺らぎを計算する。

4.4.1 Pitch Rotation の熱雑音

Pitch Rotation に関する運動方程式をまず求めなくてはならない [38, 39, 44, 74]。中間 mass と鏡の慣性モーメント⁸を I_1, I_2 、中間 mass と鏡の平衡状態からの回転角度を φ_1, φ_2

⁸この section では Appendix A の $I_{1 \text{ Pitch}}, I_{2 \text{ Pitch}}$ を I_1, I_2 と表記する。

とする。とりあえず散逸を考えない。すると運動方程式は以下のようになる。

$$I_1\ddot{\varphi}_1 + I_1\omega_1^2\varphi_1 - I_2\omega_2^2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad (4.28)$$

$$I_2\ddot{\varphi}_2 + I_2\omega_2^2(\varphi_2 - \varphi_1) = \tau \quad (4.29)$$

鏡の熱雑音を求めるので鏡に揺動トルク τ が働く。また ω_1, ω_2 は Suspension System の仕様から以下のように決められる。parameter の定義と具体的な値は Appendix A 参照。

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4k_1d_1^2}{I_1}} \quad (4.30)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4k_2d_3^2l_2^3 + M_2g[d_4l^2(l_2 + d_4) + d_3^2(d_6 - d_5)^2]}{I_2l^2l_2}} \quad (4.31)$$

この運動方程式をフーリエ変換する。散逸も考慮する。つまり複素バネ定数を導入する。

$$I_1\{-\omega^2 + \omega_1^2(1 + i\phi_1)\}\hat{\varphi}_1 - I_2\omega_2^2(1 + i\phi_2)(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1) = 0 \quad (4.32)$$

$$-I_2\omega^2\hat{\varphi}_2 + I_2\omega_2^2(1 + i\phi_2)(\hat{\varphi}_2 - \hat{\varphi}_1) = \tilde{\tau} \quad (4.33)$$

これは 2 mode oscillator の運動方程式 (4.5)(4.6) と同じ形である。よって全く同様にして熱雑音を計算することができる。

実際に parameter に具体的な数値を入れる前にこの運動方程式について注意すべき点を述べておこう。それは運動方程式は φ_1, φ_2 のみで記述されているが、本来は他の自由度も運動方程式に含まれる。つまり他の自由度との coupling が存在するわけである。Pitch Rotation と couple するのはまず Pendulum Mode である。これは中間 mass もしくは鏡のワイヤーとのクランプ点が中間 mass、鏡の重心と同じ水平面内であれば生じない。中間 mass はこのことを考慮してクランプ点は重心と同じ水平面内になるように設計されている⁹。しかし鏡のクランプ点は鏡の重心より上なので coupling が生じる。ではこの coupling は運動方程式 (4.28)(4.29) では無視されているのだろうか。実はそうではない。式 (4.31) を見ると ω_2 は d_4 (鏡のクランプ点と重心の高さの差)に依存している。だが運動方程式 (4.28)(4.29) は coupling を考慮した厳密な式ではない。coupling を考慮した厳密な運動方程式は式 (4.28) の ω_2 と式 (4.29) の φ_1 の項に含まれる ω_2 を式 (4.31) において $d_4 = 0$ とした値とし¹⁰、式 (4.29) の左辺に $[M_2gd_4l^2(l_2 + d_4)/I_2l^2l_2]\varphi_2$ を加え、さらに Pendulum Mode を表す座標に依存する項を加えたものである。ではなぜここでは ω_2 として式 (4.31) を採用しているのだろうか。式 (4.32) (4.33) から求めた熱雑音を厳密な運動方程式において Pendulum Mode に関する項を無視して計算した熱雑音と比較すると、中間 mass より下の部分で生じた散逸による熱雑音は一致し、一方中間 mass から伝達してくる熱雑音

⁹ ザグリなどを考慮していない重心なので実際には 0.2mm 程度ずれていると予想されている。

¹⁰ 式 (4.29) の φ_2 の項の ω_2 はそのままである。

は大きくなる¹¹。観測帯域で問題となるのは後の議論でわかるように前者の熱雑音であるので、前者の熱雑音が正確に求められるように ω_2 の値を定義したのである。

またこれ以外にも Suspension System の非対称性によって他の自由度と couple するがそれらの影響も小さいと予想されるので無視した。このような coupling が存在する場合熱雑音はどうかは、後ほど議論する。

熱雑音を小さくするためには ω_1, ω_2 を小さくする必要があるわけだがどのようにしたら小さくできるだろうか。

まず ω_1 であるが式 (4.30) より d_1 を小さく (つまりワイヤー間隔を小さく) するか、ワイヤーのバネ定数 k_1 を小さくするかのいずれかである。 d_1 は Double Pendulum の支点の位置を調整する stage の大きさを limit されておりほとんど調整できない。一方 k_1 を小さくするためにはワイヤーの径を小さくするもしくは長さを伸ばすの 2 通りの方法がある。まず径は中間 mass と鏡を支えられる範囲内で小さくできる。中間 mass と鏡による張力が引っ張り強さ¹²の半分程度になるようにした。長さの上限は防振から決定された [74]。

ω_2 つまり式 (4.31) は ω_1 に比べると複雑である。これはワイヤーが垂直でないためである。とくに式 (4.30) の第 2 項はワイヤーが垂直のとき 0 になる。しかしこのワイヤーが垂直でない効果は小さい¹³ので無視してよい。結局 ω_2 を小さくする方法は ω_1 と同様になる。ワイヤー間隔は鏡が安定に吊れる限界まで小さくした。ワイヤーの径も鏡による張力が引っ張り強さの半分になる程度まで小さくした。長さに関しては防振から¹⁴最適値が決まる [74]。

これらの議論を踏まえて決定された TAMA300 で使われる Suspension System の parameter を代入して熱雑音の大きさを計算する。計算に必要な parameter は以下の通り。

- $I_1 = 1.37 \times 10^{-3}[\text{kg m}^2], I_2 = 9.56 \times 10^{-4}[\text{kg m}^2]$
- $\omega_1/2\pi = 8.53 [\text{Hz}], \omega_2/2\pi = 3.27[\text{Hz}]$
- $Q_1 = 5.88$

Q_2 は未知数として残す。

近似式 (4.10) と (4.19) を用いて観測帯域の熱雑音の振るまいを調べよう。magnet damping による熱雑音と鏡を吊すワイヤーのロスによる熱雑音はそれぞれ以下ようになる。

$$G_{\text{Pitch(magnet)}} = \frac{8.12 \times 10^{-18}}{f^8} [\text{rad}^2/\text{Hz}] \quad (4.34)$$

$$G_{\text{Pitch(wire)}} = \frac{7.48 \times 10^{-24}}{f^5} \frac{10^5}{Q_2} [\text{rad}^2/\text{Hz}] \quad (4.35)$$

¹¹これを正確に計算するには ω_2 を式 (4.31) において $d_4 = 0$ とした値を式 (4.19) に代入すればよい。

¹²物質を引っ張って破壊されるときにかかる最大応力。

¹³TAMA の Suspension System ではワイヤーを長さを変えず垂直にしても 10%程度しか周波数は変わらない。

¹⁴熱雑音からも長さの最適値を決めることができ TAMA の Suspension は最適値になっている。Violin Mode の熱雑音を参照。

PhaseII の目標感度と比較するため、これらを観測帯域 (150Hz ~ 450Hz) で積分し、ビームと鏡の中心のずれを d をかけ、さらに Front mirror, End mirror は合計 4 つあるので 4 をかけ、振幅にするために平方根をとって干涉計の腕の長さ 300m で規格化する。すると

$$h_{\text{rms(magnet)}} = 1.74 \times 10^{-22} \left(\frac{d}{1\text{mm}} \right) \quad (4.36)$$

$$h_{\text{rms(wire)}} = 4.03 \times 10^{-22} \left(\frac{d}{1\text{mm}} \right) \sqrt{\frac{10^5}{Q_2}} \quad (4.37)$$

まず $d=1\text{mm}$ なら magnet damping による熱雑音は Phase II の目標感度 ($h_{\text{rms}} = 3 \times 10^{-21}$) よりずっと小さいことがわかる。 $d = 1\text{mm}$ はおそらく可能であるので magnet damping による熱雑音は問題にならないことがわかる。よって問題になる可能性があるのは Q_2 が小さい場合である。Pitch Rotation は Phase II の目標感度に比べると無視できるほど小さいことが望ましい。そこで振幅が Phase II の目標感度の $1/4$ となる Q_2 の値を計算したところ

$$Q_2 = 3 \times 10^4 \quad (4.38)$$

となった。

また厳密な式 (式 (4.7) を式 (3.8) に代入した式) を利用して Pitch Rotation の熱雑音のパワースペクトルのグラフを書くと図 4.8 のようになる。ここではとりあえず $Q_2 = 10^5$ とした。

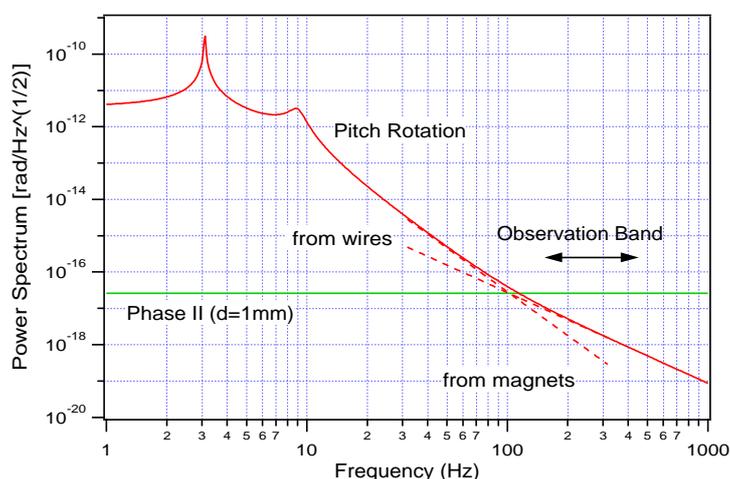


図 4.8: Pitch Rotation の熱雑音のパワースペクトル ($Q_2 = 10^5$)

高い周波数では $f^{-5/2}$ に比例し、それより低い周波数では f^{-4} に比例することがわかる。これは式 (4.19)(4.10) と一致している。

4.4.2 Pitch Rotation の Q 値

先ほどの計算より $Q_2 > 3 \times 10^4$ という制限があることがわかった。この制限は実現可能なのだろうか。計測してみないとはっきりしたことはいえないが過去に行なわれたデータを参照にして推定してみよう。Pitch Rotation はワイヤーの伸縮による復元力で起こる。よってポテンシャルエネルギーはワイヤーの伸縮の弾性エネルギーである。この弾性エネルギーの散逸が Pitch Rotation の Q 値の大きさを決定するとしよう。つまり Q 値はタングステン固有の Q 値とし、他の要因 (クランプなど) は考えない。タングステンの Q 値の測定はいくつかのところで行なわれている。低温においてであるが $Q = 10^7$ という値が測定されている [36]。また Braginsky はタングステンのねじれの Q 値は内部摩擦を考えると 10^5 程度としている [16]。よっておそらく $Q_2 > 3 \times 10^4$ という条件を満たすのは不可能ではないと思われる。

4.5 Yaw Rotation

ここでは Yaw Rotation の熱雑音の大きさを計算する。Yaw Rotation は図 4.9 のように、回転軸が鉛直である運動である。

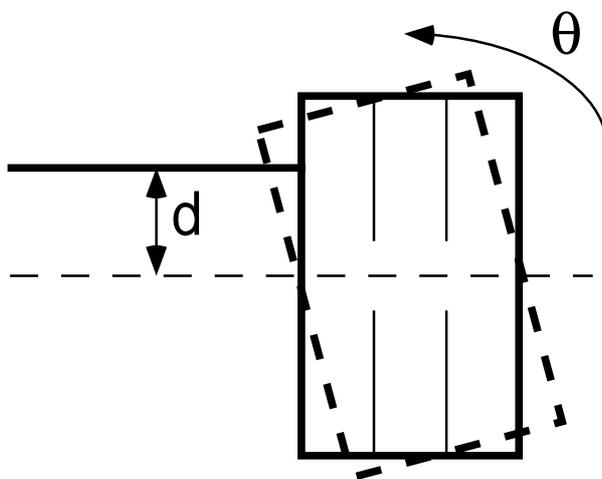


図 4.9: Yaw Rotation

仮に光軸と鏡の重心を含む鉛直面の距離が d であったとき、鏡が θ 回転したとき光路長は $d \times \theta$ だけ変化する。よって d はできるだけ小さくしなければならない。Beam Centering によって $d < 1\text{mm}$ にすることは可能であると予想されるので、ここでは $d = 1\text{mm}$ として Yaw Rotation による光路長差の揺らぎを計算する。

4.5.1 Yaw Rotation の熱雑音

まず運動方程式を求める [40, 44, 74]。中間 mass と鏡の慣性モーメント¹⁵を I_1, I_2 とし、中間 mass と鏡の平衡状態からの回転角度を φ_1, φ_2 とする。とりあえず散逸を考えないことにすると

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + I_1 \omega_1^2 \varphi_1 - I_2 \omega_2^2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad (4.39)$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 + I_2 \omega_2^2 (\varphi_2 - \varphi_1) = \tau \quad (4.40)$$

鏡の熱雑音を計算するので鏡に揺動トルク τ が働く。 ω_1, ω_2 は以下のように定義されている。parameter の定義と具体的な値は Appendix A 参照。

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4k_1 \alpha_1}{I_1}} \quad (4.41)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4k_2 \alpha_2}{I_2}} \quad (4.42)$$

但し

$$\alpha_1 = \frac{a_1 (d_1^2 + d_2^2)}{l_1} \quad (4.43)$$

$$\alpha_2 = \left[\frac{d_3^2 (d_6 - d_5)^2}{l_2^2} + \frac{a_2}{l_2} \left(d_3^2 + d_5 d_6 - \frac{d_3^2 (d_6 - d_5)^2}{l_2^2} \right) \right] \quad (4.44)$$

$$a_1 = \frac{(M_1 + M_2)g}{4k_1} \quad (4.45)$$

$$a_2 = \frac{M_2 g}{4k_2} \frac{1}{\cos \theta} \quad (4.46)$$

である。 a_1, a_2 はバネの自然長からの伸びを示している。運動方程式の形は Pitch Rotation と全く同じである。運動方程式をフーリエ変換して複素バネ定数を用いると

$$I_1 \{-\omega^2 + \omega_1^2 (1 + i\phi_1)\} \tilde{\varphi}_1 - I_2 \omega_2^2 (1 + i\phi_2) (\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1) = 0 \quad (4.47)$$

$$-I_2 \omega^2 \tilde{\varphi}_2 + I_2 \omega_2^2 (1 + i\phi_2) (\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1) = \tilde{\tau} \quad (4.48)$$

Pitch Rotation と全く同じ議論が成立する。

なお Yaw Rotation は Suspension System が完全に対称につくられていれば他の自由度と couple はしない。非対称性による coupling の効果は後ほど議論する。

熱雑音を小さくするためには ω_1, ω_2 を小さくする必要がある。しかしながら現実問題としてはよほどのことをしない限り Yaw Rotation の共鳴周波数が Pitch Rotation より大き

¹⁵この section では Appendix A の $I_{1 \text{ Yaw}}, I_{2 \text{ Yaw}}$ を I_1, I_2 と表記する。

くなるということは考えにくい。例えば式 (4.44) の第 1 項は鏡を吊すワイヤーがしぼられている効果を表す。よってしぼらないほうが ω_2 は小さくなるがしぼってもたいして ω_2 は大きくなる¹⁶。よって Pitch Rotation が大丈夫であれば Yaw Rotation に関しては parameter には特に制限をつける必要はない。

これらの議論を踏まえて決定された TAMA300 で使われる Suspension System の parameter を代入して熱雑音の大きさを計算する。計算に必要な parameter は以下の通り。

- $I_1 = 1.65 \times 10^{-3} [\text{kg m}^2], I_2 = 9.56 \times 10^{-4} [\text{kg m}^2]$
- $\omega_1/2\pi = 2.07 [\text{Hz}], \omega_2/2\pi = 7.85 \times 10^{-1} [\text{Hz}]$
- $Q_1 = 1.05$

Q_2 は未知数として残す。

ここで近似式 (4.10) と (4.19) を用いて観測帯域の熱雑音の振るまいを調べよう。damping magnet による熱雑音と鏡を吊すワイヤーのロスによる熱雑音はそれぞれ以下ようになる。

$$G_{\text{Yaw(magnet)}}(f) = \frac{3.03 \times 10^{-20}}{f^8} [\text{rad}^2/\text{Hz}] \quad (4.49)$$

$$G_{\text{Yaw(wire)}}(f) = \frac{4.31 \times 10^{-25}}{f^5} \frac{10^5}{Q_2} [\text{rad}^2/\text{Hz}] \quad (4.50)$$

PhaseII の目標感度と比較するため、これらを観測帯域 (150Hz ~ 450Hz) で積分し、ビームと鏡の中心のずれを d をかけ、さらに Front mirror, End mirror は合計 4 つあるので 4 をかけ、振幅にするために平方根をとり、干渉計の腕の長さ 300m で規格化する。すると

$$h_{\text{rms(magnet)}} = 1.06 \times 10^{-23} \left(\frac{d}{1\text{mm}} \right) \quad (4.51)$$

$$h_{\text{rms(wire)}} = 9.66 \times 10^{-23} \left(\frac{d}{1\text{mm}} \right) \sqrt{\frac{10^5}{Q_2}} \quad (4.52)$$

となる。まず $d = 1\text{mm}$ なら magnet damping による熱雑音は PhaseII の目標感度 ($h_{\text{rms}} = 3 \times 10^{-21}$) よりずっと小さいことがわかる。 $d = 1\text{mm}$ はおそらく可能であるから magnet damping による熱雑音は問題にならないことがわかる。よって問題が生じるとすれば Q_2 が非常に小さい場合である。Yaw Rotation は Pitch 同様 PhaseII の目標感度に比べて無視できるほど小さいことが望ましい。そこで振幅が PhaseII の目標感度の 1/4 となる Q_2 を計算したところ

$$Q_2 = 2 \times 10^3 \quad (4.53)$$

となった。

厳密な式 (式 (4.7) を式 (3.8) に代入した式) を利用して Yaw Rotation のパワースペクトル密度のグラフを書くと図 4.10 のようになる。但し $Q_2 = 10^5$ とした。

やはり高周波数域で $f^{-5/2}$ に比例し、それより低いところで f^{-4} に比例する。

¹⁶1.4 倍程度である。

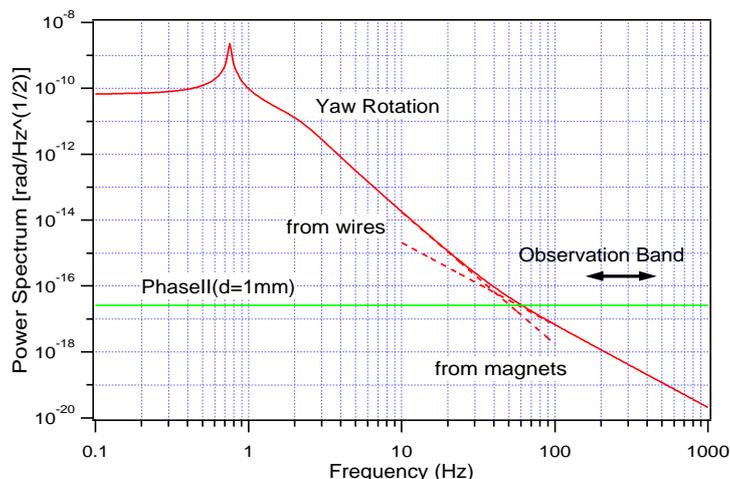


図 4.10: Yaw Rotation の熱雑音のパワースペクトル ($Q_2 = 10^5$)

4.5.2 Yaw Rotation の Q 値

先ほどの計算より $Q_2 > 2 \times 10^3$ という制限があることがわかった。この制限は実現可能であろうか。もちろん計測しないとこの値はわからない。しかしながら上限値の推定を行なうことができる。

まず式 (4.42)、(4.44)、(4.46) より式 (4.44) の第 1 項によって ω_2 はワイヤーのバネ定数 k_2 に依存することがわかる。つまり Yaw Rotation の復元力の一部はワイヤーが伸びによる復元力である。もし仮に Yaw Rotation の復元力がワイヤーの伸びの復元力のみだったとすると Pitch Rotation 同様にワイヤーの弾性エネルギーのみが散逸するとして、Yaw Rotation の Q 値はタングステン固有の Q 値とみなすことができる。Yaw Rotation の Q 値の下限 (3×10^4) は Pitch Rotation の Q 値の下限 (2×10^3) より小さいので Pitch Rotation をクリアできれば、自動的に Yaw Rotation もクリアできることがわかる。よってこれ以降 Yaw Rotation におけるワイヤーの伸びの弾性エネルギーの散逸は考えないことにする。

Yaw Rotation の復元力はもちろんワイヤーの伸びによるものだけではない。式 (4.44) の第 1 項が 0 とする¹⁷と、 ω_2 は k_2 に依存しなくなる。つまりこのときワイヤーは伸びず¹⁸、復元力は重力による張力になっている。重力によるポテンシャルエネルギーは散逸することはない。ではワイヤーの伸びを考えない時に何によって Q 値は決まるのだろうか。ここではワイヤーの伸びによるものでない弾性エネルギーの散逸によって決まると仮定しよう。もちろん散逸はクランプなどでもおこるであろうがここでは考えない。この前提のもとに Yaw Rotation の Q 値を推定する。

¹⁷これはワイヤーが鉛直になっているときである。

¹⁸1 次のオーダーで。

ここで重力によるポテンシャルエネルギーを E_{grav} 、ワイヤー伸びによらない弾性エネルギーを E_{elas} としよう。さらに ϕ_{elas} を定義しよう。弾性エネルギーは 1 周期で $2\pi E_{\text{elas}} \phi_{\text{elas}}$ だけ散逸する。Yaw Rotation の散逸を ϕ_{Yaw} とする。つまり Yaw Rotation はポテンシャルエネルギーを E_{Yaw} とすると 1 周期で $2\pi E_{\text{Yaw}} \phi_{\text{Yaw}}$ だけ散逸する。弾性エネルギーのみ散逸するとしたので、

$$2\pi E_{\text{Yaw}} \phi_{\text{Yaw}} = 2\pi E_{\text{elas}} \phi_{\text{elas}} \quad (4.54)$$

が成立する。 $E_{\text{grav}} \gg E_{\text{elas}}$ に気をつけると

$$\phi_{\text{Yaw}} = \frac{E_{\text{elas}}}{E_{\text{Yaw}}} \phi_{\text{elas}} = \frac{E_{\text{elas}}}{E_{\text{grav}} + E_{\text{elas}}} \phi_{\text{elas}} \approx \frac{E_{\text{elas}}}{E_{\text{grav}}} \phi_{\text{elas}} \quad (4.55)$$

つまりワイヤーの弾性エネルギーが散逸してもそれは全体から見ると小さな割合なので散逸は小さくなる [15, 26]。またエネルギーはバネ定数 k に比例するので $E_{\text{elas}}/E_{\text{grav}} = k_{\text{elas}}/k_{\text{grav}}$ とおきかえることもできる。

Yaw Rotation の場合考えるべき弾性エネルギー 2 つある [27]。まず図 4.11 のようにワイヤーのクランプ点付近においてワイヤーが曲がることによる弾性エネルギーである。もう 1 つはワイヤーのクランプ点における断面が支持台もしくは鏡に固定されているためにワイヤーがねじれることによる弾性エネルギーである。

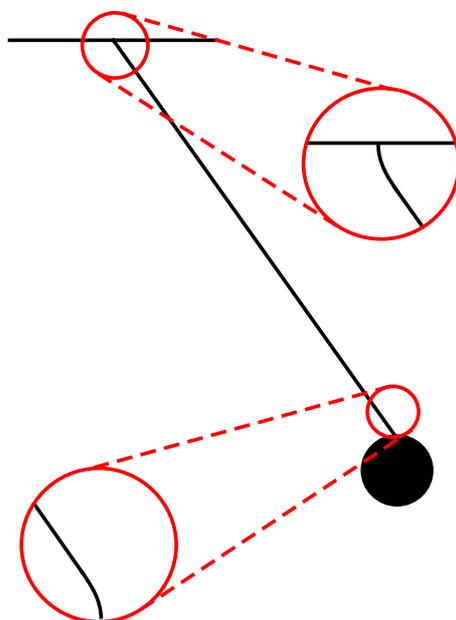


図 4.11: クランプ点付近のワイヤーの曲げ

まず前者を考える。 n 本のワイヤーで懸架されている Single Pendulum においてワイ

ヤーの曲げによるバネ定数 k_{bend} の大きさは [15] より以下の様になる。

$$k_{\text{bend}} = \frac{n\sqrt{TEI}}{2l^2} \quad (4.56)$$

但し n はワイヤーの本数、 T はワイヤー 1 本当りの張力、 E はヤング率、 I はワイヤーの moment of inertia of the wire cross section でワイヤーの半径を r として $I = \pi r^4/4$ である [65]。これは Pendulum が平衡点から水平方向へ x 移動したときにワイヤーの曲げによって $-k_{\text{bend}}x$ の復元力がかかることを意味する。

Yaw Rotation におけるワイヤーの曲げも同様に表すことができる。鏡のクランプ点の運動方向が違えば Pendulum と同じだからである。鏡の重心を通る鉛直な直線と鏡のクランプ点との距離を a とおけば鏡が φ_2 だけ回転したときに $-k_{\text{bend}}a^2\varphi_2$ の復元トルクが鏡にかかる。

もう 1 つのワイヤーのねじれを考える。長さ l 、半径 r 、ずれ弾性定数 G のワイヤーが φ_2 だけねじれたときの復元トルクは $-(\pi Gr^4/2l)\varphi_2$ である [65]。ワイヤーは 4 本あるのでワイヤーのねじれによるバネ定数 k_{shear} は

$$k_{\text{shear}} = \frac{2\pi Gr^4}{l} \quad (4.57)$$

となる。

ワイヤーの曲げのエネルギーの散逸を ϕ_{bend} 、ワイヤーのねじれのエネルギーの散逸を ϕ_{shear} とあらわすと Yaw Rotation の散逸 ϕ_{Yaw} は

$$\phi_{\text{Yaw}} = \frac{k_{\text{bend}}a^2}{I_2\omega_2^2}\phi_{\text{bend}} + \frac{k_{\text{shear}}}{I_2\omega_2^2}\phi_{\text{shear}} = \frac{na^2\sqrt{TEI}}{2I_2\omega_2^2l^2}\phi_{\text{bend}} + \frac{2\pi Gr^4}{I_2\omega_2^2l}\phi_{\text{shear}} \quad (4.58)$$

TAMA の仕様を代入すると¹⁹

$$\phi_{\text{Yaw}} = 1.98 \times 10^{-3} \times \phi_{\text{bend}} + 6.44 \times 10^{-5} \times \phi_{\text{shear}} \quad (4.59)$$

問題はワイヤーの散逸である。 ϕ_{bend} は坪野研で測定した値 [33, 35] から $\phi_{\text{bend}} = 3.3 \times 10^{-4}$ とする。また Kovalik も似たような測定結果を出している [28]。 ϕ_{shear} は松村純宏の測定した値 [37] を採用する。 $\phi_{\text{shear}} = 5.71 \times 10^{-4}$ である。よって Yaw Rotation の Q 値 $Q_{\text{Yaw}} = 1/\phi_{\text{Yaw}}$ は

$$Q_{\text{Yaw}} = 1.45 \times 10^6 \quad (4.60)$$

この計算においてワイヤーの弾性エネルギーの散逸のみ考慮したので、この結果は Q 値の上限値である。しかしながら $Q_2 > 2 \times 10^3$ という制限と比較すると 3 桁も大きい値である。よっておそらくこの制限を実現するのは不可能ではないと思われる。

¹⁹ワイヤーにかかる張力 T はワイヤーが斜めになっているので $T = M_2g/4 \cos \theta$ であることに注意。

4.6 Vertical Vibration

Vertical Vibration の熱雑音の値を計算する。

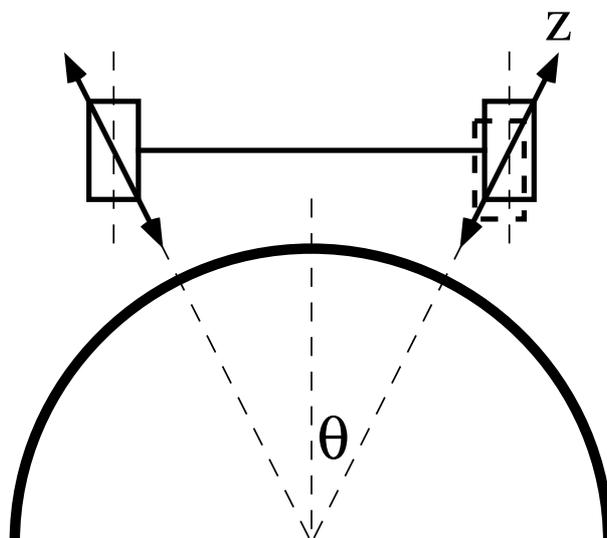


図 4.12: Vertical Vibration

図 4.12からもわかるように地球の曲率のため Front mirror と End mirror における鉛直方向は光軸に対して垂直でない。地球の中心から見て Front mirror と End mirror のなす角を 2θ とし、mirror が鉛直方向に z 移動したとすると光路長は $z \times \theta$ だけ揺らぐ。ここでは z を熱雑音として光路長の揺らぎを計算する。なお TAMA の場合 cavity 長が 300m なので、 $\theta = 0.3/6400/2 = 2.3 \times 10^{-5}$ rad である。

4.6.1 Vertical Vibration の熱雑音

中間 mass と鏡の質量を M_1, M_2 とし、中間 mass と鏡の平衡状態から縦方向のずれの大きさをそれぞれ z_1, z_2 とすると [41, 44, 74]

$$M_1 \ddot{z}_1 + M_1 \omega_1^2 z_1 - M_2 \omega_2^2 (z_2 - z_1) = 0 \quad (4.61)$$

$$M_2 \ddot{z}_2 + M_2 \omega_2^2 (z_2 - z_1) = f \quad (4.62)$$

鏡の熱雑音を計算するので鏡に揺動力 f が加わる。2 mode oscillator の運動方程式 (4.3)(4.4) と同じ形をしているので今までと同様の計算をすればよい。 ω_1, ω_2 は以下のように定義される。parameter の定義と具体的な値は Appendix A 参照のこと。

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4k_1}{M_1}} \quad (4.63)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4k_2 l_2^2}{M_2 l^2} + \frac{g(d_6 - d_5)^2}{l^2 l_2}} \quad (4.64)$$

この運動方程式をフーリエ変換する。バネ定数を複素バネにする。

$$M_1 \{-\omega^2 + \omega_1^2(1 + i\phi_1)\} \tilde{z}_1 - I_2 \omega_2^2 (1 + i\phi_2)(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1) = 0 \quad (4.65)$$

$$-I_2 \omega^2 \tilde{z}_2 + I_2 \omega_2^2 (1 + i\phi_2)(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1) = \tilde{f} \quad (4.66)$$

また Suspension System が完全に対称にできていれば、他の自由度と couple しない。非対称性による coupling の影響は後ほど議論する。

熱雑音を小さくするためには ω_1, ω_2 を小さくする必要がある。 ω_1 を小さくするためにはワイヤーのバネ定数 k_1 を小さくするしかないがこれは Pitch Rotation のところでも出てきた条件であるので検討済みである。 ω_2 は ω_1 に比べて複雑な形をしているがこれは鏡を吊すワイヤーがしぼってあることによる効果が表れているからである²⁰。しかしこのしぼりの効果は小さく²¹、結局ワイヤーのバネ定数を小さくすることが一番効果的に ω_2 を小さくする方法である。しかしこれも Pitch Rotation で検討済みである。よって parameter をこれ以上操作することはできない。

これらの議論を踏まえて決定された TAMA300 で使われる Suspension System の parameter を代入して熱雑音の大きさを計算する。計算に必要な parameter は以下の通り。

- $M_1 = 1.21[\text{kg}], M_2 = 1.03[\text{kg}]$
- $\omega_1/2\pi = 6.38 [\text{Hz}], \omega_2/2\pi = 1.75 \times 10^1[\text{Hz}]$
- $Q_1 = 3.23$

Q_2 は未知数として残した。

ここで近似式 (4.10) と (4.19) を用いて観測帯域の熱雑音の振るまいを調べよう。damping magnet による熱雑音と鏡を吊すワイヤーのロスによる熱雑音はそれぞれ以下ようになる。

$$G_{\text{Vertical(magnet)}}(f) = \frac{1.02 \times 10^{-17}}{f^8} [\text{m}^2/\text{Hz}] \quad (4.67)$$

$$G_{\text{Vertical(wire)}}(f) = \frac{1.97 \times 10^{-25}}{f^5} \frac{10^5}{Q_2} [\text{m}^2/\text{Hz}] \quad (4.68)$$

$$(4.69)$$

となる。PhaseII の目標感度と比較するために、観測帯域 (150Hz ~ 450Hz) で積分し、 θ^2 をかける。さらに Front mirror、End mirror は 4 個あるので 4 をかけ、振幅にするため

²⁰ 式 (4.64) の第 2 項はしぼりがなければ 0 になる。

²¹ 2 ~ 3% の誤差である。

に平方根をとって、干渉計の腕の長さ 300m で規格化する。するとそれぞれ

$$h_{\text{rms(magnet)}} = 4.55 \times 10^{-24} \quad (4.70)$$

$$h_{\text{rms(wire)}} = 1.53 \times 10^{-24} \sqrt{\frac{10^5}{Q_2}} \quad (4.71)$$

となる。

まず magnet damping による熱雑音は PhaseII の目標感度 ($h_{\text{rms}} = 3 \times 10^{-21}$) よりずっと小さいことがわかる。すると問題は Q_2 の大きさである。PhaseII の目標感度に比べて無視できることが望ましいので振幅が PhaseII の目標感度の 1/4 になる Q_2 を計算した。その結果

$$Q_2 = 3 \times 10^{-2} \quad (4.72)$$

となった。

厳密な式 (式 (4.7) を式 (3.8) に代入した式) を利用して計算した Vertical Vibration のパワースペクトル密度のグラフを書くと図 4.13 のようになる。 $Q_2 = 10^5$ と仮定した。

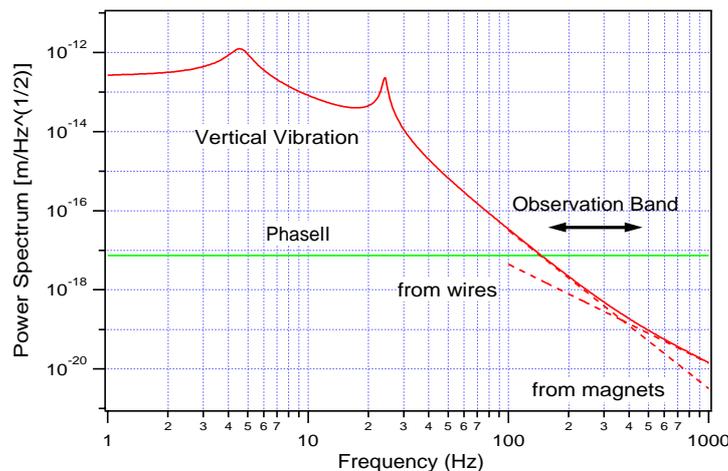


図 4.13: Vertical Vibration の熱雑音のパワースペクトル ($Q_2 = 10^5$)

高周波数域で $f^{-5/2}$ に比例し、それより低いところで f^{-4} に比例することがわかる。

4.6.2 Vertical Vibration の Q 値

先ほどの計算において $Q_2 > 3 \times 10^{-2}$ という制限があることがわかった。しかしこれほど低い Q 値を出す方が困難である。つまり Vertical Vibration の熱雑音が問題になることはないということである。では実際には Q 値はどの程度になるだろうか。Pitch Rotator と

Vertical Vibration の違いはワイヤーの伸縮が同相か逆相かだけなので Vertical Vibration の Q 値は Pitch Rotation とそれほど変わらないと予想される。

4.7 Pendulum Mode

Pendulum Mode の熱雑音を計算する。図 4.14 からわかるように Pendulum Mode によって、鏡は光軸方向に平行移動することにより光路長が揺らぐ。この大きさを計算する。

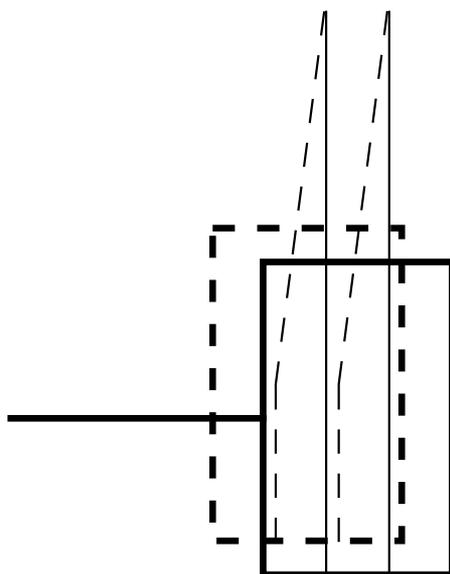


図 4.14: Pendulum Mode

4.7.1 Pendulum Mode の熱雑音

まず方程式を求めよう。中間 mass と鏡の質量を M_1, M_2 とし、中間 mass と鏡の光軸方向への変位を x_1, x_2 とすると [42, 44, 74]

$$M_1 \ddot{x}_1 + M_1 \omega_1^2 x_1 - M_2 \omega_2^2 (x_2 - x_1) = 0 \quad (4.73)$$

$$M_2 \ddot{x}_2 + M_2 \omega_2^2 (x_2 - x_1) = f \quad (4.74)$$

鏡の熱雑音を計算するので鏡に揺動力 f が加わる。また ω_1, ω_2 は以下のように定義される。

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(M_1 + M_2)g}{M_1 l_1}} \quad (4.75)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l_2}} \quad (4.76)$$

この運動方程式をフーリエ変換する。バネ定数を複素バネにする。

$$M_1 \{-\omega^2 + \omega_1^2(1 + i\phi_1)\} \tilde{x}_1 - M_2 \omega_2^2(1 + i\phi_2)(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = 0 \quad (4.77)$$

$$-M_2 \omega^2 \tilde{x}_2 + M_2 \omega_2^2(1 + i\phi_2)(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = \tilde{f} \quad (4.78)$$

再び同じ形になった。あとは Vertical Vibration と同じである。また Pendulum Mode は Pitch Rotation と couple するがそれは小さいとして無視する。非対称性による coupling も無視する。これらの影響は後ほど議論する。

熱雑音を小さくするために ω_1, ω_2 を小さくする必要がある。どちらもワイヤーの長さを短くすればよい。これは Pitch Rotation のところで検討した条件であるので、これ以上の parameter の操作は行なえない。

これらの議論を踏まえて決定された TAMA300 で使われる Suspension System の parameter を代入して熱雑音の大きさを計算する。計算に必要な parameter は以下の通り。

- $M_1 = 1.21[\text{kg}], M_2 = 1.03[\text{kg}]$
- $\omega_1/2\pi = 1.34 [\text{Hz}], \omega_2/2\pi = 1.01[\text{Hz}]$
- $Q_1 = 0.679$

Q_2 は未知数として残した。

ここで近似式 (4.10) と (4.19) を用いて観測帯域の熱雑音の振るまいを調べよう。damping magnet による熱雑音と鏡を吊すワイヤーのロスによる熱雑音はそれぞれ以下ようになる。

$$G_{\text{Pendulum(magnet)}}(f) = \frac{1.15 \times 10^{-22}}{f^8} [\text{m}^2/\text{Hz}] \quad (4.79)$$

$$G_{\text{Pendulum(wire)}}(f) = \frac{6.64 \times 10^{-28}}{f^5} \frac{10^5}{Q_2} [\text{m}^2/\text{Hz}] \quad (4.80)$$

$$(4.81)$$

PhaseII の目標感度と比較するため、観測帯域 (150Hz ~ 450Hz) で積分し、Front mirror, End mirror は合計 4 つあるので 4 をかけ、振幅にするために平方根をとり干涉計の腕

の長さ 300m で規格化する。

$$h_{\text{rms(magnet)}} = 6.53 \times 10^{-22} \quad (4.82)$$

$$h_{\text{rms(wire)}} = 3.80 \times 10^{-21} \sqrt{\frac{10^5}{Q_2}} \quad (4.83)$$

まず magnet damping の熱雑音は PhaseII の目標感度 ($h_{\text{rms}} = 3 \times 10^{-21}$) よりずっと小さい。よって問題が生じるとすれば Q_2 が低い場合のみである。PhaseII の目標感度と Pendulum Mode の熱雑音が等しいとすると、

$$Q_2 = 2 \times 10^5 \quad (4.84)$$

となることがわかる。

厳密な式 (式 (4.7) を式 (3.8) に代入した式) のグラフを書くと図 4.15 のようになる。 $Q_2 = 10^5$ と仮定した。

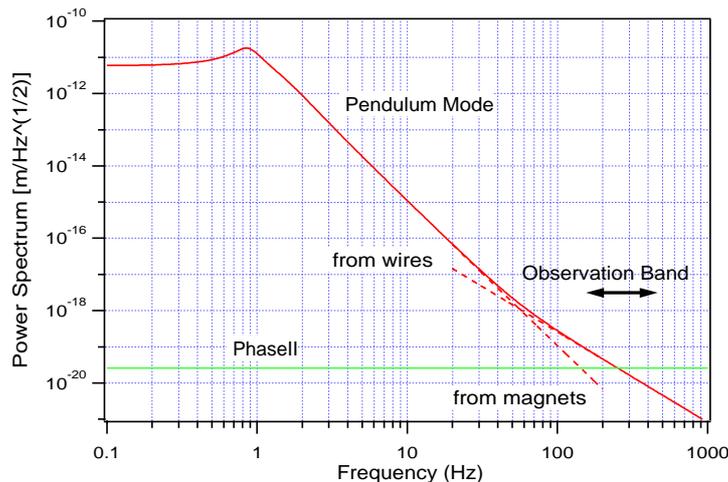


図 4.15: Pendulum Mode の熱雑音のパワースペクトル ($Q_2 = 10^5$)

高周波数域で $f^{-5/2}$ に比例し、それより低い周波数域で f^{-4} に比例する。

実はこの計算は Violin Mode を考慮していない。よって Q 値の下限、つまり式 (4.84) はさらに高くなる可能性がある。

4.7.2 Pendulum Mode の Q 値

先ほどの計算より $Q_2 > 2 \times 10^5$ という制限があることがわかった。この制限が実現可能かは Pendulum Mode の Q 値は測定する他知る方法はなく、現在坪野研で計測中であ

る [33, 34, 35]。それについてはこの論文のまとめでふれることにして、ここでは Q 値の上限について見積もる。

基本的に Yaw Rotation と同じ方法で推定することが可能である。式 (4.76) から明らかに ω_2 はワイヤーのバネ定数 k_2 に依存しないので、Pendulum Mode も復元力は重力によるワイヤーの張力である²²。つまり Pendulum Mode のポテンシャルエネルギーは重力によるポテンシャルエネルギーなので、散逸しない。ごくわずかに存在するワイヤーの弾性エネルギーは散逸する。この弾性エネルギーのみ散逸すると仮定して Q 値を推定する。ワイヤーの散逸がどの程度薄まるかを同様の方法で計算する。

Pendulum においてはワイヤーの曲げのみ考えればよい。曲げによるバネ定数 k_{bend} の大きさは

$$k_{\text{bend}} = \frac{n\sqrt{TEI}}{2l^2} \quad (4.56)$$

であった。一方重力によるバネ定数は

$$k_{\text{grav}} = \frac{M_2 g}{l \cos \theta} \quad (4.85)$$

である。なお θ はワイヤーと鉛直な直線がなす角である。式 (4.55) を参考にして Pendulum の散逸 ϕ_{Pen} を計算すると

$$\phi_{\text{Pen}} = \frac{k_{\text{bend}}}{k_{\text{grav}}} \phi_{\text{bend}} = \frac{n\sqrt{TEI}}{2M_2 g l} \cos \theta \phi_{\text{bend}} = 4.5 \times 10^{-4} \times \phi_{\text{bend}} \quad (4.86)$$

数値は TAMA の仕様を代入して計算した。また 4 本のワイヤーで吊られているので $T = M_2 g / 4 \cos \theta$ である。 ϕ_{bend} は Yaw Rotation と同じく坪野研で測定された値 [33, 35] を参考にして、 $\phi_{\text{bend}} = 3.3 \times 10^{-4}$ とする。よって Pendulum Mode の Q 値 $Q_{\text{Pen}} = 1/\phi_{\text{Pen}}$ は

$$Q_{\text{Pen}} = 6.7 \times 10^6 \quad (4.87)$$

となる。かなり高い値で実際これほどの値になるかは疑問である。しかし LIGO, VIRGO ではこのように推定した値の $1/3 \sim 1/2$ は出ているので [51, 70]、TAMA でも 10^6 がでてもおかしくはない。よって先ほどの計算の Q 値の下限は実現不可能ではないと思われる。

4.8 continuous system の熱雑音

Violin Mode について計算を行なう前に準備を行なう。Violin Mode を計算するときには Suspension System を 2 mode oscillator として取り扱うことはできない。バネ自体が横波振動することを全く考慮していないからである。ここではワイヤーのような continuous

²²やはり 1 次のオーダーでワイヤーはのびない。

system の熱雑音の計算方法 [15] について議論する。また次の章で計算する鏡の熱雑音においてもこの方法は有効である。

とりあえず話しを簡単にするために 1 次元の continuous system を考える²³。まず continuous system の微小変位を $u(x, t)$ 、線密度を $\rho(x)$ と表記する。するとこの system の運動方程式は以下ようになる。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (4.88)$$

左辺第 1 項は微小線素の加速度を表し、第 2 項は微小線素に働く復元力を表す。微小線素に働く復元力は隣接する微小線素から受ける力の差である。隣の微小線素自体から受ける力は自分自身の変位と隣の線素の変位の差に比例するので (比例係数を T とした。) 結局復元力は変位の 2 階微分に比例する。また $f(x, t)$ は continuous system に働く揺動力である。この揺動力はどのような形をしているのだろうか。ここでは熱雑音の計算をするわけであるが、continuous system 全体の形が問題となるわけではない。continuous system のある 1 点つまりレーザービームが当たる場所の振動の大きさが問題となるわけである。よって揺動力はその場所にだけ働けばよい。その場所を $x = x_0$ とおくと

$$f(x, t) = F(t)\delta(x - x_0) \quad (4.89)$$

但し $\delta(x)$ は Dirac の δ 関数である。式 (4.88) に散逸項を導入し、impedance $Z = \tilde{F}/i\omega\tilde{u}(x_0)$ を求めて熱雑音を求めることももちろん可能である²⁴。しかしながらこの方法だと物理的な意味がはっきりとしない。そこでここでは mode 展開を行ない、熱雑音を求めよう²⁵。

とりあえず散逸については考慮せずに話しを進める。まず式 (4.88) の解は次のように分解できる。

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x)q_n(t) \quad (4.90)$$

ここで $w_n(x)q_n(t)$ は $f(x, t) = 0$ のときの式 (4.88) の解である。よって適当な定数 ω_n を導入すると次のような式が成立する。

$$T \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} = -\omega_n^2 \rho w_n \quad (4.91)$$

$w_n(x)$ は直交かつ完備な系をつくるが定数倍だけ任意である。そこで $w_n(x_0) = 1$ となるように規格化を行なう。この system は $0 \leq x \leq L$ のみに存在すると定義すると、

$$\int_0^L \rho(x)w_l(x)w_n(x)dx = m_n\delta_{ln} \quad (4.92)$$

²³2,3 次元への拡張は容易にできる。

²⁴magnet damping のみ考慮した熱雑音を求める時はこの方法で計算する。

²⁵中間 mass 以下の散逸のみ考慮した熱雑音を計算するときには mode 展開することによって計算する。

m_n は質量の次元を持つ量で換算質量と呼ばれる。その意味は後ほど述べる。以上のことから式(4.88)を mode 展開することができる。その結果は

$$m_n \ddot{q}_n(t) + m_n \omega_n^2 q_n(t) = Q_n(t) \quad (4.93)$$

但し

$$Q_n(t) = \int_0^L f(x, t) w_n(x) dx = \int_0^L F(t) \delta(x - x_0) w_n(x) dx = F(t) \quad (4.94)$$

である。これから continuous system の運動方程式は無数個の調和振動子の運動方程式の重ね合わせであることがわかる。

ここで換算質量の意味を考えよう。まず $F(t) = 0$ とし $u(x, t) = w_n(x) q_n(t)$ とおく。明らかに $u(x_0, t) = q_n(t)$ である。これをふまえて式(4.93)をみるとあたかも観測点 $u(x_0, t)$ は質量 m_n 、共鳴角周波数 ω_n の調和振動子のごとく振る舞うことがわかる。またこのときの continuous system 全体の運動エネルギーを計算すると

$$\frac{1}{2} \int_0^L \rho |\dot{u}(x, t)|^2 dx = \frac{1}{2} m_n \omega_n^2 |u(x_0, t)|^2 \quad (4.95)$$

つまり system 全体のエネルギーは観測点 $u(x_0, t)$ が質量 m_n 、共鳴角周波数 ω_n の調和振動子運動をしている時持つエネルギーに等しい。

話しをもとにもどす。式(4.93)を Fourier 変換する。このとき $m_n \omega_n^2 \rightarrow m_n \omega_n^2 [1 + \phi_n(\omega)]$ として散逸を導入する。さらに \tilde{q}_n について解くと

$$\tilde{q}_n = \frac{\tilde{F}}{-m_n \omega^2 + m_n \omega_n^2 [1 + \phi_n(\omega)]} \quad (4.96)$$

よって式(4.90)より

$$\tilde{u}(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{F}}{-m_n \omega^2 + m_n \omega_n^2 [1 + \phi_n(\omega)]} \quad (4.97)$$

admittance(impedance の逆数) は

$$\sigma(\omega) = \frac{i\omega \tilde{u}(x_0)}{\tilde{F}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\omega}{-m_n \omega^2 + m_n \omega_n^2 (1 + \phi_n(\omega))} \quad (4.98)$$

式(3.8)に代入して

$$G_{u(x_0)}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4k_B T}{\omega} \frac{\omega_n^2 \phi_n(\omega)}{m_n [(\omega^2 - \omega_n^2)^2 + \omega_n^4 \phi_n^2(\omega)]} \quad (4.99)$$

となる。つまり continuous system の熱雑音は無数個の調和振動子の熱雑音の重ね合わせである。

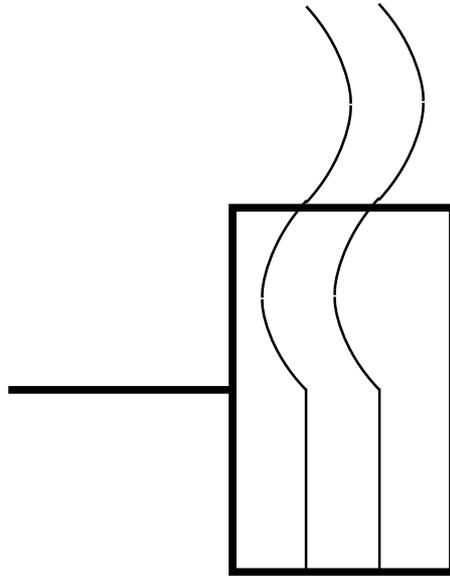


図 4.16: Violin Mode

4.9 Violin Mode の熱雑音

数学的な準備が終わったので Violin Mode の計算を行なう。

Violin Mode は図 4.16のようにワイヤーの横振動の反作用によって鏡や中間 mass が光軸と平行な方向へ振動することを指す²⁶。Double Pendulum の Violin Mode を 1 度に計算するのは大変である。そこで以下のように考える。鏡に揺動力を加えた時の admittance を求めるわけであるが、散逸として考慮する必要があるのは中間 mass にかかる magnet damping と中間 mass より下でおこる散逸である (中間 mass より上でおこる散逸は揺動力のかかる鏡から遠いことと、中間 mass において強い magnet damping がかかることから無視できる)。話しを簡単にするためにこの 2 つの散逸による熱雑音を分けて計算する。まず散逸は magnet damping のみである Double Pendulum の熱雑音を計算する。次に中間 mass より下でおこる散逸による熱雑音を計算する。

4.9.1 magnet damping のみ考えた Violin Mode の熱雑音

散逸として magnet damping のみ考慮した場合の Double Pendulum の熱雑音を計算する。ここでは mode 展開せずに熱雑音を求める。というよりもこの問題は mode 展開でき

²⁶図では鏡を吊すワイヤーしか書いていないがもちろん中間 mass を吊すワイヤーも考える。しかし bellows は考えない。

ない²⁷。

impedance

鏡に揺動力 f を加えたとき鏡の位置 x_2 がどのように変化するか運動方程式を解いて求める必要がある。ここでは impedance $Z_{\text{violin2}}(\omega) \equiv \tilde{f}/i\omega\tilde{x}_2$ を計算する。

ここでは結論だけ書く²⁸と

$$Z_{\text{violin2}}(\omega) = \frac{-\omega^2 M_2 [C(\omega)e^{ik_2 l} + D(\omega)e^{-ik_2 l}] + iM_2 g k_2 [C(\omega)e^{ik_2 l} - D(\omega)e^{-ik_2 l}]}{i\omega [C(\omega)e^{ik_2 l} + D(\omega)e^{-ik_2 l}]} \quad (4.100)$$

但し

$$C(\omega) = \left[-\frac{\omega v_2 M_1 \sin(k_1 l_1)}{M_2 g} + \frac{M_1 + M_2}{M_2} \frac{v_2 \cos(k_1 l_1)}{v_1} \right] + i \sin(k_1 l_1) \left(1 + \frac{M_1 \omega_{1p} v_2}{Q_1 M_2 g} \right) \quad (4.101)$$

$$D(\omega) = - \left[-\frac{\omega v_2 M_1 \sin(k_1 l_1)}{M_2 g} + \frac{M_1 + M_2}{M_2} \frac{v_2 \cos(k_1 l_1)}{v_1} \right] + i \sin(k_1 l_1) \left(1 - \frac{M_1 \omega_{1p} v_2}{Q_1 M_2 g} \right) \quad (4.102)$$

中間 mass を吊るワイヤーの線密度、長さ、質量をそれぞれ ρ_1, l_1, m_1 とした²⁹。中間 mass を吊すワイヤーの横波の速度 v_1 は

$$v_1 = \sqrt{\frac{(M_1 + M_2)g}{4\rho_1}} \quad (4.103)$$

である。鏡を吊るワイヤーの線密度、長さはそれぞれ ρ_2, l, m_2 とする。鏡を吊すワイヤーの横波の速度 v_2 は

$$v_2 = \sqrt{\frac{M_2 g}{4\rho_2}} \quad (4.104)$$

である。また $k_1 = \omega/v_1, k_2 = \omega/v_2$ とした。そして

$$\omega_{1p} = \sqrt{\frac{(M_1 + M_2)g}{M_1 l_1}} \quad (4.105)$$

である。つまり ω_{1p} は Double Pendulum の振動周波数 ω_1 つまり式 (4.75) に等しい。

admittance $\sigma(\omega) = 1/Z_{\text{violin2}}$ を (3.8) に代入すれば熱雑音のパワースペクトルが求まる。

²⁷理由は後述。

²⁸導出方法は Appendix B 参照。

²⁹この section の l_1 は従来のように bellows と wire の長さの和でなく、wire のみの長さを表す。つまり Appendix A の $l_{1 \text{ wire}}$ に相当する。

近似された impedance

かなり複雑な式であり、物理的意味がとらえにくいので近似を試みよう。

まず式 (4.101)(4.102) の虚部について考える。虚部は 2 つの項を含むがこれらの大小関係を調べる。実際の parameter を代入すると $\omega_{1p} \approx 2\pi[\text{rad/s}]$, $v_2 \approx 5.0 \times 10^2[\text{m/s}]$, $Q_1 \approx 1, M_1, M_2 \approx 1[\text{kg}]$, より

$$\frac{M_1 \omega_{1p} v_2}{Q_1 M_2 g} \approx 300 \gg 1 \quad (4.106)$$

つまり虚部の第 1 項は第 2 項に比べて非常に小さい。そこで虚部の第 1 項を無視する。すると $D = -C$ となり (4.100) は

$$Z_{\text{violin2}}(\omega) = \frac{\omega l / v_2}{\sin(\omega l / v_2)} \frac{Mg \cos(\omega l / v_2) - (\omega v_2 / g) \sin(\omega l / v_2)}{i\omega} \quad (4.107)$$

式 (4.107) は実は散逸のない Single Pendulum の impedance に等しい (詳しくは [11])。よって熱雑音のピークの周波数は中間 mass より下の散逸のみを考えた熱雑音と一致すると思われる。

厳密な場合のグラフ

大体の物理的なイメージはわかったので厳密な場合を考えよう。ここでは厳密な場合のグラフは図 4.17 参照。TAMA の Suspension System の parameter を代入して計算した。

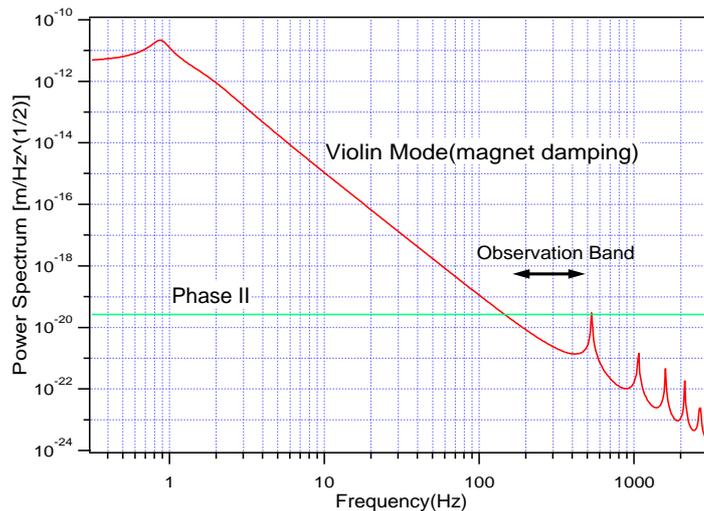


図 4.17: magnet damping のみ考えた Violin Mode の熱雑音のパワースペクトル

後ほど登場する中間 mass より下の熱雑音 (図 4.24) と比較するとピークの周波数は同じであることがわかる。これは先ほどの考察とも一致する。つまりピークは鏡を吊すワイ

ヤーの共鳴である。また図 4.15 と比較するとピークのない低い周波数において Pendulum Mode の熱雑音と一致することがわかる。またこの熱雑音は観測帯域においては Phase II の目標感度より小さいことにも注意しよう。観測帯域で積分して、鏡の個数 4 をかけて、振幅にするため平方根をとり、基線長 300m で規格化すると

$$h_{\text{rms(magnet)}} = 7.87 \times 10^{-22} \quad (4.108)$$

となることがわかる。この値は Pendulum Mode だけ考えた時の 1.2 倍になっている。First Violin Mode が観測帯域に近いのでピークのすそのが入ってきているからである。ここで First Violin Mode(533Hz) に注目してみよう。この付近の伝達関数の絶対値、鏡に加わる揺動力のパワースペクトル、鏡の変位のパワースペクトルのグラフを図 4.18、4.19、4.20 に示す。

伝達関数の絶対値をみてもわかるようにピークが存在する。これはちょうど鏡を吊すワイヤーが Violin Mode で共鳴しているためである。またその少し前に伝達関数の絶対値が 0 になる周波数がある。これはちょうどワイヤーの長さが横波の半波長の整数倍になる周波数である。

揺動力の振る舞いは以下のように理解できる。この揺動力 \tilde{f} は鏡に働いている。これは系の様々な場所で生じる散逸をまとめて考えたうえで計算した揺動力である。しかしもう 1 つの考え方があり、散逸の生じる場所に揺動力を加えて、その影響が鏡の位置にどのように伝達されるかを計算する方法である。電気回路の熱雑音の計算の方法に対応させると前者は電気回路全体の impedance を求めて熱雑音を求める方法に相当し、後者は回路において抵抗があればそれに雑音源となる電源を直列に配置し、それらの電源によって回路の指定の部分にどれだけの電圧が生じるかを計算する方法に相当する。後者を今回の計算にあてはめると散逸としては magnet damping しか考えないので中間 mass に揺動力が働き、それが鏡の位置にどのように影響するかを計算することに相当する。前者は計算は簡単であるが、具体的にどこの散逸によって生じた揺動力が効いているのかはわかりにくい。後者は計算は大変であるが、散逸ごとに計算するのでどの散逸による熱雑音が効いているのかわかりやすい。ここでは前者と後者を比較して揺動力 \tilde{f} の周波数依存性について調べよう。

鏡に働く揺動力 f から鏡の位置への伝達関数を $H_{f \rightarrow x_2}$ とすると鏡の位置 \tilde{x}_2 は

$$\tilde{x}_2 = H_{f \rightarrow x_2} \tilde{f} \quad (4.109)$$

となり、中間 mass に働く揺動力 F から鏡の位置への伝達関数を $H_{F \rightarrow x_2}$ とすると

$$\tilde{x}_2 = H_{F \rightarrow x_2} \tilde{F} \quad (4.110)$$

となる。これら 2 式より

$$\tilde{f} = \frac{H_{F \rightarrow x_2}}{H_{f \rightarrow x_2}} \tilde{F} \quad (4.111)$$

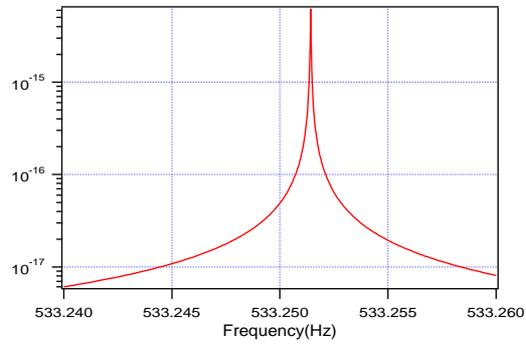


図 4.18: 1st Violin Mode 付近の熱雑音

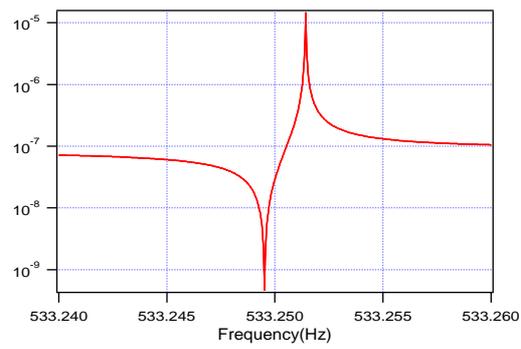


図 4.19: 1st Violin Mode 付近の伝達関数の絶対値

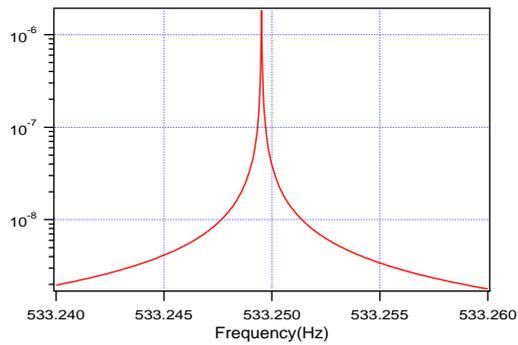


図 4.20: 1st Violin Mode 付近の揺動力

となることがわかる。magnet damping は viscous damping であるので式 (3.10) より \hat{F} は周波数依存性のない white noise であることがわかる。よって \hat{f} の周波数依存性を決めるのは伝達関数の比の部分である。violin mode の共鳴周波数においては散逸がなければ鏡の振幅は無限大となりどちらの伝達関数も発散する [11, 30]。この比をとるので \hat{f} は共鳴周波数においては特に特異点や零点となるような振るまいはしない。一方鏡に力を加えた時にはある周波数で鏡が静止するが、中間 mass に力を加えた時には鏡が静止するような周波数は存在しない [11, 30]。よって鏡に力を加えた時に鏡が静止する周波数では式 (4.111) の伝達関数の比は発散するので揺動力 \hat{f} も発散する。

鏡を吊すワイヤーの共鳴はピークとして表れているが中間 mass を吊すワイヤーの共鳴ピークは見えない。存在しないのだろうか。そこで中間 mass を吊すワイヤーの共鳴周波数で一番低い 513Hz 付近を拡大してみることにした。同じく伝達関数の絶対値、鏡に加わる熱雑音力のパワースペクトル、鏡の変位のパワースペクトルのグラフを図 4.21、4.22、4.23 に示す。

伝達関数の絶対値は単調に変化している。しかし熱雑音力のパワースペクトルは発散するところがある。これは中間 mass を吊すワイヤーが共鳴しているため中間 mass が大きく動き散逸が大きくなって揺動力が大きくなったためである。中間 mass が大きく動くということは鏡を吊すワイヤーの形は 1 段振り子として考えたときよりも 1 番ずれている。先ほど式 (4.101)(4.102) で虚部の第 1 項を無視したがその第 1 項が第 2 項に比べて相対的に一番大きくなるのがこの周波数である。また発散する少し手前で揺動力は 0 になる。これはちょうどワイヤーの長さが半波長の整数倍になって中間 mass が静止している状態にあたり散逸が 0 になったためである。

さて TAMA の Suspension System の parameter をもとに熱雑音を計算した。逆にこれらの熱雑音が parameter に制限を与えるであろうか。基本的に共鳴周波数が観測帯域よりなるべく高くなる必要がある。鏡を吊すワイヤーの共鳴周波数については中間 mass より下の散逸による熱雑音でも問題となるのでそこで議論する。残った問題は中間 mass を吊すワイヤーの共鳴周波数であるが、実はこれは観測帯域にあっても熱雑音はたいして大きくなり³⁰。そこで熱雑音だけ考えればとくに中間 mass を吊すワイヤーの共鳴周波数を気にする必要はない。しかし防振などの点からいうとやはり観測帯域より高くするのが望ましい。共鳴周波数を高くする方法については後ほど述べるが、密度の小さい材質のワイヤーにする、細くする、短くするの 3 通りある。すでに Pitch Rotation や Vertical Vibration からの要求によってワイヤーは切れない程度まで細くなっている。またペローズが存在することによって Pendulum Mode の共鳴周波数を高くすることなくワイヤーの長さは短くなった。この 2 点によってとりあえず共鳴周波数を観測帯域から追い出すことに成功した。さらに観測帯域から離すために DAT51 というチタンとタングステン合金を使用するという案も出ている。これはタングステンより密度が小さいためであ

³⁰ 観測帯域に共鳴周波数が存在する場合の計算もやってみたが積分しても PhaseII よりずっと小さかった。ピークの幅が極めて小さいせいだろうか。

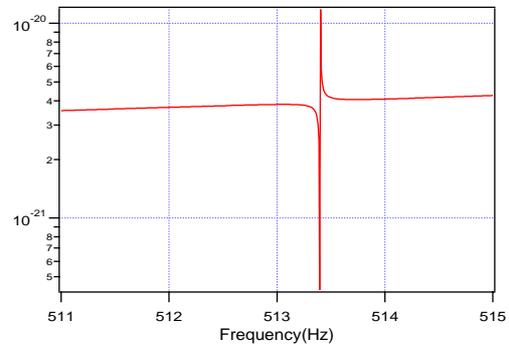


図 4.21: 1st Violin Mode 付近の熱雑音

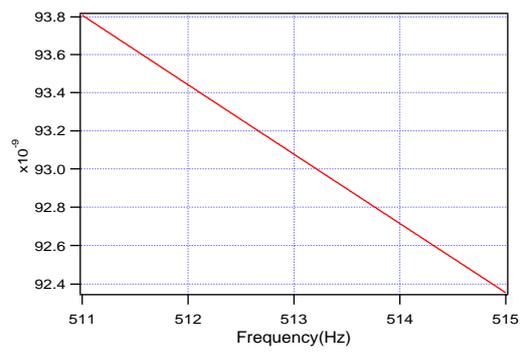


図 4.22: 1st Violin Mode 付近の伝達関数の絶対値

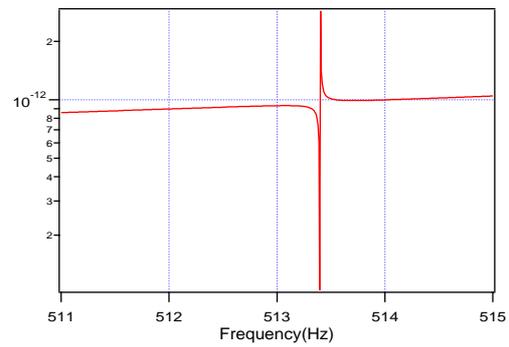


図 4.23: 1st Violin Mode 付近の揺動力

る。散逸は大きいのだが先ほども議論したように中間 mass より上の散逸は無視できるので気にする必要はない。

4.9.2 中間 mass より下の散逸による Violin Mode の熱雑音

中間 mass より下の散逸による熱雑音を計算する。magnet damping を無視するために中間 mass は固定されていると考える。この問題は mode 展開を行なって解く。

式 (4.99) より運動方程式を解いて、 m_n と ω_n を求める必要がある。

運動方程式について考える [11, 30]。質量 M_2 の鏡を 4 本のワイヤーで吊すので 1 本のワイヤーに $M_2/4$ の質点がぶら下がっている system が 4 個同相運動していると思えばよい。そのうちの 1 つの運動方程式を解けばよい。ワイヤーにそって x 軸をとり、上のクランプ点で $x = 0$ 、鏡のクランプ点で $x = l$ とする。ワイヤーの横変位を $u(x, t)$ とする。

まず上のクランプ点は動かないので、

$$u(0, t) = 0 \quad (4.112)$$

$0 \leq x \leq l$ では横波の波動方程式が成立する。ワイヤーの線密度を ρ 、ワイヤーにかかる張力を T とすると

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.113)$$

ワイヤーと鉛直方向がなす角を θ 、重力加速度を g とすると

$$T = \frac{M_2 g}{4 \cos \theta} \quad (4.114)$$

である。また波の速さを v とすれば $v = \sqrt{T/\rho}$ である。

クランプ点ではワイヤーの振動によって鏡が動く。揺動力 $f(t)$ も働く。ワイヤーは斜めに張っていることを思い出して、

$$\frac{M_2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -T \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} + f(t) \quad (4.115)$$

$f(t) = 0$ として共鳴周波数と換算質量を求める。解を

$$u(x, t) = [A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)] \exp(i\omega t) \quad (4.116)$$

として計算する。但し A, B は定数、 k は波数で、 $k = \omega/v$ である。式 (4.112) より $B = -A$ であることはすぐわかる。さらに式 (4.115) から共鳴周波数 ω_n は次の方程式を満たすことがわかる。

$$\cos \left(\frac{\omega_n l}{v} \right) - \left(\frac{\omega_n v}{g} \right) \sin \left(\frac{\omega_n l}{v} \right) = 0 \quad (4.117)$$

ワイヤー 1 本の質量を $m = \rho l$ とすると $M_2 \gg 4m$ なので式 (4.117) は近似して解くことができる。

まず一番小さい共鳴周波数 ω_0 は

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_2}} = 1.01[\text{Hz}] \quad (4.118)$$

これはいわゆる振り子の角周波数に等しい。それ以外の ω_n は

$$\omega_n \approx n\pi\omega_0\sqrt{\frac{M_2}{4m}} = 533 \times n[\text{Hz}] \quad (4.119)$$

である。数値は TAMA の仕様をもとに計算した。この Violin Mode の熱雑音が TAMA の Suspension System の parameter に与えた制限は後ほど議論する。

またこの system の基底 $w_n(x)$ として

$$w_n(x) = \frac{\sin(k_n x)}{\sin(k_n l)} \quad (4.120)$$

を採用する。但し $k_n = \omega_n/v$ である。 m_n は 4 本のワイヤーと鏡 total で定義しよう。式 (4.92) より、

$$m_n = 4 \int_0^l \rho \{w_n(x)\}^2 dx + M_2 \quad (4.121)$$

これを計算すると、

$$m_n = \frac{M_2}{2} \left[1 + \frac{1}{\cos^2(k_n l)} \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^2 \right] \quad (4.122)$$

$$\approx \begin{cases} M_2 & (n = 0) \\ \frac{M_2}{2} \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^2 & (n \neq 0) \end{cases} \quad (4.123)$$

m_n, ω_n がわかったのであとは $\phi_n(\omega)$ が決まれば良い。例によって structure damping model、つまり $\phi_n(\omega) = 1/Q_n$ を採用する。さらに $Q_n = Q_0/2 (n \neq 0)$ という関係式が成立すると仮定しよう。この根拠は後ほど議論する。

Q_0 を未知数として残したまま観測帯域の熱雑音の大きさを計算する。観測帯域は共鳴周波数から離れているので熱雑音の振幅は Q_0 の平方根に反比例することがわかる。観測帯域は 150Hz ~ 450Hz である。鏡は 4 個あるので 4 をかけ、振幅にするために平方根をとって、干渉計の腕の長さ 300m で規格化することにより

$$h_{\text{rms(wire)}} = 4.33 \times 10^{-21} \sqrt{\frac{10^5}{Q_0}} \quad (4.124)$$

となる。Pendulum Mode だけ考えた時と比べると振幅は 1.1 倍になっている。1st Violin Mode のすその影響が出ている³¹。この熱雑音が PhaseII の目標感度と同じであるとすると、

$$Q_0 = 2.5 \times 10^5 \quad (4.125)$$

となる。Pendulum Mode のみ考えたとき (つまり式 (4.84) のこと。) より Q 値の下限は少し大きくなっているが、この値は Pendulum Mode の Q 値の上限 (4.87) より 1 桁以上小さい。よって実現不可能ではないだろう。

また $Q_0 = 10^5$ のときの熱雑音のグラフは図 4.24 の通り。70Hz 以上から 1st Violin Mode までの間が図 4.15 と同じであることに注意。

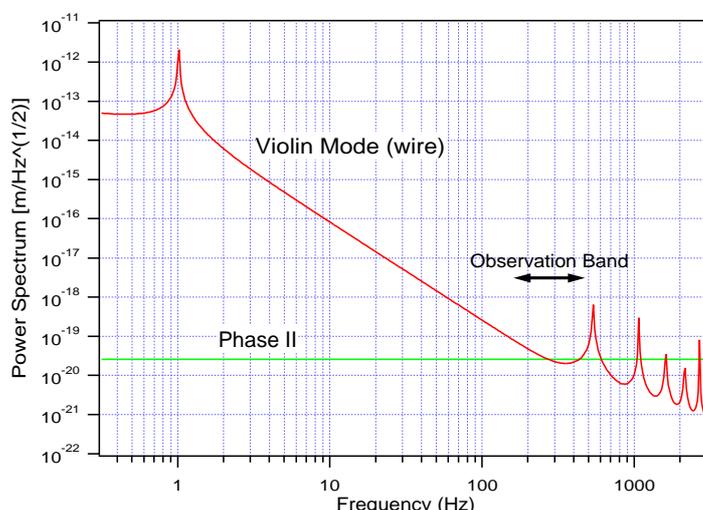


図 4.24: 中間 mass より下の散逸のみによる Violin Mode の熱雑音のパワースペクトル ($Q_0 = 10^5$)

4.9.3 両方の散逸を考えた時の熱雑音

magnet damping による熱雑音と中間 mass 以下で生じる散逸による熱雑音を別々に計算してきたが、一緒に考えるとどうなるであろうか。まず magnet damping の方だが、damping が強力なので中間 mass はほとんど動かない。そこで Suspension System は Double Pendulum でなく Single Pendulum であり、その代わり支持点は完全に固定されているわけではなく少し動き、それにより散逸が生じると解釈することが可能である。つまり Double

³¹観測帯域においておける熱雑音 (m^2/Hz) の寄与は Pendulum を 1 とすると 1st Violin Mode は 0.29、2nd Violin Mode は 0.008 である。ちなみに n th Violin Mode のパワースペクトル密度への寄与は ω_n よりずっと小さい周波数域で n^4 に逆比例する。

Pendulum の magnet damping による散逸を Single Pendulum のクランプ点の散逸と置き換えてしまうのである。中間 mass 以下の散逸はもともと Single Pendulum と考えている。これにより問題は Single Pendulum に帰着された。支持点はそれほど大きく動かないので magnet damping による散逸はそれほど大きくない。もちろん中間 mass 以下の散逸も小さい。よって両方の散逸を考えたときの熱雑音は各々の熱雑音の和であると考えられる³²。今までの議論より magnet damping による熱雑音は観測帯域においては問題にならないので、結局中間 mass 以下の散逸による熱雑音のみに注意を払えばよい。

4.9.4 Violin Mode の Q 値

Violin Mode の Q 値は Pendulum Mode の Q 値の半分という仮定のもとで計算を行なったがこれはどのような根拠に基づくものであろうか。

Pendulum Mode と Violin Mode の Q 値の関係についてはいくつかの研究が行なわれている。Gillespie and Raab は次の条件のもとで Violin Mode の Q 値は Pendulum Mode の Q 値の半分になることを示している [24]³³。

- 散逸の大きさは周波数に依存しない。
- Pendulum Mode も Violin Mode も復元力は重力によるワイヤーの張力である。
- 散逸はクランプ点もしくはその付近でのみおこる。但しそのメカニズムは問わない。
- 散逸はクランプ点でのワイヤーの角度に比例する。
- 鏡自体は回転しない。

1 番目の条件は structure damping model を採用するということである。2 番目の条件は Pendulum Mode と低次の Violin Mode については正しいと思われる。しかし高次の Violin Mode では怪しい。復元力としてワイヤーの弾性が効いてくるからである。また共鳴周波数自体も弾性エネルギーの影響によって式 (4.119) からずれてくる [29]。しかし高次の Violin Mode が観測帯域の熱雑音に寄与する割合が小さいので心配する必要はないと考えられる。3 番目の条件であるがこれも高次の Violin Mode では怪しくなってくる。Violin Mode の復元力としては重力によるワイヤーの張力のみを考えた。これは基本的に散逸はない。しかしながら高次の Violin Mode においてはワイヤーの弾性による復元力が無視できない。弾性エネルギーはワイヤー全体に分布しておりそして弾性エネルギーは散逸していく。つまりワイヤー全体で散逸が起こるようになってくる [29]。しかしこれも高次の Violin Mode の熱雑音はもともと観測帯域では小さいことからこれもそれほど大き

³²1st Violin Mode より低い周波数では両方の熱雑音の和が 2 mode oscillator model で計算した Pendulum Mode の熱雑音と一致することからもこのような予想ができる。

³³[24] では Violin Mode の Q 値を計測し、Pendulum Mode はその 2 倍と推定している。

い影響を及ぼさないであろう。4 番目の条件は変位が小さい限り大丈夫であろう。5 番目の条件は上と下のクランプでのワイヤーの角度が同じになる、つまり散逸の大きさは上のクランプ付近でも下のクランプ付近でも同じということを保証している。TAMA の鏡は 2 本のワイヤーで吊られる予定であり、鏡自体の回転はほとんどないと思われるのでこの条件を満たしている。

Gillespie and Raab はこれらの条件から、座標としてクランプ点のワイヤーの角度を採用したとき、Pendulum Mode のポテンシャルエネルギーが Violin Mode の 2 倍になることを示している。さらにこれらの条件から Pendulum Mode の散逸の大きさは Violin Mode の散逸の大きさに等しくなるので、Violin Mode の Q 値は Pendulum Mode の半分になるという結論を導いている。

またこの system と等価な電気回路を考えて熱雑音を計算した例もある [26]。クランプ点で散逸が起こるワイヤーを両端が大きい抵抗 (但し抵抗の大きさは ω に反比例する。つまり structure damping をあらわしている。) で terminate されている伝送線に置き換えて計算している。やはりこれでも Violin Mode の Q 値は Pendulum の半分になった。

また 1 本のワイヤーで懸架された鏡の Violin Mode の Q 値の計算も行なわれている。この場合鏡が回転するため Q 値は Pendulum Mode の 1/4 になっている [29]。

4.9.5 ワイヤーの選択

parameter を与えて熱雑音の大きさを計算したが、逆に熱雑音からこれらの parameter にはどのような制限を与えるのだろうか。またさらに熱雑音を下げることは可能であろうか。Pendulum Mode と First Violin Mode の周波数の比 ω_1/ω_0 が大きいほど重力波観測という目的にとっては有利である。そのためには式 (4.119) よりワイヤーの質量 m が小さければよい³⁴。そのための条件としては

- 密度が小さい。
- 径が小さい。
- 長さが短い。

が考えられる。とりあえず材質はタングステンに限定して考える。まず径であるが Pitch Rotation や Vertical Vibration からなるべく小さくするという要求があり、すでに切れない程度に細くなっているのでこれ以上の変更は不可能である。では短くするのはどうだろうか。短くすると Pendulum Mode の共鳴周波数が高くなり熱雑音が大きくなる。よって最適の長さが存在するはずである。話を簡単にするためにワイヤーはしぼられていない、つまり鉛直方向に平行だとしよう。他の parameter を変えずに長さだけ、1cm ずつ変えて計算したところ 22cm で極小となった。現実の長さは 24.5cm である。しぼってある

³⁴鏡の質量 M_2 は決まっている。

という違いはあるが長さに大した差はない。しかもワイヤーが鉛直なとき長さを 3cm 程度かえても熱雑音の振幅にして 4%程度しか増えない。よって材質をタングステンに限定する限り現在の TAMA の Suspension System は Pendulum+Violin の熱雑音という点からは最適化されていることがわかる。

残る方法はワイヤーの材質をタングステン以外のものに求めることである。Pendulum Mode の周波数は長さのみによって決まるので、Pendulum Mode の周波数が同じときに Violin Mode の周波数が大きい材質を選ぶ。新たな材質が満たすべき条件としてはまず先ほどもあげたが

- 密度が小さい。

がある。またできるだけ径が小さくできるようにするために

- 引っ張り強度が大きい。

という条件も加わる。Pitch Rotation や Vertical Vibration も考慮して

- Young 率が小さい。

という条件も加えよう。また熱雑音を小さくするために当然

- ワイヤー自体の散逸が小さい。
- ワイヤーの弾性エネルギーの重力によるポテンシャルエネルギーに対する比が小さい。

ということも考慮する必要がある³⁵。これらの条件においてタングステンより大きく有利な材質は今のところ見つかっていない。

例えば鉄は散逸以外の 3 条件においてはタングステンより有利な材質である。また散逸もタングステンと比べて悪いわけではない。しかし damping magnet との coupling が心配される。先ほど登場したチタン合金 DAT51 も散逸以外の条件についてはタングステンより有利だが散逸が大きい。

以上から Pendulum+Violin の熱雑音を parameter を操作したり材質を変えて大幅に小さくすることは難しいと思われる。

4.9.6 Yaw Rotation の Violin Mode

Violin Mode の熱雑音というと今まで議論してきたようにワイヤーの横波の振動の反作用によって鏡が光軸方向に揺らぐ現象を指す。しかし横波の振動方向は光軸に平行とはか

³⁵ これら散逸の測定に関しては [33, 34, 35] 参照。

ぎらない。特にこの横波の反作用によって鏡が Yaw Rotation すれば、それは重力波検出器にとって雑音になる。この Yaw Rotation の Violin Mode について計算した。

観測帯域では中間 mass 以下の散逸による熱雑音が dominant であることが今までの議論からわかっているので、中間 mass を固定してそれより下の部分だけを考える。

実際の TAMA の Suspension System についてこの熱雑音を計算するのは、かなり困難である。それはワイヤーが鉛直方向に平行でないからである。

しかし鉛直方向に平行なときには今まで議論してきた Violin Mode と同様の計算が可能である。ここでは結果だけ記す。まず共鳴周波数であるが一番低い周波数 $\omega_{0(\text{Yaw})}$ は

$$\omega_{0(\text{Yaw})} = \sqrt{\frac{M_2 g r^2}{I_{\text{mir}} l}} \quad (4.126)$$

である。但し r は鏡の重心と通る鉛直な直線とワイヤーの距離、 l はワイヤーの長さ、 I_{mir} は鏡の慣性モーメントである。これと式 (4.42)(4.44)(4.46) を比較するとわかるように、これはワイヤーが鉛直方向にあるときの Yaw Rotation の共鳴周波数に等しい。これより高い共鳴周波数 $\omega_{n(\text{Yaw})}$ は普通の Violin Mode、つまり式 (4.119) と同じである³⁶。

$$\omega_{n(\text{Yaw})} \approx n \pi \omega_{\text{Pen}} \sqrt{\frac{M_2}{4m}} = 533 \times n [\text{Hz}] \quad (4.127)$$

また各モードの換算慣性質量モーメント I_n を計算することができる。その結果は以下の通り。

$$I_n = \frac{I_{\text{mir}}}{2} \left[1 + \frac{1}{\cos^2(k_n l)} \left(\frac{\omega_{n(\text{Yaw})}}{\omega_{0(\text{Yaw})}} \right)^2 \right] \quad (4.128)$$

$$\approx \begin{cases} I_{\text{mir}} & (n = 0) \\ \frac{I_{\text{mir}}}{2} \left(\frac{\omega_{n(\text{Yaw})}}{\omega_{0(\text{Yaw})}} \right)^2 & (n \neq 0) \end{cases} \quad (4.129)$$

式 (4.122)(4.123) と比較してみると鏡の質量を慣性モーメントに変え、Pendulum Mode の共鳴周波数を Yaw Rotation の共鳴周波数に変えただけである。また Violin Mode の Q 値は Yaw Rotation の Q 値の半分とする³⁷。

各モードの共鳴周波数と換算慣性質量モーメントと散逸がわかったので式 (4.99) を使って熱雑音を計算することができる。

そこで以下のような System を考えて熱雑音を計算する。

- ワイヤーの長さ、中間 mass におけるワイヤークランプ点は TAMA の Suspension System と同じ。
- 鏡のワイヤークランプ点は中間 mass のクランプ点の真下にある。

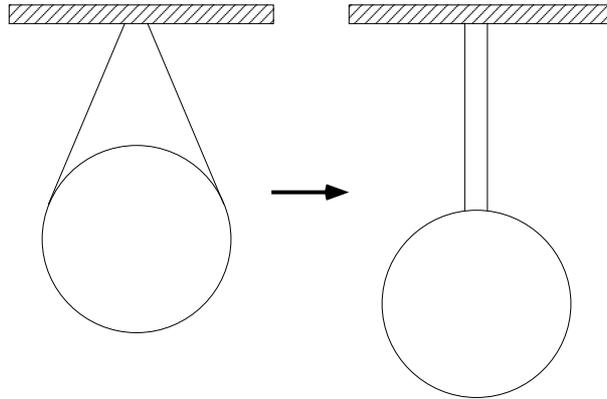


図 4.25: 計算を容易にするために加えた変更

TAMA の Suspension System からこの System への変更を図示したのが図 4.25 である。

ワイヤーは鉛直方向に平行になるので熱雑音の計算は先に述べた方法で計算できる。この System と TAMA の Suspension System を比べると、ワイヤーの長さは同じなので Violin Mode の共鳴周波数は変わらない。しかし Yaw Rotation の共鳴周波数は変わってしまう。そこで熱雑音の計算をするときには TAMA の Suspension System の Yaw Rotation の共鳴周波数を採用する。またワイヤーは鏡の中心に近付いたのでワイヤーの換算慣性モーメントへの寄与は小さくなる。つまり TAMA の Suspension System より Violin Mode の熱雑音は大きくなるので、TAMA の Suspension System の熱雑音の上限をおさえることができる。

計算したところ、観測帯域における熱雑音の振幅は Yaw Rotation のみ考えた時に比べて 2% ほど大きくなることが判明した。よって Violin Mode を考慮しても、観測帯域の熱雑音の大きさは Yaw Rotation のみ考えた時と大差ない。つまり Yaw Rotation の Q 値の下限が大きくなることはない。

Yaw Rotation の Q 値を 10^5 としたときの熱雑音のパワースペクトル密度は図 4.26 の通り。

³⁶ ω_{Pen} は Pendulum Mode の角共鳴周波数であり、 $\sqrt{g/l}$ に等しい。

³⁷運動方程式が普通の Violin Mode と同じになるので、この仮定もおそらく成立すると思われる。

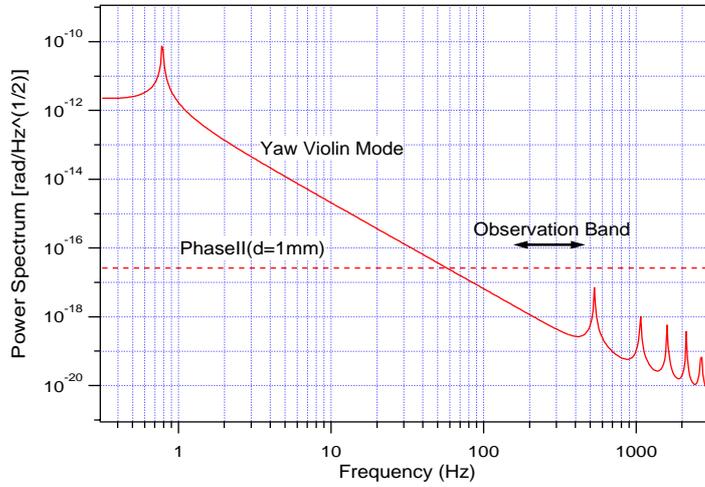


図 4.26: Yaw Rotation(Violin Mode まで考えた) の熱雑音のパワースペクトル ($Q = 10^5$)

4.10 coupling を考慮した熱雑音

Violin Mode の熱雑音以外を計算するときには 2 mode oscillator というモデルを用いた。しかしながら Suspension System の非対称性などによって coupling が存在する。これら coupling は防振にとっては深刻な問題となる [74]。熱雑音はこれらの coupling によって大幅に増加するか否かを検証した。

2 mode oscillator では Suspension System の 2 つの自由度のみを考えている。ここでは 4 つの自由度を考えてみよう。中間 mass の 2 つの自由度を x_1 、 y_1 とし、それに対応する鏡の自由度を x_2 、 y_2 としよう。そして y_2 の揺動を計算する。以下のようにベクトル $\tilde{\mathbf{X}}$ を定義する。

$$\tilde{\mathbf{X}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} \quad (4.130)$$

このベクトルを用いるとフーリエ変換された運動方程式は以下のように行列を使って表すことができる。

$$-\omega^2 \mathcal{M} \tilde{\mathbf{X}} + \mathcal{C} \tilde{\mathbf{X}} + \mathcal{K} \tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (4.131)$$

Lagrangian から運動方程式が導かれるので行列は全て対称でなければならない。左辺の

でしか考えないのであれば、たとえ 12 個全ての自由度を考慮したとしても自由度 4 つの場合の和に帰着される。

coupling が存在することによって以下のような補正が必要であると考えられる。

1. 伝達されないはずの熱雑音が coupling が存在することによって鏡に伝達されてしまうことによる補正
2. coupling で生じる散逸による熱雑音の存在による補正

まず 1. について考える。Suspension System において最大の散逸は magnet damping があるので、magnet damping によって生じる中間 mass の熱雑音が coupling によってどの程度鏡に伝達するかをまず計算しよう。散逸として magnet damping のみを考えて計算する。よって散逸を表す行列 C は以下ようになる。

$$C = \begin{pmatrix} m_{x_1} \omega_{x_1}^2 \phi_{x_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{y_1} \omega_{y_1}^2 \phi_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.135)$$

但し

$$\phi_{x_1}(\omega) = \frac{\omega}{\omega_{x_1} Q_{x_1}} \quad (4.136)$$

$$\phi_{y_1}(\omega) = \frac{\omega}{\omega_{y_1} Q_{y_1}} \quad (4.137)$$

であり、これらは magnet damping を表す。

計算すると y_2 の熱雑音のパワースペクトル密度 G_{y_2} は以下ようになる。ただし観測帯域 ω は $\omega_{x_1}, \omega_{x_2}, \omega_{y_1}, \omega_{y_2}$ よりずっと大きいとする。

$$G_{y_2}(f) = \frac{4k_B T \omega_{x_1}}{m_{x_1} Q_{x_1}} \frac{\beta^2}{m_{y_2}^2 \omega^8} \quad (4.138)$$

coupling のうち β にしか依存しないことに注意。coupling による熱雑音は観測帯域においては f^{-8} に比例する。2 mode oscillator model においても中間 mass から鏡に伝達する熱雑音のエネルギーは f^{-8} に比例することを思い出すと、この熱雑音の物理的な意味は本来伝達されないはずの中間 mass の揺動が coupling によって鏡に伝達されているということである。つまり 2 mode oscillator model における中間 mass からの熱雑音が補正を受けることになるわけだがそれはどのくらいの大きさだろうか。

この大きさについて具体的に計算してみよう。

式 (4.138) について考えてみよう。3 つの分数の積として書かれているが、最初の分数は viscous damping の調和振動子の熱雑音のパワースペクトル密度の係数に等しい⁴⁰。こ

⁴⁰式 (3.18) 参照。

の係数の大きさは自由度に依存するよう見える。しかし m_{x_2} は中間 mass の質量もしくは慣性モーメントを表す量であり、たとえ慣性モーメントとしても、Appendix A からわかるように自由度が変わっても 2 倍は変わらない。また (ω_{x_1}/Q_{x_1}) であるが、Appendix A からわかるようにこれは自由度に依存しない。よってこの係数は並進もしくは回転に話を限定すれば、自由度には依存しない。2 番目の分数の分母は鏡の質量もしくは慣性モーメントであるからこれも自由度にあまり依存しない。よって問題となるのは coupling の大きさ β がどの程度であるかということである。

まず式 (4.130) のベクトル成分 x, y が両方とも並進 (例えば Pendulum Mode と Vertical Vibration) もしくは回転 (例えば Pitch Rotation と Yaw Rotation) の場合を考える。このとき式 (4.131) の行列要素は全て同じ次元の量となり、大きさを比較することができる。式 (4.138) において $\beta = -m_{y_2}\omega_{y_2}^2$ とおくと 2 mode oscillator における中間 mass からの熱雑音、つまり式 (4.19) と等しくなることと、 $-m_{y_2}\omega_{y_2}^2$ 自体も行列 K の非対角成分であることに注意しよう。当然のことながら β の絶対値は $m_{y_2}\omega_{y_2}^2$ よりずっと小さい⁴¹。よって以上の議論から、 x, y が両方とも並進もしくは回転のときには coupling によって伝達する熱雑音は 2 mode oscillator における中間 mass からの熱雑音よりずっと小さく問題にならないことがわかる。

では x, y の片方が並進で片方が回転の場合にはどのようなになるのであろうか。今度は行列 K の要素の次元は同じではないので今までの議論は成り立たない。そこで実際に計算を行なうしかない。ここでは最大の coupling による熱雑音を計算してみよう。Suspension System の coupling として鏡のワイヤーのクランプ点が鏡の重心と同じ高さでないことによる coupling と非対称性による coupling が存在する。前者の coupling の方が大きいのでそちらを計算する。

この coupling は Pendulum Mode と Pitch Rotation の間に生じる。まず中間 mass の Pendulum Mode の熱雑音がどの程度鏡の Pitch Rotation に伝達されるか計算しよう。このとき式 (4.130) において x が光軸方向への並進運動を、 y が Pitch Rotation に相当することになる。このとき [74] より

$$\beta = \frac{m_2 g d_4}{l_2} \quad (4.139)$$

となる⁴²。これを代入して計算すると

$$G_{\text{coupling}(\text{pen} \rightarrow \text{pit})} = \frac{1.04 \times 10^{-20}}{f^8} [\text{rad}^2/\text{Hz}] \quad (4.140)$$

となる。中間 mass の Pitch Rotation による鏡の Pitch Rotation の熱雑音の大きさは式 (4.34) より $8.12 \times 10^{-18}/f^8 [\text{rad}^2/\text{Hz}]$ であるから 3 桁近く小さいことがわかる。よって問題にならない。

⁴¹ そうでなければ 2 mode oscillator model という近似の意味は無くなる。

⁴² parameter の定義は Appendix A 参照のこと。

次に中間 mass の Pitch Rotation の熱雑音が鏡の Pendulum Mode にどの程度伝達されるかを計算する。今度は式 (4.130) において x が Pitch Rotation、 y が並進に対応する。だが、この場合実は $\beta = 0$ である [74]。よって非対称性による coupling が問題になるが、その大きさは式 (4.139) の β より小さいであろう。よってここでも β として式 (4.139) を採用して、熱雑音の計算を行なった。結果は以下ようになった。

$$G_{\text{coupling(pit} \rightarrow \text{pen)}} = \frac{5.70 \times 10^{-24}}{f^8} [\text{m}^2/\text{Hz}] \quad (4.141)$$

中間 mass の Pendulum Mode による鏡の Pendulum Mode の熱雑音の大きさは式 (4.79) より $1.15 \times 10^{-22}/f^8 [\text{m}^2/\text{Hz}]$ であるから 1 桁以上小さいことがわかる。よって問題にならない。

今までの議論をまとめると中間 mass の magnet damping による熱雑音が coupling によって伝達される大きさは 2 mode oscillator において中間 mass から伝達される熱雑音よりずっと小さく問題にならない。

magnet damping のみ考えて計算したが、その他に中間 mass と鏡の間で生じる structure damping が存在する。これによる熱雑音を計算しよう。このとき散逸を表す行列 \mathcal{C} は以下のようになる。

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} m_{x_2} \omega_{x_2}^2 \phi_{x_2} & -m_{x_2} \omega_{x_2}^2 \phi_{x_2} & 0 & 0 \\ -m_{x_2} \omega_{x_2}^2 \phi_{x_2} & m_{x_2} \omega_{x_2}^2 \phi_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{y_2} \omega_{y_2}^2 \phi_{y_2} & -m_{y_2} \omega_{y_2}^2 \phi_{y_2} \\ 0 & 0 & -m_{y_2} \omega_{y_2}^2 \phi_{y_2} & m_{y_2} \omega_{y_2}^2 \phi_{y_2} \end{pmatrix} \quad (4.142)$$

但し

$$\phi_{x_2}(\omega) = \frac{1}{Q_{x_2}} \quad (4.143)$$

$$\phi_{y_2}(\omega) = \frac{1}{Q_{y_2}} \quad (4.144)$$

であり、これらは structure damping を表す。

計算するとこれらの熱雑音は観測帯域において f^{-9} に比例することがわかる。これはどのような物理的な意味を持つのだろうか。中間 mass に加わる揺動力の原因となる散逸は magnet damping だけでなく、中間 mass と鏡の間の structure damping もある。structure damping による揺動は観測帯域のような高周波数域においては single harmonic oscillator の熱雑音と同じになるので、式 (3.22) より f^{-5} に比例する。この揺動が鏡に伝達すると防振比の 2 乗をかけた値になる。防振比は f^{-2} に比例するので、鏡の揺動は f^{-9} に比例することになる。つまり中間 mass と鏡の間の散逸によって中間 mass が揺動し、その揺動が本来伝達されない鏡の自由度へ coupling によって伝達されたものである⁴³。しかし中間

⁴³今までの議論から f^{-9} に比例する項は coupling のない 2 mode oscillator にも存在することがわかる。実際に式 (4.7) を展開して求めることができる (式 (4.7) の分子第 3 項の分数の分母第 3 項に由来する。)

mass にかかる揺動力は magnet damping によって決まり、その他の散逸は無視できるので、 f^{-9} に比例する項は全て magnet damping の熱雑音が鏡に伝達するものより小さいと考えられる。よってこれらの熱雑音を考慮する必要はない。

次に 2. について考える。coupling が存在することによってポテンシャルエネルギーに新しい項が登場する。このエネルギーの散逸によって生じる熱雑音が 2. である。散逸を表す行列 C は以下ようになる。

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\phi_\alpha & \beta\phi_\beta \\ 0 & 0 & \gamma\phi_\gamma & \delta\phi_\delta \\ \alpha\phi_\alpha & \beta\phi_\beta & 0 & 0 \\ \gamma\phi_\gamma & \delta\phi_\delta & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.145)$$

但しこれらは物質内部の散逸と考えられるので $\phi_\alpha, \phi_\beta, \phi_\gamma, \phi_\delta$ は周波数に依存しないと仮定する。またその大きさも ϕ_{x_2}, ϕ_{y_2} にほぼ等しいとする。

計算した結果は以下の通り。

$$G_{\text{coupling}}(f) = \frac{4k_B T}{m_{y_2}^2} \frac{1}{\omega^7} \left(\frac{\beta^2}{m_{x_1}} 2\phi_\beta + \frac{\delta^2}{m_{x_2}} 2\phi_\delta \right) \quad (4.146)$$

2 mode oscillator model において中間 mass と鏡の間の散逸による熱雑音、つまり式 (4.10) は f^{-5} に比例する。ここでさらに高次の項を計算すると f^{-7} に比例する項⁴⁴があらわれる。それは以下の通り。

$$G_{\text{coupling-2mode}}(f) = \frac{4k_B T}{m_{y_1}} \frac{\omega_{y_2}^4}{\omega^7} 2\phi_{y_2} \quad (4.147)$$

これは式 (4.146) の第 1 項において、 $\beta \rightarrow -m_{y_2}\omega_{y_2}^2, m_{x_1} \rightarrow m_{y_1}, \phi_\beta \rightarrow \phi_{y_2}$ にしたものと形が同じであることに注意。 $-m_{y_2}\omega_{y_2}^2\phi_{y_2}$ が式 (4.142) の非対角成分であることから、式 (4.146)(4.147) はいずれも行列 C の非対角成分による熱雑音であると解釈することができる。

これらの熱雑音の大きさがどの程度であるか、推定してみよう。magnet damping による中間 mass の熱雑音がどの程度鏡に coupling によって伝わるかという問題と同様の方法で議論できる。

まず x, y が両方とも並進もしくは回転のときは、行列要素が全て同じ次元を持ち、比較することができる。この場合行列 C の非対角成分のうち一番大きい成分による熱雑音が一番大きくなるはずである。 $\phi_\beta, \phi_\delta, \phi_{y_2}$ いずれも同程度の大きさとする⁴⁵、 $m_{y_2}\omega_{y_2}^2$ は β, δ の絶対値よりずっと大きいから、式 (4.147) が式 (4.146) よりずっと大きくなる。さらに前者は 2 mode oscillator model でも存在したが、問題にならないほど小さかったので⁴⁶、これらの熱雑音は非常に小さいことがわかる。

⁴⁴式 (4.7) の分母第 3 項の分数の分子に由来する項。

⁴⁵おそらく無理のない仮定と思われる。

⁴⁶観測帯域では中間 mass 以下の散逸による熱雑音つまり式 (4.10) の高々 1/50 程度である。

x, y が片方が並進で片方が回転の場合には計算を行わなければならない。 β としては先ほど同様式 (4.139) を採用し、 $\beta = \delta$ 、 $\phi_\beta = \phi_\delta = \phi_{y_2} = 1/Q_2$ として計算を行なった。 x が Pendulum Mode、 y が Pitch Rotation を表すとすると、式 (4.146) (4.147) は以下のようになる。

$$G_{\text{pen} \leftrightarrow \text{pit}}(f) = \frac{2.24 \times 10^{-25}}{f^7} \frac{10^5}{Q_2} [\text{rad}^2/\text{Hz}] \quad (4.148)$$

$$G_{\text{pit} \leftrightarrow \text{pit}}(f) = \frac{7.60 \times 10^{-22}}{f^7} \frac{10^5}{Q_2} [\text{rad}^2/\text{Hz}] \quad (4.149)$$

添字からわかるように式 (4.148) が式 (4.146) に具体的な値を代入したものである。

x が Pitch Rotation、 y が Pendulum Mode を表すとすると、式 (4.146) (4.147) は以下のようにになる。

$$G_{\text{pit} \leftrightarrow \text{pen}}(f) = \frac{1.91 \times 10^{-28}}{f^7} \frac{10^5}{Q_2} [\text{m}^2/\text{Hz}] \quad (4.150)$$

$$G_{\text{pen} \leftrightarrow \text{pen}}(f) = \frac{1.15 \times 10^{-27}}{f^7} \frac{10^5}{Q_2} [\text{m}^2/\text{Hz}] \quad (4.151)$$

どちらの場合も 2 mode oscillator model にも存在する $G_{\text{pit} \leftrightarrow \text{pit}}$ 、 $G_{\text{pen} \leftrightarrow \text{pen}}$ の方が大きい。そしてこれらは 2 mode oscillator model では問題にならないほど小さい。

まとめると中間 mass と鏡の coupling の散逸でおこる熱雑音は無視できるということである。

また 2 mode oscillator model においては、観測帯域では中間 mass 以下の散逸による熱雑音、つまり式 (4.10) が dominant であるがこの熱雑音は今までの議論より coupling が存在してもその影響は受けないことにも注意されたい。これは熱雑音にとって非常に有利な点である。

今までの議論をまとめると以下の通り。

1. 2 mode oscillator model は観測帯域では中間 mass と鏡の間の散逸による熱雑音、つまり式 (4.10) が dominant であるが、この雑音の大きさは coupling が存在しても変化しない。
2. coupling によって magnet damping による中間 mass の熱雑音が鏡に伝達される。この熱雑音の大きさは 2 mode oscillator model において中間 mass から鏡に伝達される熱雑音よりずっと小さく問題にならない。
3. coupling で生じる散逸による熱雑音は無視できるほど小さい。

4.11 改良後の熱雑音

防振上の理由から、以下のような Suspension System の改良案が出された [74]。

- 鏡を懸架するワイヤーの間隔を 1cm から 2cm にする。
- 鏡のクランプ点を鏡の重心とほぼ同じ高さにする。

これにより熱雑音の大きさはどう変化するかを計算した。

後者の変更は具体的には stand-off を鏡とワイヤーの間に入れることになると予想されるがその形状などは未定である。ここではワイヤーは従来 of 鏡のクランプ点 (鏡とワイヤーの接点) からそのまままっすぐ延長し、鏡の重心と同じ高さのところ でクランプされるとした。どのようなクランプ機構が採用されるにせよ形はこれとはそれほど変わらないと思われる。

改良により 2 mode oscillator の ω_2 が変化する。それをまとめたのが表 4.1 である。

表 4.1: 改良による共鳴周波数 ω_2 の変化

	改良前	改良後
Pitch	3.27 Hz	5.64 Hz
Yaw	0.785 Hz	1.21 Hz
Vertical	17.5 Hz	17.2 Hz
Pendulum	1.01 Hz	0.996 Hz
1st Violin	533 Hz	514 Hz

Vertical Vibration, Pendulum Mode, Violin Mode は周波数はほとんど変わらない。また Violin Mode が観測帯域に入ることもないので、特にこれらの Q 値の下限は変わらない。

Yaw Rotation の共鳴周波数は 1.2 倍大きくなるので、熱雑音は大きくなる。熱雑音の振幅が PhaseII の目標の 1/4 以下になるために必要な Q 値の下限は改良により $2 \times 10^3 \rightarrow 4 \times 10^3$ となる。しかしこれは問題ないだろう。

鏡の Pitch Rotation の共鳴周波数は 2 倍弱になる。このため熱雑音はかなり大きくなる。magnet damping からの熱雑音は改良により PhaseII の目標感度の $1/20 \rightarrow 1/5$ となる。さらに振幅が PhaseII の目標感度の 1/4 以下となるのに必要な Q 値の下限は改良により $3 \times 10^4 \rightarrow 2 \times 10^5$ となる。PhaseII の 1/3 以下としても 7×10^4 である。このため Pitch Rotation の Q 値の測定も必要と思われる。

coupling による熱雑音は改良によってどうなるであろうか。鏡のクランプ点と鏡の重心が同じ高さでないことによる coupling は改良により小さくなる。非対称性による coupling が改良によって大きくなることは考えにくい。よって改良前と同様問題にならないと考えられる。

4.12 Suspension System の熱雑音のまとめ

- いかなる鏡の自由度においても magnet damping による熱雑音は Phase II の目標感度に比べて小さく問題にならない。よって熱雑音の問題が生じるとすれば中間 mass 以下の部分の Q 値 (Q_2) が小さい場合である。
- Beam Centering を 1mm の精度で行なったとすると Pitch Rotation の熱雑音の振幅が Phase II の目標感度の 1/4 になるためには $Q_2 > 2 \times 10^5$ が必要である⁴⁷。これは多少大きい値であるので Q 値の測定が必要であると考えられる。
- Beam Centering を 1mm の精度で行なったとすると Yaw Rotation の熱雑音の振幅が Phase II の目標感度の 1/4 になるためには $Q_2 > 4 \times 10^3$ が必要である⁴⁸。これは実現困難な値ではない。
- Vertical Vibration の熱雑音は Q_2 がかなり小さくても問題にならない。
- Pendulum Mode の Q 値が $Q_0 = 2.5 \times 10^5$ であり、Violin Mode の Q 値が $Q_n = 1.25 \times 10^5$ であるときにこれらの熱雑音は Phase II の目標感度とほぼ等しくなる。またこの Q 値は実現不可能ではないと考えられる。
- Suspension System の非対称性などによる coupling の影響は小さく無視することができる。

⁴⁷改良後の値である。

⁴⁸改良後の値である。

第 5 章

鏡の熱雑音

鏡は円柱弾性体であり振動モードを持つ。これらのモードは熱的に励起されて、鏡の表面は揺らぐ。これは図 5.1 のように光路長差の変化を引き起こし、重力波検出器の雑音になる。

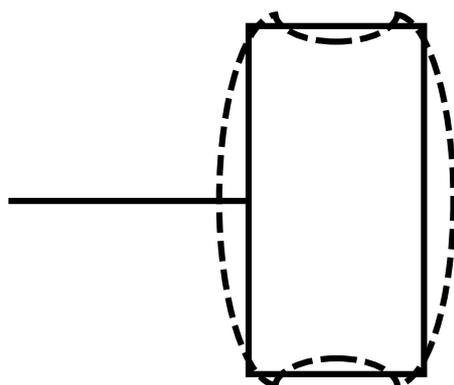


図 5.1: Internal Mode of Mirror

この熱雑音の推定は従来はあまり厳密には行なわれてこなかった。それは弾性体の運動方程式を解くことがかなり困難であったからである。しかし Hutchinson の考案した Simulation によってその計算が可能になりかなり正確な熱雑音の推定が可能になった。ここでは従来の推定方法を述べた後、Hutchinson's Simulation の概略を説明し、これを用いて計算された鏡の熱雑音について議論する。その結果 Q 値の下限は従来の推定よりかなり厳しくなることがわかった。

5.1 鏡の熱雑音のパワースペクトル密度

鏡も continuous system の熱雑音で述べたのと同様の方法で熱雑音を計算することができる。2つ変更を要する点がある。まず continuous system の熱雑音では1次元の場合を取り扱ったが、鏡は3次元であるということである。これは積分計算を1次元から3次元に拡張するだけでよい。もう1つの変更点は観測点は continuous system の熱雑音では文字通り「点」であったが、今回はそのような取り扱いには許されないということである。本来レーザービームは太さを持つものであるが、Suspension System の熱雑音を計算するときには鏡の表面は平面のままであったので太さを考えずにすむことができた。しかしこの場合鏡の表面は平面でなくなるのでレーザービームの太さを無視することはできなくなる。つまり観測する場所も揺動力も「点」ではなく広がりをもつことになる。この変更について考えてみよう。

太さは以下のように考慮される [50, 53]。Fabry-Perot cavity 内ではレーザービームは TEM₀₀ モードが共鳴している。これは Gaussian beam である。以後鏡の重心を原点とした、円柱座標 (r, θ, z) を採用する。鏡の表面の変位の z 成分を $u_z(r, \theta)$ とし、レーザービーム (Gaussian beam) の強度分布関数を $P(r, \theta)$ とおけば、

$$\Delta l = \int_{\text{surface}} u_z(r, \theta) P(r, \theta) r dr d\theta \quad (5.1)$$

つまり鏡の表面が $u_z(r, \theta)$ だけ変位したとき、干渉計でみているとあたかも鏡の位置が Δl だけ動いたかのように見えるわけである。揺動力もレーザービームの強度と同じ分布を持っているとすれば、continuous system の熱雑音と全く同様の計算ができるはずである。結局鏡の場合も熱雑音は同じ形の式になる。では具体的に換算質量の表式がどのようになるか考えてみよう。

とりあえず鏡の表面の中心とレーザービームの中心は一致していると仮定しよう。すると $P(r, \theta)$ は次のようになる。

$$P(r, \theta) = \frac{2}{\pi w^2} \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \quad (5.2)$$

ここで w は beam waist と呼ばれる。中心から w 離れると強度が中心の e^{-2} 倍になる。また $w(r, \theta)$ は固有振動モードの表面の変位を表していると考えると

$$u_z(r, \theta) = f(r) \cos n\theta \quad (5.3)$$

但し n は 0 か自然数である。 n は表面の動径方向の node の本数を表し、order と呼ばれる。式 (5.2)(5.3) を式 (5.1) に代入すると、明らかに $n > 0$ の場合積分値は 0 になる。よって鏡の中心とレーザービームの中心が一致しているときには $n = 0$ のモード、つまり軸対称なモードのみを考えれば良い。以後これを前提として話しを進めていく。後ほどビームの中心が鏡の中心からずれていた場合の計算も行なう。

あるモードの換算質量は以下の要領で計算できる。まずモード全体の運動エネルギー K を計算する。モードの形を $\mathbf{u}(r, \theta, z)$ 、密度を ρ 、共鳴角周波数を ω_n とおくと、

$$K = \int_{\text{volume}} \frac{\rho}{2} |\dot{\mathbf{u}}|^2 dV = \int_{\text{volume}} \frac{\rho \omega_n^2}{2} |\mathbf{u}|^2 dV \quad (5.4)$$

換算質量を m_n とすれば $K = m_n \omega_n^2 \Delta l^2 / 2$ となるので、

$$m_n = \frac{K}{\omega_n^2 \Delta l^2 / 2} \quad (5.5)$$

となる。実際には m_n を鏡の質量で規格化した換算質量係数 α_n を計算する。この量は無次元である。つまりこの値を計算するために利用した値の単位は全てキャンセルされた。よってこの量は鏡のサイズに依存しない値である。鏡の高さと直径の比 (Aspect Ratio) とレーザービーム半径と鏡の半径の比そして Poisson Ratio にのみ依存する¹。

これらから鏡の熱雑音は以下ようになる。

$$G_{\text{mirror}}(f) = \frac{4k_B T}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 \phi_n(\omega)}{m_n [(\omega^2 - \omega_n^2)^2 + \omega_n^4 \phi_n^2(\omega)]} \quad (5.6)$$

もちろん式 (4.99) と同じ形である。structure damping と仮定する。つまり $\phi_n(\omega) = 1/Q_n$ とする。また $Q_n \gg 1$ 。また鏡の共鳴周波数は TAMA では 10kHz のオーダーであること²、観測帯域は 100Hz のオーダーであることから、 $\omega \ll \omega_n$ が成立する。よって式 (5.6) は

$$G_{\text{mirror}}(f) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4k_B T}{m_n \omega_n^2 Q_n \omega} \quad (5.7)$$

となる。よって m_n, ω_n, Q_n を求めること、そしてそれらの値をできるだけ大きくすることが課題となる。

5.2 従来の推定

前 section の結果より m_n, ω_n, Q_n がわかれば、熱雑音の大きさはわかる。しかしこれらの量についての情報を得るのは容易ではない。まず Q_n については測定をするしかない。しかも 1 つではなく様々なモードの Q 値を測定しなければならない。これらの詳細については [75] を参照してほしい。この論文では Q 値は適当な大きさに仮定する。しかし m_n, ω_n を求めるという困難な計算が残っている。この計算が困難な理由は以下の通りである。

¹後ほど述べるが弾性体の運動方程式を無次元化して解く。このようにすると方程式に出てくる弾性を表す係数は Poisson Ratio のみになる。これが Poisson Ratio のみが登場する理由である。

²他の大型干渉計型計画の鏡は TAMA より大きいがそれでも周波数は 1kHz のオーダーである。

鏡の Aspect Ratio は大体 1 程度が好ましいとされている。極端に小さかったり (円板)、大きかったり (棒) すると基本モードの共鳴周波数が下がり、熱雑音が大きくなってしまいうからである。しかしながら Aspect Ratio を 1 付近にしたために円板や棒の時に行なわれる 2 次元もしくは 1 次元の問題に帰着させるという近似はできなくなり、3 次元の弾性体の運動方程式を解いて m_n, ω_n を求めなければならない。これは大変困難な作業であり、このために鏡の熱雑音はかなり粗い推定しか行なわれてこなかった。ここではその従来の推定方法を紹介する。

まず式 (5.7) から明らかなように ω_n の大きいモードの寄与は小さいので、 ω_n が一番小さいモード、つまり基本モードのみを考える。

次に基本モードは円柱の伸縮モードと仮定する。この仮定は棒では正しい。すると基本モードの周波数は以下の式のようになる [11]。

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\pi}{H} \quad (5.8)$$

但し、 E はヤング率、 ρ は密度、 H は円柱の高さである。またこのとき換算質量は鏡の質量の半分³になる [11]。周波数は実際に計測することによっても調べることができる。

最後に Q 値であるがこれは実際に測定するか、妥当と思われる値を仮定するかいずれかである。

TAMA の鏡の熱雑音の大きさを計算してみよう。鏡の質量は 1kg なので換算質量は 0.5kg、基本周波数⁴を 30kHz、 Q 値を 5×10^5 とする⁵と鏡 1 個当りの熱雑音の大きさは

$$G_{\text{mirror}}(f) = 5.25 \times 10^{-19} / f^{-1/2} \left[\text{m} / \sqrt{\text{Hz}} \right]$$

となる。鏡が 4 つあること、干渉計の腕の長さは 300m であること、観測帯域は 150Hz ~ 450Hz であることから観測帯域における h の 2 乗平均の平方根 h_{rms} は

$$h_{\text{rms}} = 3.82 \times 10^{-21}$$

であることがわかる (TAMA の Sensitivity のグラフつまり図 2.5 では鏡が 4 つあることを考慮していないために、 $h_{\text{rms}} = 1.8 \times 10^{-21}$ という小さい値になっている)。この値は Phase II の目標感度 ($h_{\text{rms}} = 3 \times 10^{-21}$) を越えてしまっている。しかしながら $Q = 10^6$ であれば $h_{\text{rms}} = 2.70 \times 10^{-21}$ となり、かろうじて Phase II の目標感度より小さくなる。

³人によっては換算質量を鏡の質量にする。

⁴この計算が行なわれたときは鏡の直径は 5cm、高さは 4cm であった。現在では高さは 6cm に変更になった。しかしながら高さ 6cm の時の実際の基本モードの周波数は 28kHz であるのでそれほど悪い値ではない。

⁵むしろ Q 値の下限と考えられていたらしい。しかし当時後述するように鏡 1 つの熱雑音しか考えていない。

5.3 Hutchinson's Simulation

m_n, ω_n の難しい計算を行なうために採用されたのが Hutchinson's Simulation である。これは一様で表面に応力のかかっていない円柱弾性体 (応力がかかっていないという条件は 6 つの境界条件で記述される) の振動モードを Simulate するための方法であり、有限要素法などと違いかなり解析的 (半解析的と呼ぶのが適当であろう) である。この方法の基本方針は 6 つの境界条件のうち 3 つを満たす基底関数系を適当に定め、そのうち波数が小さいものだけ考慮して、残りの 3 つの境界条件を満たすように基底関数の係数をもとめるというものである。採用する基底関数の数は NZ, NR で表される。これは円柱の高さの約 $1/NZ$ 倍以上の波長をもつ基底関数と、円柱の直径の約 $1/NR$ 倍以上の波長をもつ基底関数だけを考慮していることに相当すると考えてよい。詳細は Hutchinson の論文 [49] を参照してほしい。なお LIGO や VIRGO でもこの方法で熱雑音の推定を行なっている [50, 53]。また坪野研の学生実験レポート [57, 58, 62] も参照のこと。この section では Hutchinson's Simulation の概略を議論する。

5.3.1 弾性体の波動方程式

まず Hutchinson's Simulation の前提となる弾性力学の理論について議論する。弾性力学の詳細は [65] を参照にしてほしい。また Hutchinson 自身は Rasband の論文 [48] を引用している。

弾性体の運動方程式は密度を ρ 、変位ベクトルを \mathbf{u} 、ヤング率を E 、Poisson Ratio を ν とおくと

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \text{grad div } \mathbf{u} \quad (5.9)$$

である。ここで

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (5.10)$$

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (5.11)$$

と定義すると式 (5.9) は

$$\ddot{\mathbf{u}} = c_t^2 \Delta \mathbf{u} + (c_l^2 - c_t^2) \text{grad div } \mathbf{u} \quad (5.12)$$

となる。ここで Helmholtz の定理を用いる。

Helmholtz の定理

任意のベクトル場 \mathbf{u} は以下のように分解できる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_l \quad (5.13)$$

但し $\text{div } \mathbf{u}_t = 0, \text{rot } \mathbf{u}_l = 0$ である。この分解の方法は定数を除いて一意である。

式 (5.12) の \mathbf{u} を Helmholtz の定理を用いて分解し、 div を施すと、

$$\text{div}(\ddot{\mathbf{u}}_l - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l) = 0 \quad (5.14)$$

式 (5.14) において div のかわりに rot としてもやはり 0 である。 div, rot のいずれを施しても恒等的に 0 になるベクトル場は定数である。ここではその定数を 0 とおいて

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l = 0 \quad (5.15)$$

これは波動方程式である。しかも $\text{div } \mathbf{u}_l \neq 0$ より圧縮を伴う波、つまり縦波であることがわかる。 c_l は縦波の伝搬速度である。

今度は式 (5.12) の両辺に rot を施すと

$$\text{rot}(\ddot{\mathbf{u}}_t - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t) = 0 \quad (5.16)$$

式 (5.16) において rot のかわりに div を施すとやはり 0 である。先ほど同様にして、

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t = 0 \quad (5.17)$$

となる。これも波動方程式である。今度は $\text{div } \mathbf{u}_t = 0$ より圧縮のない波、つまり横波であることがわかる。 c_t は横波の伝搬速度である。

波動方程式 (5.15)(5.17) が求まったので、方程式を解くことを考える。 $\text{rot } \mathbf{u}_l = 0$ より $\mathbf{u}_l = \text{grad}\Phi$ となるスカラー場 Φ が存在することがわかる。また $\text{div } \mathbf{u}_t = 0$ より $\mathbf{u}_t = \text{rot } \Psi$ となるベクトル場 Ψ が存在することがわかる。さらに以下のように変数分離を行なう。

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}) \exp(i\Omega t) \quad (5.18)$$

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi(\mathbf{x}) \exp(i\Omega t) \quad (5.19)$$

これらを式 (5.15)(5.17) に代入して整理すると

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}) + \frac{\Omega^2}{c_l^2} \Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.20)$$

$$\Delta \Psi(\mathbf{x}) + \frac{\Omega^2}{c_t^2} \Psi(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.21)$$

となる⁶。

⁶実は式 (5.20) は定数だけ、式 (5.21) は rot を施すと 0 になるベクトル場だけ任意性があるがそれらは 0 とおいた。

ここまでは一般的な弾性体の波動方程式である。ここで扱うのは円柱弾性体なので円柱座標 (R, θ, Z) を採用する。また計算を簡単にするために物理量の無次元化を行なう。円柱の半径を R_0 、高さを H 、また Aspect Ratio $h = H/2R_0$ として、

$$r = \frac{R}{R_0}, z = \frac{Z}{R_0}, \omega = \frac{\Omega R_0}{c_t} \quad (5.22)$$

とする。また $0 \leq r \leq 1, -h \leq z \leq h$ である。さらに $\lambda = c_t/c_l$ とおく。このような座標系において (5.20)(5.21) は以下ようになる。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \omega^2 \lambda^2 \Phi = 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{\Psi_1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial R_0 \Psi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} + \omega^2 \Psi_1 = 0 \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} + \frac{2}{R_0 r^3} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} + \omega^2 \Psi_2 = 0 \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial z^2} + \omega^2 \Psi_3 = 0 \quad (5.26)$$

ここで $\Psi_1, rR_0\Psi_2, \Psi_3$ は Ψ の r 成分、 θ 成分、 z 成分である。さらに式 (5.24)(5.25) に Ψ_1, Ψ_2 しか含まれないこと、式 (5.26) に Ψ_3 しか含まれないことから以下のような分解ができる。

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ rR_0\Psi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

右辺の第 1 項のベクトルを Ψ_a 、第 2 項のベクトルを Ψ_b としよう。もともと Ψ は横波を意味するがこの分解は横波に 2 つの自由度があることを示している。

4 つの方程式が出てきたわけであるが、これらの解は Bessel 関数を用いて記述することができる。n 次の Bessel 関数を J_n とする。

$$\Phi(r, \theta, z) = 2AR_0^2 J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos(\delta z) \\ \sin(\delta z) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

$$\Psi_1(r, \theta, z) = BR_0^2 \frac{n}{r} J_n(\hat{\alpha} r) \begin{Bmatrix} \sin(\beta z) \\ -\cos(\beta z) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

$$R_0\Psi_2(r, \theta, z) = -\frac{BR_0^2}{r} \frac{\partial J_n(\hat{\alpha} r)}{\partial r} \begin{Bmatrix} \sin(\beta z) \\ -\cos(\beta z) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(n\theta) \\ -\cos(n\theta) \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

$$\Psi_3(r, \theta, z) = -CR_0^2 J_n(\bar{\alpha} r) \begin{Bmatrix} \cos(\gamma z) \\ \sin(\gamma z) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

但し

$$\alpha^2 + \delta^2 = \omega^2 \lambda^2 \quad (5.32)$$

$$\hat{\alpha}^2 + \beta^2 = \omega^2 \quad (5.33)$$

$$\bar{\alpha}^2 + \gamma^2 = \omega^2 \quad (5.34)$$

である。\$A, B, C\$は任意定数。

これらから変位ベクトルを計算することができる。また歪テンソル、変位テンソルの計算もできる。歪テンソル \$u_{ij}\$は変位ベクトル \$\mathbf{u}\$ の \$r, \theta, z\$成分 \$u_r, u_\theta, u_z\$を用いて以下のように定義される。

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (5.35)$$

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad (5.36)$$

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (5.37)$$

$$2u_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \quad (5.38)$$

$$2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (5.39)$$

$$2u_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (5.40)$$

$$(5.41)$$

応力テンソル \$\sigma_{ij}\$は以下の通り。

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{3(1-2\nu)} u_{ll} \delta_{ij} + \frac{E}{(1+\nu)} \left(u_{ij} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ij} \right) \quad (5.42)$$

但し \$u_{ll}\$は \$u_{ij}\$の trace を表す。

さらに以下のように変位ベクトル、応力テンソル、歪テンソルを規格化する。但し \$\mu = E/2(1+\nu)\$ である⁷。

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_r}{R_0}, v = \frac{u_\theta}{R_0}, w = \frac{u_z}{R_0} \\ \sigma_r &= \frac{\sigma_{rr}}{2\mu}, \sigma_z = \frac{\sigma_{zz}}{2\mu} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\sigma_{r\theta}}{\mu}, \tau_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{\mu}, \tau_{\theta z} = \frac{\sigma_{\theta z}}{\mu} \end{aligned} \quad (5.43)$$

これらの結果は表 5.1の通り。\$\Phi\$から導かれる解を [1]、\$\Psi_a\$から導かれる解を [2]、\$\Psi_b\$から導かれる解を [3] としよう。

無次元化して方程式を解いたため弾性を表す定数としては無次元量である Poisson Ratio \$\nu\$しかでてこない。この表に関するいくつかの注意を述べる。式 (5.28)(5.29)(5.30)(5.31)をみると \$\theta\$依存性は 2 種類あるがこの表では 1 つしかない。実は括弧の下の方を採用した。これは \$\theta = 0\$ をどの方向にとるかという任意性の問題で一般性を失うものではない⁸。\$z\$依

⁷ \$\mu\$は、ずれ弾性率である。

⁸ しかしながら \$n = 0\$ のときに \$\Psi_3\$は恒等的に 0 になってしまう。このときには括弧の上を採用する。しかしながらこのモードは軸対称なねじれモードであり、変位の \$z\$成分は 0 なので熱雑音を調べる上では興味のあるモードではない。詳細は後述。

表 5.1: 弾性体波動方程式の解

	[1]	[2]	[3]
u	$2\alpha J'_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\delta z) \\ \sin(\delta z) \end{array} \right\} \cos(n\theta)$	$-\alpha \beta J'_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\beta z) \\ \sin(\beta z) \end{array} \right\} \cos(n\theta)$	$-\frac{n}{r} J_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\beta z) \\ \sin(\beta z) \end{array} \right\} \cos(n\theta)$
v	$-\frac{2n}{r} J_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\delta z) \\ \sin(\delta z) \end{array} \right\} \sin(n\theta)$	$\frac{\beta n}{r} J_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\beta z) \\ \sin(\beta z) \end{array} \right\} \sin(n\theta)$	$\alpha J'_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\beta z) \\ \sin(\beta z) \end{array} \right\} \sin(n\theta)$
w	$2\delta J_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\delta z) \\ \cos(\delta z) \end{array} \right\} \cos(n\theta)$	$\alpha^2 J_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\beta z) \\ \cos(\beta z) \end{array} \right\} \cos(n\theta)$	0
σ_r	$\frac{2J_n(\alpha r)}{r^2} \left[(n^2 - 1) + \frac{r^2}{2} (2\delta^2 - \omega^2) \right. \\ \left. - \psi_n(\alpha r) \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos(\delta z) \\ \sin(\delta z) \end{array} \right\} \cos(n\theta)$	$-\frac{\beta}{r^2} J_n(\alpha r) \left[(n^2 - 1) - (\alpha r)^2 \right. \\ \left. - \psi_n(\alpha r) \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos(\delta z) \\ \sin(\delta z) \end{array} \right\} \cos(n\theta)$	$-\frac{n}{r^2} J_n(\alpha r) \psi(\alpha r) \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos(\beta z) \\ \sin(\beta z) \end{array} \right\} \cos(n\theta)$
σ_z	$(2\alpha^2 - \omega^2) J_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\delta z) \\ \sin(\delta z) \end{array} \right\} \cos(n\theta)$	$-\alpha^2 \beta J_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\beta z) \\ \sin(\beta z) \end{array} \right\} \cos(n\theta)$	0
$\tau_{r\theta}$	$-\frac{4n}{r^2} J_n(\alpha r) \psi_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\delta z) \\ \sin(\delta z) \end{array} \right\} \sin(n\theta)$	$\frac{2n\beta}{r^2} J_n(\alpha r) \psi_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\beta z) \\ \sin(\beta z) \end{array} \right\} \sin(n\theta)$	$\frac{2}{r^2} J_n(\alpha r) \left[(n^2 - 1) - \frac{(\alpha r)^2}{2} \right. \\ \left. - \psi_n(\alpha r) \right] \left\{ \begin{array}{l} \cos(\beta z) \\ \sin(\beta z) \end{array} \right\} \sin(n\theta)$
τ_{rz}	$4\alpha \delta J'_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\delta z) \\ \cos(\delta z) \end{array} \right\} \cos(n\theta)$	$\alpha(\alpha^2 - \beta^2) J'_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\beta z) \\ \cos(\beta z) \end{array} \right\} \cos(n\theta)$	$-\frac{n\beta}{r} J_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\beta z) \\ \cos(\beta z) \end{array} \right\} \cos(n\theta)$
$\tau_{\theta z}$	$-\frac{4\delta n}{r} J_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\delta z) \\ \cos(\delta z) \end{array} \right\} \sin(n\theta)$	$-(\alpha^2 - \beta^2) \frac{n}{r} J_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\beta z) \\ \cos(\beta z) \end{array} \right\} \sin(n\theta)$	$\beta \alpha J'_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\beta z) \\ \cos(\beta z) \end{array} \right\} \sin(n\theta)$

存性も 2 種類ある。括弧の上の方は $z = 0$ の面に対して r, θ 成分が対称であり、 z 成分が反対称である。これらのモードを even mode もしくは parity が even な mode と呼ぶ。括弧の下はその反対で odd mode と呼ぶ。また式 (5.32)(5.33)(5.34) において表記を簡単にするため、 $\alpha, \hat{\alpha}, \bar{\alpha}$ を全て α に、 β, γ を全て β に統一する。さらに $\lambda = c_t/c_l$ と式 (5.10)(5.11) より

$$\alpha^2 + \delta^2 = \omega^2 \left[\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \right] \quad (5.44)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \omega^2 \quad (5.45)$$

という関係式がそれぞれの基底に関して成り立つ。また

$$\psi_n(x) = x \frac{J_{n-1}(x)}{J_n(x)} - (n + 1) \quad (5.46)$$

であり、

$$J'_n(x) = \frac{dJ_n(x)}{dx} \quad (5.47)$$

である。

この表は円柱弾性体の波動方程式の円柱座標における一般解の基底である。よって任意の解はこの線形結合で表される。

5.3.2 Hutchinson's Simulation

弾性体の波動方程式とその解の説明が終わったので Hutchinson's Simulation の説明を行なう。

まず表 (5.1) を見てみよう。[1] は縦波、[2][3] は横波を表している。これらはもちろん基底をなすわけであるが Hutchinson はこれらの線形結合を基底として採用している。

$$[A] = D_1 \times \{[1] \text{ の } \alpha \text{ と } \delta \text{ を交換したもの}\} + D_2 \times \{[2] \text{ の } \alpha \text{ と } \beta \text{ を交換したもの}\} \quad (5.48)$$

$$[B] = D_3 \times \{[1]\} + D_4 \times \{[2]\} \quad (5.49)$$

$$[C] = D_5 \times \{[3] \text{ の } \alpha \text{ と } \beta \text{ を交換したもの}\} + D_6 \times \{[1] \text{ の } \alpha \text{ と } \delta \text{ を交換したもの}\} \quad (5.50)$$

ここで α と β の交換、 α と δ の交換を行なっているが式 (5.44)(5.45) が成立すればよいのでこの交換は記号の置き換えにすぎないことに注意。またこの段階では $D_1 \sim D_6$ はまだ任意である。

具体的な形を見てみよう。変位ベクトルの規格化された r 成分 u について見てみると

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} A_i u_{A_i} + \sum_{j=1}^{\infty} B_j u_{B_j} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k u_{C_k} \quad (5.51)$$

と基底分解出来る。基底はそれぞれ以下の通り。

$$u_A = [D_1 2\delta J'_n(\delta r) - D_2 \alpha \beta J'_n(\beta r)] \begin{Bmatrix} \cos(\alpha z) \\ \sin(\alpha z) \end{Bmatrix} \cos(n\theta) \quad (5.52)$$

$$u_B = \left[D_3 2\alpha \begin{Bmatrix} \cos(\delta z) \\ \sin(\delta z) \end{Bmatrix} - D_4 \alpha \beta \begin{Bmatrix} \cos(\beta z) \\ \sin(\beta z) \end{Bmatrix} \right] J'_n(\alpha r) \cos(n\theta) \quad (5.53)$$

$$u_C = \left[-D_5 \frac{n}{r} J_n(\beta r) - D_6 2\delta J'_n(\delta r) \right] \begin{Bmatrix} \cos(\alpha z) \\ \sin(\alpha z) \end{Bmatrix} \cos(n\theta) \quad (5.54)$$

ここで注意することは $A, B, C, D_1 \sim D_6$ には本来添字 i, j, k が、 α, β, γ には添字 A_i, B_j, C_k がつくことである。表記を簡単にするため省略した。変位ベクトルの他の成分や応力テンソルについても同様に基底 $[A][B][C]$ を作る。

ここで境界条件を課す。境界条件は円柱の表面には一切応力がかからないということである⁹。境界条件を具体的に式で表すと¹⁰

$$\tau_{rz}(r, \theta, h) = 0 \quad (5.55)$$

$$\tau_{rz}(1, \theta, z) = 0 \quad (5.56)$$

$$\tau_{\theta z}(r, \theta, h) = 0 \quad (5.57)$$

$$\sigma_r(1, \theta, z) = 0 \quad (5.58)$$

$$\sigma_z(r, \theta, h) = 0 \quad (5.59)$$

$$\tau_{r\theta}(1, \theta, z) = 0 \quad (5.60)$$

⁹実際の重力波検出器においては鏡はワイヤーで吊るされ、磁石もつけられるので厳密にいうとこの境界条件は成立しないがこれらの影響はほとんど無視出来る。

¹⁰ $0 \leq r \leq 1, -h \leq z \leq h$ であったことに注意。

となる。

まず最初の3つの境界条件について考える。次のような条件を課す。

$$h\alpha_{A_i} = h\alpha_{C_k} = \begin{cases} (i-1)\pi & \text{for even mode} \\ \frac{(2i-1)\pi}{2} & \text{for odd mode} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.61)$$

$$J'_n(\alpha_{B_j}) = 0 \quad (5.62)$$

式(5.61)より $\alpha_{A_i} = \alpha_{C_k}$ となるので今後は α_{C_k} を α_{A_i} と書く。 $\beta_{C_k}, \delta_{C_k}$ も同様である。また式(5.61)より式(5.55)(5.57)において[A][C]の寄与は0になる。一方式(5.56)においては[B]の寄与が0になる。よって

- 式(5.55)(5.57)において[B]の寄与が0
- 式(5.56)において[A][C]の寄与が0

となればよい。これらの条件を満たすように $D_1 \sim D_6$ を決定する。しかしながら定数倍だけの任意性が残る。そこで後の計算がやりやすいように決めてしまう。結果は以下のようになる。

$$D_1 = \frac{\beta_A(\beta_A^2 - \alpha_A^2)J'_n(\beta_A)}{(\beta_A\delta_A)^n \left\{ \frac{\cos(\alpha_A h)}{\sin(\alpha_A h)} \right\}} \quad (5.63)$$

$$D_2 = \frac{-4\alpha_A\delta_A J'_n(\delta_A)}{(\beta_A\delta_A)^n \left\{ \frac{\cos(\alpha_A h)}{\sin(\alpha_A h)} \right\}} \quad (5.64)$$

$$D_3 = (\alpha_B^2 - \beta_B^2) \left\{ \frac{\sin(\beta_B h)/\beta_B}{\cos(\beta_B h)/\delta_B} \right\} \frac{1}{J_n(\alpha_B)} \quad (5.65)$$

$$D_4 = -4 \left\{ \frac{\delta_B \sin(\delta_B h)/\beta_B}{\cos(\delta_B h)} \right\} \frac{1}{J_n(\alpha_B)} \quad (5.66)$$

$$D_5 = \frac{4\delta_A J'_n(\delta_A)}{(\beta_A\delta_A)^n \left\{ \frac{\cos(\alpha_A h)}{\sin(\alpha_A h)} \right\}} \quad (5.67)$$

$$D_6 = \frac{nJ_n(\beta_A)}{(\beta_A\delta_A)^n \left\{ \frac{\cos(\alpha_A h)}{\sin(\alpha_A h)} \right\}} \quad (5.68)$$

ここで状況を振り返ってみよう。まず6つの境界条件のうち3つを考慮した結果 $D_1 \sim D_6$ が決定された。また α_A, α_B も決定された。式(5.44)(5.45)よりあと ω が決定されれば基底関数の形は決定される。そしてさらに基底関数の係数 A_i, B_j, C_i が決定されれば問題は解決である。またここまで何ら近似を用いていないことにも注意。

ここで近似を行なう。それは本来は基底は無限にあるが、波数の小さい基底関数のみを考慮する。基底[A],[C]は波数の小さい方から NZ 個、基底[B]は波数の小さい方から

NZ 個採用する。 u を基底関数で表した (5.51) では基底関数を無限個足しているが、この近似を採用すると

$$u = \sum_{i=1}^{NZ} A_i u_{A_i} + \sum_{j=1}^{NR} B_j u_{B_j} + \sum_{k=1}^{NZ} C_k u_{C_k} \quad (5.69)$$

となる。波数の小さい、つまり波長の短い基底関数を切り捨てるので周波数が高くなるとこの近似が成り立たなくなると予想される。 α_A, α_B の定義から考えるとこの近似は波長が円柱の高さが約 $1/NZ$ 倍以上の基底関数と波長が円柱の直径の約 $1/NR$ 倍以上の基底関数だけを考慮していることになる。

さて残りの境界条件 (5.58)(5.59)(5.60) を考慮しよう。まず境界条件 (5.58) から考える。この式から以下の式が成立する。

$$\int_0^h \sigma_r(1, \theta, z) \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_{A_i} z) \\ \sin(\alpha_{A_i} z) \end{Bmatrix} dz = 0 \quad (5.70)$$

定数倍を無視すれば $\sigma_r(1, \theta, z)$ の Fourier 展開である。ここで近似によって $i = 1 \sim NZ$ のみを考慮することを注意すると式 (5.70) は次のような式になる。

$$a_i A_i + \sum_{j=1}^{NR} b_{ij} B_j + c_i C_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots, NZ \quad (5.71)$$

但し

$$a_i = 2hJP(\beta_A)JB(\delta_A)(\beta_A^2 - \alpha_A^2) \left[(n^2 - 1) + \frac{(2\alpha_A^2 - \omega^2)}{2} - \psi_n(\delta_A) \right] \\ + 4hJP(\delta_A)JB(\beta_A)\alpha_A^2 [(n^2 - 1) - \beta_A^2 - \psi_n(\beta_A)] \quad (5.72)$$

$$b_{ij} = 4 \left[(\alpha_B^2 - \beta_B^2) \frac{n^2 + \frac{2\delta_B^2 - \omega^2}{2}}{\delta_B^2 - \alpha_A^2} + \frac{2(n^2 - \alpha_B^2)\beta_B^2}{\beta_B^2 - \alpha_A^2} \right] \\ \begin{Bmatrix} (\delta_B h)^2 SN(\delta_B h) SN(\beta_B h) \\ -\cos(\beta_B h) \cos(\delta_B h) \end{Bmatrix} \quad (5.73)$$

$$c_i = 2hnJB(\beta_A) \left[-2JP(\delta_A)\psi_n(\beta_A) \right. \\ \left. + JB(\delta_A) \left(n^2 - 1 + \frac{2\alpha_A^2 - \omega^2}{2} - \psi_n(\delta_A) \right) \right] \quad (5.74)$$

式 (5.70) から式 (5.71) と変形するときには even mode のときには $2 \cos(\alpha_{A_i} h)$ をかけ、odd mode のときには $2 \sin(\alpha_{A_i} h)$ をかけている。さらに even mode のときには $\cos^2(\alpha_{A_i} h) = 1$ が成立し、odd mode のときには $\sin^2(\alpha_{A_i} h) = 1$ が成立すること、さらに $\psi_n(\alpha_{B_j}) = -1$ であること¹¹にも注意。また $\alpha_A = 0$ (even mode で $i = 1$) のときには a_1, c_1 はこの表式の 2

¹¹証明は [58]。

倍にしなくてはならない¹²。それは以下の式が成り立つからである。

$$\int_0^h \cos^2(\alpha_{A_i} z) dz = \begin{cases} \frac{h}{2} & \alpha_{A_i} \neq 0 \\ h & \alpha_{A_i} = 0 \end{cases} \quad (5.75)$$

新しくでてきた関数の定義は以下の通りである。

$$JB(x) = \frac{J_n(x)}{x^n} \quad (5.76)$$

$$JP(x) = \frac{J'_n(x)}{x^{n-1}} \quad (5.77)$$

$$SN(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (5.78)$$

ここで気をつけることがある。 α は式(5.61)(5.62)より明らかに実数である。もちろん ω も実数である。すると式(5.44)(5.45)より β, δ は純虚数になることもある。そのとき上記の関数は以下ようになる。但し x は実数。

$$JB(ix) = \frac{I_n(x)}{x^n} \quad (5.79)$$

$$JP(ix) = \frac{I'_n(x)}{x^{n-1}} \quad (5.80)$$

$$SN(ix) = \frac{\sinh(x)}{x} \quad (5.81)$$

$I_n(x)$ は変形 Bessel 関数で、

$$I_n(x) = \exp\left(-\frac{i\pi n}{2}\right) J_n(ix) \quad (5.82)$$

である。ここでも x は実数。また $x = 0$ の見かけ上の特異点は以下の値を定義して除去可能である。

$$JB(0) = \frac{1}{2^n n!} \quad (5.83)$$

$$JP(0) = \begin{cases} \frac{1}{2^n (n-1)!} & (n \neq 0) \\ 0 & (n = 0) \end{cases} \quad (5.84)$$

$$SN(0) = 1 \quad (5.85)$$

次に境界条件(5.59)を考える。この式から以下の式が成立する。

$$\int_0^1 \sigma_z(r, \theta, h) r J_n(\alpha_{B_j}) dr = 0 \quad (5.86)$$

¹²なぜか[49]にはこのことはふれられていない!! また筆者はかつてこのとき $D_1 \sim D_6$ の表式の変更が必要としたが実はその必要はない。

一見すると定数倍を無視すれば $\sigma_r(1, \theta, z)$ の Fourier-Bessel 展開に見えるが違う。Fourier-Bessel 展開では $J_n(\alpha_{B_j}) = 0$ であるがここでは $J'_n(\alpha_{B_j}) = 0$ だからである。ここで近似によって $j = 1 \sim NR$ のみを考慮することに注意すると式 (5.86) は次のような式になる。

$$\sum_{i=1}^{NZ} \bar{a}_{ji} A_i + \bar{b}_j + \sum_{i=1}^{NZ} \bar{c}_{ji} C_i = 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, NR \quad (5.87)$$

但し

$$\bar{a}_{ji} = 2JP(\beta_A)JP(\delta_A) \left[\frac{(\beta_A^2 - \alpha_A^2)(2\delta_A^2 - \omega^2)}{\alpha_B^2 - \delta_A^2} + \frac{4\alpha_A^2\beta_A^2}{\alpha_B^2 - \beta_A^2} \right] \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_j = h \frac{\alpha_B^2 - n^2}{\alpha_B^2} \left[(\alpha_B^2 - \beta_B^2)^2 \left\{ \begin{array}{l} SN(\beta_B h) \cos(\delta_B h) \\ SN(\delta_B h) \cos(\beta_B h) \end{array} \right\} \right. \\ \left. + 4\alpha_B^2 \left\{ \begin{array}{l} \delta_B^2 SN(\delta_B h) \cos(\beta_B h) \\ \beta_B^2 SN(\beta_B h) \cos(\delta_B h) \end{array} \right\} \right] \quad (5.89) \end{aligned}$$

$$\bar{c}_{ji} = 2nJB(\beta_A)JP(\delta_A) \frac{2\delta_A^2 - \omega^2}{\alpha_B^2 - \delta_A^2} \quad (5.90)$$

$n = 0$ のとき $\alpha_B = 0$ ということがある。そのときは \bar{b}_j の $(\alpha_B^2 - n^2)/\alpha_B^2$ は1とおけばよい。式 (5.86) から式 (5.87) と変形するとき $2/J_n(\alpha_{B_i})$ をかけている。さらに式 (5.45) から $2\alpha^2 - \omega^2 = \alpha^2 - \beta^2$ であることにも注意。また計算するとき以下の公式を使うと便利である¹³。

$$\int_0^1 J_n(\alpha x) J_n(\beta x) x dx = 0 \quad [\alpha, \beta \text{は } J'_n(x) \text{の零点}] \quad (5.91)$$

$$\int_0^1 [J_n(\alpha x)]^2 x dx = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J_n^2(\alpha) \right] \quad [\alpha \text{は } J'_n(x) \text{の零点}] \quad (5.92)$$

$$\int_0^1 J_n(\alpha x) J_n(\beta x) x dx = \frac{\beta J_n(\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2} J'_n(\beta) \quad [\alpha \text{は } J'_n(x) \text{の零点。} \beta \text{は任意。}] \quad (5.93)$$

最後に境界条件 (5.60) を考える。この式から以下の式が成立する。

$$\int_0^h \tau_{r\theta}(1, \theta, z) \left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha_{A_i} z) \\ \sin(\alpha_{A_i} z) \end{array} \right\} dz = 0 \quad (5.94)$$

定数倍を無視すれば $\tau_{r\theta}(1, \theta, z)$ の Fourier 展開である。ここで近似によって $i = 1 \sim NZ$ のみを考慮することに注意すると (5.94) は次のような式になる。

$$\hat{a}_i A_i + \sum_{j=1}^{NR} \hat{b}_{ij} B_j + \hat{c}_i C_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots, NR \quad (5.95)$$

¹³証明は [58]。

但し

$$\hat{a}_i = -2hnJP(\beta_A)JB(\delta_A)\psi_n(\delta_A)(\beta_A^2 - \alpha_A^2) - 4hnJP(\delta_A)JB(\beta_A)\psi_n(\beta_A)\alpha_A^2 \quad (5.96)$$

$$\hat{b}_{ij} = 4n \left[\frac{\alpha_B^2 - \beta_B^2}{\delta_B^2 - \alpha_A^2} + \frac{2\beta_B^2}{\beta_B^2 - \alpha_A^2} \right] \left\{ \begin{array}{l} (\delta_B h)^2 SN(\delta_B h) SN(\beta_B h) \\ - \cos(\beta_B h) \cos(\delta_B h) \end{array} \right\} \quad (5.97)$$

$$\hat{c}_i = 2hJB(\beta_A) \left[2JP(\delta_A) \left\{ (n^2 - 1) - \frac{\beta_A^2}{2} - \psi_n(\beta_A) \right\} - n^2 JB(\delta_A) \psi(\delta_A) \right] \quad (5.98)$$

式 (5.94) から式 (5.95) と変形するとき even mode のときには $\cos(\alpha_{A_i} h)$ をかけ、odd mode のときには $\sin(\alpha_{A_i} h)$ をかけている。さらに even mode のときには $\cos^2(\alpha_{A_i} h) = 1$ が成立し、odd mode のときには $\sin^2(\alpha_{A_i} h) = 1$ が成立すること、さらに $\psi_n(\alpha_{B_j}) = -1$ であることにも注意。このときも (5.75) より $\alpha_A = 0$ (even mode で $i = 1$) のとき \hat{a}_1, \hat{c}_1 は上の表式を 2 倍にしなければならない。

式 (5.71)(5.87)(5.95) を行列の形で書くことができる。

$$\begin{pmatrix} [a] & [b] & [c] \\ [\bar{a}] & [\bar{b}] & [\bar{c}] \\ [\hat{a}] & [\hat{b}] & [\hat{c}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{A\} \\ \{B\} \\ \{C\} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.99)$$

[] は対角行列を表す。式 (5.99) の行列のサイズは $(2NZ + NR) \times (2NZ + NR)$ である。自明でない解が存在するのはこの行列の行列式が 0 の時のみである。ここでこの行列を少し変形する。1 番下の行に注目すると

$$\{C\} = -[\hat{c}]^{-1} [[\hat{a}]\{A\} + [\hat{b}]\{B\}] \quad (5.100)$$

これを用いて他の 2 式から $\{C\}$ を消去すると

$$[a^*]\{A\} + [b^*]\{B\} = 0 \quad (5.101)$$

$$[\hat{a}^*]\{A\} + [\hat{b}^*]\{B\} = 0 \quad (5.102)$$

但し

$$[a^*] = [a] - [c][\hat{c}]^{-1}[\hat{a}] \quad (5.103)$$

$$[\bar{a}^*] = [\bar{a}] - [\bar{c}][\hat{c}]^{-1}[\hat{a}] \quad (5.104)$$

$$[b^*] = [b] - [c][\hat{c}]^{-1}[\hat{b}] \quad (5.105)$$

$$[\bar{b}^*] = [\bar{b}] - [\bar{c}][\hat{c}]^{-1}[\hat{b}] \quad (5.106)$$

式 (5.101) より

$$\{A\} = -[a^*]^{-1}[b^*]\{B\} \quad (5.107)$$

これを式 (5.102) に代入して $\{A\}$ を消去すると

$$[d]\{B\} = 0 \quad (5.108)$$

但し

$$[d] = [\bar{b}^*] - [\bar{a}^*][a^*]^{-1}[b^*] \quad (5.109)$$

$[d]$ のサイズは $(NR \times NR)$ である。 $[d]$ の行列式が 0 の時のみ $\{B\}$ は自明でない解を持つ。 $[d]$ の行列式は h, ν, n, parity を決めてしまえば ω のみの関数であるので行列式を 0 とする ω を見つければよい。 ω が決まれば定数倍を除き $\{B\}$ が決定されさらに式 (5.107)(5.100) より $\{A\}, \{C\}$ も決定される。周波数と基底関数の係数が決まったので解が求められたということになる。

さてなぜ Hutchinson は式 (5.99) の行列式の零点を探すのではなく、さらに計算した $[d]$ の行列式の零点を探そうとしたのであろうか。おそらく行列のサイズを小さくして行列式を求める計算の負担を軽減したかったのだと思われる。しかし行列のサイズをコンパクトにするための計算はそれなりに煩雑である。しかも行列式の計算の速度はサイズにそれほど依存しないこと、さらに後述するがこの計算によって余計な特異点が生じることから、結局式 (5.99) の行列の行列式の零点を 2 分法で探すことにした。

5.3.3 省くべき零点

Hutchinson's Simulation はある ω の関数である行列式の零点を求める方法である。しかしながら行列式が 0 になってもそれは興味ある解ではないこともある。ここではそのような除去すべき零点について述べる。それは基底の縮退とねじれのモードの 2 つである。

基底の縮退

基底の縮退という現象が次のような場合に起こる。

1. $\alpha_{A_i} = \delta_{B_j}$ かつ $\alpha_{B_j} = \delta_{A_i}$
2. $\alpha_{A_i} = \beta_{B_j}$ かつ $\alpha_{B_j} = \beta_{A_i}$
3. $\beta_{A_i} = 0$

まず 1 の場合を見てみよう。このとき $D_2 = D_4 = 0$ となる。そして基底 $[A]$ の第 i 番目の項と基底 $[B]$ の第 j 番目の項が同じものになる。つまり基底関数を選んだら同じものが 2 つあったということである。さらに 2 では $D_1 = D_3 = 0$ となって基底 $[A]$ の第 i 番目の項と基底 $[B]$ の第 j 番目の項が同じものになる。1 の時は

$$\omega = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \sqrt{\alpha_{A_i}^2 + \alpha_{B_j}^2} \quad (5.110)$$

となり2のときは

$$\omega = \sqrt{\alpha_{A_i}^2 + \alpha_{B_j}^2} \quad (5.111)$$

である。基底関数が縮退してしまったので式 (5.99) の行列ではある列は別のある列の定数倍だけ違うことになる。当然この時には行列式は0になる。Hutchinson 自身は行列要素 $b_{ij}, \bar{a}_{ij}, \bar{c}_{ij}, \hat{b}_{ij}$ が 1,2 のとき発散するので解ではないと判断した [47]。しかしながらこの発散は見かけ上のもので (0/0 の形になる) 有限の極限を持つことを Rasband が指摘している [48]。よって Hutchinson の考えた理由は基底が縮退を起こしたことによる零点を省く理由としては適切でない。しかしながらその零点は物理的な意味を持つものかは吟味する必要はある。

3 のときには基底 [A] の第 i 番目の項と基底 [C] の第 i 番目の項が縮退を起こす。これは基底 [A] の第 i 番目の項の第 2 項 $D_2 \times [2]$ と基底 [C] の第 i 番目の項の第 1 項 $D_5 \times [3]$ が定数倍だけ違う形になってしまうからである。そして境界条件 (5.56) を満たすようにすることを考えると基底 [A] の第 i 番目の項と基底 [C] の第 i 番目の項の違いは定数倍だけになってしまう。このとき

$$\omega = \alpha_A = \begin{cases} \frac{(i-1)\pi}{h} & \text{for even mode} \\ \frac{(2i-1)\pi}{2h} & \text{for odd mode} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.112)$$

Hutchinson はこの縮退に気づいていないようである。というのは [49] の $n = 4$ のときの Aspect Ratio と共鳴周波数の関係を表した $h - \omega$ グラフにおいて線の結び方がかなり変であり、しかも線の右下がりの部分は正しく基底の縮退にあっているからである。しかしこの場合の縮退は先ほどのように $[d]$ を求めてその行列式の零点を探すという方法をとると $[d]$ の行列式の特異点になるので ($[a^*]$ の零点に相当するため) 2 分法で解を探す時特異点を除去してやればこの縮退も一緒に除去される¹⁴。

縮退によって行列式が 0 になったわけであるので解とは断言できない。では解でないと断言できるだろうか。 $h - \omega$ グラフにおいて基底の縮退による零点もプロットするとこれは時々真の解の曲線と交差する。この点においては解であることは間違いない。しかしながら他の点においては解ではないのだろう。基底の縮退と真の解が完全に追従することは考えにくいからである。しかしながら完全に解でないということを証明するには新しく基底をとり直してきちんと計算しなおす必要がある。もっとも簡単な基底のとり直し方は縮退してしまった基底だけを変更するというやり方である。しかしながらこの方法はかなり難しい。まず 1 の場合を考える。このとき式 (5.44)(5.45)(5.110) から以下の条件を満たす α, β, δ を探す。

$$\alpha^2 + \delta^2 = \alpha_{A_i}^2 + \alpha_{B_j}^2 \quad (5.113)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} (\alpha_{A_i}^2 + \alpha_{B_j}^2) \quad (5.114)$$

¹⁴しかしそうすると Hutchinson 自身は $[d]$ を求めず式 (5.99) の行列の行列式の零点を探したか、特異点を省くのをもともと忘れていたかのいずれかになるが。

もちろんこれらの波数を代入して作られた基底が境界条件 (5.55)~(5.57) を満たさなくてはならない。もっとも簡単な解は $\alpha = \alpha_{B_j}, \delta = \alpha_{A_i}$ というものである。しかしこれは 1 のケースで縮退した基底そのものであり、だめである。これ以外の解を一般的に見つける方法を探すのはたとえそのような方法が存在してもかなり難しいであろう。

2 の場合には以下の条件と境界条件 (5.55)~(5.57) を満たす α, β, δ を探さなくてはならない。

$$\alpha^2 + \delta^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} (\alpha_{A_i}^2 + \alpha_{B_j}^2) \quad (5.115)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha_{A_i}^2 + \alpha_{B_j}^2 \quad (5.116)$$

もっとも簡単な解は $\alpha = \alpha_{B_j}, \beta = \alpha_{A_i}$ だが境界条件 (5.55)~(5.57) を満たすものをさがした結果 2 のケースで縮退した基底そのものが基底 [C] の第 i 番目の基底だけしかない。一般的な方法を探すのもやはり難しいであろう。

3 の場合には以下の条件と境界条件 (5.55)~(5.57) を満たす α, β, δ を探さなくてはならない。

$$\alpha^2 + \delta^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \alpha_{A_i}^2 \quad (5.117)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha_{A_i}^2 \quad (5.118)$$

もっとも簡単な解は $\alpha = 0, \beta = \alpha_{A_i}$ だが境界条件 (5.55)~(5.57) を満たすものをさがした結果 3 のケースで縮退した基底そのものしかしかない。一般的な方法を探すのもやはり難しいであろう。

1995 年度の坪野研特別実験 II において竹田、寺嶋はかなり試行を続けたようだがやはり見つけることは出来なかった [62]。よって縮退した基底関数だけに変更を加えて基底を取り直すことはかなり難しい。もちろん別の基底を取り直すのもさらに難しい¹⁵。

結局かなり難しい作業であるので基底を取り直して本当に解でないかどうかは確認はしていない。しかしながらよほどの偶然でもないかぎり基底の縮退が常に解とは考えにくいので基底の縮退は解として扱わないことにした。この場合たまたま基底の縮退が解であった時困るわけであるが Aspect Ratio や Poisson Ratio を少しかえて計算してチェックを行えばよい。

¹⁵Rasband が別の基底を取っている [48]。

ねじれのモード

$n = 0$ のときに (5.99) は次のようになる (そのときに表 5.1 の基底 [3] の \sin, \cos を交換すること。そうでないと [3] は恒等的に 0 になってしまう。)。

$$\begin{pmatrix} [a] & [b] & 0 \\ [\bar{a}] & [\bar{b}] & 0 \\ 0 & 0 & [\hat{c}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{A\} \\ \{B\} \\ \{C\} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.119)$$

$[\hat{c}]$ が対角行列だということに気をつけるとこの行列の対角成分のいずれかが 0 になれば $\{A\} = \{B\} = 0, \{C\} \neq 0$ の自明でない解が存在する。しかしこのモードは変位ベクトルは θ 成分しかなく (つまり軸対称なねじれのモード) 重力波検出器の雑音にはならない。この解は除くことにする。このねじれのモードはどのようなときにおこるだろうか。 \hat{c}_i の $n = 0$ の場合を計算して整理すると

$$\hat{c}_i = 2hJP(\delta_{A_i})\beta_{A_i}^2 J_2(\beta_{A_i}) \quad (5.120)$$

である。なおこの計算を行なう時には次の公式を使うと良い。

$$\frac{1}{2}x^2 J_2(x) + \frac{x^2}{2} J_0(x) - x J_1(x) = 0 \quad (5.121)$$

式 (5.120) が 0 になるのは $\delta_A = \alpha_B, \beta_A = 0$ の様な基底の縮退を除くと

$$J_2(\beta_{A_i}) = 0 \quad (5.122)$$

である。

5.4 Hutchinson's Simulation の検証

Hutchinson's Simulation をもとにプログラムを開発したわけであるが、このプログラムに関する検証が必要である。

- プログラムがきちんと Hutchinson's Simulation を実行するか。
- Hutchinson's Simulation は正しいのか。

という 2 通りの検証が考えられる。

5.4.1 プログラムがきちんと Hutchinson's Simulation を実行するか

これを確認するには

- Hutchinson の出した結果と比較する。
- LIGO, VIRGO でもプログラムがあるのでそれとの比較を行なう。

の2つがある。後者は後ほど述べる。

前者に関しては詳細は寺嶋のレポート [62] を参照のこと。Hutchinson の論文 [49] には $n = 0 \sim 4$ の場合の $h - \omega$ のグラフ ($0 \leq h \leq 2, 0 \leq \omega \leq 5$) が出ているので、それと開発したプログラムの結果を [62] では比較している。その結果ほぼ一致した。ところどころ線が切れている部分があるがこれは基底の縮退がおこって切れたものである。また線が途中で終わっているものもあるが、これは2分法で探す時のメッシュが粗かったものと思われる。事実メッシュを細かくしてさがしたところ見つかった。 $n = 4$ に関しては [49] では線の結び方が変であるが先ほども述べたように右下がりの曲線は基底の縮退を表すので除去した。これにより線の結び方の不自然さがなくなった。

5.4.2 Hutchinson's Simulation は正しいのか

これは実際に共鳴周波数を測定して比較を行なう。Hutchinson は McMahon の実験結果 [46] と一致することを確認している [49]。坪野研でも Aluminum や Fused Silica の円柱の共鳴周波数と Q 値の測定が行なわれている。TAMA では Fused Silica が用いられるので Fused Silica の測定周波数と比較を行なう。Aluminum の測定値との比較については [62] を参照¹⁶。

実験の概要

図 5.2 に実験装置の図を示す。

鏡を励起する周波数を変えていき、その表面振動を lock のかかった Michelson 干渉計で測定しながら、共鳴周波数を探すというのがおおまかな原理である。鏡はタングステンワイヤーで懸架されている。鏡の裏面には小さな磁石がはりつけられており、コイルがかぶさっている。このコイルに信号を返すことによって鏡は制御、励起される。制御は Michelson 干渉計の出力信号をフィルター、ドライバーを介したものを使用する。

基本的には鏡の Q 値を測定する装置と同じであるので詳細は [75] を参照のこと。しかし共鳴周波数だけを測定するならば Q 値を測定するときより注意深く実験を行なう必要はない。筆者が行なった実験は鏡は空気中にさらされていて、側面は研磨されていない。一方 [75] では側面は表面研磨され、鏡は真空中にある。

¹⁶結果はよく一致している。

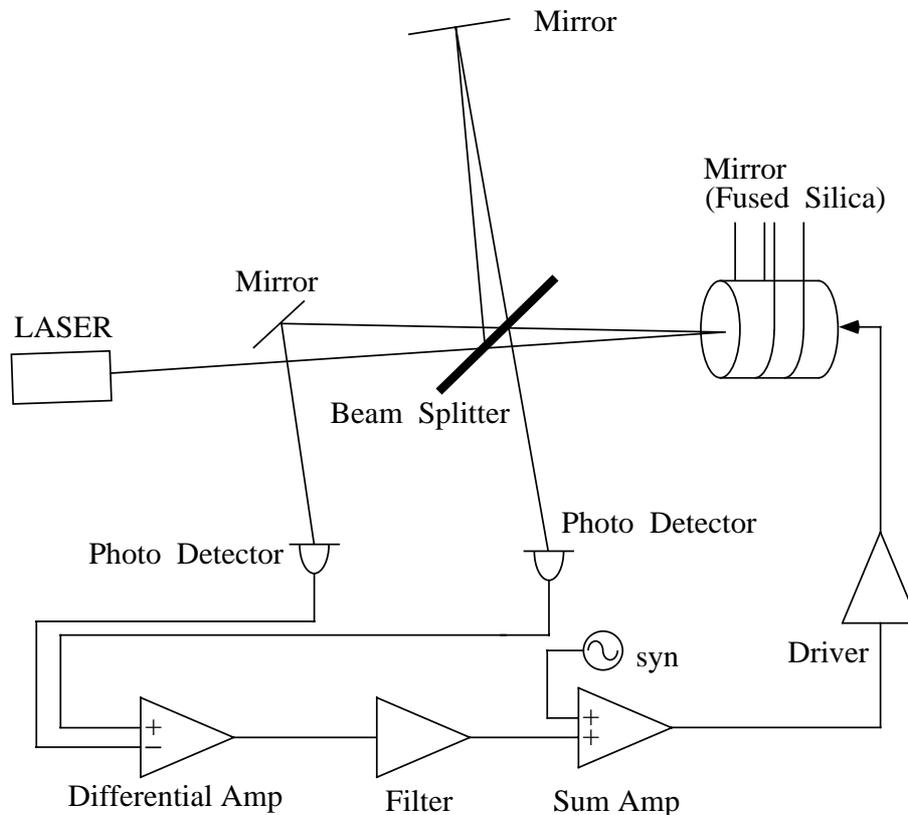


図 5.2: 共鳴周波数を測定するための干渉計

磁石は鏡の中心につけておいたので $n = 0$ のモードしか励起しないはずであるが若干のずれは存在するはずなので $n > 0$ のモードも励起される。それらのモードの order を判別するにはどのようにしたらよいであろうか。

ここでは以下のような方法をとった。まずビームが当たる場所はわざと中心から右ないしは左にずらす。differential amp から信号を取り Band Pass Filter を通して、lock-in amp に入力する。参照信号としては synthesizer の出力を用いる。これにより鏡の表面と synthesizer の位相差を測定することができる。次にビームの当たる位置を中心からみて先ほどの位置と反対側に移動させる。そして位相差を再び測定する。 $n = 1$ なら位相差が π ずれる。 $n = 2$ なら位相差は同じである。このようにしてある程度 order の判別が可能になる。

実験結果と計算値との比較

坪野研究室の 1995 年度の特別実験 I では尾田欣也と成田哲博によって真空中における Fused Silica(信越石英,SUPRASIL-P30,透明石英ガラス)の円柱の共鳴周波数と Q 値が測

定されている [59, 60]。仕様は表 5.2のとおり (カタログ値である)。これは TAMA300 で使われる鏡 (SUPRASIL-P10) と同材質、同サイズである。

表 5.2: Fused Silica(SUPRASIL-P30) の仕様

Height	6cm
Radius	5cm
Density	2.203g/cm ³
Young's Modulus	7.24 × 10 ¹⁰ N/m ²
Poisson Ratio	0.17

この parameter を参照にして計算値を求めた。なお $NZ = NR = 18$ とした。測定値と計算値を表 5.3にまとめた¹⁷。筆者も大気中で同じ鏡の共鳴周波数の測定をしているので一緒に記しておく。

予測された $n = 0$ のモードは全て見つかった。それに対応しないものは lock-in amp を用いた測定によって order の見当をつけた。また $n \leq 2$ と仮定した。これより order の高いモードは磁石を中心付近にはっているので励起されにくいと思われるからである。しかしながら 2 つの場所の位相しか計測していないので完全にその可能性が除去されたわけではない¹⁸。しかし一応計測されたモードに対応する計算値を見つけることができた。

また計算値を基準とした測定値と計算値の相対誤差を図 5.3にまとめておいた。

誤差は 0.6%以下である。また測定値は計算値よりやや高めにする傾向がある。これは密度の誤差によるものか確認する。カタログ値は 2.203g/cm³だったが実際に計測したところ 2.187g/cm³だった。式 (5.11)(5.22) より周波数は密度の平方根に反比例する。これにより理論値は少し大きくなる。この補正により移動した誤差 0%の線を表 5.3の横線で表した。補正の結果測定値が小さめになってしまった。Poisson Ratio や Young's Modulus の誤差が効いていると思われる。

坪野研究室の 1995 年度の特別実験 II では竹田晃人と寺嶋容明によって真空中の Fused Silica(日本石英の 5 種類のサンプル (ED-A,ED-B,ED-C,ED-H,ES)) の円柱の共鳴周波数と Q 値が測定されている [61]。仕様は表 5.4の通り。

この parameter をもとに計算した。 $NZ = NR = 10$ とした。表 5.5に共鳴周波数の測定結果をまとめた。先ほどと同じく計算値を基準とした測定値と計算値の相対誤差も計算した。ED-A で行なわれているが他のサンプルでも大差ない。

¹⁷彼らのレポートには椿、山元の作ったプログラムの計算結果との比較があるが密度と Young's Modulus を間違えて計算したために多少ずれているので訂正した。

¹⁸山元の計測した 79.1372kHz のモードは $n=4, \text{even}$ の 79.4542kHz かもしれない。また計算によると $n=3, \text{even}$ の 70.5632kHz というモードがある。

表 5.3: Fused Silica(SUPRASIL-P30) の共鳴周波数

モードの種類	尾田、成田の 測定値 (kHz)	山元の 測定値 (kHz)	計算値 (kHz)
n=0,odd	27.79274	27.7886	27.77275
n=0,even	35.26273	35.2624	35.21309
n=0,even	43.3898	43.3786	43.3866
n=0,even	50.2490	50.232	50.3532
n=1,even	50.491	50.606	50.400
n=0,odd	51.240	51.228	51.089
n=1,odd	52.744	52.761	52.546
n=2,even	60.4295	60.4118	60.2879
n=0,even	—	66.085	65.753
n=2,odd	66.664	66.622	66.542
n=1,even	66.7335	66.7172	66.7250
n=0,odd	68.204	68.178	67.788
n=1,even	69.6831	69.6723	69.4594
n=1,odd	70.1401	70.1374	69.9361
n=1,even	70.94414	70.9446	70.69245
n=1,odd	77.5061	77.4905	77.3372
n=2,even	—	79.1372	78.8474
n=0,even	—	83.6196	83.3474
n=0,odd	84.2922	84.2685	83.9555
n=1,even	84.7284	84.7095	84.4827
n=1,odd	86.52157	86.5078	86.11257
n=0,odd	—	89.5087	89.1133
n=1,odd	89.5321	89.5496	89.3450
n=1,even	—	94.4451	94.3055
n=1,odd	96.9333	96.9070	96.5956
n=0,odd	99.4134	99.3842	99.4236
n=1,odd	—	99.931	99.5716

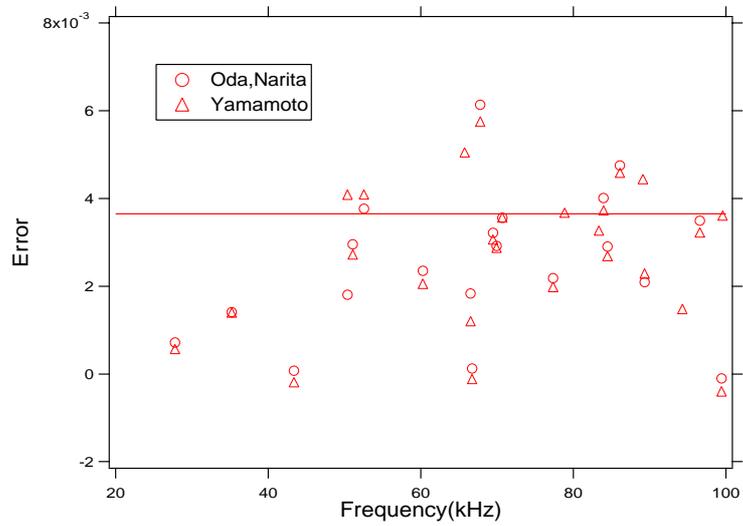


図 5.3: 測定値と計算値の相対誤差

表 5.4: Fused Silica(ED-A,ED-B,ED-C,ED-H,ES) の仕様

Height	4cm
Radius	1cm
Density	2.31g/cm ³
Young's Modulus	7.31 × 10 ¹⁰ N/m ²
Poisson Ratio	0.17

表 5.5: ED-A の共鳴周波数

モードの種類	実験値 (kHz)	計算値 (kHz)	相対誤差
n=1,even	43.3	45	-3.8%
n=0,even	70.0	72	-2.8%
n=1,odd	81.4	83	-1.9%

誤差は尾田、成田の実験より大きい。これは密度の違いで説明できない(そもそも密度の実測値はカタログ値より6%程小さかった。これでは測定値が計算値より小さいことが説明できない。)。おそらく Poisson Ratio や Young's Modulus の誤差が効いているのではないかと思われる。

結論

測定値と計算値の違いは大きくても数%のオーダーである。これは密度、Poisson Ratio、Young's Modulus の誤差を考えるとかなりよい成績である。また有限要素法では少なくとも数%の誤差が生じるので [11]、Hutchinson's Simulation は極めて優れた方法であることがわかる。ただし有限要素法は形状を選ばないが Hutchinson's Simulation は円柱しか使えない。

5.5 鏡の熱雑音の推定

Hutchinson's Simulation の信頼性の検証が終ったのでこの section では TAMA で使われる鏡の熱雑音の大きさを推定する。

まず計算に必要な parameter を調べる。

鏡は信越石英の SUPRASIL P-10 である。尾田、成田の測定した P-30(表 5.2) と同じであるが一応仕様を表 5.6 にまとめておく。

表 5.6: Fused Silica(SUPRASIL-P10) の仕様

Height	6cm
Radius	5cm
Density	2.203g/cm ³
Young's Modulus	7.24 × 10 ¹⁰ N/m ²
Poisson Ratio	0.17

これはカタログ値である。P-30 の場合密度がカタログ値と違ったということがあったがそれほど大きい違いではないのでカタログ値を使うことにする。

TAMA のビーム半径は

Front mirror : 8mm

End mirror : 15mm

である¹⁹。

Q 値は全てのモードにおいて 10^6 とし、Hutchinson's Simulation において特に事情がないかぎり $NR = NZ = 18$ とした。実際に計算する前にいくつか調べるべきことを調べてしまおう。

5.5.1 Cut-off 周波数について

熱雑音の大きさを求めるためにはすべてのモードを考慮する必要があるがモードの数は無限にあるので実際には不可能である。そこで高い周波数のモードほど熱雑音の寄与が小さいことに注目して Cut-off 周波数を適当に設定し、それより低い周波数のモードのみを考慮することにする。ここでは Cut-off 周波数を変えて 1 つの Front mirror と End mirror の熱雑音のパワースペクトル密度の大きさがどうなるかを調べた。図 5.4 に Cut-Off 周波数と 1Hz における鏡の熱雑音の関係をまとめた。単位は $[m/\sqrt{Hz}]$ である。低い方から 441 個のモードを計算した。

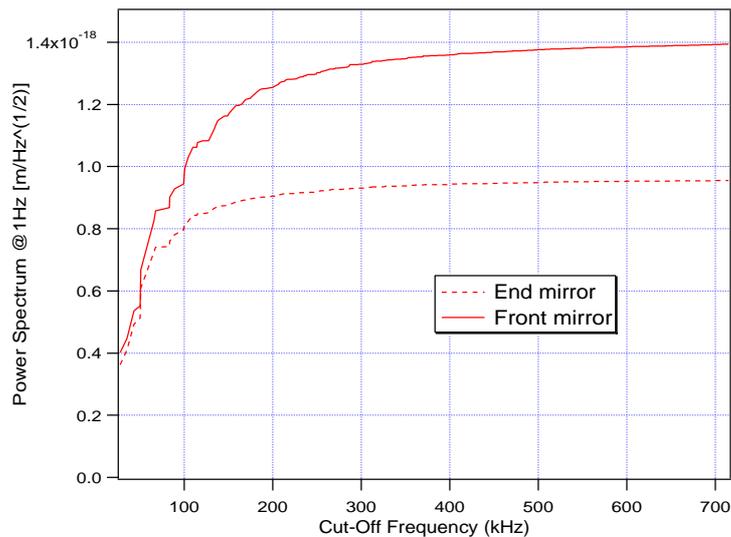


図 5.4: Cut-Off 周波数と熱雑音の大きさの関係

Front mirror のビーム半径は End mirror より小さいので変位の大きい鏡の中心にビームが集中し、熱雑音は大きくなる。この結果からとりあえず Cut-off 周波数を $\omega_{\text{cut}} = 50$ とした。但し ω_{cut} は式 (5.22) で規格化された周波数である。TAMA で使われる鏡の場合 $\omega_{\text{cut}} = 1$ は 11.929kHz に相当する。よって $\omega_{\text{cut}} = 50$ は約 600kHz に相当する。だがもっ

¹⁹Front mirror は Fabry-Perot cavity を構成する鏡のうち Beam Splitter に近い方、End mirror は遠い方である。図 2.4 参照。

と低い周波数でも充分であろう。極端なことをいえば基本モードだけ考えても factor で高々3倍しか変わらない。物理的に Cut-off 周波数をどの程度にすればよいかということは次の subsection で述べる。

5.5.2 基底関数の数に対する依存性について

Hutchinson's Simulation は波数の小さい基底のみを考慮するがその基底の数 NZ, NR に熱雑音が依存するかどうか調べた。Cut-off 周波数は $\omega_{\text{cut}} = 30$ とした²⁰。1つの Front mirror の熱雑音を計算した。また $NR = NZ$ とした。結果は図 5.5の通り。

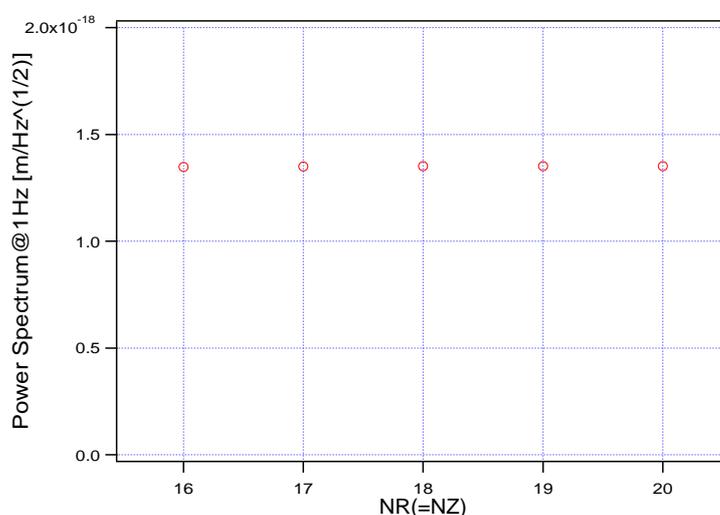


図 5.5: NR, NZ と熱雑音の大きさの関係

ほとんど依存性はない。実は高周波数で NR, NZ を変えると消えたり現れたりするモードがあるが²¹その寄与は小さく熱雑音はほとんど変わらないらしい。

基底関数の数と Cut-off 周波数の妥当性について考察してみよう。波数の小さい基底のみ考慮するという事は波数の大きいモードをとりこぼすおそれがある。周波数が大きくなると波数の大きい基底が dominant になると思われるので基底関数の数から適切に扱える周波数の上限値つまり Cut-off 周波数が決まるはずである。

波長が高さ H の $1/NZ$ 倍以上のモードのみプログラムは考慮している。よってこれから求められる周波数の上限を求めることができる。音速 c , 波長 λ として

$$f_{\text{cutoff}NZ} = c/\lambda = cNZ/H \quad (5.123)$$

²⁰約 360kHz に相当する。

²¹ NR, NZ が変わるとモード数は 126 ~ 132 の範囲で変化した。

NR についても同様に考えて(半径 R とする。直径の $1/NR$ 倍以上の波長の基底関数のみ考慮する。)

$$f_{\text{cutoffNR}} = c/\lambda = cNR/2R \quad (5.124)$$

Fused Silica の場合を考える (c はとりあえず横波の速度とする。 $c = 3.7 \times 10^3$ m/s)。TAMA300 については $H = 0.06$ [m], $2R = 0.1$ [m] であり $NR = NZ = 18$ としたので式 (5.123) から Cut-off 周波数は 1.1×10^3 [kHz]、式 (5.124) から Cut-off 周波数は 6.7×10^2 [kHz] となる。先ほどの Cut-off 周波数 (600kHz) はこの意味からも適切であったことがわかる。

また以上の考察から

$$NR = NZ \times h \quad (5.125)$$

という NZ, NR の取り方がよいことが適当であることがわかる [49]。

5.5.3 Poisson Ratio に対する依存性について

Poisson Ratio のような弾性係数は精度はたいして高くない。そこで熱雑音が Poisson Ratio に敏感であると推定が困難になる。そこで Poisson Ratio を変えると熱雑音がどうなるか調べた。Cut-off 周波数は $\omega_{\text{cut}} = 30$ とした。1つの Front mirror の熱雑音を計算した。結果は図 5.6にまとめた。

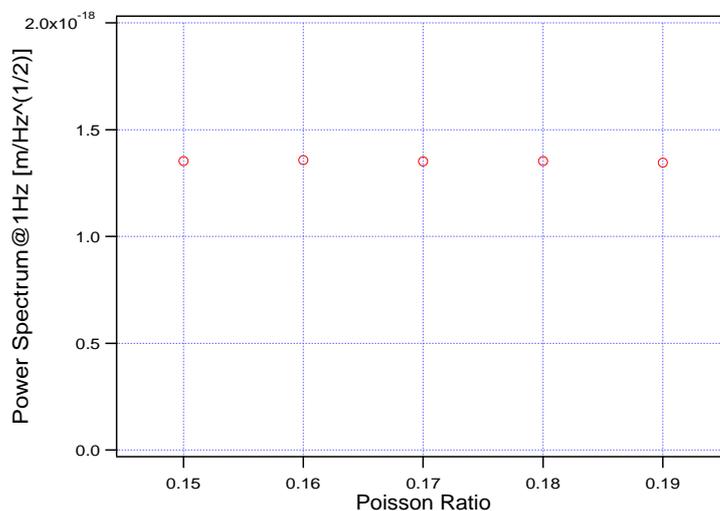


図 5.6: Poisson Ratio と熱雑音の大きさの関係

この範囲では特に依存性はないようである。高周波数では換算質量が Poisson Ratio に敏感なモードや現れたり消えたりするモードがある²²が、もともと寄与が小さいので効か

²²Poisson Ratio を変えるとモード数は 124 ~ 129 の範囲で変化した。

ないらしい。

5.5.4 TAMA300 における鏡の熱雑音の推定

いよいよ TAMA における鏡の熱雑音の大きさを計算する。まず Front mirror と End mirror でビーム半径が違うのでそれぞれに熱雑音を計算する必要がある。さらにその和をとる。干渉計の腕は 2 本あるのでさらに 2 倍する必要がある。最後に振幅で表示するために平方根をとる。

その結果をまとめておく (単位は $\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$)。

$$\begin{aligned} \text{Front mirror} & \sqrt{G_F(f)} = 1.4 \times 10^{-18}/f^{1/2} \\ \text{End mirror} & \sqrt{G_E(f)} = 9.5 \times 10^{-19}/f^{1/2} \\ \text{Total} & \sqrt{G_T(f)} = 2.4 \times 10^{-18}/f^{1/2} \end{aligned}$$

これを干渉計の腕の長さの 300m で割ると strain h のパワースペクトル密度となる。TAMA の観測帯域は中心周波数 300Hz、帯域幅 300Hz である。この範囲で h^2 を積分して平方根をとると TAMA における h_{rms} が求められる。結果は

$$h_{\text{rms}} = 8.3 \times 10^{-21}$$

この値を TAMA の目標感度と比べてみる。TAMA の目標感度は以下の様に決められている。

$$\begin{aligned} \text{Phase I (1998)} & \quad h_{\text{rms}} = 3 \times 10^{-20} \\ \text{Phase II (1999)} & \quad h_{\text{rms}} = 3 \times 10^{-21} \end{aligned}$$

結論だけいうと

$$Q_i = 10^6 \text{ では Phase II で問題になる。}$$

Q 値を上げるしか鏡の熱雑音を下げない方法はない。鏡の熱雑音が Phase II と同程度になるためには

$$Q_i = 10^7$$

が必要となる。

5.6 低いモードの熱雑音への寄与

先ほど 600kHz までのモードを考慮して熱雑音の大きさを計算したが実際これほど高い周波数まで全てのモードを実験的にチェックしたり、Q 値を測定することはできない。現

実的に測定できるのは 100kHz くらいまでであるので、実際には 100kHz 以下のモードから total の熱雑音を推定することになる。幸い式 (5.7) からわかるように低い共鳴周波数のモードほど熱雑音への寄与は大きいので低いモードだけ考えるのは悪い近似ではない。ここでは 100kHz 以下のモードの熱雑音への寄与と total の熱雑音の関係を調べる。

まず Cut-off 周波数が 100kHz と 600kHz のときの熱雑音を比較してみる。Front mirror, End mirror, Total について計算した。また 600kHz まで考慮すると 100kHz まで考慮した場合の何倍になるかも 600kHz の欄に記した。結果を表 5.7 にまとめた。

表 5.7: 100kHz と 600kHz の違い

Cut-off frequency[kHz]	Power Spectrum[m/ $\sqrt{\text{Hz}}$]
Front mirror	
100	$9.4 \times 10^{-19} / f^{1/2}$
600	$1.4 \times 10^{-18} / f^{1/2} (\times 1.5)$
End mirror	
100	$8.0 \times 10^{-19} / f^{1/2}$
600	$9.5 \times 10^{-19} / f^{1/2} (\times 1.2)$
Total	
100	$1.7 \times 10^{-18} / f^{1/2}$
600	$2.4 \times 10^{-18} / f^{1/2} (\times 1.4)$

つまり実験から得られた Q 値から熱雑音の評価をするときには 100kHz 以下のモードの熱雑音を求めて 1.4 倍程度にするのが適当であろうと思われる。

従来の推定では基本モードだけを考えてきた。そこで基本モードだけ考えた場合と total の熱雑音の関係を調べよう。換算質量は鏡の質量の 1/2 とし Q 値は 10^6 とする。基本モードの周波数は 27.8kHz である。Total で $8.2 \times 10^{-19} / f^{1/2} [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$ となる。これを 3.4 倍すると 600kHz 以下のモードの熱雑音と等しくなる。これは $G(f) [\text{m}^2/\text{Hz}]$ で考えると基本モードだけの推定の 10 倍程度になったということである。LIGO[50], VIRGO[53] も似たような結果を出している。

いままでの結果から 100kHz 以下のモードの熱雑音が dominant であることがわかる。そこで 100kHz 以下のモードで熱雑音への寄与が大きいものはどれかということ調べた。100kHz 以下のモードの周波数 (freq) と換算質量係数 (α) (換算質量を鏡の質量で規格化したもの。) と Q 値が全てのモードで等しいときの各モードの熱雑音への寄与 $4kT/m_i \omega_i^2 Q_i \omega [\text{m}^2/\text{Hz}]$ を Front mirror の基本モードの熱雑音で規格化したもの (normalized) を表 5.8 にまとめておいた。

43.4kHz, 51.1kHz, 65.8kHz は基本モードと比べても無視できないほど大きい。これらの

表 5.8: 100kHz 以下のモードの熱雑音

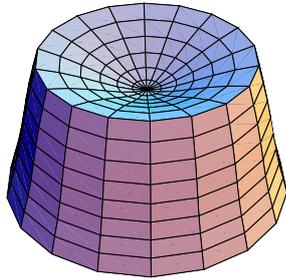
freq[kHz]	α (Front)	α (End)	normalized(Front)	normalized(End)
27.7727	0.5159	0.6328	1.00	0.815
35.2131	1.348	1.434	0.238	0.224
43.3865	0.3921	0.4526	0.539	0.467
50.3532	1.490	1.296	0.105	0.121
51.0892	0.1739	0.2295	0.877	0.664
65.7532	0.06300	0.09577	1.46	0.962
67.7880	0.2610	0.6067	0.332	0.143
83.3474	0.5713	3.961	0.100	0.0144
83.9555	0.1489	0.3427	0.379	0.165
89.1133	0.1639	0.2536	0.306	0.197
99.4236	0.2291	0.2582	0.176	0.156

モードの Q 値はとくに大きい必要がある。

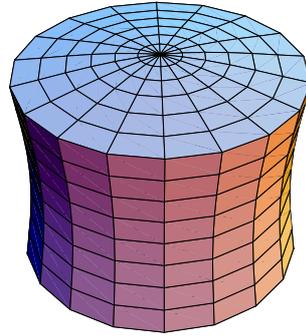
さらにこれらのモードの形については図 5.7~5.17に示した²³。

これら 100kHz 以下のモードの Q 値などの詳細については [75] 参照のこと。

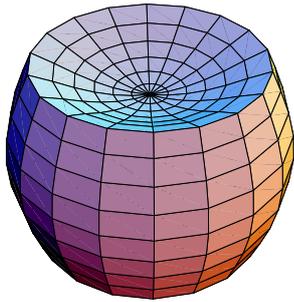
²³この図のモードの規格化は適当なものである。よってこの図はモードの形を表しているだけである。物理的に意味のある規格化を行なった図は [75] を参照のこと。



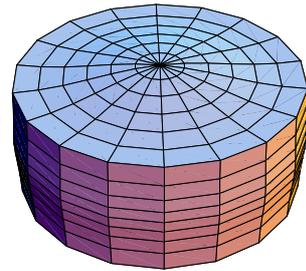
☒ 5.7: 1st mode (27.8kHz)



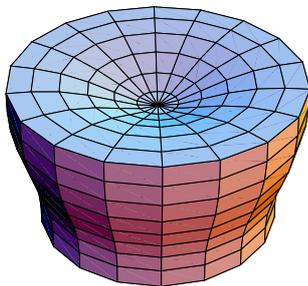
☒ 5.8: 2nd mode (35.2kHz)



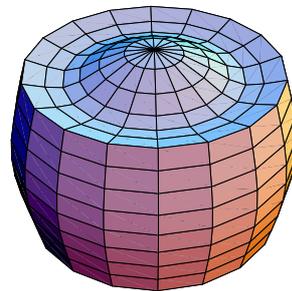
☒ 5.9: 3rd mode (43.4kHz)



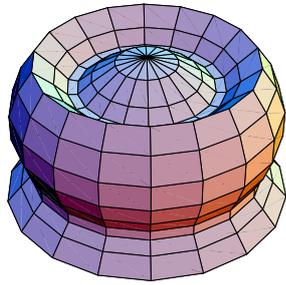
☒ 5.10: 4th mode (50.4kHz)



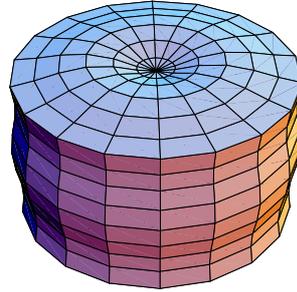
☒ 5.11: 5th mode (51.1kHz)



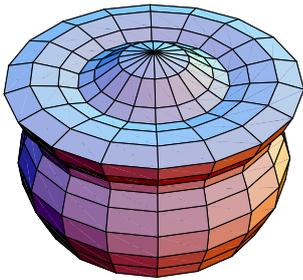
☒ 5.12: 6th mode (65.8kHz)



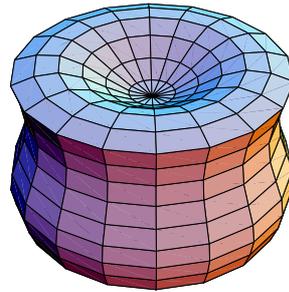
☒ 5.13: 7th mode (67.8kHz)



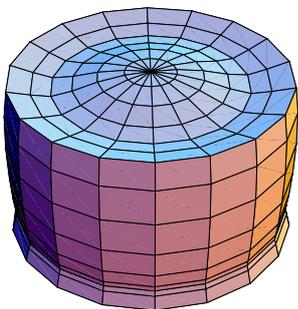
☒ 5.14: 8th mode (83.3kHz)



☒ 5.15: 9th mode (84.0kHz)



☒ 5.16: 10th mode (89.1kHz)



☒ 5.17: 11th mode (99.4kHz)

5.7 ビームが中心からずれた場合

ここまで鏡の中心とレーザービームの中心が完全に一致しているという前提のもとで計算が行なわれてきた。しかし現実には多少ずれが生じるはずである²⁴。このずれによっていままで計算してきた値が大きく変わらないかということ調べるのがこの section の目的である。

5.7.1 中心がずれた場合の換算質量

まず鏡の中心とビームの中心がずれた場合の換算質量について計算を行なう。円柱座標は鏡に固定されていると考えよう。そしてビームの中心が (d, θ_d) にあるとしよう。この時に (r, θ) における強度密度は式 (5.2) の代わりに

$$P(r, \theta) = \frac{2}{\pi w^2} \exp\left(-\frac{2\{r^2 + d^2 - 2rd \cos(\theta - \theta_d)\}}{w^2}\right) \quad (5.126)$$

となる。これを式 (5.1) に代入して Δl を求めることによって換算質量を求めることができる。ここで問題となるのは θ_d はどのような値を取るのが適切かという問題である。 $n = 0$ のときには θ_d がどのような値であっても Δl は変化しないが、 $n \neq 0$ のときには θ_d がどのような値をとるかによって Δl が変わる。例えばビームの中心が動径方向の node 上にあれば Δl は 0 になるがそれ以外なら有限の値になるはずである。この問題は $n \neq 0$ の場合縮退があることに注意すると解決される。つまりモードは $\cos n\theta, \sin n\theta$ という 2 つの θ 依存性をもつということである。熱雑音の計算を行なうときにはこの 2 つの縮退したモードのそれぞれの Δl を計算してやる必要がある。実際に計算するとわかるが²⁵、 $\cos n\theta$ のモードの Δl は $\cos n\theta_d$ に比例し、 $\sin n\theta$ のモードの Δl は $\sin n\theta_d$ に比例する。比例係数は同じである。換算質量はこれら 2 つのモードをまとめて定義する。つまり式 (5.5) の Δl^2 のところにこれら 2 項の 2 乗和を代入すればよい²⁶。すると結局 θ_d は換算質量に依存しないことになる。ここでは Hutchinson's Simulation では変位の z 成分は $\cos n\theta$ という θ 依存性があるとしているので、 $\theta_d = 0$ とおく。

さて鏡の中心とビームのずれ d がビームウエスト w よりずっと小さいときには式 (5.126) において指数関数部分を展開することができる。 $n = 0$ の場合この展開を行なうと最初の項 $((d/w)^0$ の項) は当然ビームが鏡の中心に当たっている場合である。次の項は $(d/w)^2$ に

²⁴Pitch, Yaw Rotation の熱雑音などの存在によって Beam Centering が行なわれるので、可能な限り小さくなるはずではあるが。

²⁵ θ に関して積分するときに $\Theta = \theta - \theta_d$ と置換をするとよい。また積分関数の対称性から 0 になる項があることにも注意。

²⁶2 つのモードを考えているからといってモードの運動エネルギー K を 2 倍にはいけない。それはどちらかのモードの anti node 上にビームの中心があればもう片方のモードは見えないことから明らかである。

比例する²⁷。これは、ずれたことによる Δl の減少分は $(d/w)^2$ に比例することを意味する。 $n \neq 0$ ではどうなるだろうか。当然 $d = 0$ で $\Delta = 0$ だから $(d/w)^0$ の項は0となる。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cos^n \theta = 0 \quad [\text{但し } m > n] \quad (5.127)$$

に注意すると中心がずれたことによる Δl の増加は $(d/w)^n$ に比例する。よってビームがわずかにずれたとき $n \neq 0$ のモードの影響は n が小さいものほど大きいということがわかる。

5.7.2 結果

ここではTAMAのFront mirrorにおいて鏡の中心からビームがずれた場合の熱雑音の大きさについて計算した。 $0[\text{mm}] \leq d \leq 10[\text{mm}]$ として1mm刻みで計算した。 $n = 0 \sim 4$ のモードをそれぞれ考慮した。Q値は全てのモードで 10^6 とした。Cut-off周波数は $\omega_{\text{cut}} = 30$ とし、 $NZ = NR = 10$ とした。

まず $n = 0$ とtotalの熱雑音の d 依存性については図5.18の通り。

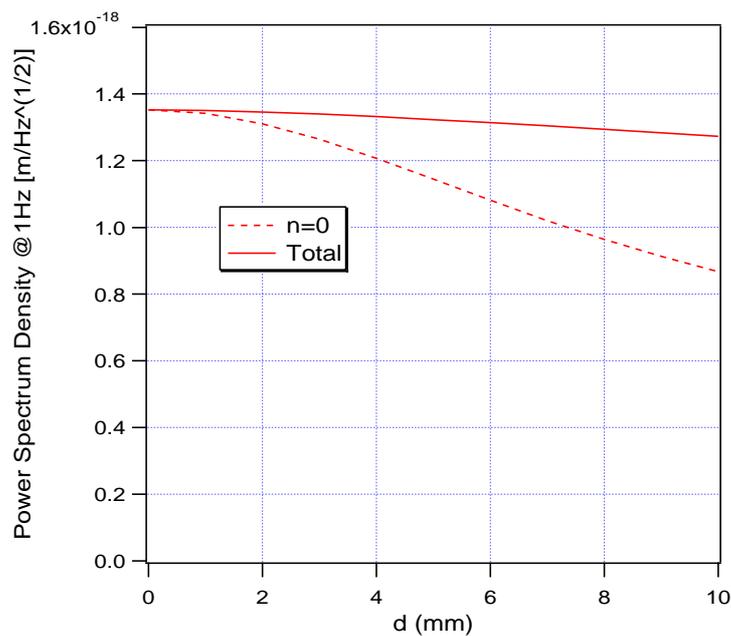


図 5.18: $n=0$ と total の熱雑音の d 依存性

$n = 0$ の寄与は小さくなっていくことがわかる。しかし $n = 1 \sim 4$ の寄与が大きくなっていく。それらをすべて足し合わせたものが total である。やや減少していく傾向が

²⁷ $(d/w)^1$ の項は $\cos \theta$ を $-\pi \leq \theta \leq \pi$ で積分するため消える。

あるがほぼ変わらない。1cm ずれて 6%程度低くなっただけである。似たような結果が LIGO, VIRGO でも得られている [50, 53]。

次に $n = 0 \sim 4$ それぞれの d 依存性について図 5.19にまとめた。

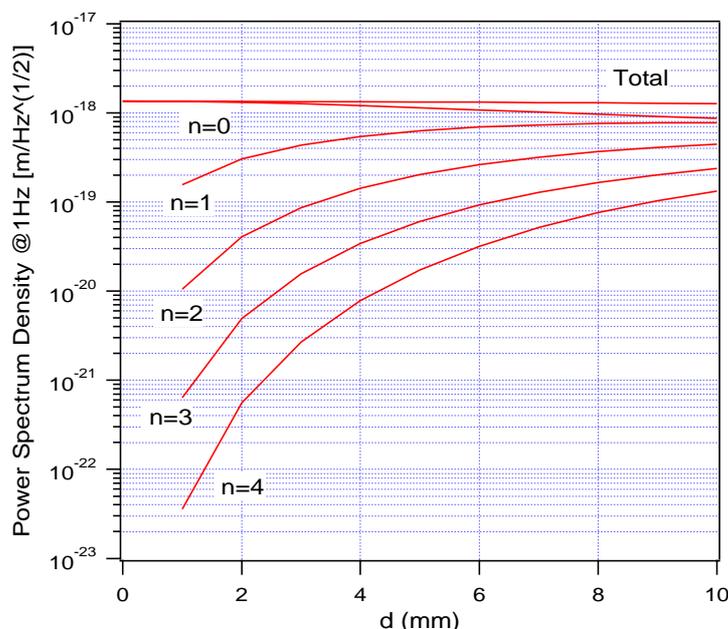


図 5.19: 各 order の熱雑音の d 依存性

order n が大きいモードほど寄与が小さいのは予想通りである。ビームがあまりずれていないうちは order の大きいモードほど急激に熱雑音の寄与が大きくなるが、ある程度ずれると増え方が緩やかになる。また 1cm ほどずれると $n = 1$ の寄与が $n = 0$ とほぼ同じ位になる。

5.7.3 考察

これらの結果からわかることはビームが鏡の中心からずれても、ほとんど熱雑音の大きさには変化しないということである。Pitch, Yaw Rotation などから Beam Centering は行なわなければならないが鏡の熱雑音がその条件をより厳しくすることはないであろう。

しかしながらこれらの話しは全ての order で Q 値が等しいことを前提としている。たしかに $n = 0$ と $n \neq 0$ の Q 値の間には正の相関関係が成立することが予想される。しかしそれは $n \neq 0$ のモードの Q 値が $n = 0$ と同等もしくはそれ以上大きいということを保証するものではない。 $n \neq 0$ のモードの Q 値が極端に悪ければ Beam Centering の条件が厳しくなる可能性がある。しかし $n \neq 0$ のモードの寄与はあまりビームがずれなければそれほど大きいものではないのである程度 Q 値が悪くても大丈夫であろう。ではどの程度

まで悪くても大丈夫であろうか。図 5.19では全ての order で Q 値が等しいとにおいて total の熱雑音を計算している。このときの Q 値を Q_0 とする。ここである order n のモードの Q 値が Q_n になり、この order の熱雑音への寄与が total と等しくなったとする。図 5.20 に Q_n/Q_0 の d 依存性をまとめた。

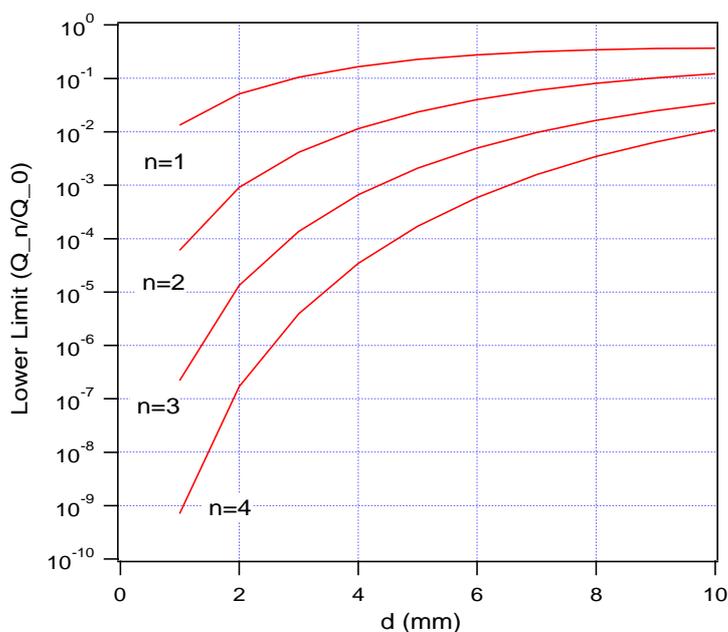


図 5.20: Q_n/Q_0 の d 依存性

$n = 1$ のモードの Q 値はかなりずれたときには $n = 0$ 並の Q 値が要求されることがわかる。これは極端な場合だが $n \neq 0$ の Q 値が図 5.20 程度に悪ければ鏡の熱雑音も Beam Centering について何らかの要求を課すであろう。しかし 1 ~ 2mm の精度で Beam Centering を行なえば $n = 1$ のモードの Q 値が $n = 0$ のモードより 1 桁も悪くても問題にならなくなるのでおそらく深刻な影響を及ぼすことはないと思われる (一応 1 桁以上悪くないという確認は必要だと思われるが)。

また Beam Centering の方法として鏡の $n \neq 0$ のモードを励起させて、干渉計からの信号からその振動の影響が除去されるように鏡を動かすという考えがある。 $n = 1$ のモードがそれに最も適していると思われるが、低い共鳴周波数のモードを調べたところ $d = 1\text{mm}$ では換算質量は $n = 0$ に比べて小さいモードでも 2 桁大きかった。よって 1mm 程度の Beam Centering を行なうときには $n = 0$ の測定に比べてかなり大きく励起させてやる必要がある。

5.8 鏡の形を変えた場合

鏡の形状が決定されたときには熱雑音の大きさについて従来の推定しか行なわれていない。つまり Hutchinson's Simulation で計算を行えば、熱雑音がより低い鏡の形状を発見できる可能性は0ではない。そこで他の形状の熱雑音を調べることにした。

鏡の熱雑音を減らす確実な方法は鏡の形を変えずにサイズを大きくし、それと同じ比率でビーム半径を大きくすることである。

鏡の熱雑音のパワースペクトル密度は鏡の質量を M 、換算質量係数を α_i とすると (5.7) より以下のとおり。

$$G_x(f) = \sum_i \frac{4k_B T}{M \alpha_i \omega_i^2 Q_i} \frac{1}{\omega} \quad (5.128)$$

α_i は鏡の Aspect Ratio、Poisson Ratio、ビーム半径と鏡の半径の比のみによって決まる。よってビーム半径の大きさを鏡と同じ比率で変えれば変化しない。 R を Scaling Factor とすると $M \propto R^3, \omega_i \propto R^{-1}$ であるので、 $G_x \propto R^{-1}$ となる。よって振幅 $\sqrt{G_x} \propto R^{-1/2}$ となる。よって鏡とビーム半径を同じ比率で大きくしていけば緩やかではあるが熱雑音の大きさは小さくなる。

しかしビーム半径を変えることは TAMA の optics 全体の変更を意味するのでかなり困難である。そこでここでは鏡の形状だけを変えて熱雑音を低減できるかどうかを調べた。形状の変え方として

- Aspect Ratio を変えずに鏡のサイズを変える。
- 鏡の半径を変えず Aspect Ratio だけ変える。

の2通りを考えた。 $NR = NZ = 18$ とし、 $\omega_{\text{cut}} = 30, Q = 10^6$ とした。

5.8.1 Aspect Ratio を変えずに鏡のサイズを変えた場合

Aspect Ratio を変えずに鏡のサイズを変化させたときの熱雑音の大きさの変化は以下のように考えることができる。まず鏡を大きくするのではなく、ビームの半径を変化させて、熱雑音を計算する。そしてそのあと鏡とビーム半径を同じ比率で変化させてビーム半径をもとの大きさにもどす。最初の手続きによる熱雑音の変化はビーム半径と鏡の半径の比の変化によって生じるものであり、2番目の手続きによる変化は先ほど式 (5.128) で議論したものによる。今後前者の変化を「ビーム半径が変化したためにおこる変化」と呼び、後者の変化を「鏡の大きさが変化したためにおこる変化」と呼ぶことにする²⁸。後者は先ほど論じたので前者について考えよう。そこでビーム半径だけを変えた時鏡の熱雑音の大きさがどのように変化するか見てみよう。図 5.21 参照。

²⁸この呼び方は次の section でも登場する。

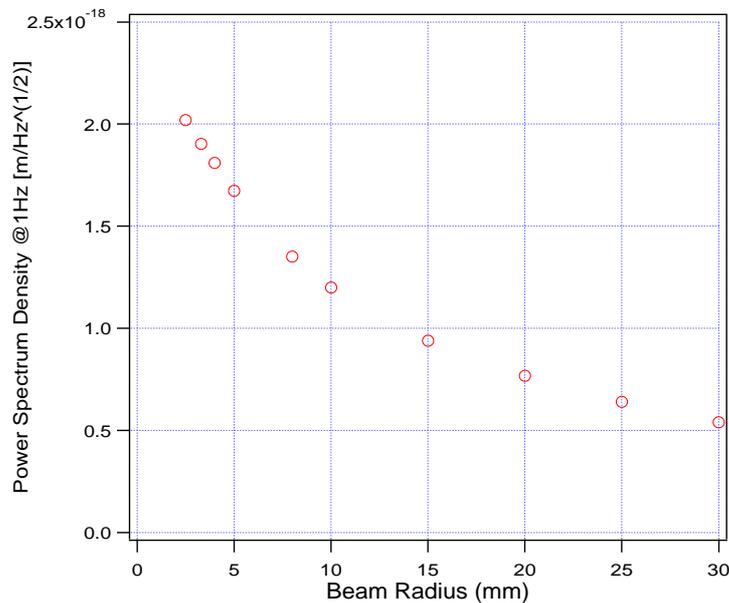


図 5.21: ビーム半径と熱雑音の関係

ビーム半径が大きくなると熱雑音が小さくなる。これは先ほど述べたように振幅の大きい鏡の中心にビームが集中するためである²⁹。ここで図 5.21 の数値に鏡のサイズの変化の補正を加えてやれば、TAMA の鏡の熱雑音がサイズの変更でどのように変化するかがわかる。実際に Aspect Ratio を変えずに Front mirror のサイズを変えたときの熱雑音は図 5.22 になる。

実際の TAMA の半径は 5cm である。これより大きくすると多少減少する傾向にある。鏡を大きくしたことによる効果の方がビーム半径を小さくしたことによる効果より少し大きいらしい³⁰。しかしサイズを大きくしたことにより熱雑音が大幅に減少することはないことがわかる。一方鏡を小さくすると急激に熱雑音が減少するがこれは鏡が小さくなったことによりビームの一部しか反射していないことを意味する³¹。よってこのような大きさにまで鏡を縮小することはできない。よって鏡のサイズを変えることによって熱雑音を大幅に減らすことはできないことがわかった。

²⁹ このため高次のモードの寄与が大きくなる。よってビーム半径の小さい熱雑音は充分収束していないと考えられる。例えば一番ビーム半径の小さい 2.5mm のとき $\omega_{\text{cut}} = 30 \rightarrow 40$ とすると振幅が 20% 大きくなる。しかしビーム半径が Front mirror と同じ 8mm 程度であれば図 5.4 より充分収束している。

³⁰ 但し先ほど述べたようにビーム半径が鏡の半径に比べて小さいときは熱雑音は充分収束していないことに注意。よって鏡のサイズが大きい場合は熱雑音はグラフより大きくなるであろう。

³¹ 鏡の半径は少なくともビーム半径の 3 倍は必要である。

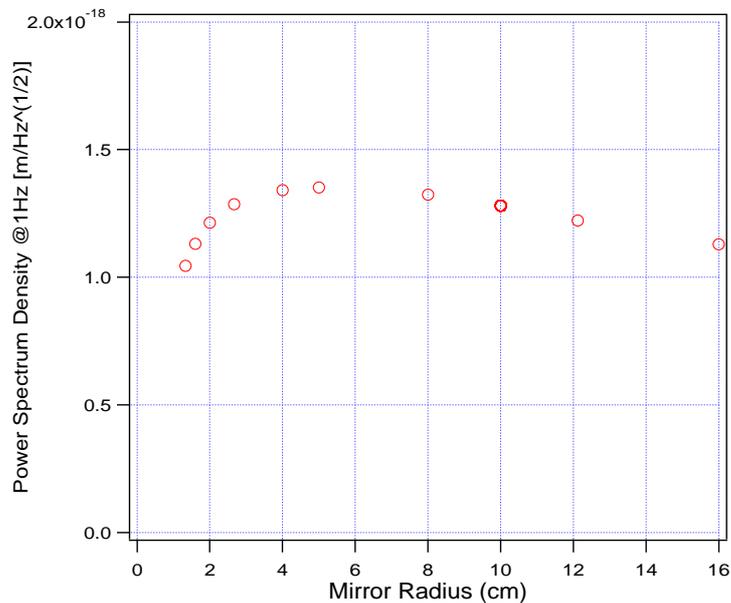


図 5.22: Front mirror のサイズを変えた時の熱雑音の大きさの変化

5.8.2 鏡の半径を変えず Aspect Ratio だけ変えた場合

Front mirror において鏡の高さだけを変えた時の熱雑音の変化は図 5.23 の通りである³²。

実際の TAMA の高さは 6cm であり、図 5.23 では極小になっている。高さが小さくても大きくても基本モードの周波数は小さくなる。さらに高さを小さくすることによって質量が小さくなり、逆に高さを大きくすると共鳴周波数が下がる。よって最適値が存在するはずであるが TAMA の鏡はその最適値にいと考えるとさしつかえない。

5.8.3 まとめ

今までの議論をまとめると TAMA の鏡の形状の選択は熱雑音に関して言えば、大きく間違っていたということはなさそうである。しかし逆をいうと鏡の形状を変えて熱雑音をこれ以上大幅に小さくさせることは無理である。

³² これらの値はすでに充分収束している。

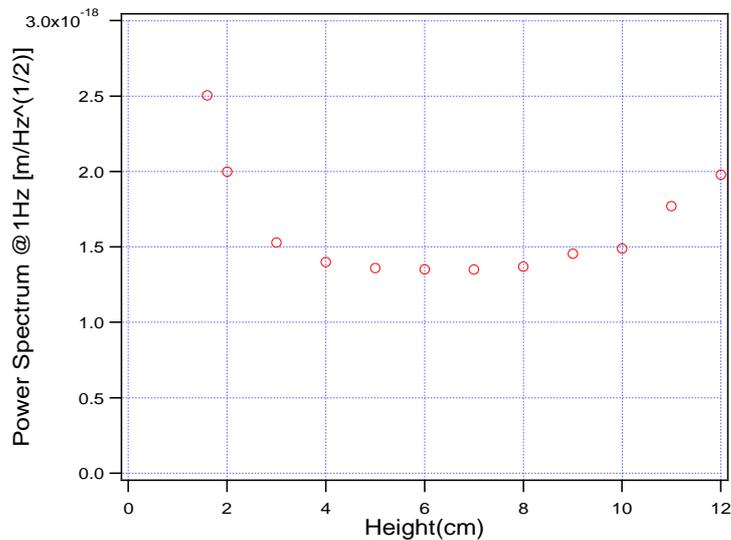


図 5.23: Front mirror の高さだけを変えた時の熱雑音の大きさの変化

5.9 他の大型計画との比較

LIGO や VIRGO においても Hutchinson's Simulation をもとにして鏡の熱雑音の解析を行なっている [50, 53]。そこで他の大型計画との比較を行なってみよう。比較には次の 2 種類がある。

- TAMA のプログラムの出した結果は他の計画のプログラムの結果と consistent か。
- TAMA の鏡の熱雑音は他の計画に比べて大きくないか。

まず最初の項目は TAMA のプログラムの信頼性のチェックである。LIGO, VIRGO では自らが開発したプログラムで自らの鏡の熱雑音の大きさの計算を行なっているので、TAMA のプログラムで LIGO, VIRGO の熱雑音の大きさを計算して、彼らの結果と一致するかどうか確認する。後の項目は TAMA の鏡は (Q 値の大きさは同じとして) 他の計画より熱雑音が大きくないかということを確認する。これは 1996 年 11 月に開かれた TAMA Workshop で LIGO, VIRGO では Q 値は 10^6 で充分なのに TAMA では 1 桁大きい Q 値が要求されるということが判明して出された疑問の答えである。

ちなみに TAMA Workshop で発表された鏡の Q 値の下限は表 5.9 の通りである [66]³³。なお Q 値は特に断らない限り全てのモードで 10^6 とする。

³³これは鏡の熱雑音で sensitivity が limit されるという仮定をしている。

表 5.9: 各計画の Q 値の下限

LIGO(Initial)	$Q > 10^6$
VIRGO	$Q > 10^6$
GEO	$Q > 5 \times 10^6$
TAMA	$Q > 10^7$

5.9.1 Hutchinson's Simulation のプログラムの検証

ここでは TAMA で開発された Hutchinson's Simulation のプログラムで他の計画の熱雑音を計算し、それぞれの計画の出している結果と一致するか検証する。

LIGO との比較

LIGO の鏡の熱雑音については A.Gillespie & F.Raab によって Hutchinson's Simulation を用いて計算されている [50]。

[50] では MarkII³⁴ の鏡の計算も行なっているのでまずそれを見てみよう。parameter が表 5.10 のように与えられている。

表 5.10: MarkII の mirror

Radius	5 cm
Height	8.8 cm
Aspect Ratio	0.88
Beam Radius	0.22 cm
(Beam Radius)/(Radius)	0.044

MarkII の $n = 0$ のモードのうち共鳴周波数の低い 6 つのモードの共鳴周波数と換算質量係数を計算しているので TAMA で開発されたプログラムでも計算してみた。その結果一致した [62]。また周波数と換算質量係数のグラフも求めているので計算してみた。まず [50] によると 280kHz 以下のモードは 100 個あるそうだが、TAMA の計算では 118 個あった。グラフを比較してみたがあまり違いがあるようには見えない。ただ LIGO では一番大きい換算質量係数でも 10 程度だったが TAMA の結果では 100 を越えているものがいくつもある。またこの鏡の熱雑音の大きさと Cut-Off 周波数の関係も計算しているがほぼ一致した。

³⁴ カルフォルニア工科大学にある基線長 40m の干渉計型重力波検出器のプロトタイプ。

では肝心の LIGO の鏡の熱雑音を計算する。Front mirror についての parameter は表 5.11 参照。

表 5.11: LIGO の Front mirror(Gillespie)

Radius	12.5 cm
Height	10 cm
Aspect Ratio	0.4
Beam Radius	2.2 cm
(Beam Radius)/(Radius)	0.176

これらの parameter から Gillespie は

$$8.9 \times 10^{-19} / f^{1/2} \left[\text{m} / \sqrt{\text{Hz}} \right]$$

という結果を出している³⁵。一方 TAMA のプログラムによると

$$8.5 \times 10^{-19} / f^{1/2} \left[\text{m} / \sqrt{\text{Hz}} \right]$$

となり Gillespie より 4%ほど小さい。また熱雑音の大きさと Cut-Off 周波数の関係も計算してあるので比較してみた。比較の結果 50kHz 程度から LIGO の計算と TAMA の計算がずれ始めている。

実は Gillespie の論文の後、LIGO はレーザーを Ar から YAG に変更したため、ビーム半径が変わってしまった。変更後の値は表 5.12 のとおり [56, 67]。

表 5.12: 変更後の LIGO の mirror

	Front mirror	End mirror
Radius	12.5 cm	12.5cm
Height	10 cm	10 cm
Aspect Ratio	0.4	0.4
Beam Radius	3.6 cm	4.6 cm
(Beam Radius)/(Radius)	0.288	0.368

J.K.Blackburn によると [52]、

³⁵Gillespie は $Q = 10^7$ として計算しているので補正した。

$$\text{Front mirror} \quad 7.1 \times 10^{-19} / f^{1/2} \quad [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$$

$$\text{End mirror} \quad 6.0 \times 10^{-19} / f^{1/2} \quad [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$$

となっている³⁶。

TAMA のプログラムの結果は次のとおり。

$$\text{Front mirror} \quad 6.4 \times 10^{-19} / f^{1/2} \quad [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$$

$$\text{End mirror} \quad 5.5 \times 10^{-19} / f^{1/2} \quad [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$$

Blackburn より約 10%小さい。Blackburn も熱雑音の大きさと Cut-Off 周波数の関係を計算しているので比較してみた。40kHz 付近ですでに Blackburn と TAMA の計算結果の間に 10%程度のずれが生じている。

VIRGO との比較

VIRGO の鏡の熱雑音については J.Bondu & J-Y.Vinet が Hutchinson's Simulation を用いて³⁷計算している [53]。鏡についての parameter が表 5.13 の様に与えられている。

表 5.13: VIRGO の mirror

	Front mirror	End mirror
Radius	17.5 cm	17.5 cm
Height	10 cm	20 cm
Aspect Ratio	0.286	0.571
Beam Radius	1.98 cm	5.48 cm
(Beam Radius)/(Radius)	0.113	0.313

これらの parameter から Bondu は

$$\text{Front mirror} \quad 1.1 \times 10^{-18} / f^{1/2} \quad [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$$

$$\text{End mirror} \quad 5.5 \times 10^{-19} / f^{1/2} \quad [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$$

という結果を出している。一方 TAMA のプログラムによると

$$\text{Front mirror} \quad 1.0 \times 10^{-18} / f^{1/2} \quad [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$$

$$\text{End mirror} \quad 5.0 \times 10^{-19} / f^{1/2} \quad [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$$

³⁶Blackburn は $Q = 2.5 \times 10^6$ として計算したので補正した。

³⁷彼らは開発したプログラムを cypres と呼んでいる。

となり Bondu より 10%ほど小さい。Bondu も熱雑音の大きさと Cut-Off 周波数の関係 (Front mirror のみ) を計算しているので比較した。100kHz 付近ですでに Bondu と TAMA は 10%程くいちがっている。また Bondu の計算によると Front mirror は 300kHz 以下のモードが 448 個あるが TAMA の計算では 490 個あった。

GEO との比較

GEO の鏡の熱雑音については J.E.Logan & J.Hough & R.D.Thomson の論文 [54] 参照。鏡についての parameter が表 5.14 の様に与えられている³⁸。

表 5.14: GEO の mirror

Radius	12.5 cm
Height	15 cm
Aspect Ratio	0.6
Beam Radius	2.2 cm
(Beam Radius)/(Radius)	0.176

じつは Hutchinson's Simulation を用いて計算はなされていない。鏡の parameter は Gillespie の計算したものと比較すると Height 以外は同じなので Gillespie の結果に高さの変更による補正を行なっている。その結果³⁹は

$$6.3 \times 10^{-19} / f^{1/2} \left[\text{m} / \sqrt{\text{Hz}} \right]$$

である。これはどのような補正を加えたのかはよくわからない。高さが 1.5 倍になったので、質量が 1.5 倍になる。つまり式 (5.128) より振幅は $\sqrt{1.5}$ 倍小さくなる。しかし高さが大きくなったぶん周波数が小さくなるので熱雑音が大きくなる。どの程度大きくなるかはよくわからないが、 $\sqrt{1.5}$ で割った値が下限値であることは間違いないだろう。その値は $7.3 \times 10^{-19} / f^{1/2} \left[\text{m} / \sqrt{\text{Hz}} \right]$ である。この値より小さい値にしているのかはなぜだろうか。

TAMA のプログラムで計算すると

$$8.3 \times 10^{-19} / f^{1/2} \left[\text{m} / \sqrt{\text{Hz}} \right]$$

となる。もともと GEO の推定が厳密でないのであまり比較しても意味はないが、高々 factor の差であることは間違いがない。

³⁸Beam Radius は便宜上与えただけの数値なのかもしれない。

³⁹彼らの結果に $Q = 10^6$ を代入した。

検証の結論

検証の結果以下のような違いが判明した。

- TAMA のプログラムはモードの数が多い。
- TAMA のプログラムは熱雑音の大きさを低く見積もる。

前者についてであるが具体的にはモードの個数は TAMA は LIGO, VIRGO に比べて 10 ~ 20% 多い。

後者について考察するまえに Cut-Off 周波数と熱雑音の関係の概略を議論する。詳細は [50] 参照のこと。各モードの熱雑音への寄与は ω_n^{-2} に反比例するが、軸対称モードは 2 次元の系なのでモードの数密度は ω_n^{-2} に比例する。よってこれらの効果は相殺し、換算質量の周波数依存性が Cut-Off 周波数と熱雑音の大きさの関係を支配する。周波数が低く、波長がビーム半径より大きければ、周波数が大きくすると換算質量の小さいモードが増える傾向にある。これは波長が短くなるにつれて鏡の中心の anti node の範囲が狭くなり、ビームが当る範囲の振幅が増えるからである。よってこの周波数帯では Cut-Off 周波数が大きくなるとそれに比例して熱雑音は大きくなる。しかし周波数が高くなり、波長がビーム半径より小さくなると、ビーム半径内に node line が増え、換算質量は大きくなる。この周波数帯域になると Cut-Off 周波数が大きくなっても熱雑音の大きさはほとんど変わらなくなる。つまり収束したわけである。これらを踏まえて今までの議論をふりかえる。MarkII の鏡について計算したがビーム半径が鏡に比べるとはるかに小さいので計算した範囲では波長はビーム半径より大きい。この範囲では LIGO と TAMA の計算結果は一致している。肝心の LIGO, VIRGO の鏡ではビーム半径がある程度大きくなり、周波数の高い方まで調べているので熱雑音は収束している。ほぼ収束している範囲では LIGO, VIRGO と TAMA の計算結果は違ってしまっているが、その差はほとんど周波数に依存していない。よって共鳴周波数の高いモードの寄与自体は大差はないのであろう (多少違ってても寄与がもともと小さいので目立たないのかもしれないが)。また LIGO, VIRGO の鏡の計算でも Cut-Off 周波数が低い範囲では熱雑音の大きさは一致している。

よってビーム半径と波長が同じ程度になる周波数のモードの寄与の計算が LIGO, VIRGO と TAMA では食い違っていると思われる。またビーム半径と鏡の半径の比が大きい場合ほど、つまりビーム半径と波長が等しくなる周波数が低い場合ほど収束値の食い違いが多い傾向あることが今までにあげたデータからわかる。いずれにせよこの周波数付近のモードの計算のチェックを行えば食い違いをなくせられると思われる。

このように 2 つほど違う点がある。しかし結果自体は 5 ~ 10% ほど程度であるので、変更があったとしてもこの程度であらう。そこでとりあえず TAMA のプログラムは LIGO, VIRGO と比べてそれほどおかしくないとする。

5.9.2 各計画の鏡の熱雑音の比較

TAMA のプログラムはたいしておかしくないことがわかったので、以後は完全に信頼し、各計画における鏡の熱雑音の大きさを比較する。また TAMA の Q 値の下限を押し上げている理由も考察する。

各計画の鏡の熱雑音の大きさ

ここでは各計画の鏡の熱雑音の大きさを求めて比較する。プログラム間の差をなくすために TAMA のプログラムで計算した値を採用する。LIGO に関しては変更後の値を採用する。まとめると⁴⁰($Q = 10^6$ で単位は $[m/\sqrt{\text{Hz}}]$) 表 5.15になる。

表 5.15: 各計画の鏡の熱雑音

	Front mirror	End mirror	Total
LIGO	$6.4 \times 10^{-19}/f^{1/2}$	$5.5 \times 10^{-19}/f^{1/2}$	$1.2 \times 10^{-18}/f^{1/2}$
VIRGO	$1.0 \times 10^{-18}/f^{1/2}$	$5.0 \times 10^{-19}/f^{1/2}$	$1.6 \times 10^{-18}/f^{1/2}$
GEO	$8.3 \times 10^{-19}/f^{1/2}$	—	$2.2 \times 10^{-18}/f^{1/2}$
TAMA	$1.4 \times 10^{-18}/f^{1/2}$	$9.5 \times 10^{-19}/f^{1/2}$	$2.4 \times 10^{-18}/f^{1/2}$

比較してみると TAMA は他と比べて大きいことがわかる。これは TAMA の鏡が小さいことによるものである。TAMA 以外の鏡は TAMA の 2 ~ 3 倍の大きさであり、換算質量係数の変化を考えなければ式 (5.128) で議論したように振幅 $\sqrt{G_x} \propto R^{-1/2}$ だから鏡が大きい方が有利である。例えば TAMA の Front mirror は Gillespie の鏡とビーム半径と鏡の半径の比が大体同じ (0.16 と 0.176) なので比較してみよう。TAMA の Front mirror の熱雑音は Gillespie の鏡の 1.6 倍である。つまり $G_x(f)$ は $1.6^2 = 2.7$ 倍になっている。LIGO の鏡は TAMA と比べると半径 2.5 倍、高さは 1.7 倍なので説明できる程度の差である。TAMA の End mirror のビーム半径と鏡の半径の比は LIGO の Front mirror とほぼ同じ (0.3 と 0.288) なので同様に比較すると $G_x(f)$ は $1.5^2 = 2.2$ 倍であり、説明できる程度の値となっている。つまり TAMA の鏡の熱雑音は他の計画に比べて大きい、それはサイズが小さいという理由で説明することが可能である。

各計画の Q 値の下限

先ほどの計算結果と各計画の目標に到達するための熱雑音の大きさを比較して各計画における Q 値の下限を求める。なおここでは sensitivity が一番よい周波数 (100Hz 付近) に

⁴⁰GEO は Fabry-Perot でない。そこで Front mirror の欄に 1 個の鏡の熱雑音を記入し、End mirror は省略した。Total の欄には干渉計の全ての鏡の熱雑音が同じであるとして計算した値を記入した。この値は 1 個の鏡の熱雑音の $\sqrt{7}$ 倍になる [9]。

おいては鏡の熱雑音のみによって sensitivity が limit されていると仮定する。

LIGO(Initial)(基線長 4km) では目標に到達するためには $h = 3 \times 10^{-23} / \sqrt{\text{Hz}}@100\text{Hz}$ が必要である [7, 51, 52, 68]。これは $1.2 \times 10^{-19} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}@100\text{Hz}$ であるから鏡の熱雑音としては $1.2 \times 10^{-18}/f^{1/2} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ が目標となっている。これは先ほどの計算とほぼ同じ値であるので Q 値の下限は 10^6 である。

VIRGO(基線長 3km) では目標に到達するためには $h = 5 \times 10^{-23} / \sqrt{\text{Hz}}@100\text{Hz}$ が必要である [69]。これは $1.5 \times 10^{-19} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}@100\text{Hz}$ であるから鏡の熱雑音としては $1.5 \times 10^{-18}/f^{1/2} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ が目標となっている。これも先ほどの計算とほぼ同じ値であるので Q 値の下限は 10^6 である。

GEO(基線長 600m) では目標に到達するためには $h = 1.4 \times 10^{-22} / \sqrt{\text{Hz}}@100\text{Hz}$ が必要である [54, 71]⁴¹。これは $8.4 \times 10^{-20} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}@100\text{Hz}$ であるから鏡の熱雑音としては $8.4 \times 10^{-19}/f^{1/2} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ が目標となっている。これは先ほどの計算と比べると Q 値の下限は 7×10^6 である。

TAMA(基線長 300m) では目標に到達するためには 150Hz から 450Hz まで積分した h_{rms} が 3×10^{-21} でなければならない。つまり $h = 2.9 \times 10^{-21}/f^{1/2} / \sqrt{\text{Hz}}$ である必要がある。よって鏡の熱雑音としては $8.6 \times 10^{-19}/f^{1/2} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ が目標となっている。これは先ほどの計算と比較すると Q 値の下限は 8×10^6 である。

まとめると表 5.16 の通り。

表 5.16: 各計画の目標と Q 値

	$h@100\text{Hz}$ の目標 [$1/\sqrt{\text{Hz}}$]	熱雑音の目標 [$\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$]	Q 値の下限
LIGO	3×10^{-23}	$1.2 \times 10^{-18}/f^{1/2}$	10^6
VIRGO	5×10^{-23}	$1.5 \times 10^{-18}/f^{1/2}$	10^6
GEO	1.4×10^{-22}	$8.4 \times 10^{-19}/f^{1/2}$	7×10^6
TAMA	2.9×10^{-22}	$8.4 \times 10^{-19}/f^{1/2}$	8×10^6

5.9.3 TAMA の Q 値の下限はなぜ高いのか

ここでは TAMA の Q 値の下限がなぜ高いかということについて議論する。まず TAMA 以外のものをそれぞれ比較してみよう。LIGO と VIRGO は基線長も鏡の大きさも目標感度も大体同じなので Q 値の下限もだいたい同じである。一方 GEO は LIGO, VIRGO の 8

⁴¹[54] では 1 つの鏡の熱雑音の制限として $h = 5 \times 10^{-23}/\sqrt{\text{Hz}}@100\text{Hz}$ と書いてある。先ほど同様に全ての鏡の熱雑音は同じとすると Total の熱雑音は $\sqrt{7}$ 倍になり $h = 1.3 \times 10^{-22}/\sqrt{\text{Hz}}@100\text{Hz}$ となる。[71] では目標感度は $h = 2.0 \times 10^{-22}/\sqrt{\text{Hz}}@50\text{Hz}$ となっている。これは $h = 1.4 \times 10^{-22}/\sqrt{\text{Hz}}@100\text{Hz}$ に相当する。ここでは後者を採用した。

倍の Q 値が必要である。まずこれは目標から要求される熱雑音が LIGO, VIRGO と比べて小さいことを見てわかるように目標感度が高いからである。VIRGO と比較してみよう。GEO の基線長は VIRGO の $1/5$ なので h の目標は 5 倍になるはずである。しかし先ほど見た通り 2.8 倍にしかなっていない。つまり VIRGO より熱雑音の振幅を 1.8 倍小さくしなければならない。そのためには Q 値を $1.8^2 = 3.2$ 倍にしなければならない。さらに鏡の個数が GEO は多い。全ての鏡の熱雑音が同じとすれば Total の熱雑音の振幅は VIRGO では鏡 1 個の熱雑音の 2 倍、GEO は $\sqrt{7}$ 倍になる。よって GEO の Q 値は $(\sqrt{7}/2)^2 = 1.8$ 倍大きくなる。よって Q 値は $3.2 \times 1.8 = 5.8$ 倍になる。7 倍との差はビーム半径と鏡の半径の比の差が原因と考えられる。では TAMA ではなぜ Q 値が高いのか。

まずあげられることとして GEO と同じく目標感度が高いということである。これは LIGO, VIRGO と比べると要求される熱雑音の振幅が小さいことからわかる。LIGO, VIRGO と比べると TAMA は基線長が約 1 桁小さいので h の目標も約 1 桁あがるはずなのにそうになっていない。TAMA の目標に到達するためには、熱雑音の振幅を LIGO の 1.4 倍、VIRGO の 1.7 倍小さくしなければならない。つまり Q 値は LIGO の 2 倍、VIRGO の 3 倍にしなければならない。GEO と TAMA が目標感度が基線長から相当するものより高いのはおそらく target の重力波の強さに少しでも近付けようとしたためであると思われる。だから目標感度に対して基線長が短過ぎるといってもよいかもしれない。

次に先ほど述べたように鏡が小さいということである。他の計画の鏡の大きさは TAMA の 2 ~ 3 倍なので Q 値は 2 ~ 3 倍なければならない。

また Aspect Ratio の違いや、ビーム半径の鏡の半径に対する比の違いも若干効いていると思われる。例えば LIGO はビーム半径の鏡の半径に対するの比は TAMA より大きいのでその分 TAMA より有利である。表 5.6 を参考にしてどの程度大きくなっているか見積もってみよう。TAMA の鏡は LIGO より小さいので振幅が $\sqrt{2.5}$ 倍大きくなっていると思うとビーム半径が大きいことによって LIGO の鏡の振幅は Front mirror, End mirror を平均して 1.6 倍小さくなっている。

ここで TAMA の Q 値が高い理由をまとめておこう。

- TAMA の Hutchinson's Simulation のプログラムは LIGO, VIRGO のものと大差ない結果を出したので、TAMA の鏡の Q 値が高い原因ではない。
- Q 値を同じにして各計画の鏡の熱雑音を計算したところ鏡のサイズが小さいことによる熱雑音の増加以外は TAMA は他の計画ととくに変わらなかった。だがサイズの違いにより TAMA の Q 値は $\times(2 \sim 3)$ しなければならない。
- LIGO, VIRGO に比べて相対的に目標感度が高すぎる (LIGO $\times 2$, VIRGO $\times 3$)。
- Aspect Ratio や Beam Radius の Mirror Radius の比の違いも少し効いている。たとえば LIGO は Beam Radius が大きいので TAMA より有利である (LIGO $\times 1.6$)。

- よって Q 値は×10 程大きくなる。

5.10 鏡の熱雑音についてのまとめ

- 鏡の共鳴周波数や換算質量を計算するのは困難であったが、Hutchinson's Simulation によって可能になった。
- 実験による検証の結果 Hutchinson's Simulation によって極めて正確に共鳴周波数の計算ができることがわかった。
- Hutchinson's Simulation の計算によると PhaseII の目標感度と鏡の熱雑音がほぼ等しくなるためには $Q_i = 10^7$ が要求されることがわかった。この値は従来 of 推定より 1 桁厳しい値である。
- $n \neq 0$ の Q 値がかなり悪くない限り鏡の熱雑音が Beam Centering の制限を厳しくすることはない。
- ビーム半径を変えずに TAMA の鏡のサイズを変更しても、大きく熱雑音が下がることはない。
- TAMA の Q 値の下限が他の大型計画に比べて大きいのは基線長と比べて目標感度が高いこと、鏡のサイズが小さいこと、ビーム半径が小さいことが原因である。

第 6 章

TAMA300 における熱雑音

6.1 今までのまとめ

今までの議論を振り返ってみよう。

様々な自由度の計算を行なったが、Suspension System の magnet damping による熱雑音は Phase II の目標感度より小さく問題にならないことがわかった。そこで問題となるのは中間 mass より下の散逸の大きさを表す Q_2 の下限がどの程度であるかということである。

Pitch Rotation, Yaw Rotation, Vertical Vibration それぞれの熱雑音の振幅が Phase II の目標感度の $1/4$ のときの Q_2 (これを Q 値の下限とする。) は表 6.1 の通り¹。ビームと鏡の中心のずれは 1mm とする。

表 6.1: Suspension System の Q_2 の下限

	Q_2 の下限
Pitch Rotation	2×10^5
Yaw Rotation	4×10^3
Vertical Vibration	3×10^{-2}

今までの議論からこれらはいずれも実現可能な値と思われる。だが Pitch Rotation の Q 値が高いので、測定する必要があると考えられる。また Beam Centering の精度を良くすることに Pitch Rotation の Q 値の下限を下げることは可能である。例えばビームと鏡の中心のずれを 0.5mm とすれば、 Q 値の下限は 5×10^4 になる。とりあえずこれらの熱雑音は Phase II の目標感度よりずっと小さく出来ると考えられるのでここではこれ以上考慮しない。

¹改良後の値である。

Pendulum Mode+ Violin Mode そして鏡の熱雑音がそれぞれ Phase II の目標感度と等しくなるために必要な Q 値は表 6.2 の通りである。但しこの章では今まで通り Violin Mode の Q 値は Pendulum Mode の半分とする。

表 6.2: Pendulum Mode と鏡の熱雑音の Q 値の下限

	Q 値の下限
Pendulum Mode	2.5×10^5
Mirror	1.0×10^7

表 6.1 と比べると Q 値の下限が大きいことがわかる。しかもこれらは Phase II の目標感度と同じ値になるというより緩い条件であることにも注意。これは表 6.1 の雑音は理想状態からずれによる coupling (ビームのずれや地球の曲率など) によるものであるが表 6.2 の雑音はそのような coupling によらないものだからと思われる。

6.2 TAMA300 の熱雑音

TAMA の観測帯域では熱雑音によって感度が limit されると考えられている。ここでは今までの議論を踏まえて、TAMA の熱雑音がどの程度の大きさになるかを述べる。問題となる熱雑音は Pendulum+Violin Mode と鏡の熱雑音であり、これらの和が PhaseII の目標感度より小さくなる必要がある。表 6.2 と式 (4.10)(4.99)(5.128) を参考にすると Pendulum Mode の Q 値 Q_{Pendulum} と鏡の Q 値 Q_{Mirror} が以下の条件を満たせば熱雑音は PhaseII の目標感度より小さくなる。

$$\frac{2.5 \times 10^5}{Q_{\text{Pendulum}}} + \frac{1.0 \times 10^7}{Q_{\text{Mirror}}} \leq 1 \quad (6.1)$$

とりあえずここでは Pendulum+Violin Mode と鏡の熱雑音の大きさが等しくなる $Q_{\text{Pendulum}} = 5 \times 10^5, Q_{\text{Mirror}} = 2 \times 10^7$ という値を採用して話を進める。

図 6.1 は TAMA の熱雑音である²。Pendulum+Violin の熱雑音は magnet damping によるものと中間 mass 以下の散逸によるもの (グラフ中では wire と記述してある。) を示した。100Hz 以下では magnet damping によって決まり、100Hz 以上では wire によって決まることがわかる。鏡の熱雑音は $Q_{\text{Mirror}} = 10^6$ と $Q_{\text{Mirror}} = 2 \times 10^7$ のものをのせた。さらに観測帯域付近を拡大したのが図 6.2 である。但し magnet damping による Violin Mode の熱雑音は無視できるので省略した。ここで観測帯域では鏡の熱雑音だけで sensitivity が limit されているわけでないということに注意したい。200Hz 以下では Pendulum Mode の熱雑音の方

²これらのパワースペクトル密度は前 section の Pitch、Yaw Rotation と違い改良前のものである。しかし改良後と大差ない。

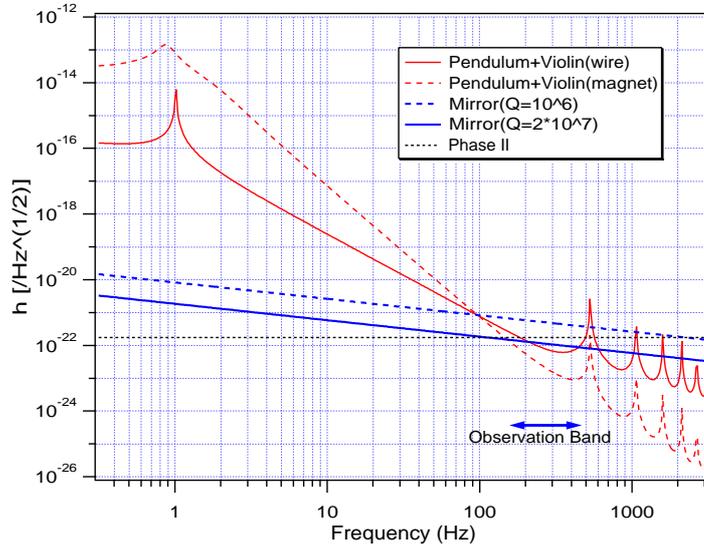


図 6.1: TAMA300 における熱雑音

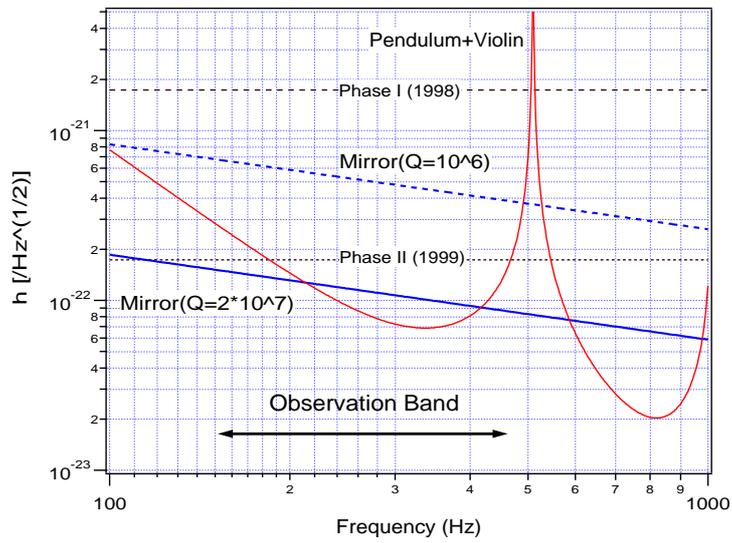


図 6.2: TAMA300 における熱雑音のうち特に観測帯域を拡大したものの

が大きく、450Hz では Violin Mode の方が大きい。しかし他の計画では Suspension System の熱雑音は鏡ほど大きくはない。Suspension System の熱雑音の振幅は式 (4.10)(4.99) からわかるように鏡の質量の平方根に反比例する。つまり鏡のサイズの $3/2$ 乗に反比例する。一方鏡の熱雑音は (ビーム半径と鏡の半径の比が同じときには) 式 (5.128) より鏡のサイズの平方根に反比例する。よって Suspension System の熱雑音の方が鏡のサイズに敏感である。他の計画より TAMA の鏡は小さいので Pendulum+Violin の熱雑音は鏡に比べて相対的に大きくなる。例えば LIGO においては 100Hz 付近が一番 sensitivity がよいが、この付近において鏡の熱雑音は Pendulum + Violin Mode の熱雑音より少し大きい程度である [25, 51, 52]³。また VIRGO においては [70]、鏡の質量が Front mirror は TAMA の 20 倍、End mirror は 40 倍もあり、しかも wire の長さが 0.7m もあるので、鏡の熱雑音に比べて Pendulum+Violin Mode の熱雑音はずっと小さい。VIRGO では鏡の熱雑音が Pendulum と等しくなるのは約 45Hz であり、1st Violin Mode の周波数は 310Hz 程度、1st Violin Mode よりずっと低い周波数においては Violin Mode の熱雑音の振幅は鏡の $1/25$ である。しかし TAMA においては図 6.1、6.2 をみてもわかるように鏡の熱雑音が Pendulum と等しくなるのは約 207Hz であり、1st Violin Mode の周波数は 533Hz 程度、1st Violin Mode よりずっと低い周波数においては Violin Mode の熱雑音の振幅は鏡の $1/3$ である⁴。また TAMA の場合、鏡の熱雑音に比べて Pendulum+Violin Mode が無視できるようになるには、 $Q_{\text{pendulum}} = 2.5 \times 10^6$ が必要となる。この値は LIGO, VIRGO で要求される Q 値より 1 桁も大きい。

このように鏡が小さいため Suspension System の熱雑音が他の計画より大きくなっている。これが鏡の Q 値の下限をさらに大きく ($\times 2$) している。

6.3 目標の Q 値への到達は可能か

Q_{Pendulum} と Q_{Mirror} に関する制限がわかったのでここではこの制限が実現可能かについて議論する。

まず Pendulum Mode であるがワイヤーの弾性エネルギーのみが散逸するとした Q 値は式 (4.87) より 6.7×10^6 である。散逸はこれ以外にも存在すると予想されるので、この値は Q 値の上限値にすぎない。しかし目標の 5×10^5 より 1 桁以上よい値である。しかも先に書いたが LIGO, VIRGO では Q 値の上限の $1/3 \sim 1/2$ 程度まで到達している [51, 70]。また TAMA でも現在 Pendulum Mode の Q 値を計測中であり、 $(1 \sim 2) \times 10^5$ は既に達成されている [33, 34, 35]。よって $Q_{\text{Pendulum}} = 5 \times 10^5$ は達成不可能ではないと考えられる。

鏡の Q 値はどうであろうか。TAMA における鏡の Q 値の計測の詳細については [75] を参照のこと。この計測では

³[51] と [52] で Pendulum に関する parameter が違う。おそらく [51] のあとに変更があったと思われる。

⁴LIGO も Pendulum や Violin Mode は無視できないが、少なくとも 100Hz 付近では鏡より大きくはなっていないことに注意。TAMA では 200Hz まで Pendulum の熱雑音は鏡より大きいのである。

$$Q_{\text{Mirror}} < 10^6$$

となっている。目標の $1/20$ であるので仮にこれが Q_{Mirror} の上限とすれば TAMA の感度は図 6.1、6.2 の $Q_{\text{Mirror}} = 10^6$ の線で決まることになる。これは PhaseII の目標より 4.5 倍も大きい。もちろん $Q = 10^6$ が実際の上限值であるのかは不明であり、今後も引続き測定を行なう必要がある。だが LIGO, GEO, VIRGO でも $Q_{\text{Mirror}} = \text{factor} \times 10^6$ 程度である [51, 55, 70] ことから、 Q 値は数倍高くなることは可能であるが、 $Q_{\text{Mirror}} = 2 \times 10^7$ に到達することは極めて困難であると考えられる。

またこれまでの議論から鏡の熱雑音を大幅に減少させる方法は Q 値を高くする以外には、

- ビーム半径と鏡のサイズを大きくする。
- 温度を下げる⁵。

のいずれかしかない。ただどちらの方法も TAMA でこれから採用するのは難しい。

6.4 今後の課題

散逸に関係のない parameter に熱雑音はどのように依存しているかを調べ、かつそれらの parameter を操作して、熱雑音を低減することが本論文の目的であった。ここでは残された課題についてふれておきたい。それは以下の 3 点である。

- continuous system の散逸
- 実験への要請
- その他

6.4.1 continuous system の散逸

干渉計型重力波検出器の感度は Pendulum Mode+Violin Mode そして鏡の熱雑音で決められることがわかった。これらは continuous system の熱雑音である。そしてこの熱雑音は式 (4.99) をもとにして、つまり調和振動子の熱雑音の重ね合わせとして計算してきた。だがこの方法には 1 つ問題がある。式 (4.99) の導出過程をふりかえると、まず散逸のない運動方程式を mode 展開し、調和振動子の重ね合わせとしたあとで各々の調和振動子に散逸を導入している。これは厳密な方法ではない。最初から運動方程式に散逸項を導入し、その後 mode 展開をするべきである。だがこの計算を行なうにあたり以下のような疑問が生じてくる。

⁵ Q 値は温度が下がると大きくなるということも考慮している。

- 散逸項の mode 展開は可能か。
- 散逸項を mode 展開するとどのような形になるか。

特に前者の疑問は重要である。もし散逸項の mode 展開が不可能であるならば、いままで計算に利用してきた式 (4.99) の正当性が失われるからである。

実は散逸項の mode 展開が不可能な例をあげるのは容易である。それは Suspension System の熱雑音を計算するときに登場した 2 mode oscillator である。この oscillator には 2 つの mode があるが、magnet damping が強いため各々の mode の Q 値はそれほど高く、式 (4.99) に従って計算すると熱雑音はかなり大きくなるはずである。しかし観測帯域の熱雑音は式 (4.10) を見てもわかるように、magnet damping の大きさには依存しない。つまり mode 展開による推定は正しくない。これは散逸項の存在により mode の独立性が破綻したことが原因である。つまりある mode を励起して減衰を観測するとその過程において別の mode が混ざってくるのである。

このように散逸項の mode 展開が不可能である system が存在する。ではどのようなとき散逸項の mode 展開は可能なのであろうか。2 mode oscillator の場合について考えてみよう。話を簡単にするために中間 mass と鏡の間の散逸も viscous damping としよう。このとき mode 展開が可能であるための条件は $\omega_1 Q_1 = \omega_2 Q_2$ であることが知られている [72]。これは $\phi_1(\omega) = \phi_2(\omega)$ を意味する。よっておそらく散逸が viscous damping でなくても $\phi_1(\omega) = \phi_2(\omega)$ が成立すれば、2 mode oscillator の散逸項は mode 展開が可能であると考えられる。

さらにこれを拡張して、

- continuous system において $\phi(\omega)$ が場所に依存しなければ散逸項の mode 展開が可能である。

とすることができると予想される。これはまだ厳密に証明されたわけではないが極めて尤もらしいので正しいとしよう。またこのとき各々 mode の散逸、つまり $\phi_n(\omega)$ は $\phi(\omega)$ に等しくなると考えられる。一方 $\phi(\omega)$ が場所に依存するならば、必ずかどわかにはわからないが、一般には mode 展開ができないと考えられる。

さて現実の system を考えてみると $\phi(\omega)$ が場所に依存しないということは考えにくい。Suspension System においては散逸は主にクランプ点もしくはその付近でおこると考えられる。鏡においてもワイヤーと接触している部分や、磁石が接着している部分の散逸が大きいと思われる。よってこのような system の熱雑音を計算するのに式 (4.99) を利用したことは正しいとは断言はできない⁶。

以上の議論から $\phi(\omega)$ が場所に依存するときには、mode 展開をせずに、もとの運動方程式から直接 impedance を計算して熱雑音を計算する必要がある。だがそのような計算は

⁶ただ計算は楽である。

あまり行なわれていない。ここではその数少ない例を紹介する。まず Logan et al. によるものがある [26]。この例では Pendulum Mode+Violin Mode の熱雑音を計算するために、等価的な電気回路の熱雑音を計算している。ここではワイヤーは伝送線となっている。さらに散逸はクランプ点でおこるとして、伝送線の両端は抵抗 R で terminate されている。但しこの R は ω に反比例する⁷。しかしこの結果は mode 展開によるものと一致している。また $\phi_1(\omega)$ と $\phi_2(\omega)$ が違う 2 mode oscillator [72] や $\phi(\omega)$ が一様でない棒の伸縮モード [73] の熱雑音の計算も行なわれている。mode 展開と比較してみると、共鳴周波数の間での振る舞いがかかなり食い違う場合がある。ただこれは物理的にどういう意味をもつのかはよくわからない。また肝心の観測帯域に相当する共鳴周波数から離れた領域の熱雑音はよほど変な system でないかぎり、mode 展開によるものと実はそれほど変わらない結果になっている。

またこのような計算をするときに問題となるのはどのような散逸が存在するのか、そしてその周波数依存性である。例えば第 3 章の図 3.4 のようなモデルでは周波数が高いと散逸は大きくなる。これからの類推により鏡の Q 値を制限しているものが仮にワイヤーと鏡の摩擦であるとしたとき、この摩擦は鏡の共鳴周波数 (10kHz \sim) では大きくその結果 Q 値が小さくなるが、観測帯域 (300Hz) では摩擦は小さくなり、よって熱雑音の実際の値が Q 値と mode 展開から計算したものより小さくなる可能性も否定はできない⁸。

まとめると散逸項の mode 展開は常に可能であるわけではないので、式 (4.99) をもとにした計算は完全に信用できるわけではない。しかし mode 展開によらず計算するときには

- どのような散逸があり、どのような周波数依存性をもつのか。
- そのような散逸をもとに計算したときの熱雑音はどのような周波数依存性をもつのか、またその物理的な意味は何か。

ということを考えることが必要になってくる。つまり実験的にも理論的にも散逸の本質にかなり踏み込んだ研究が必要になってくる。困難と思われるが、熱雑音の正確な推定のために必要な研究である。

6.4.2 実験への要請

今までの議論から Suspension System や鏡の Q 値に関する制限がわかった。これらのうちには容易に実現できないものもあるのでさらなる実験が必要である。また熱雑音の計算のために用いた仮定もある。この仮定も検証しなくてはいけない。このような実験に対する要請を以下にまとめた。

⁷このモデルは第 3 章の接触面の散逸に登場したバネと damper の直列接続モデル (図 3.3) に似ている。

⁸もちろん逆の可能性も否定できない。またそのような system の存在も計算により知られている [72, 73]。

- Pendulum Mode の Q 値の測定と向上、主要散逸要因の特定とその観測帯域での周波数依存性の調査
- Pitch Rotation の Q 値の測定と向上、主要散逸要因の特定とその観測帯域での周波数依存性の調査
- Violin Mode の Q 値は Pendulum Mode 及び Yaw Rotation の Q 値の半分であるかの検証
- 鏡の Q 値の測定と向上、主要散逸原因の特定とその観測帯域での周波数依存性の調査
- 鏡の $n = 1$ モードの Q 値の測定

今までの議論からこの中でも特に鏡の Q 値の測定は重要である。

6.4.3 その他

Hutchinson's Simulation にいくつか問題点がある。他の計画の計算結果と多少ずれていたり、order や周波数が大きいところで多少怪しい振るまいをする。これらはおそらく Hutchinson's Simulation の問題というよりもそれを実行するときの行列式の計算や零点の求め方に問題があると思われる。

また Hutchinson's Simulation は等方的な弾性体を前提としているが、非等方の場合に拡張することも興味深いと思われる。

Appendix A

Suspension System の仕様

ここでは TAMA300 の Suspension System に関する parameter を紹介する。[74] も参照のこと。

A.1 全体図

図 A.1、A.2を参照のこと。

図 4.1、4.2とはかなり違う図であるがこちらの図は parameter の書き込みやすさを最優先した。よって縮小したものではない。図 4.1、4.2は厳密ではないが、大体のサイズを反映している。

A.2 中間 mass を懸架する bellows と wire

一番上には bellows があり、これは

自然長	54 mm
荷重時の長さ	65 mm
バネ定数	500N/m

である。

図 A.1、A.2では省略したが bellows と Tungsten wire の間に高さ 6mm のフランジがある。

その下に Tungsten wire がある。Tungsten は以下のような材質である。

ヤング率	4.0×10^{11} Pa
密度	1.92×10^4 kg/m ³

Tungsten wire は

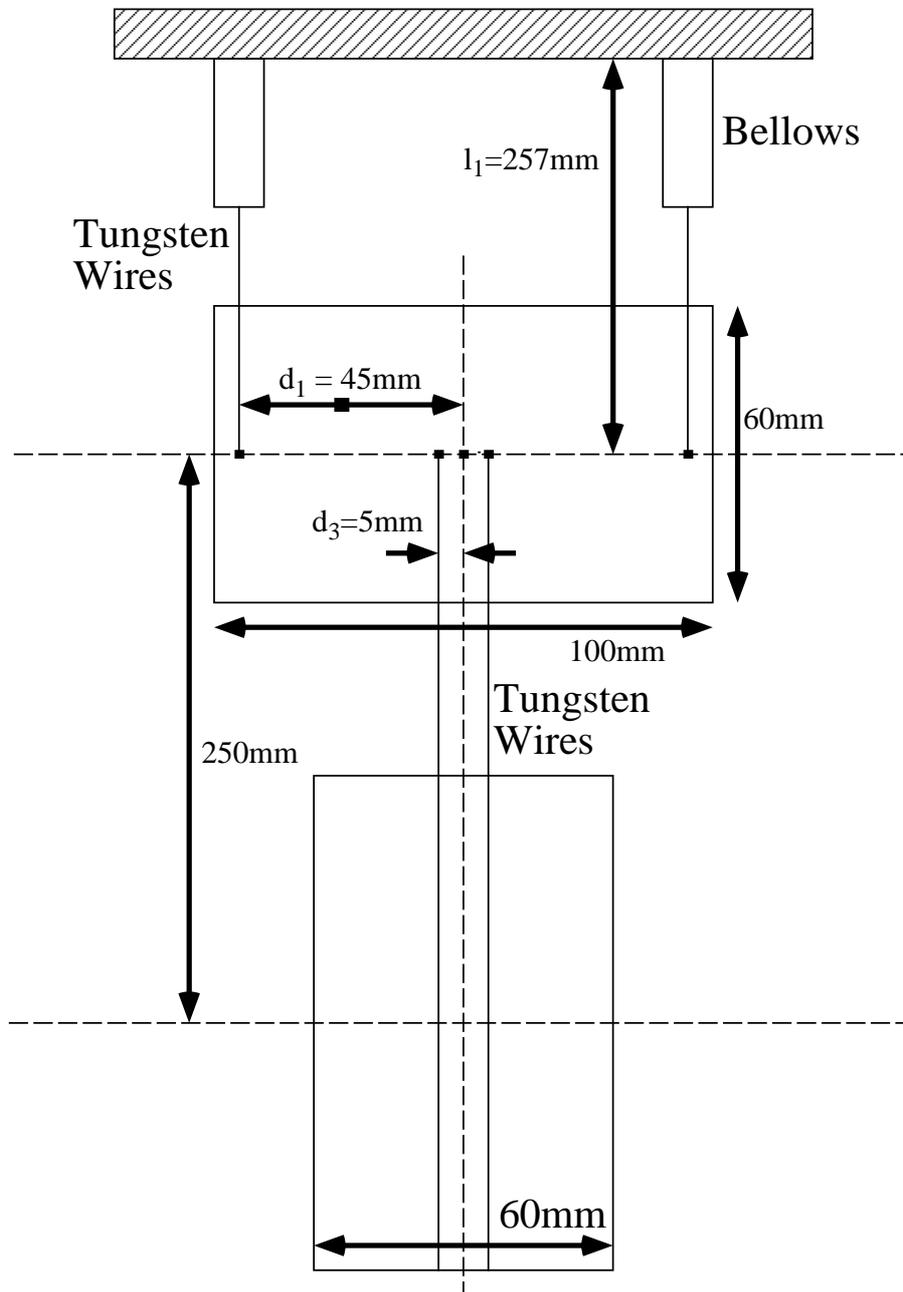


図 A.1: 光軸と垂直な方向から見た Suspension System

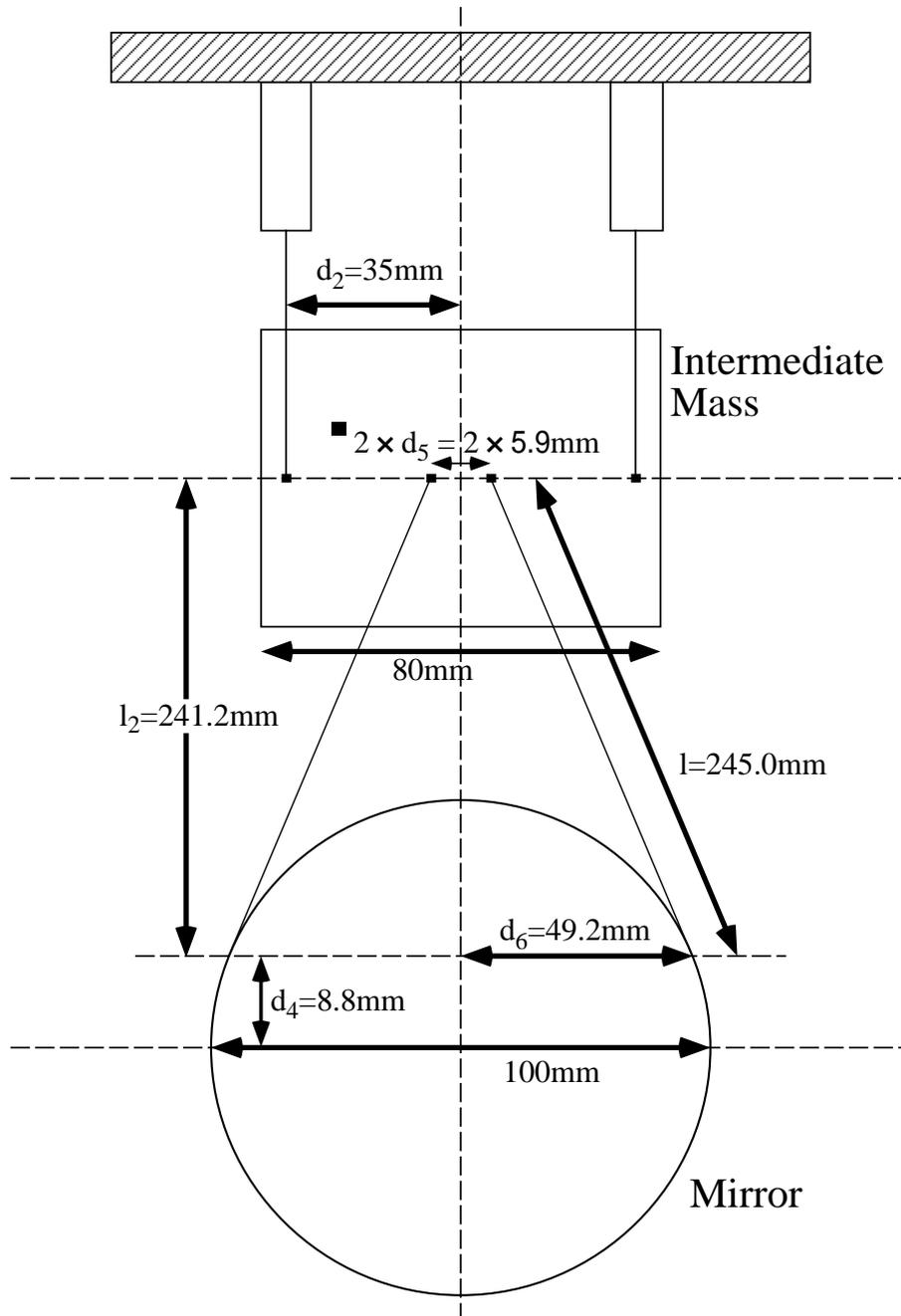


図 A.2: 光軸の方向から見た Suspension System

自然長	185.7 mm
荷重時の長さ	186 mm
直径	100 μm
バネ定数	$1.7 \times 10^4 \text{ N/m}$
線密度	$\rho_1 = 1.51 \times 10^{-4} \text{ kg/m}$
質量	$2.80 \times 10^{-5} \text{ kg}$

Violin Mode を計算するとき以外は中間 mass を懸架しているのは bellows と Tungsten wire の合成バネ 4 本とする。この合成バネの 1 本あたりのバネ定数を k_1 、荷重時の長さを l_1 とすると

自然長	$54+6+185.7=245.7 \text{ mm}$
荷重時の長さ	$l_1 = 65+6+186 = 257 \text{ mm}$
バネ定数	$k_1 = 486 \text{ N/m}$

Violin Mode を計算するときには bellows は振動せず、Tungsten wire のみ振動するとして計算する。wire の長さ $l_{1 \text{ wire}}$ はすでに登場したが

$$\text{荷重時の長さ } l_{1 \text{ wire}} = 186 \text{ mm}$$

A.3 中間 mass

アルミで作られている。

質量	$M_1 = 1.211 \text{ kg}$
Roll Rotation の慣性モーメント	$I_{1 \text{ Roll}} = 1.01 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Pitch rotation の慣性モーメント	$I_{1 \text{ Pitch}} = 1.37 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Yaw Rotation の慣性モーメント	$I_{1 \text{ Yaw}} = 1.65 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$

A.4 magnet damping

中間 mass の近くには強力な永久磁石が配置される。これは中間 mass に magnet damping をかけるためである。これにより中間 mass が並進運動すると速さに比例した抵抗力がかかる。その比例定数を Γ とすると、その大きさは防振からの要請により以下のような値になる [74]。

$$\Gamma = 15 \text{ kg/s}$$

この値から Pendulum Mode と Vertical Vibration における Q_1 (magnet damping による Q 値) を計算することができる。 Q_1 の定義より

$$\Gamma = \frac{M_1 \omega_1}{Q_1} \quad (\text{A.1})$$

が成立するからである。但し M_1 は中間 mass の質量、 ω_1 は Pendulum Mode もしくは Vertical Vibration の ω_1 である。

また magnet damping により中間 mass が回転運動すると、角速度に比例したトルクが働く。その比例係数を Γ_{rot} とする。これは Γ と以下のような関係にある [74]。但し I_1 は中間 mass の慣性モーメントである。

$$\Gamma_{\text{rot}} = \frac{I_1}{M_1} \Gamma \quad (\text{A.2})$$

具体的に Roll、Pitch、Yaw Rotation の Γ_{rot} を計算した。

$$\begin{aligned} \text{Roll Rotation} \quad \Gamma_{\text{rot Roll}} &= 1.70 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2/\text{s} \\ \text{Pitch rotation} \quad \Gamma_{\text{rot Pitch}} &= 1.25 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2/\text{s} \\ \text{Yaw Rotation} \quad \Gamma_{\text{rot Yaw}} &= 2.04 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

これらから以下の式を使って Roll、Pitch、Yaw Rotation の Q_1 を計算することができる。

$$\Gamma_{\text{rot}} = \frac{I_1 \omega_1}{Q_1} \quad (\text{A.3})$$

A.5 damping magnet support

damping magnet support は着磁性 SUS でできており、懸架されている。詳しい寸法は図 A.3 を参照のこと。この中に中間 mass が入る。懸架のためのクランプなどはここでは考慮していない。

また質量や慣性モーメントは以下の通り。

質量	$M_m = 0.670 \text{ kg}$
Roll Rotation の慣性モーメント	$I_{\text{m Roll}} = 1.22 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Pitch rotation の慣性モーメント	$I_{\text{m Pitch}} = 1.57 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Yaw Rotation の慣性モーメント	$I_{\text{m Yaw}} = 2.51 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$

なおこれは damping magnet は考慮していない。damping magnet は 1 個 $2.84 \times 10^{-2} \text{ kg}$ である。8 個あるので計 0.227 kg となる。

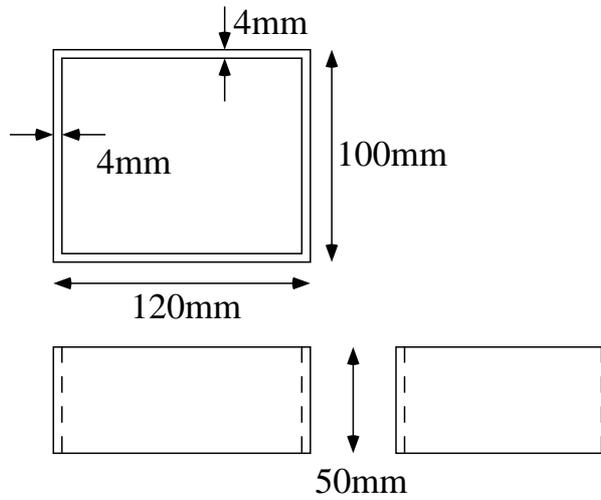


図 A.3: damping magnet support

A.6 鏡を懸架する wire

鏡は Tungsten wire で懸架される。バネ定数を k_2 、荷重時の長さを l とすると

自然長	244.2 mm
荷重時の長さ	$l=245$ mm
直径	50 μm
バネ定数	$k_2 = 3.22 \times 10^3$ N/m
線密度	$\rho_2 = 3.77 \times 10^{-5}$ kg/m
質量	$m = 9.24 \times 10^{-6}$ kg

またこの wire が鉛直な方向となす角を θ とすると

$$\cos^{-1}\left(\frac{l_2}{l}\right) = 0.177713\text{rad}$$

である。

A.7 鏡

鏡は Fused Silica で作られている。

質量	$M_2 = 1.034$ kg
Roll Rotation の慣性モーメント	$I_{2 \text{ Roll}} = 1.29 \times 10^{-3}$ kg m ²
Pitch rotation の慣性モーメント	$I_{2 \text{ Pitch}} = 9.56 \times 10^{-4}$ kg m ²
Yaw Rotation の慣性モーメント	$I_{2 \text{ Yaw}} = 9.56 \times 10^{-4}$ kg m ²

Appendix B

散逸として magnet damping のみを考えた Double Pendulum の Violin Mode の impedance

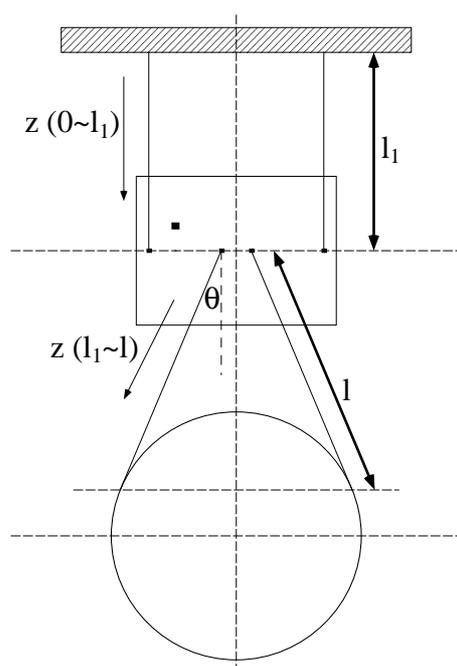


図 B.1: 座標の定義

図 B.1を見てほしい。pendulum の支点を座標原点にし、鉛直下向きに z 軸をとる。中間 mass、鏡ともに光軸方向 (x 軸とする。) にのみ運動すると考える。つまり回転は考えない。 $z = l_1$ に中間 mass が存在するとし、 $z = l_1 + l$ に鏡が存在すると定義する。また鏡

を吊すワイヤーは斜めになっているが、そこでは z 軸はワイヤーに平行にとる。さらにワイヤーと鉛直な直線がなす角を θ とおく。

中間 mass を吊すワイヤーの変位と鏡を吊すワイヤーの変位をそれぞれ u_1, u_2 とする。

$$u_1(z, t) = f_1(z) \exp(i\omega t) \quad (\text{B.1})$$

$$u_2(z, t) = f_2(z) \exp(i\omega t) \quad (\text{B.2})$$

ここで

$$f_1(z) = A \exp(ik_1 z) + B \exp(-ik_2 z) \quad (\text{B.3})$$

$$f_2(z) = C \exp(ik_2 z) + D \exp(-ik_2 z) \quad (\text{B.4})$$

でありさらに

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} \quad (\text{B.5})$$

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2} \quad (\text{B.6})$$

である。 v_1, v_2 は中間 mass と鏡を吊すワイヤーの横波の速さである。中間 mass と鏡を吊すワイヤーの線密度を ρ_1, ρ_2 、張力を F_1, F_2 とすると

$$v_1 = \sqrt{\frac{F_1}{\rho_1}} \quad (\text{B.7})$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{F_2}{\rho_2}} \quad (\text{B.8})$$

となる。

まず境界条件を考える。天井の支点は固定されているので $u_1(z, t) = 0$ つまり $f_1(z) = 0$ 。よって $B = -A$ となるので

$$f_1(z) = 2iA \sin(k_1 z) \quad (\text{B.9})$$

となる。

さらに中間 mass において $u_1(l_1, t) = u_2(l_1, t)$ つまり $f_1(l_1) = f_2(l_1)$ となるので

$$2iA \sin(k_1 l_1) = C \exp(ik_2 l_1) + D \exp(-ik_2 l_1) \quad (\text{B.10})$$

中間 mass に関する運動方程式は (中間 mass にかかる水平方向の力はワイヤーの張力の水平成分のみ)

$$M_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{z=l_1} = -4F_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=l_1} + 4F_2 \cos \theta \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=l_1} \quad (\text{B.11})$$

F_1, F_2 は

$$F_1 = \frac{(M_1 + M_2)g}{4} \quad (\text{B.12})$$

$$F_2 = \frac{M_2g}{4 \cos \theta} \quad (\text{B.13})$$

である。

ここで magnet damping を考慮する。すると式 (B.11) は

$$M_1 \left. \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right|_{z=l_1} = -4F_1 \left. \frac{\partial u_1}{\partial z} \right|_{z=l_1} + 4F_2 \cos \theta \left. \frac{\partial u_2}{\partial z} \right|_{z=l_1} - M_1 \frac{\omega_{1p}}{Q_1} \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{z=l_1} \quad (\text{B.14})$$

となる。但し

$$\omega_{1p} = \sqrt{\frac{(M_1 + M_2)g}{M_1 l_1}} \quad (\text{B.15})$$

つまり double pendulum の ω_1 、つまり式 (4.75) である。

次に鏡の運動方程式を考える。散逸は考えないので

$$M_2 \left. \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right|_{z=l_1+l} = -4F_2 \cos \theta \left. \frac{\partial u_2}{\partial z} \right|_{z=l_1+l} + f(t) \quad (\text{B.16})$$

$f(t)$ は鏡にかかる外力。

式 (B.14)(B.16) をフーリエ変換し、 $\exp(-i\omega t)$ をかけると¹

$$\begin{aligned} & -\omega^2 M_1 2iA \sin(k_1 l_1) \\ & = -(M_1 + M_2)g 2k_1 iA \cos(k_1 l_1) + M_2 g i k_2 [C \exp(ik_2 l_1) - D \exp(-ik_2 l_1)] \\ & \quad - M_1 \frac{\omega_{1p}}{Q_1} i\omega 2iA \sin(k_1 l_1) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} & -\omega^2 M_2 [C \exp\{ik_2(l_1 + l)\} + D \exp\{-ik_2(l_1 + l)\}] \\ & = -M_2 g i k_2 [C \exp\{ik_2(l_1 + l)\} - D \exp\{-k_2(l_1 + l)\}] + \tilde{f} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

式 (B.17)(B.18) の2式を解けば C, D を求めることができる。

結果は以下の通り。

$$\begin{aligned} C = & \left[\left(-\frac{\omega v_2 M_1 \sin(k_1 l_1)}{M_2 g} + \frac{M_1 + M_2}{M_2} \frac{v_2 \cos(k_1 l_1)}{v_1} \right) \right. \\ & \left. + i \sin(k_1 l_1) \left(1 + \frac{M_1 \omega_{1p} v_2}{Q_1 M_2 g} \right) \right] \exp(-ik_2 l_1) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

¹このとき式 (B.3)(B.4) (B.9)(B.10) (B.12)(B.13) を考慮する。

$$D = \left[- \left(- \frac{\omega v_2 M_1 \sin(k_1 l_1)}{M_2 g} + \frac{M_1 + M_2}{M_2} \frac{v_2 \cos(k_1 l_1)}{v_1} \right) + i \sin(k_1 l_1) \left(1 - \frac{M_1 \omega_{1p} v_2}{Q_1 M_2 g} \right) \right] \exp(ik_2 l_1) \quad (\text{B.20})$$

ここで $C \rightarrow C \exp(-ik_2 l_1), D \rightarrow D \exp(ik_2 l_1)$ と C, D を定義しなおす。これで C, D は式 (4.101)(4.102) と同じになった。

impedance は外力のフーリエ成分 \hat{f} を鏡の位置のフーリエ成分を $i\omega$ 倍したもので割れば良い。鏡の位置のフーリエ成分は $C \exp(-ik_2 l_1) \exp\{ik_2(l_1 + l)\} + D \exp(ik_2 l_1) \exp\{-ik_2(l_1 + l)\}$ であることと、式 (B.18) を考慮すると impedance は

$$Z_{\text{violin2}}(\omega) = \frac{-\omega^2 M_2 (C e^{ik_2 l} + D e^{-ik_2 l}) + i M_2 g k_2 (C e^{ik_2 l} - D e^{-ik_2 l})}{i \omega [C e^{ik_2 l} + D e^{-ik_2 l}]} \quad (\text{B.21})$$

となる。

Bibliography

- [1] A.Einstein, *Über Gravitationswellen*, S.B.Preuss.Akad.Wiss.154(1916).
- [2] J.Weber, *Evidence for Discovery of Gravitational Radiation*, Phys.Rev.Lett.**22**,1320 (1969).
- [3] J.H.Taylor and J.M.Weisberg, *Further Experimental Tests of Relativistic Gravity Using the Binary Pulsar PSR 1913+16*, Astrophys.J.**345**,434(1989).
- [4] C.M.Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics –Revised Edition–*, Cambridge University Press(1992).
- [5] C.W.Misner, K.S.Thorne and J.A.Wheeler, *Gravitation*, W.H.Freeman and Company(1970).
- [6] B.F.Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press (1985).
- [7] A.Abramovici et al. *LIGO:The Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*, Science,**256**,325(1992).
- [8] A.Brillet et al. *The VIRGO project, final conceptual design* (1992).
- [9] K.Danzmann et al. *GEO600 Proposal for a 600m Laser-Interferometric Gravitational Wave Antenna* (1994).
- [10] TAMA integration group, *TAMA300 Project Design Report* (1996).
- [11] 三尾 典克, 大橋 正健 編, *重力波アンテナ技術検討書 —干渉計ハンドブック—* (1992).
- [12] A.Einstein, *Über die von der molekularkinematischen Theorie der Wärme Geforderte Bewegung von in Ruhenden Flüssigkeiten Suspendierten Teilchen*, Anna.der.Phys.**17**, 549(1905)

- [13] H.Nyquist, *Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors*, Phys.Rev.**32**,110 (1928).
- [14] H.B.Callen and T.A.Welton, *Irreversibility and Generalized Noise*, Phys.Rev.**83**, 34(1951); H.B.Callen and R.F.Greene, *On a Theorem of Irreversible Thermodynamics*, *ibid.***86**,702(1952).
- [15] P.R.Saulson, *Thermal Noise in Mechanical Experiments*, Phys.Rev.D.**42**,2437 (1990).
- [16] V.B.Braginsky and A.B.Manukin, *Measurement of Weak Force in Physics Experiments*, (University of Chicago Press,Chicago,1977).
- [17] V.B.Braginsky, V.P.Mitrofanov and V.I.Panov, *Systems with Small Dissipation*, (University of Chicago Press,Chicago,1985).
- [18] A.L.Kimbell and D.E.Lovell, *Internal Friction in Solids*, Phys.Rev.**30**,948(1927).
- [19] T.J.Quinn, C.C.Speake and L.M.Brown, *Materials Problems in the Construction of Long-period Pendulums*, Philos.Mag.A.**65**,261(1992).
- [20] P.R.Saulson, R.T.Stebbins, F.D.Dumont and S.E.Mock, *The Inverted pendulum as a Probe of Anelasticity*, Rev.Sci.Instrum.**65**,182(1994).
- [21] J.L.Routbort and H.S.Sack, *Background Internal Friction of Some Pure Metals at Low Frequencies*, J.Appl.Phys.**37**,4803(1966).
- [22] C.Zener, *Internal Friction in Solids*, Phys.Rev. **52**,230(1937);*ibid.***53**90(1938).
- [23] 日野 幹雄, *スペクトル解析*, 朝倉書店 (1977).
- [24] A.Gillespie and F.Raab, *Thermal noise in the Test Mass Suspensions of a Laser Interferometer Gravitational-Wave Detector Prototype*, Phys.Lett.A.**178**,357(1993).
- [25] A.Gillespie and F.Raab, *Suspension Losses in The Pendula of Laser Interferometer gravitational-wave detectors*, Phys.Lett.A. **190**.213(1994).
- [26] J.E.Logan, J.Hough and N.A.Robertson, *Aspects of the Thermal Motion of a Mass Suspended as a Pendulum by Wires*, Phys.Lett.A.**183**,145(1993).
- [27] V.B.Braginsky, V.P.Mitrofanov and K.V.Tokmakov, *Energy Dissipation in the Pendulum Mode of the Test Mass Suspension of a Gravitational Wave Antenna*, Phys.Lett.A.**218**164(1996).

- [28] J.Kovalik and P.R.Saulson, *Mechanical Loss in Fibers for Low Noise Pendulum*, Rev.Sci.Instrum.**64**,2942(1993).
- [29] G.I.Gonzalèz and P.R.Saulson, *Brownian Motion of a Mass Suspended by an Anelastic Wire*, J.Acoust.Soc.Am.**96**,207(1994).
- [30] N.Mio, *Mechanical Transfer Function of a Pendulum Suspended with a Finite-Mass Wire*, Jpn.J.Appl.Phys.**31**,1243(1992).
- [31] J.Gao, L.Ju and D.G.Blair, *Design of Suspension Systems for Measurement of High-Q Pendulums*, Meas.Sci.Technol.**6**,269(1995).
- [32] 河邊 径太, 落合 洋敬, 高野 浩一, 坪野 公夫, 連成振動子の逆相振動モードを利用した干渉計型重力波検出器の懸架装置の Q 値測定, 日本物理学会 1996 年秋の分科会, 佐賀大学, 1996.10.8.
- [33] 河邊 径太, 清水 守, 堀越 一雄, A.N.Rakhmanov, 坪野 公夫, 干渉計型重力波検出器の懸架装置の Q 値測定, 日本物理学会 1997 年春の年会, 名城大学, 1997.3.31.
- [34] 清水 守, 振り子の Q 値に関する実験, 1996 年度坪野研特別実験 II レポート.
- [35] 堀越 一雄, ワイヤの Q 値の測定, 1996 年度坪野研特別実験 II レポート.
- [36] E.Coccia, V.Fafone and G.Frossati, *On The Design of Ultralow Temperature Spherical Gravitational Wave Detectors*, Proceedings of the 1st Edoardo Amaldi Conference, June 1994, Rome, World Scientific.
- [37] 松村 純宏, 精密重力実験に用いるファイバーの擬弾性に関する研究, 東京大学修士論文 (1997).
- [38] 枅久保 邦治, double pendulum の共振周波数のとりあえずの計算 (2 次元), 1996.4
- [39] 枅久保 邦治, 熱雑音の寄与, 1996.5.
- [40] 枅久保 邦治, 2 重振り子の mass の回転の熱雑音 (yaw), 1996.5.27.
- [41] 枅久保 邦治, 縦の伸び運動の熱雑音, 1996.5.29.
- [42] 枅久保 邦治, 振り子運動の熱雑音, 1996.5.28.
- [43] 新井 宏二, 高森 昭光, 新谷 昌人, 質点モデルによる 2 重振り子のパラメータ決定, 1996.9.16
- [44] 新井 宏二, 内藤 豊, ワイヤーで吊られた剛体の 3 次元振動解析, 1996.7.29.

- [45] V.N.Rudenko, Private Communication.
- [46] G.W.McMahon, *Experimental Study of the Vibrations of Solid, Isotropic Elastic Cylinders*, J. Acous.Soc.Am.**36**,85(1964).
- [47] J.R.Hutchinson, *Axisymmetric Vibrations of a Free Finite-length Rod*, J.Acoust.Soc. Am.**51**,233(1972).
- [48] S.N.Rasband, *Resonant Vibrations of Free Cylinders and Disks*, J.Acoust.Soc.Am. **57**,889(1975).
- [49] J.R.Hutchinson, *Vibrations of Solid Cylinders*, J.Appl.Mech.**47**,901(1980).
- [50] A.Gillespie and F.Raab, *Thermally Excited Vibrations of the Mirrors of laser Interferometer Gravitational-wave Detectors*, Phys.Rev.D.**52**,577(1995).
- [51] A.Gillespie, *Thermal Noise in the Initial LIGO Interferometer*, Ph.D Thesis.
- [52] J.K.Blackburn, to be published in *Proceedings of the Banach semester on Mathematical Aspects of Gravitational Waves, March 1996, Warsaw, Poland*.
- [53] F.Bondu and J-Y.Vinet, *Mirror Thermal Noise in Interferometric Gravitational-Wave Detectors*, Phys.Lett.A.**198**,74(1995).
- [54] J.E.Logan, J.Hough and R.D.Thomson, *Thermal Motion Associated with Monolithic Fused Silica Cradle Suspensions for Gravitational Wave Detectors*, Phys.Lett.A.**218**, 181(1996).
- [55] S.Traeger, B.Willke and K.Danzmann, *Monolithically suspended fused silica substrates with very high mechanical Q*, Phys.Lett.A.**225**,39(1997).
- [56] H.Yamamoto, Private Communication.
- [57] 椿 信也, 円柱弾性体の固有振動の解析, 1994 年度坪野研特別実験 I レポート.
- [58] 山元 一広, 円柱弾性体の振動モードのシミュレーション, 1994 年度坪野研特別実験 I レポート.
- [59] 尾田 欣也, 鏡の共鳴振動の Q 値測定, 1995 年度坪野研特別実験 I レポート.
- [60] 成田 哲博, 鏡の共鳴振動の Q 値測定, 1995 年度坪野研特別実験 I レポート.
- [61] 竹田 晃人, 重力波検出器用反射鏡の材料別の共鳴振動 Q 値測定, 1995 年度坪野研特別実験 II レポート.

- [62] 寺嶋 容明, 円柱形弾性体の振動モードの数値解析, 1995 年度坪野研特別実験 II レポート.
- [63] 山元 一広, 重力波検出器の鏡の熱雑音 (縮小版), 1996.5.26.
- [64] 山元 一広, TAMA の mirror の Q 値の下限について, 1996.12.16.
- [65] L.Landau and E.Lifshitz, 弾性理論, 東京図書.
- [66] TAMA Workshop on Gravitational Wave Detection, Saitama, Japan, November 12-14, 1996.
- [67] S.Whitcomb, *Optics development for LIGO*, TAMA Workshop on Gravitational Wave Detection, Saitama, Japan, November 14, 1996.
- [68] P.R.Saulson, *Prospects for Low Thermal Noise in Gravitational Wave Interferometers*, TAMA Workshop on Gravitational Wave Detection, Saitama, Japan, November 12, 1996.
- [69] A.Brillet, *Status of VIRGO project*, TAMA Workshop on Gravitational Wave Detection, Saitama, Japan, November 13, 1996.
- [70] L.Gammaitoni, *Thermal noise limit to the VIRGO sensitivity*, TAMA Workshop on Gravitational Wave Detection, Saitama, Japan, November 12, 1996.
- [71] J.Hough, *GEO600*, TAMA Workshop on Gravitational Wave Detection, Saitama, Japan, November 13, 1996.
- [72] 小川 雄二郎,E.Majorana, 干渉計型重力波検出器における熱雑音, 日本物理学会 1997 年春の年会, 名城大学,1997.3.31.
- [73] 坪野 公夫, 非一様分布したロスによる熱雑音 (輪講資料), 1997.4.22.
- [74] 新井 宏二, 基線長 300m レーザー干渉計型重力波検出器のための懸架システムの開発, 東京大学修士論文 (1997).
- [75] 大石 奈緒子, 干渉計型重力波検出器に用いる鏡の Q 値測定, 東京大学修士論文 (1997).

Acknowledgment

本研究を行なうにあたって多くの方々にお世話になりました。

東京大学理学部物理学科の坪野 公夫先生には修士課程の2年間はもちろんのこと学部4年の学生実験のときから大変お世話になりました。そもそも Hutchinson's Simulation は学生実験の課題でした。そのように遅々として進まないプログラム開発を忍耐強く、指導し続けてくださいました。

坪野研究室助手の河邊 径太氏にも大変お世話になりました。大変お忙しい身にもかかわらず筆者の様々の疑問に対して常に親身かつ的確な助言をしてくださいました。

坪野研究室研究員の李 瑛氏にも様々な助言を頂きました。

博士課程3年の近藤 尚人氏と博士課程1年の安東 正樹氏と朽久保 邦治氏には研究室の先輩として研究、実験はもちろんのことその他の様々な点でも助言や援助を頂きました。特に朽久保氏は Suspension System の運動方程式導出に尽力を注いで頂きました。

修士課程2年の新井 宏二氏とは Suspension System に関して色々と有益な議論をすることができました。また計算機に疎い筆者は氏の豊富な知識に何度となくお世話になりました。

同じく修士課程2年の大石 奈緒子氏にも貴重な意見を頂きました。とくに鏡の Q 値の測定を行なっている氏の意見をもとに研究に有益なフィードバックをかけることができました。

修士課程1年の佐々木 愛一郎氏、高森 昭光氏、内藤 豊氏からも役立つ意見を頂きました。特に三氏の Suspension System に関するレポートは本研究において指針となりました。

東京大学工学部の三尾 典克先生には学生実験のときから大変お世話になり、常に様々な助言や激励を頂きました。

工学部三尾研究室助手の森脇 成典氏からも様々な援助を頂きました。

東京大学地震研究所助手の新谷 昌人氏にも大変お世話になりました。Suspension System のとりまとめを行なっている氏の意見は大変参考になりました。

試作室の大塚 茂巳氏は実験道具の工作において非常にお世話になりました。

その他にも TAMA300 の関係者の方々に大変お世話になりました。特に防振-懸架サブワーキンググループ会議 (VIST300) では有益な議論をかわすことができ、非常に参考に

なりました。

また Moscow State University の V.N.Rudenko 教授と A.N.Rakhmanov 氏は筆者の拙い英語に我慢して、熱雑音の議論につきあってくださいました。

最後になりますが学生実験のパートナーだった椿 信也氏と同じく坪野研究室で学生実験を行なった竹田 晃人氏と寺嶋 容明氏にも大変お世話になりました。Hutchinson's Simulation のプログラム開発という学生実験においてパートナーの椿氏とは様々な貴重な議論を交わすことができました。また竹田氏と寺嶋氏は椿氏と筆者の開発を継続して行ない、非常に完成度の高いプログラムを製作してくれました。

以上の方々に実際的な面でも精神的な面でも支えてくださったおかげで研究を遂行することができました。深くお礼を申し上げます。