

修士論文

ねじれ型重力波望遠鏡のための機械散逸の評価

(Evaluation of Mechanical Loss for Torsion-Bar Gravitational-Wave
Antenna)

東京大学 大学院理学系研究科 物理学専攻
山口由貴

2026 年 1 月 5 日 第 1 版提出

2026 年 1 月 26 日 最終版提出

ねじれ型重力波望遠鏡のための機械散逸の評価
(Evaluation of Mechanical Loss for Torsion-Bar Gravitational-Wave Antenna)

山口 由貴

目次

第 1 章	イントロダクション	4
1.1	重力波測定について	4
1.2	重力波測定における熱雑音について	4
1.3	先行研究について	4
1.4	本研究の目的と概要	5
1.5	本論文の構成	5
第 2 章	重力波とその検出	7
2.1	重力波の導出	7
2.2	重力波の性質	10
2.3	重力波源	16
2.4	重力波の検出	18
第 3 章	熱雑音	19
3.1	ねじれ型重力波望遠鏡 の原理	19
3.2	揺動散逸定理 (FDT) と損失モデル	23
3.3	Q 値と熱雑音	27
3.4	ねじれ振りの熱雑音	31
第 4 章	実験内容	33
4.1	概要	33
4.2	実験装置	33
4.3	測定方法	40
4.4	解析手法	41
第 5 章	実験結果	43
5.1	測定条件と結果一覧	43
5.2	代表リングダウン例	43
5.3	最適トルクの模索	44
5.4	低温下での測定	46
第 6 章	考察	49
6.1	表面損失の検討	49
6.2	クランプ損失の検討	51
6.3	モード混入・モードカップリングの評価	52
6.4	不確かさ・系統誤差の整理	54
6.5	熱雑音への含意	56
6.6	改善策の優先順位と総合感度への展望	58
第 7 章	まとめ	61

7.1	本研究で得られた知見	61
7.2	熱雑音への含意	61
7.3	今後の課題と展望	61
参考文献		64

第 1 章

イントロダクション

1.1 重力波測定について

重力波とは、質量を持った物体が運動した際に光速で伝わる時空のゆがみであり、アインシュタインの一般相対性理論により 1916 年に存在が予想された。重力波の効果は非常に小さいため、実際に観測することは困難であると考えられていたが、技術の発展により 2015 年に初めて観測することができた。重力波を通じて宇宙を観測することで、一般相対性理論の検証や連星中性子星などの強い重力場での物理現象を確かめることができると考えられている。また、重力波は全ての物質を貫通し、減衰しないことから、宇宙の初期の情報の取得なども期待されている。

重力波の観測方法として、重力波は直交する 2 つの方向の空間のうち片方を伸ばし、もう片方を縮めるという変化を引き起こし、また、光は重力波によって歪んだ空間に沿って進むという性質があることから、マイケルソン干渉計を用いた検出器が用いられている。マイケルソン干渉計を用いた検出器として、現在は KAGRA や LIGO などが主要なものとなっている。

重力波を検出するにあたり、大きな課題の一つとなるのが地面振動によるノイズであり、これは特に 10Hz 以下の低い周波数で顕著となっている。地面振動の影響を減らし、より低周波で高い感度を得るための重力波検出器として提案されているのが、ねじれ振子を用いた測定器の TOBA である。KAGRA などのレーザー干渉計型重力波検出器では、干渉計の 2 つの腕の長さの変化を読み取ることで重力波を検出するのに対し、TOBA では、重力波からの潮汐力によって 2 本の棒が差動回転するのを読み取ることで重力波を検出する。

1.2 重力波測定における熱雑音について

重力波の測定において、もう一つ重要なことは熱雑音を低減することである。一般に、特定の周波数で物体が振動するような状況では、自由電子などのブラウン運動に伴うノイズが発生する。この熱雑音の大きさは、温度と物体固有の Q 値に依存して決まる。熱雑音を小さくするためには、低温下で実験を行うとともに、なるべく Q 値の大きい物体でシステムを構成する必要がある。

KAGRA のような方式の重力波検出器に関して特に問題となる熱雑音は、懸架された鏡の振り子モードのものとなっている。KAGRA では、鏡とそれを懸架するファイバーの素材として、ごく低温下で Q 値の高いサファイアを用いているが、振り子モードの Q 値は正確に測定されていない。一方、ねじれ型重力波望遠鏡については同様にサファイアファイバーで懸架されたねじれ振子のねじれモードの Q 値も測定する必要がある。

1.3 先行研究について

物質そのものの Q 値測定に比べて、上述の振り子モードやねじれモードなどの Q 値測定の先行研究は少ない。サファイア結晶の場合については、Ching Pin によるねじれ振子のねじれモードの Q 値測定結果が得られている。しかし、ここで得られた Q 値は最大で 1.3×10^5 となっており、ねじれ型重力波望遠鏡で目標としている 10^8 程度には及んでいない。サファイア結晶自体の Q 値である 2.6×10^8 に対して、ねじれモードの Q 値がこれほど低くなる原因として、彼は主に以下の要因を挙げている。

- サファイアファイバーの表面構造に起因する損失
- クランプ点での摩擦による損失
- ねじれ振子モードに逃げたエネルギー分の損失

このうち、クランプ点での損失については正確な測定が難しいこと、振子モードとの関係については理論的な計算方法が確立されておらず不明な点が多い。さらに、ねじれ振子は本質的に多自由度系であり、ねじれモードのリングダウンを観測する際にも、並進モードや傾きモード、支持構造の揺れなどが弱く結合することで、観測される減衰が真の散逸だけでは決まらない可能性がある。例えば、ねじれモードに励起したエネルギーが他モードへ移り、その後の読み出しに混入する場合、見かけの包絡線は単純な単一指数からずれることがある。また、たとえ指数減衰が保たれて見えても、モード間の弱い結合によって実効的な減衰が増大し、結果として見かけの Q 値が過小評価され得る。したがって、ねじれ型重力波望遠鏡に必要な高い Q を実現するためには、表面・クランプ起因の散逸を低減することに加え、モード分離やアライメントを改善し、測定される Q 値の再現性と解釈可能性を高めることが重要である。

1.4 本研究の目的と概要

前節で述べたように、サファイア結晶の内部損失が十分に小さい場合でも、実際のねじれ振子では表面状態、クランプ点での摩擦・すべり、および他モードとの結合などにより、ねじれモードの Q 値が大きく低下し得る。ねじれ型重力波望遠鏡では熱雑音が低周波感度の本質的制限となるため、ねじれ振子の Q 値を実験的に把握し、支配的損失機構の候補を整理した上で、 Q 向上に向けた改善指針を与えることが重要である。

本研究の目的は、ねじれ型重力波望遠鏡の懸架系として想定されるサファイアファイバーねじれ振子について (1) リングダウン測定によりねじれモードの Q 値を定量し、(2) 測定手順・装置条件に依存して変動し得る要因（特にクランプ条件とモード混入）を整理し、(3) 熱雑音低減および将来的な低温化に向けた課題と改善の優先順位を明確化することである。

本研究では上記目的のために以下を行った。

1. サファイアファイバーで懸架したねじれ振子を用意し、真空中でリングダウン測定を行える実験系を構築した。
2. モード混入が Q 値推定に与える影響を重要課題として位置づけ、支持構造の剛性向上による周波数分離の促進や、ねじれモード選択的励起のための運用上の工夫を導入した。
3. 取得した時系列データから、共振周波数 f_0 と減衰時定数 τ を推定し、 $Q = \pi f_0 \tau$ により Q 値を算出する解析手順を整備した。
4. 真空度や締結トルクなどの条件を変えて測定を行い、常温・真空中で得られる Q 値の代表値の大きさとばらつきを与えうる条件を確認した。

以上より、本研究はねじれ振子型重力波望遠鏡の熱雑音低減に向けた Q 値測定の基盤を整備し、先行研究で未解決であった損失源の切り分けに対して、クランプ条件とモード混入の観点から実験的制約を与えることを目指す。

1.5 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。

第2章では、一般相対論に基づく重力波の導出と性質、主要な重力波源、および干渉計型検出器を中心とした重力波検出の基礎をまとめる。

第3章では、重力波検出器における雑音源の概観を与えた上で揺動散逸定理と損失モデル（粘性減衰・構造減衰）を導入し、 Q 値と熱雑音の関係を整理する。さらに、ねじれ型重力波望遠鏡の原理と等価ひずみ雑音の評価方法を述べ本研究で扱う Q 値測定の意義を位置づける。

第4章では、ねじれ振子の実験装置（真空槽、クランプ、アクチュエータ、支持構造）と、リングダウン測定の手順、ならびに周波数推定・包絡線抽出・指数フィットに基づく解析パイプラインと Q 値算出法を記述する。

第 5 章では、リングダウン測定により得られた Q 値の結果を示す。測定条件と推定パラメータの一覧、代表的なリングダウン例、および条件（真空度・締結トルク等）による Q の変化を整理する。

第 6 章では、第 5 章の結果を基に、支配的損失機構の候補を検討する。特にクランプ損失、表面損失、モード混入・非指数減衰の可能性を議論し、不確かさ評価を踏まえて結論の頑健性を確認する。また、測定された Q 値を用いて改善策の優先順位を提案する。

第 7 章では、本研究で得られた知見をまとめ、今後の展望を述べる。

第2章

重力波とその検出

2.1 重力波の導出

2.1.1 計量テンソルと測地線方程式

一般相対性理論によると、四次元時空内の2点 $x^\mu = (ct, x, y, z)$ と $x^\mu + dx^\mu$ の距離 ds は次のように与えられる。

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1.1)$$

ここで、 $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルと呼ばれ、時空の局所ごとの性質を表すテンソルとなっている。

重力場の存在しない平坦な時空 (Minkowski 時空) では、計量テンソルは次のようになり、Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ と表される。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

すなわち、この時2点 $x^\mu = (ct, x, y, z)$ と $x^\mu + dx^\mu$ の距離は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1.3)$$

$$= -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (2.1.4)$$

となる。計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は時空の幾何学的性質を定めるため、重力以外の外力を受けず時空に沿って運動する、自由質点の性質を求めることができる。自由質点が運動して描く軌跡は測地線と呼ばれ、次の測地線方程式に従うことが知られている。

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.1.5)$$

ここで、 τ は質点の静止系での時間変化 (固有時間) である。 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ は Christoffel 記号と呼ばれ、以下のように定義されている。

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \equiv \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\beta\delta} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} g_{\alpha\delta} - \frac{\partial}{\partial x^\delta} g_{\alpha\beta} \right) \quad (2.1.6)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} (g_{\beta\delta,\alpha} + g_{\alpha\delta,\beta} - g_{\alpha\beta,\delta}) \quad (2.1.7)$$

2.1.2 Einstein 方程式

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は次の Einstein 方程式に従うことが知られている。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.1.8)$$

ここで、 $R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソル、 R は Ricci スカラーと呼ばれるものである。これらは四次元時空における Riemann 多様体の曲率を表すテンソルである、Riemann テンソル $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ を縮約し、成分を減らしたものとなっており、それぞれ次のように定義されている。

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \frac{\partial}{\partial x^\delta} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} \Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu} \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \quad (2.1.9)$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \quad (2.1.10)$$

$$R \equiv R^\mu_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.1.11)$$

また、Einstein 方程式 (2.1.8) における $T_{\mu\nu}$ は、時空におけるエネルギーと運動量の分布を表すエネルギー運動量テンソルである。

2.1.3 Einstein 方程式の線形近似

重力場が十分弱い場合、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を、Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ と時空の歪み $h_{\mu\nu}$ の和で表し、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.1.12)$$

Einstein 方程式 (2.1.8) に代入して $h_{\mu\nu}$ の非線形な項を無視することで、アインシュタイン方程式の線形近似をすることができる。

具体的に計算をしていく。 $\eta_{\mu\nu}$ は定数なので、

$$g_{\mu\nu,\alpha} = \eta_{\mu\nu,\alpha} + h_{\mu\nu,\alpha} \quad (2.1.13)$$

$$= h_{\mu\nu,\alpha} \quad (2.1.14)$$

であることに注意すると、Christoffel 記号は (2.1.6) より、

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} (g_{\beta\delta,\alpha} + g_{\alpha\delta,\beta} - g_{\alpha\beta,\delta}) \quad (2.1.15)$$

$$= \frac{1}{2} (\eta^{\gamma\delta} - h^{\gamma\delta}) (h_{\beta\delta,\alpha} + h_{\alpha\delta,\beta} - h_{\alpha\beta,\delta}) \quad (2.1.16)$$

$$= \frac{1}{2} \eta^{\gamma\delta} (h_{\beta\delta,\alpha} + h_{\alpha\delta,\beta} - h_{\alpha\beta,\delta}) + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.1.17)$$

$$\sim \frac{1}{2} (h^\gamma_{\beta,\alpha} + h^\gamma_{\alpha,\beta} - h^\gamma_{\alpha\beta}) \quad (2.1.18)$$

と書ける。これを Riemann テンソル (2.1.9)、Ricci テンソル (2.1.10)、Ricci スカラー (2.1.11) に代入することで、線形近似した式を得ることができる。

まず、Riemann テンソルを計算する。 $\Gamma\Gamma = \mathcal{O}(h^2)$ であるので、式 (2.1.9) より、

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \sim \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \quad (2.1.19)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\partial_\gamma (h^\alpha_{\delta,\beta} + h^\alpha_{\beta,\delta} - h^\alpha_{\beta\delta}) - \partial_\delta (h^\alpha_{\gamma,\beta} + h^\alpha_{\beta,\gamma} - h^\alpha_{\beta\gamma}) \right) \quad (2.1.20)$$

$$= \frac{1}{2} (h^\alpha_{\delta,\beta\gamma} - h^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - h^\alpha_{\gamma,\beta\delta} + h^\alpha_{\beta\gamma,\delta}) \quad (2.1.21)$$

となる。これを用いて Ricci テンソルを計算する。行列のトレースを $h \equiv h^\alpha_\alpha$ とし、d'Alembert 演算子を $\square \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha$ とすると、式 (2.1.10) より、

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \sim \frac{1}{2} (h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} - h^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - h^\alpha_{\alpha,\mu\nu} + h^\alpha_{\mu\alpha,\nu}) \quad (2.1.22)$$

$$= \frac{1}{2} (h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h^\alpha_{\mu\alpha,\nu}) \quad (2.1.23)$$

と計算できる。Ricci スカラーは、式 (2.1.11) より

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sim \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h^\alpha_{\mu\alpha,\nu}) \quad (2.1.24)$$

$$= \frac{1}{2} (h^{\alpha\mu}_{,\mu\alpha} - \square h - \square h + h^{\alpha\mu}_{,\mu\alpha}) \quad (2.1.25)$$

$$= h^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - \square h \quad (2.1.26)$$

となる。

こうして得られた Ricci テンソル、Ricci スカラーを Einstein 方程式 (2.1.8) に代入することで、線形化されたアインシュタイン得ることができる。 $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h)$ であることに注意すると、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.1.27)$$

$$\iff \frac{1}{2}(h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h_{\mu\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}}{}_{,\nu}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \square h) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.1.28)$$

$$\iff h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} + h_{\mu\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}}{}_{,\nu} - \eta_{\mu\nu}(h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \square h) = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.1.29)$$

と計算できる。

表式の簡約化のため、

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.1.30)$$

として、式 (2.1.29) に代入する。

$$h_{\nu}^{\mu} = \bar{h}_{\nu}^{\mu} + \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}h \quad (2.1.31)$$

より、

$$h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} = \bar{h}_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} + \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\alpha}h_{,\mu\alpha} \quad (2.1.32)$$

$$= \bar{h}_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} + \frac{1}{2}h_{,\mu\nu} \quad (2.1.33)$$

と計算できる。同様に、

$$h_{\mu\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}}{}_{,\nu} = \bar{h}_{\mu\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}}{}_{,\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}h_{,\nu}^{\alpha} \quad (2.1.34)$$

$$= \bar{h}_{\mu\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}}{}_{,\nu} + \frac{1}{2}h_{,\mu\nu} \quad (2.1.35)$$

また、

$$\square h_{\mu\nu} = \square(\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) \quad (2.1.36)$$

$$= \square\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h \quad (2.1.37)$$

$$\eta_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}(\bar{h}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h)_{,\alpha\beta} \quad (2.1.38)$$

$$= \eta_{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h \quad (2.1.39)$$

であるので、式 (2.1.29) は $\bar{h}$ を用いて、

$$h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} + h_{\mu\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}}{}_{,\nu} - h_{,\mu\nu} - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \square h) \quad (2.1.40)$$

$$= (\bar{h}_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} + \frac{1}{2}h_{,\mu\nu}) + (\bar{h}_{\mu\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}}{}_{,\nu} + \frac{1}{2}h_{,\mu\nu}) - h_{,\mu\nu} - (\square\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h) - (\eta_{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h) + \eta_{\mu\nu}\square h \quad (2.1.41)$$

$$= \bar{h}_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} + \bar{h}_{\mu\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}}{}_{,\nu} - \square\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} \quad (2.1.42)$$

より、

$$\bar{h}_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} + \bar{h}_{\mu\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}}{}_{,\nu} - \square\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.1.43)$$

と表すことができる。

さらに、 h には座標の選び方の任意性が残っているが、ここでは計算の簡単のため以下の Lorenz gauge 条件を課す。

$$\partial^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.44)$$

この時、式 (2.1.43) は、

$$-\square \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.1.45)$$

となる。この式により、エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を発生源として時空のゆがみ $\bar{h}_{\mu\nu}$ が伝搬することがわかる。これが重力波である。

2.2 重力波の性質

2.2.1 重力波の伝搬

重力波の発生源から十分離れた場所での波の伝搬は、物質の寄与 $T_{\mu\nu}$ は無視できるため、真空中のアインシュタイン方程式を考えればよい。このとき、式 (2.1.45) は、

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.2.1)$$

となり、解は平面波の形

$$\bar{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (2.2.2)$$

で表すことができる。

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ や $h_{\mu\nu}$ は添字に入れ替えに関して対称であるため、その線型結合である $\bar{h}_{\mu\nu}$ も対称である ($\because$ (2.2.63))。したがって、平面波の振幅である $a_{\mu\nu}$ も対称である。

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \quad (2.2.3)$$

また、(2.2.2) を Lorenz gauge 条件 (2.1.44) に代入すると、

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.2.4)$$

$$\iff ik^\nu a_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) = 0 \quad (2.2.5)$$

$$\iff a_{\mu\alpha} k^\alpha = 0 \quad (2.2.6)$$

が得られる。この式は、摂動は進行方向に直交しており、重力波が横波であることを意味している。

その他に、(2.2.2) より、 $\square \exp(ik \cdot x) = -k_\alpha k^\alpha \exp(ik \cdot x)$ であることから

$$-k_\alpha k^\alpha a_{\mu\nu} = 0 \quad (2.2.7)$$

$$\iff k_\alpha k^\alpha = 0 \quad (2.2.8)$$

も成り立つ。この式は、重力波には質量がなく光速で伝わることを意味している。

さらに、まだ残っている座標変換に対する任意性を用いて、計算の簡単のため Transverse Traceless (TT) gauge 条件

$$h_{0\alpha} = 0 \quad (2.2.9)$$

$$h = h^j_j = 0 \quad (2.2.10)$$

$$\partial_j h^{jk} = 0 \quad (2.2.11)$$

を課す。この条件のもとでは、(2.2.63) より、 $h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta}$ である。重力波の伝搬方向を z 軸方向とすると、 $k_\alpha = (\omega, 0, 0, \omega/c)$ となる。また、TT gauge 条件 (2.2.9) より平面波の振幅も

$$a_{0\alpha} = a_{\alpha 0} = 0 \quad (2.2.12)$$

また、横波条件 (2.2.6) に $k_\alpha = (\omega, 0, 0, \omega/c)$ を代入すると、

$$\omega a_{\mu 0} + \frac{\omega}{c} a_{\mu 3} = 0 \quad (2.2.13)$$

$$\iff a_{\mu 3} = a_{3\mu} = 0 \quad (\because (2.2.12)) \quad (2.2.14)$$

となる。したがって、 $a_{\mu\nu}$ のうち、0,3 の添字を含む成分はすべて 0 であるとわかる。

残りの 4 成分を求める。対称性 (2.2.3) より $a_{12} = a_{21}$ である。また、TT gauge のトレース 0 の条件 (2.2.10) より、

$$a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \quad (2.2.15)$$

$$\iff a_{11} = -a_{22} \quad (2.2.16)$$

とわかる。ここで二つの独立な関数 $h_+, h_\times$ を次のように定義する。

$$h_+ \equiv a_{11} = -a_{22} \quad (2.2.17)$$

$$h_\times \equiv a_{12} = a_{21} \quad (2.2.18)$$

すると、 $a_{\mu\nu}$ は以下のような行列で表せる。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.19)$$

h_+ と $h_\times$ のそれぞれに対応するモードはプラスモード、クロスモードと呼ばれる。これらにより、一般相対性理論における重力波は光速で伝搬し、二つのモードを持つことがわかった。

2.2.2 TT gauge 条件下での自由質点への影響

TT gauge の条件を満たすような座標で議論を行なうにあたって、自由質点の描像を考える。これは平坦な時空で静止している質点を考えることに対応している。

質点が $\tau = 0$ に静止 ($dx^\mu/d\tau|_{\tau=0} = (1, 0, 0, 0)$) しているとして、自由質点の従う測地線方程式を考えると、 $\tau = 0$ のとき

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.2.20)$$

$$\iff \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{00} \quad (2.2.21)$$

となる。重力が十分弱いとき、 $g^{\mu\nu} \sim \eta^{\mu\nu}$ であるので、Christoffel 記号 (2.1.6) を展開すると、

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{00} \quad (2.2.22)$$

$$\iff \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\delta} \left(\frac{\partial h_{0\delta}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{\delta 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\delta} \right) \quad (2.2.23)$$

TT gauge では、(2.2.9) より、右辺の各項が 0 になって、

$$\left. \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (2.2.24)$$

を得る。この式は、 $\tau = 0$ では粒子は力を受けず、その後の時間発展においても静止していることを表している。すなわち、TT gauge は重力の効果が計量の歪み h_{ij} にのみ現れ、座標加速度は消えるような座標であるとわかる。

そのため、TT gauge を用いて重力波の影響を調べるためには、座標の選び方に依存しない固有距離を考える必要がある。同時刻に存在する近接した 2 つの粒子の座標を $(0, 0, 0, 0)$ と $(0, \epsilon, 0, 0)$ とおくと、この 2 点間の固有距離は、

$$\delta l = \int |ds^2|^{1/2} \quad (2.2.25)$$

$$= \int |g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|^{1/2} \quad (2.2.26)$$

$$= \int_0^\epsilon |g_{11}|^{1/2} dx^1 \quad (2.2.27)$$

$$\sim |g_{11}|^{1/2} \epsilon \quad (2.2.28)$$

$$\sim \left(1 + \frac{1}{2} h_{11}\right) \epsilon \quad (2.2.29)$$

となる。よって、2点間の距離は h_{11} に依存し、重力波の影響で変化することがわかる。

2.2.3 実験室系での自由質点への影響 (proper detector frame)

実際に重力波観測を行なう座標は TT gauge ではないため、実験室系における重力波の影響を考える必要がある。そこで、重力波の波長が 1000km 程度と検出器の大きさに比べて非常に長いことから、重力波の波長よりも十分小さな領域のみを考えたものを実験室系とみなすことができる。このようにして得られる実験室系を proper detector frame と呼ぶ。

時空上の点 x と、そこから微小距離 ξ だけ離れた点 $x + \xi$ を考える。これらの点における測地線方程式はそれぞれ

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.2.30)$$

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x + \xi) \frac{d(x^\alpha + \xi^\alpha)}{d\tau} \frac{d(x^\beta + \xi^\beta)}{d\tau} = 0 \quad (2.2.31)$$

となる。これらの式の差をとるために (2.2.31) を整理する。Christoffel 記号は座標の関数であるので、Taylor 展開をすることができ、

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x + \xi) = \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) + \xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) + \mathcal{O}(\xi^2) \quad (2.2.32)$$

となる。また、速度の項については

$$\frac{d(x^\alpha + \xi^\alpha)}{d\tau} \frac{d(x^\beta + \xi^\beta)}{d\tau} = \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} + \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\beta}{d\tau} + \frac{d\xi^\beta}{d\tau} \right) \quad (2.2.33)$$

$$= \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d\xi^\beta}{d\tau} + \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \mathcal{O}(\xi^2) \quad (2.2.34)$$

であるので、(2.2.31) は ξ の一次の項まで残して展開すると

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \left(\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) + \xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) \right) \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d\xi^\beta}{d\tau} + \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) = 0 \quad (2.2.35)$$

$$\iff \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d\xi^\beta}{d\tau} + \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) + \xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.2.36)$$

となる。ここで、今回は微小領域を考えているため、時空が局所的には平坦 $g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu}$ であると近似できる。そのため、計量の空間微分である Christoffel 記号 (2.1.6) はゼロであるとみなすことができる (ただし、 $\partial_\alpha \Gamma$ はゼロではない)。これを用いると、(2.2.31) は

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.2.37)$$

となる。また、(2.2.30) は

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (2.2.38)$$

となる。これらの微小距離だけ離れた測地線方程式の差をとることで、測地線偏差方程式が得られる。

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = -\xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (2.2.39)$$

また、実験室系は光速に比べて十分ゆっくり動いている $\dot{x}^i \ll \dot{x}^0 = c$ と近似できるため、(2.2.39) の時空座標の微分 $\dot{x}^\alpha, \dot{x}^\beta$ については第 0 成分のみを考えればよく、

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = -\xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma^\mu_{00}(x) \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} \quad (2.2.40)$$

$$\iff \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = -c^2 \xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma^\mu_{00}(x) \quad (2.2.41)$$

この式を Riemann テンソル (2.1.9) を用いて表す。Riemann テンソルの添字を $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\mu, 0, \sigma, 0)$ とすると、

$$R^\mu_{0\sigma 0} = \partial_\sigma \Gamma^\mu_{00} - \partial_0 \Gamma^\mu_{0\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{00} - \Gamma^\mu_{0\lambda} \Gamma^\lambda_{0\sigma} \quad (2.2.42)$$

$$(2.2.43)$$

となる。ここで、Christoffel 記号はゼロとみなすことができることから、後半 2 つの $\Gamma\Gamma$ の項は無視できる。また、座標 x の位置を局所慣性系の基準点にとっており、そこでは $\partial_0 \Gamma^\mu_{0\sigma}(0) = 0$ となることが知られているため、2 項目もゼロとなる。よって、Riemann テンソルの 1 項目のみが残り

$$R^\mu_{0\sigma 0} = \partial_\sigma \Gamma^\mu_{00} \quad (2.2.44)$$

となる。そのため、測地線偏差方程式 (2.2.41) は Riemann テンソルを用いて

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = -c^2 \xi^\sigma R^\mu_{0\sigma 0} \quad (2.2.45)$$

と表すことができる。Riemann テンソルは、時空の歪み $h_{\mu\nu}$ を用いて (2.1.21) のように書けるため、まずはこの式を整理する。

$$R^\mu_{0\sigma 0} = \frac{1}{2} (h^\mu_{0,0\sigma} - h_{00}{}^{,\mu}{}_{,\sigma} - h^\mu_{\sigma,00} + h_{00}{}^{,\mu}{}_{,\sigma}) \quad (2.2.46)$$

TT gauge では $h_{0\alpha} = 0$, $\partial^j h_{ij} = 0$, $h^i_i = 0$ なので

$$h^\mu_0 = 0, h_{0\sigma} = 0, h_{00} = 0 \quad (2.2.47)$$

よって、Riemann テンソルの第 1,2,4 項はゼロとなり

$$R^\mu_{0\sigma 0} = -\frac{1}{2} h^\mu_{\sigma,00} \quad (2.2.48)$$

とわかる。また、 $x^0 = ct$ であるので

$$\partial_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.2.49)$$

$$\partial_0^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.2.50)$$

であることに注意すると、Riemann テンソルは

$$R^\mu_{0\sigma 0} = -\frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 h^\mu_{\sigma}}{\partial t^2} \quad (2.2.51)$$

と表すことができる。これを測地線偏差方程式 (2.2.45) を代入すると、

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = -c^2 \xi^\sigma \left(-\frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 h^\mu_{\sigma}}{\partial t^2} \right) \quad (2.2.52)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h^\mu_{\sigma}}{\partial t^2} \xi^\sigma \quad (2.2.53)$$

ここで、実験室系は基準点 x の観測者の固有時 τ を t と同一視する座標である。そのため基準点に十分近い領域では、一次の精度では固有時 τ はそのまま t に置き換えることができる。 t での偏微分をドットで表すと、proper detector frame での測地線偏差方程式は最終的に次のように表せると導くことができた。

$$\ddot{\xi}^i = \frac{1}{2} \ddot{h}^i_j \xi^j \quad (2.2.54)$$

よって、この式に両辺に質量 m を掛け合わせることで、自由粒子が重力波によって受ける力

$$F^i = \frac{1}{2} m \ddot{h}^i_j \xi^j \quad (2.2.55)$$

を求めることができた。これが重力波が質点に及ぼす潮汐力である。

2.2.4 重力波の偏波

proper detector frame での測地線偏差方程式を用いて、重力波によって自由粒子間の距離がどのように変化するかを調べる。測地線偏差方程式 (2.2.54) の、 $t \rightarrow \infty$ で発散しない解は次のように与えられることが知られている。

$$\delta \xi^i = \frac{1}{2} h^i_j \xi^j \quad (2.2.56)$$

重力波による時空の歪み $h_{\mu\nu}$ は、重力波が z 軸方向に伝搬するとき ($k_\alpha = (\omega, 0, 0, \omega/c)$)、プラスモード、クロスモードの2つのモードを用いて式 (2.2.2)、(2.2.19) で表されるため、これらを用いて ξ^i の変化量を求めることができる。重力波が z 軸方向に伝搬するとき、位相因子は

$$\exp[ik_\alpha x^\alpha] = \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \quad (2.2.57)$$

となり、複素数の実部が物理量となる。また、重力波は横波であるため、 x, y 成分のみを考えればよく、この時の振幅は

$$a_{\mu\nu} = h_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + h_\times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.58)$$

であるため、これらを (2.2.56) に代入すると、

$$\begin{pmatrix} \delta \xi_x \\ \delta \xi_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[h_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + h_\times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \quad (2.2.59)$$

$$= \frac{1}{2} h_+ \begin{pmatrix} \xi_x \\ -\xi_y \end{pmatrix} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] + \frac{1}{2} h_\times \begin{pmatrix} \xi_y \\ \xi_x \end{pmatrix} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \quad (2.2.60)$$

となり、重力波による質点の距離の変化が得られた。この式の2つの項はそれぞれプラスモード、クロスモードに対する質点の変化を表している。これらのモードによる質点の変化を図示すると次のようになる。

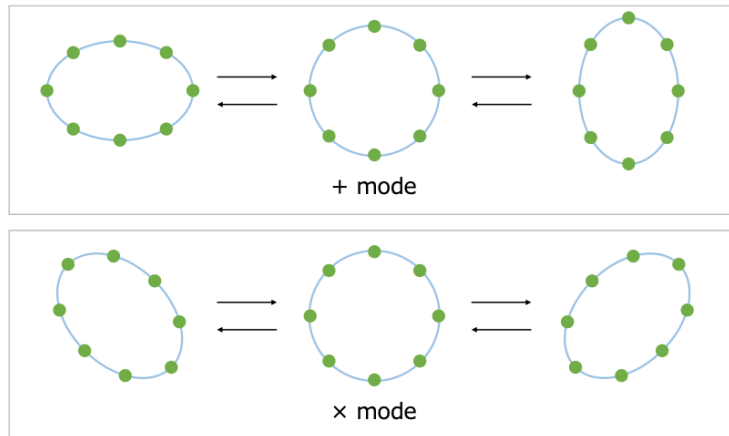


図 2.1 重力波の偏波 [18]

2.2.5 重力波の放射

前節までは、重力波の影響によって自由質点がどのように変化するか、受け手である検出器側の応答を調べた。この節では反対に、重力波源から放出される波 $h_{\mu\nu}$ がどのような運動から生まれるのかを Einstein 方程式を用いて調べる。

線形化された Einstein 方程式 (2.1.45) は波動方程式であるため、一般解は次のように与えられる。

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}' \quad (2.2.61)$$

重力波源の速度が光速よりも十分遅い場合、波源内での重力波の位相は一定であると近似でき、また、重力波源と観測者の距離 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ が重力波の波長と比べて十分遠方である場合、重力波源での積分区間では $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ は一定であると近似できる。波源と観測者の距離を r とすると、

$$\frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \sim \frac{T_{\mu\nu}(t - r/c, \mathbf{x}')}{r} \quad (2.2.62)$$

であるため、

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \sim \frac{4G}{c^4 r} \int T_{\mu\nu}(t - r/c, \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' \quad (2.2.63)$$

となる。

エネルギー運動量保存 $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ から四重極公式を導く。 Q_{ij} を

$$Q_{ij}(t) \equiv \int x_i x_j T_{00}(t, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad (2.2.64)$$

と定義する。ここで、添字 i, j は空間成分のみをとる ($i, j = 1, 2, 3$)。この時、 $Q_{ij}(t)$ の時間微分は、 $\partial^t T_{00} + \partial^k T_{k0} = 0$ より

$$\dot{Q}_{ij}(t) = \int x_i x_j \partial^t T_{00}(t, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad (2.2.65)$$

$$= - \int x_i x_j \partial^k T_{k0}(t, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad (2.2.66)$$

ここで、発散定理

$$\int_V f \partial^k g_k d^3 \mathbf{x} = \oint_{\partial V} f g_k n^k dS - \int_V (\partial^k f) g_k d^3 \mathbf{x} \quad (2.2.67)$$

を $f = x_i x_j, g_k = T_{k0}$ とすることで用いることができる。このとき表面項 $\oint f g dS$ は十分遠い境界では $T_{\mu\nu}$ を無視できるため、ゼロと近似してよく、

$$\dot{Q}_{ij}(t) = \int \partial^k (x_i x_j) T_{k0} d^3 \mathbf{x} \quad (2.2.68)$$

となる。また、 $\partial^k (x_\mu x_\nu) = \delta_\mu^k x_\nu + x_\mu \delta_\nu^k$ であるので、

$$\dot{Q}_{ij}(t) = \int (x_i T_{j0} + x_j T_{i0}) d^3 \mathbf{x} \quad (2.2.69)$$

とわかる。

これをさらに時間微分する。 $\partial^t T_{00} + \partial^k T_{k0} = 0$ より

$$\ddot{Q}_{ij} = \int (x_j \partial^t T_{i0} + x_i \partial^t T_{j0}) d^3 \mathbf{x} \quad (2.2.70)$$

$$= - \int (x_j \partial^k T_{ik} + x_i \partial^k T_{jk}) d^3 \mathbf{x} \quad (2.2.71)$$

ここで、発散定理より

$$- \int x_j \partial^k T_{ik} = - \oint x_j T_{ik} n^k dS + \int (\partial^k x_j) T_{ik} d^3 \mathbf{x} \quad (2.2.72)$$

$$= \int \delta_j^k T_{ik} d^3 \mathbf{x} \quad (2.2.73)$$

$$= \int T_{ij} d^3 \mathbf{x} \quad (2.2.74)$$

であり、同様に

$$- \int \partial^k T_{jk} d^3 \mathbf{x} = \int T_{ij} d^3 \mathbf{x} \quad (2.2.75)$$

であるので、

$$\ddot{Q}_{ij} = 2 \int T_{ij} d^3\mathbf{x} \quad (2.2.76)$$

が成り立つと分かる。よって、式 (2.2.63) は、四重極公式

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) \sim \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{ij}(t - r/c) \quad (2.2.77)$$

と表すことができる。

たとえば、重力波が z 軸方向から到来するとき、

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) \sim \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{ij}(t - r/c) \quad (2.2.78)$$

$$Q_{ij}(t) = \int T_{00}(t, \mathbf{x}) \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x^k x^k \right) d^3\mathbf{x} \quad (2.2.79)$$

となる。

以上より、重力波の放射には単極子と双極子は存在せず、最低次は四重極放射であるとわかる。つまり、重力波の波源は物質の非軸対称な運動であるとわかる。

2.3 重力波源

前節で述べた通り、重力波は四重極放射から生まれる。しかし、現在の感度では事実上検出不可能である。一方で、重力波は物質との相互作用が非常に弱く、伝播中にほとんど減衰しないと考えられている。そのため、天体現象によって放射された重力波は宇宙空間を伝播して地球に到達し、観測の対象となりうる。以下では、現在の観測装置で検出可能な振幅をもつ重力波の発生源となりうる天体現象を紹介する。

2.3.1 コンパクト連星合体

通常の恒星に比べて体積あたりの質量が大きい、中性子星やブラックホールなどの天体をコンパクト天体と呼ぶ。これらは単体では半永久的に存続すると考えられているが、コンパクト天体同士で連星系をなす場合、軌道運動によって重力波を放出する。コンパクト連星合体による重力波放出は、次の 3 つの段階に分類することができる。

- インスパイラル
 - 2 つのコンパクト天体が重力相互作用のもとで周回運動をし、四重極放射によって重力波が放出される。この際、エネルギーと角運動量の損失により軌道半径が小さくなり、放出される重力波の振幅と周波数が増加する。このような波形をチャープ (chirp) 波形といい、この段階は Post-Newtonian 展開という手法によって高精度に扱うことができることが知られている。[6]
- 合体
 - 軌道半径が十分小さくなり、連星の合体直前の最後の数周からの 1 つの天体を形成するまでの段階は重力が非常に強く、インスパイラル領域のように Post-Newtonian 近似を用いることができない。この領域では、Post-Newtonian 近似、数値相対論、ブラックホール摂動論といった手法を組み合わせたハイブリッド波形が用いられる。[14]
- リングダウン
 - 合体後は、その天体が減衰しながら固有振動をする段階となる。特に、合体後に出来た天体がブラックホールの場合、準正規モード (quasinormal modes) と呼ばれる振動となる。この減衰が十分となると、重力波の振幅も観測できないほど小さくなる。

これらの段階のうち、振幅が徐々に大きくなるチャープ波形や、合体後のブラックホールの準正規モードは重力波の初検出である GW150914 でも明瞭に観測され、重力波の波形からそれらを確認することができる。

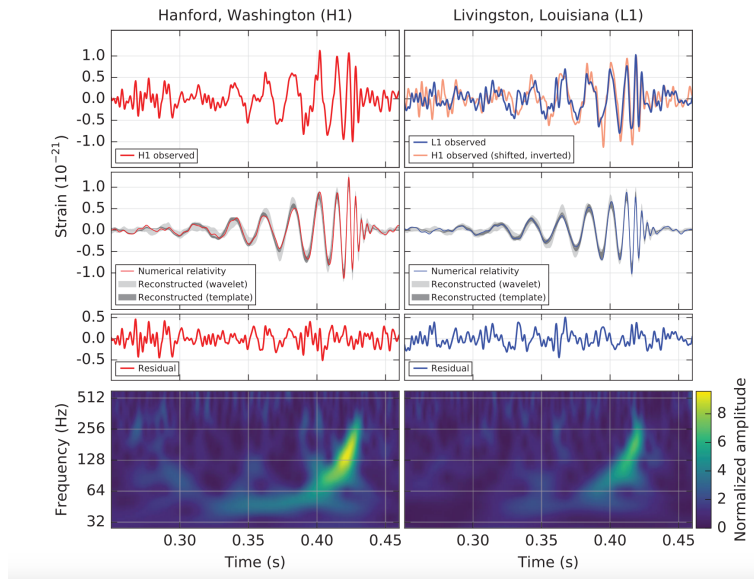


図 2.2 GW150914 の信号 [3]

また、2025 年時点で、今までに検出された重力波は全てコンパクト連星合体によるものである。そのイベント数は、2015 年 9 月から 2020 年 3 月までの 3 期 (O1～O3) で 90 個となっている。2023 年 5 月から 2024 年 1 月の第 4 期観測運転 (O4a) が行われ、128 個の有意な候補がカタログ化 (GWTC-4.0) された。[2] それ以外の天体現象由来の重力波は現時点では未検出となっている。

2.3.2 超新星爆発

超新星爆発とは、星内部の高エネルギー反応などによって起こる爆発のことである。超新星爆発には太陽の 10～100 倍程度の質量をもつ大質量星が重力崩壊によって爆発する重力崩壊型と、白色矮星が周囲の赤色巨星を巻き込んで核融合する 1a 型が存在する。このうち、重力崩壊型の爆発は停滞した衝撃波の再活性化などの様々な要因により、非球対称となることが知られている [12]。爆発による重力波の波形は明らかにはなっていないものの、1kHz 付近の高周波数帯でバースト的に重力波が放射されると考えられている。超新星爆発による重力波を観測できた場合、電磁波では星内部などで散乱、吸収されてしまうような星内部の非球対称な運動についての情報を得られると期待されている。

2.3.3 パルサー

パルサーとは、超新星爆発後に残った中性子星が光速で自転し、パルス状の電磁波を放出しているものである。通常は軸対称な運動をする天体であるが、わずかな凹凸などがある場合、重力波を放出する。パルサーから放出される重力波は、中性子星の時点の周波数 Ω に同期して、主に 2Ω の単色に近い波となる [7]。この重力波を観測することで、パルサーの凹凸などによる非対称度を測定できることなどが期待されている。

2.3.4 背景重力波

背景重力波とは、宇宙のあらゆる方向から来る重力波が重なり合い、個々の重力波源に分離できない状態で観測される重力波信号である。背景重力波の起源として、初期宇宙のインフレーション由来の宇宙論的起源と、後期宇宙のコンパクト連星合体等からの重力波の未分離部分の天文学的起源の 2 つが提唱されている。特に、宇宙論的起源の重力波は、初期宇宙を直接観測することのできる唯一の手段であり、科学的に非常に大きな意義を持つ。

2.4 重力波の検出

現在研究されている重力波観測機について紹介する。

2.4.1 共振型重力波検出器

共振型重力波検出器とは、極低温下で金属の塊を吊り下げ、重力波が通過したときに励起される共振モードを捉えるものである。そのため、観測できる重力波の周波数は共振周波数付近に限られるという性質がある。また、これは 1969 年に Weber によって作成された、世界で初めての重力波検出器でもある。これ以降、アメリカでは「ALLEGRO」、ヨーロッパでは「EXPLORER」「AURIGA」「NAUTILUS」など、様々な共振型重力波検出装置が開発された。

2.4.2 レーザー干渉系型重力波検出器

レーザー干渉系型重力波検出器は、マイケルソン干渉計の両腕の長さの差が重力波によって変化することを利用して、重力波を実際に観測することができた唯一の検出器となっている。共振型重力波検出器に比べて装置の構造が複雑で大規模になるという短所はあるものの、広帯域での検出が可能であるため、現在の重力波検出器の主流となっている。現在、レーザー干渉系型重力波検出器はアメリカの Advanced LIGO、ヨーロッパの Advanced Virgo、日本の KAGRA(O4) が共同観測に参加している。加えて、ドイツの GEO600 も運転・研究を継続している。測定感度を上げるため、これらはいずれも片腕 3km 程度の巨大な干渉系となっていて、その他にも極低温化や多段振り子などさまざまな工夫がなされている。

2.4.3 宇宙重力波望遠鏡

宇宙重力波望遠鏡は、10Hz 程度以下の低周波の重力波に対して高い精度を持つように考案されたものである。宇宙空間ではミラーを懸架する必要はなく、低周波で課題となっている地面振動雑音も存在しないため、地上よりも高い精度で低周波重量を測定できる。現在計画が進んでいるのは、ヨーロッパの LISA や日本の DECIGO、DECIGO のため実証衛星 SILVIA である。これらの宇宙重力波望遠鏡は、例を挙げると、宇宙空間上に 3 台の衛星を打ち上げ、フォーメーションフライトによって数 μm 程度の誤差の範囲で一辺 100m 程度の正三角形を構成する。重力波の観測に向けて、計算コストの軽減などの開発が進んでいる。

2.4.4 パルサータイミングアレイ

パルサーから地球に届く電磁波は周期的 (10ms 前後) であり、その周期の誤差は安定しているものだと 100ns 程度と非常に小さい。重力波が通り過ぎると、時空の歪みによってこの周期がずれるため、このタイミングのずれを測ることで重力波を検出する方法がパルサータイミングアレイである。この方法で重力波を探索するにあたっての課題は、高精度での時間の計測を重力波到来の周期である数十年単位で続けなければならない、重力波以外の寄与による周期のずれを計算して系統誤差を排除しなければならない、などである。しかし、パルサータイミングアレイによって観測できる重力波は 1nHz から 1 μHz の低周波数帯であり、他の方法では観測できない背景重力波を観測することが期待されている。

2.4.5 ドップラートラッキング

ドップラートラッキングとは、地球と宇宙探査機の間を電磁波を往復させることで監視し、重力波の通過によるドップラー効果で周波数ゆらぎを測定する重力波検出方法である。観測周波数帯は 1 μHz から 1 mHz であり、パルサータイミングと同様に主な観測対象は背景重力波である。土星探査機 Cassini が代表的で、数 AU の非常に長い基線長を実現している。

第3章

熱雑音

ねじれ型重力波望遠鏡 TOBA (TOrsion-Bar Antenna) [5] とは、0.1 Hz–10 Hz の周波数帯をターゲットとする地上の重力波望遠鏡である。本章では、ねじれ型重力波望遠鏡の原理、それに伴う熱雑音について装置一般に通用する理論枠組みで整理する。TOBA は水平な棒を吊るしたねじれ振りが重力波によって回転するのを利用して観測を行なう。この回転自由度における熱雑音を、揺らぎ散逸定理と減衰モデルに基づいて定量化する。

3.1 ねじれ型重力波望遠鏡の原理

本節では、ねじれ振子を用いた重力波の検出原理を説明する。まず、重力波の影響下での運動方程式を考えることで、振子が回転することを確認する。次に、ねじれ振子の周波数応答を調べる。

3.1.1 ねじれ型重力波望遠鏡の重力波に対する応答

図 3.1 のような、水平に棒状の試験マスが吊るされたねじれ振子を考える。ねじれ振子の重心を原点にとり、懸架方向を z 軸、試験マスの水平回転面を xy 平面とする。

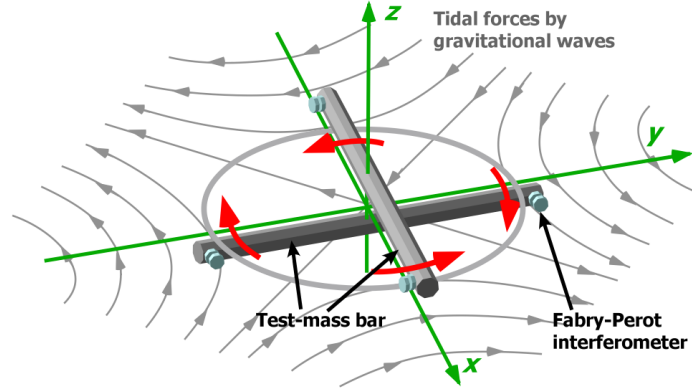


図 3.1 ねじれ型重力波望遠鏡の概略図 [5]

このとき試験マスの z 軸周りの回転 (yaw 回転) の運動方程式は下記のように書ける。ただし、 $I, \gamma, \kappa, N_{\text{ext}}(t)$ はそれぞれ慣性モーメント、散逸、バネ定数、外力によるトルクである。

$$I\ddot{\theta}(t) + \gamma\dot{\theta}(t) + \kappa\theta(t) = N_{\text{ext}}(t) \quad (3.1.1)$$

ここで、 z 軸方向から重力波が到来するときの試験マスの応答を考える。重力波が質点に及ぼす潮汐力は式 (2.2.55) で与えられる。したがって、重心を基準に見た試験マス内の位置ベクトル ξ^j に存在する微小体積 dV に作用する力

F は次のようになる。

$$F^i dV = \frac{1}{2} \rho \ddot{h}_j^i(t) \xi^j dV \quad (3.1.2)$$

ここで、 ρ は試験マスの密度を表す。試験マスのねじれ角を θ とすると、モード関数

$$\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}) = \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\xi} = (-y, x, 0) \quad (3.1.3)$$

が定まる。これは、考えているモードの回転 (ここでは θ) に対して物体中の各点 $\boldsymbol{\xi}$ がどのように動くのかを与えるベクトルである。

これを用いると、仮想変位 $\delta\theta$ に対する試験マス全体の仮想仕事 δW は次のように表せる。

$$\delta W = \int_{V_{\text{試験マス}}} F^i(\boldsymbol{\xi}, t) w_i(\boldsymbol{\xi}) dV \delta\theta \quad (3.1.4)$$

$$= \frac{1}{2} \ddot{h}_j^i(t) \int_{V_{\text{試験マス}}} \rho \xi^j w_i dV \delta\theta \quad (3.1.5)$$

つまり、トルクは

$$N_{\text{GW}}(t) = \frac{1}{2} \ddot{h}_j^i(t) \int_{V_{\text{試験マス}}} \rho \xi^j w_i dV \quad (3.1.6)$$

となる。ここで、行列 S を

$$S_i^j \equiv \int \rho \xi^j w_i dV \quad (3.1.7)$$

と定義する。このとき、 $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}) = (-y, x, 0)$ より、 S の z 成分はゼロとなる。これを用いると、 N_{GW} は

$$N_{\text{GW}}(t) = \frac{1}{2} \ddot{h}_j^i(t) S_i^j \quad (3.1.8)$$

と表すことができる。ここで、重力波の空間成分 h_j^i は対称な行列であるので、 S_i^j を対称成分と反対称成分に分けたとき、反対称成分はゼロとなる。

$$\ddot{h}_j^i(t) \frac{1}{2} (S_i^j - S_j^i) = 0$$

よって、(3.1.8) は S の対称成分のみを取り出して、次のように表せる。

$$N_{\text{GW}}(t) = \frac{1}{2} \ddot{h}_j^i(t) \frac{1}{2} (S_i^j + S_j^i) \quad (3.1.9)$$

$$= \frac{1}{4} \ddot{h}_j^i(t) (S_i^j + S_j^i) \quad (3.1.10)$$

また、 h_j^i はトレースレスであるので、 S のトレース部分をかけあわせたものもゼロとなる。 3×3 行列 A のトレース成分は

$$A_{\text{tr}} = \frac{1}{3} (A_{11} + A_{22} + A_{33}) \quad (3.1.11)$$

$$= \frac{1}{3} \delta_i^j A_k^k \quad (3.1.12)$$

と表せるので、これを S に代入すると、次のようになる。

$$\ddot{h}_j^i(t) \frac{1}{3} \delta_i^j S_k^k = 0 \quad (3.1.13)$$

つまり、トルクの式は

$$N_{\text{GW}}(t) = \frac{1}{4} \ddot{h}_j^i(t) \left((S_i^j + S_j^i) - \frac{2}{3} \delta_i^j S_k^k \right) \quad (3.1.14)$$

と整理することができる。ここで、試験マスのテンソルのうち、対称かつトレースレスな部分は四重極モーメントと呼ばれ、次のように定義される。

$$q_i^j \equiv \int \rho \left(\xi^j w_i + \xi_i w^j - \frac{2}{3} \delta_i^j \xi^k w_k \right) dV \quad (3.1.15)$$

$$= (S_i^j + S_j^i) - \frac{2}{3} \delta_i^j S_k^k \quad (3.1.16)$$

したがって、試験マスのトルクは四重極モーメント q_i^j を用いて

$$N_{\text{GW}}(t) = \frac{1}{4} \ddot{h}_j^i(t) q_i^j \quad (3.1.17)$$

と表すことができる。

四重極モーメントは対称かつトレースレスであるため、

$$q_i^j = \begin{pmatrix} q_+ & q_\times & 0 \\ q_\times & -q_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.18)$$

と表すことができる。また、試験マスの持つポテンシャルエネルギーは

$$N_{\text{GW}}(t) = - \left. \frac{\partial U_{\text{GW}}}{\partial \theta} \right|_t \quad (3.1.19)$$

$$\Rightarrow U_{\text{GW}} = - \int_0^\theta N_{\text{GW}}(t) d\theta \quad (3.1.20)$$

$$= - \int_0^\theta \frac{1}{4} \ddot{h}_j^i(t) q_i^j d\theta \quad (3.1.21)$$

となる。重力波の波長は 1000km 程度と、試験マスの大きさに比べて非常に長いため、積分範囲内では h は θ に依存しないとみなせる。よって、

$$U_{\text{GW}} = - \int_0^\theta \frac{1}{4} \ddot{h}_j^i(t) q_i^j d\theta \quad (3.1.22)$$

$$= - \frac{1}{4} \ddot{h}_j^i(t) q_i^j \theta \quad (3.1.23)$$

となる。

回転方向の運動方程式 (3.1.1)、トルクの式 (3.1.17) より、重力波が到来したときのねじれ振り子の運動方程式は次のように記述されるとわかる。

$$I \ddot{\theta}(t) + \gamma \dot{\theta}(t) + \kappa \theta(t) = \frac{1}{4} \ddot{h}_j^i(t) q_i^j \quad (3.1.24)$$

この回転運動によって、重力波を検出することができる。

3.1.2 ねじれ型重力波望遠鏡の周波数応答

重力波に対するねじれ振り子の周波数応答を考えるため、前節と同様に z 軸方向から重力波が到来した際の試験マスの応答をより詳しく調べる。重力波の空間方向の各成分は (2.2.19) より、

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_+(t) & h_\times(t) & 0 \\ h_\times(t) & -h_+(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.25)$$

と表せる。ここで、空間成分のみを考える際は添字の上下は同一視できることから添字を下向きに統一した。

この式と四重極モーメント (3.1.18) から、試験マスの運動方程式 (3.1.24) を具体的な成分を用いて表すと

$$I \ddot{\theta}(t) + \gamma \dot{\theta}(t) + \kappa \theta(t) = \frac{1}{2} \left(\ddot{h}_+ q_+ + \ddot{h}_\times q_\times \right) \quad (3.1.26)$$

となる。周波数応答を調べるため、この式の両辺をフーリエ変換すると

$$-I\omega^2\tilde{\theta}(\omega) + i\omega\gamma\tilde{\theta}(\omega) + \kappa\tilde{\theta}(\omega) = -\frac{1}{2}\omega^2 \left(\tilde{h}_+(\omega)q_+ + \tilde{h}_\times(\omega)q_\times \right) \quad (3.1.27)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\theta}(\omega) = \frac{\frac{1}{2}\omega^2 \left(\tilde{h}_+(\omega)q_+ + \tilde{h}_\times(\omega)q_\times \right)}{\kappa - I\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (3.1.28)$$

のようになる。各偏波ごとの伝達関数は、他の偏波がゼロのときを考えて、

$$H_\alpha(\omega) \equiv \frac{\tilde{\theta}(\omega)}{\tilde{h}_\alpha(\omega)}, \quad (\alpha = +, \times) \quad (3.1.29)$$

すると、

$$H_\alpha(\omega) = \frac{\frac{1}{2}\omega^2 q_\alpha}{\kappa - I\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (3.1.30)$$

となる。また、共振周波数 ω_0 と Q 値は

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad (3.1.31)$$

$$Q \equiv \frac{\omega_0 I}{\gamma} \quad (3.1.32)$$

のように定まるので、これを用いると、

$$H_\alpha(\omega) = \frac{q_\alpha}{2I} \frac{\omega^2}{\omega^2 - i\omega\omega_0/Q - \omega_0^2} \quad (3.1.33)$$

となり、ねじれ型重力波望遠鏡の周波数応答を式で表すことができた。伝達関数を図示すると次のようになる。

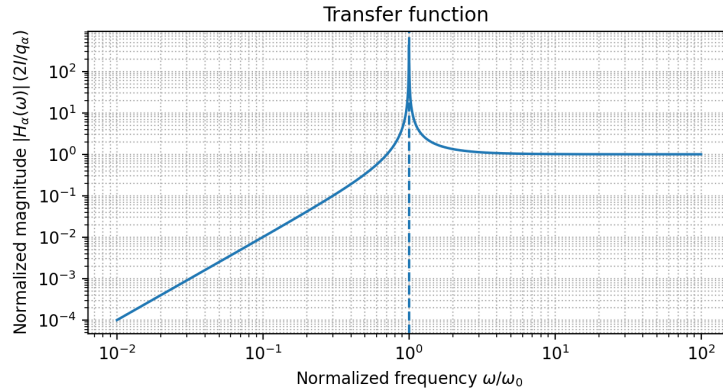


図 3.2 ねじれ型重力波望遠鏡の伝達関数

この系の低周波、高周波での挙動を調べる。

まず、低周波での応答を見る。共振周波数に比べ十分低い周波数帯 $\omega \ll \omega_0$ での伝達関数は

$$\omega^2 - i\omega\omega_0/Q - \omega_0^2 \sim -\omega_0^2 \quad (3.1.34)$$

より、次のようになる。

$$H_\alpha(\omega) \sim -\frac{q_\alpha}{2I} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad (3.1.35)$$

このように、低周波数帯では周波数の二乗に比例して応答が小さくなり、弾性項が支配的である。これは、試験マスが懸架ワイヤーに拘束されていて、角度変化が抑制されるためである。

次に、高周波での応答を見る。共振周波数に比べ十分高い周波数帯 $\omega \gg \omega_0$ での伝達関数は

$$\omega^2 - i\omega\omega_0/Q - \omega_0^2 \sim \omega^2 \quad (3.1.36)$$

より、次のようになる。

$$H_{\alpha}(\omega) \sim \frac{q_{\alpha} \omega^2}{2I \omega^2} \quad (3.1.37)$$

$$= \frac{q_{\alpha}}{2I} \quad (3.1.38)$$

このように、高周波では応答は一定値をとる。これは、1 周期が短く、懸架ワイヤーによる減衰が追いつかなくなり、自由質点のように振る舞うためである。

したがって、感度の良い応答で重力波の観測を行うためには、試験マスが自由質点のように振る舞う高周波数帯での観測が重要となる。そのためには、系の共振周波数を観測したい重力波の周波数よりも低くする必要がある。一般に、回転モードの共振周波数は、従来のレーザー干渉系型重力波検出器で用いている並進モードの共振周波数よりも低いため、ねじれ振りは低周波数帯の重力波観測に有利である。

具体例として、直方体の試験マスが x 軸方向にある場合を考える。この試験マスの x, y, z 軸方向の辺の長さを L, W, H ($L \gg W, H$) とおく。

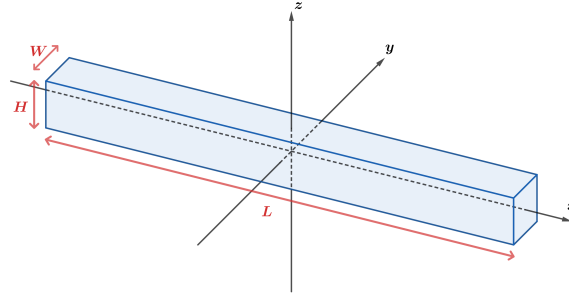


図 3.3 試験マスが x 軸方向にある様子

このとき、モード関数 $w = (-y, x, 0)$ であるので、四重極モーメント (3.1.16) と慣性モーメント I は次のようになる。

$$q_{+} = 0 \quad (3.1.39)$$

$$q_{\times} \sim \int \rho x^2 dV = \frac{1}{12} ML^2 \quad (3.1.40)$$

$$I \sim \int \rho x^2 dV = \frac{1}{12} ML^2 \quad (3.1.41)$$

よって、伝達関数 (3.1.33) は

$$H_{+}(\omega) = 0 \quad (3.1.42)$$

$$H_{\times}(\omega) \sim \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega^2 - i\omega_0\omega/Q - \omega_0^2} \quad (3.1.43)$$

となる。したがって、 x 軸方向に伸びた試験マスは $\times$ モードの重力波にのみ感度をもち、特に高周波極限 $\omega \gg \omega_0$ では

$$|H_{\times}| \sim \frac{1}{2} \quad (3.1.44)$$

の一定値を示すことがわかる。

3.2 揺動散逸定理 (FDT) と損失モデル

揺動散逸定理 (Fluctuation–Dissipation Theorem; FDT) は、散逸によって失われるエネルギーと熱平衡下における自発的ゆらぎを定量的に結び付ける基本原理であり、熱雑音の起源と強度を記述する上で不可欠である。本節で

はまず揺動散逸定理から熱雑音の表式を導出し、ついで粘性減衰モデルおよび構造減衰モデルを例に、機械散逸が熱雑音スペクトルにどのように現れるかを具体的に検討する。

3.2.1 FDT の一般式

揺動散逸定理を用いて熱雑音を導出する。揺動散逸定理は次のような式で与えられる。[\[9\]](#)

$$S_{FF}(\omega) = 2\hbar\omega \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \text{Re}[Z(\omega)] \quad (3.2.1)$$

ここで、 S_{FF} は力のパワースペクトル密度、 $Z(\omega)$ は一般化インピーダンスである。

この式を扱いやすくするため、角振動数 ω の量子調和振動子が温度 T の熱浴と平衡にあるときの、各モード当たりの平均エネルギーを $E(\omega, T)$ とおき、これを求める。

量子調和振動子のエネルギー準位は

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (3.2.2)$$

で、温度 T の正準分布での分配関数 Z は

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \quad (3.2.3)$$

$$= e^{-\beta\hbar\omega/2} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta\hbar\omega})^n \quad (3.2.4)$$

$$= \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \quad (3.2.5)$$

である。よって、平均エネルギーは

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta} \log Z \quad (3.2.6)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\beta} \left[-\frac{\beta\hbar\omega}{2} - \log(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \right] \quad (3.2.7)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad (3.2.8)$$

$$\iff E(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \quad (3.2.9)$$

と求まる。これを揺動散逸定理の式 (3.2.1) に代入すると、

$$S_{FF}(\omega) = 4E(\omega, T) \text{Re}[Z(\omega)] \quad (3.2.10)$$

と書き換えることができる。また、一般化力 F (ねじれ振り子の場合はトルク) の平均二乗は、力のパワースペクトル密度 S_{FF} を周波数で積分したものであるので、

$$\langle F^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_{FF}(f) df \quad (3.2.11)$$

と表せる。これを用いてさらに揺動散逸定理の式を整理すると、以下のよう。

$$\langle F^2 \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} E(\omega, T) \text{Re}[Z(\omega)] d\omega \quad (3.2.12)$$

十分高温であるとき ($k_B T \gg \hbar\omega$)、平均エネルギーは

$$E(\omega, T) \sim k_B T \quad (3.2.13)$$

と近似できる。このとき、式 (3.2.12) は

$$\langle F^2 \rangle = \frac{2k_B T}{\pi} \int_0^\infty \text{Re}[Z(\omega)] d\omega \quad (3.2.14)$$

となる。両辺を周波数 f で微分すると、

$$\frac{d}{df} \langle F^2 \rangle = \frac{2k_B T}{\pi} \frac{d}{df} \left(\int_0^\infty \text{Re}[Z(2\pi f)] d(2\pi f) \right) \quad (3.2.15)$$

$$\Rightarrow d\langle F^2 \rangle = 4k_B T \text{Re}[Z(f)] \cdot df \quad (3.2.16)$$

であるため、 S_{FF} は

$$S_{FF} = 4k_B T \text{Re}[Z(f)] \quad (3.2.17)$$

と表せるとわかる。

また、一般化インピーダンスは系の速度 $\dot{x}$ を用いて以下のように定義されるため、 x を用いて熱雑音を表すことができる。

$$F \equiv Z(\omega) \dot{x} \quad (3.2.18)$$

$$\Longleftrightarrow \dot{x} = Y(\omega) F \quad (3.2.19)$$

ここで、インピーダンスの逆数 $Y(\omega) = 1/Z(\omega)$ はアドミタンスである。また、フーリエ空間での変位は

$$x = \frac{\dot{x}}{i\omega} \quad (3.2.20)$$

であることに注意すると、速度のパワースペクトル密度 $S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega)$ は

$$S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) = |Y(\omega)|^2 S_{FF} \quad (3.2.21)$$

$$= |Y(\omega)|^2 (4k_B T \text{Re}(Z)) \quad (3.2.22)$$

となる。ここで、複素数の恒等式

$$\frac{\text{Re}(Z)}{|Z|^2} = \text{Re} \left(\frac{1}{Z} \right) = \text{Re}(Y) \quad (3.2.23)$$

を用いると

$$S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) = 4k_B T \text{Re}[Y(\omega)] \quad (3.2.24)$$

と表せる。さらに、 $x = \dot{x}/(i\omega)$ なので、

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{\omega^2} S_{\dot{x}\dot{x}}(\omega) \quad (3.2.25)$$

$$= \frac{4k_B T}{\omega^2} \text{Re}[Y(\omega)] \quad (3.2.26)$$

と、熱雑音による位置 x のスペクトルを求めることができる。

ねじれ振り子のように回転する系の場合、 θ に変換すると、

$$S_{\theta\theta}(\omega) = \frac{4k_B T}{\omega^2} \text{Re}[Y_\theta(\omega)] \quad (3.2.27)$$

のように表せる。この式を用いると、アドミタンス $Y(\omega)$ から即座に θ の熱雑音スペクトルが求まる。

3.2.2 損失モデル 1：粘性減衰

粘性減衰 (viscous damping) とは、速度に比例する抵抗によって損失を表す、最もシンプルなモデルである。残留ガスによる気体粘性などがこのような抵抗をもたらす。このモデルでの抵抗は、定数 b を用いて $b\dot{\theta}$ と表せる。よって、運動方程式 (3.1.1) は

$$I\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta} + \kappa\theta(t) = N_{\text{ext}} \quad (3.2.28)$$

となる。つまり、散逸 $\gamma = b$ であるため、共振周波数 ω_0 と Q 値は、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad (3.2.29)$$

$$Q = \frac{I}{\gamma} \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad (3.2.30)$$

$$= \frac{\kappa}{b\omega_0} \quad (3.2.31)$$

と表せる。また、アドミタンスは $Y(\omega)$ 、(3.2.19) より

$$Y(\omega) = \frac{\dot{\theta}}{N_{\text{ext}}} \quad (3.2.32)$$

$$= \frac{\dot{\theta}}{I\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta} + \kappa\theta(t)} \quad (3.2.33)$$

$\theta = (1/i\omega)\dot{\theta}$, $\ddot{\theta} = i\omega\dot{\theta}$ であるので、

$$Y(\omega) = \frac{1}{i\omega I + b + \frac{1}{i\omega}\kappa} \quad (3.2.34)$$

となる。これの実部をとると、

$$\text{Re}[Y(\omega)] = \text{Re} \left[\frac{1}{b + i(\omega I - \kappa/\omega)} \right] \quad (3.2.35)$$

$$(3.2.36)$$

$$= \text{Re} \left[\frac{b - i(\omega I - \kappa/\omega)}{b^2 + (\omega I - \kappa/\omega)^2} \right] \quad (3.2.37)$$

$$= \frac{b}{b^2 + (I\omega - \kappa/\omega)^2} \quad (3.2.38)$$

よって θ のパワースペクトル密度は、(3.2.27) より

$$S_{\theta\theta}(\omega) = \frac{4k_B T}{\omega^2} \frac{b}{b^2 + (I\omega - \kappa/\omega)^2} \quad (3.2.39)$$

と求まる (図 3.4)。

3.2.3 損失モデル 2：構造減衰

構造減衰 (structural damping) とは、復元力が位相遅れをもつことを、フックの法則を一般化した複素ばね定数 $\kappa(1 + i\phi)$ によって表すモデルである。この時の運動方程式 (3.1.1) は

$$I\ddot{\theta}(t) + \kappa(1 + i\phi)\theta = N_{\text{ext}} \quad (3.2.40)$$

となる。これを用いて前節と同様にアドミタンスを求める。

$$Y(\omega) = \frac{\dot{\theta}}{I\ddot{\theta}(t) + \kappa(1 + i\phi)\theta} \quad (3.2.41)$$

$$= \frac{1}{I(i\omega) + \kappa(1 + i\phi) \frac{1}{i\omega}} \quad (3.2.42)$$

$$= \frac{1}{\frac{\kappa\phi}{\omega} + (I\omega - \frac{\kappa}{\omega})i} \quad (3.2.43)$$

であるので、実部をとると

$$\operatorname{Re}[Y(\omega)] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\frac{\kappa\phi}{\omega} + (I\omega - \frac{\kappa}{\omega})i} \right] \quad (3.2.44)$$

$$(3.2.45)$$

$$= \operatorname{Re} \left[\frac{\frac{\kappa\phi}{\omega} - (I\omega - \frac{\kappa}{\omega})i}{\left(\frac{\kappa\phi}{\omega}\right)^2 + (I\omega - \frac{\kappa}{\omega})^2} \right] \quad (3.2.46)$$

$$= \frac{\frac{\kappa\phi}{\omega}}{\left(\frac{\kappa\phi}{\omega}\right)^2 + (\omega I - \frac{\kappa}{\omega})^2} \quad (3.2.47)$$

となる。よって、 θ のパワースペクトル密度は (3.2.27)

$$S_{\theta\theta}(\omega) = \frac{4k_B T}{\omega^2} \frac{\frac{\kappa\phi}{\omega}}{\left(\frac{\kappa\phi}{\omega}\right)^2 + (\omega I - \frac{\kappa}{\omega})^2} \quad (3.2.48)$$

と求まる。

前節で求めた、粘性減衰と構造減衰の熱雑音を比較すると図のようになる。

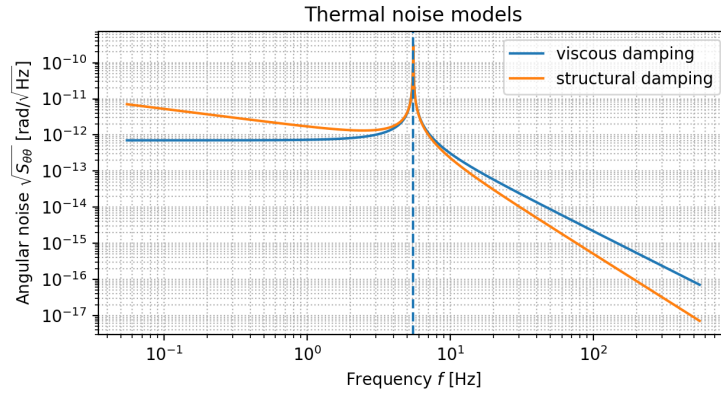


図 3.4 粘性減衰と構造減衰の熱雑音

3.3 Q 値と熱雑音

3.1 節および 3.2 節では、共振の鋭さを表す指標として Q 値を記号的に導入した。本節では、 Q 値の厳密な定義を与え、関連する物理量との関係を整理し、さらに 3.2 節で扱った二つの損失モデルにおける Q 値の振る舞いを具体的に示す。

3.3.1 Q 値の定義

品質係数 Q は、振動のエネルギー散逸の少なさを表す指標として用いられ、次の様に定義される。

$$Q \equiv 2\pi \frac{1 \text{ 周期あたりの保存エネルギー } E}{1 \text{ 周期あたりの散逸エネルギー } \Delta E} \quad (3.3.1)$$

この定義を用いて、3.1 節で表式だけ用いた、粘性減衰での Q 値を導出する。

Q 値を考えるため、外力をゼロとして運動方程式は

$$I\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) + \kappa\theta(t) = 0 \quad (3.3.2)$$

となる。各変位を、定数 A を用いて

$$\theta(t) = A \cos(\omega t) \quad (3.3.3)$$

とすると、

$$\dot{\theta}(t) = -A\omega \sin(\omega t) \quad (3.3.4)$$

$$\langle \dot{\theta}^2 \rangle = \frac{A^2 \omega^2}{2} \quad (3.3.5)$$

となるので、1 周期 $T = 2\pi/\omega$ に失われるエネルギーは

$$\Delta E = \int_0^T b \dot{\theta}^2 dt \quad (3.3.6)$$

$$= b \langle \dot{\theta}^2 \rangle T \quad (3.3.7)$$

$$= b \frac{A^2 \omega^2}{2} \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.3.8)$$

$$= \pi b A^2 \omega \quad (3.3.9)$$

と計算できる。一方で、保存されるエネルギーは最大ポテンシャル

$$E_{st} = \frac{1}{2} \kappa A^2 \quad (3.3.10)$$

であるので、 Q 値は

$$Q \equiv \frac{E_{st}}{\Delta E} = 2\pi \frac{\frac{1}{2} \kappa A^2}{\pi b A^2 \omega} \quad (3.3.11)$$

$$= \frac{\kappa}{b\omega} \quad (3.3.12)$$

$$\sim \frac{\kappa}{b\omega_0} \quad (3.3.13)$$

とわかる。

また、半値幅を用いた表式も導出する。このモデルの運動方程式と伝達関数は、

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \kappa\theta = N \quad (3.3.14)$$

$$H(\omega) \equiv \frac{\tilde{\theta}(\omega)}{N} = \frac{1}{\kappa - I\omega^2 + ib\omega} \quad (3.3.15)$$

であるので、パワーは

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(\kappa - I\omega^2)^2 + (b\omega)^2} \quad (3.3.16)$$

$\omega_0 \sim \sqrt{(\kappa/I)}$ であるので、パワーが最大となるピークは

$$|H|_{\max}^2 \sim \frac{1}{(b\omega_0)^2} \quad (3.3.17)$$

値がピークの半分となる、半値点 $\omega_{\pm}$ は

$$|H(\omega_{\pm})|^2 = \frac{1}{2} |H|_{\max}^2 \quad (3.3.18)$$

$$\iff (\kappa - I\omega_{\pm}^2)^2 + (b\omega_{\pm})^2 = 2(\gamma\omega_0)^2 \quad (3.3.19)$$

ピークが十分鋭いとする、

$$\omega_{\pm} = \omega_0(1 \pm \epsilon), \quad \epsilon \ll 1 \quad (3.3.20)$$

と近似し、一次までの展開によって半値点を表すことができる。このとき、

$$\kappa - I\omega_{\pm}^2 = \kappa - I\omega_0^2(1 \pm \epsilon)^2 \quad (3.3.21)$$

$$= (\kappa - I\omega_0^2) - 2I\omega_0^2(\pm\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.3.22)$$

$$\sim -2I\omega_0^2(\pm\epsilon) \quad (3.3.23)$$

となる。また、周波数が十分大きいことから、周波数の一次の項では ϵ を無視でき、

$$b\omega_{\pm} \sim b\omega_0 \quad (3.3.24)$$

これらの近似を (3.3.19) に代入すると、

$$(2I\omega_0^2\epsilon)^2 + (b\omega_0)^2 = 2(b\omega_0)^2 \quad (3.3.25)$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{b}{2I\omega_0} \quad (3.3.26)$$

$$= \frac{1}{2Q} \quad (3.3.27)$$

と計算できる。つまり、

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right) \quad (3.3.28)$$

$$\Rightarrow \Delta\omega \equiv \omega_+ - \omega_- = \frac{\omega_0}{Q} \quad (3.3.29)$$

である。したがって、 Q 値を半値幅 $\Delta\omega$ を用いて表すと

$$Q \sim \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad \left(= \frac{f_0}{\Delta f}\right) \quad (3.3.30)$$

となる。

3.3.2 面積保存

Q 値が十分大きくスペクトルのピークが鋭いとき、アドミタンスの実部 $\text{Re}[Y(\omega)]$ を積分したものが一定値をとることを示す。粘性減衰では、(3.2.38) より、

$$\text{Re}[Y(\omega)] = \frac{b}{b^2 + (I\omega - \kappa/\omega)^2} \quad (3.3.31)$$

$$(3.3.32)$$

である。共振 $\omega_0 = \sqrt{\kappa/I}$ の周辺では、 $\omega = \omega_0(1 + \epsilon)$, $|\epsilon| \ll 1$ とすると

$$I\omega - \frac{\kappa}{\omega} = I\omega_0(1 + \epsilon) - \frac{\kappa}{\omega_0(1 + \epsilon)} \quad (3.3.33)$$

$$= \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \left((1 + \epsilon) - \frac{1}{1 + \epsilon} \right) \quad (3.3.34)$$

$$\sim 2\epsilon \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad (3.3.35)$$

$$= 2I(\omega - \omega_0) \quad (3.3.36)$$

であるので、アドミタンスの実部は次のように近似できる。

$$\text{Re}[Y(\omega)] \sim \frac{b}{b^2 + 4I^2(\omega - \omega_0)^2} \quad (3.3.37)$$

$$= \frac{1}{2I} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2}, \quad \left(\gamma \equiv \frac{b}{2I} \right) \quad (3.3.38)$$

これを積分したものは、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[Y(\omega)] d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2I} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega \quad (3.3.39)$$

$$= \frac{\pi}{2I} \quad (3.3.40)$$

となり、散逸に依存せずに一定値をとることがわかる。

これは散逸モデルに依らずに常に成り立つことが知られている。実際に構造減衰でも同様の計算を行うと、(3.2.47)より

$$\text{Re}[Y(\omega)] = \frac{\frac{\kappa\phi}{\omega}}{\left(\frac{\kappa\phi}{\omega}\right)^2 + (\omega I - \frac{\kappa}{\omega})^2} \quad (3.3.41)$$

$$\sim \frac{\frac{\kappa\phi}{\omega}}{\frac{\kappa\phi}{\omega^2} + 4I^2(\omega - \omega_0)^2} \quad (3.3.42)$$

$$= \frac{1}{2I} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2}, \quad \left(\gamma \equiv \frac{1}{2I} \frac{\kappa\phi}{\omega_0}\right) \quad (3.3.43)$$

となる。なお、ここでは共振周波数の近傍 $\omega \sim \omega_0$ では $\kappa\phi/\omega \sim \kappa\phi/\omega_0$ と近似できることから、構造減衰のアドミタンスの実部は、粘性減衰の場合の係数 b を $\kappa\phi/\omega$ に置き換えたものとなっていることを用いた。これを積分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[Y(\omega)] d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2I} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega \quad (3.3.44)$$

$$= \frac{\pi}{2I} \quad (3.3.45)$$

となり、確かに粘性減衰のものと一致し、一定値をとる。

また、パワースペクトル密度は (3.2.27) で表され、共振周波数の近傍では $\omega \sim \omega_0$ と近似できるため、

$$\int S_{\theta\theta}(\omega) d\omega \sim \frac{4k_B T}{\omega_0^2} \int \text{Re}[Y(\omega)] d\omega \quad (3.3.46)$$

$$= \frac{4k_B T}{\omega_0^2} \frac{\pi}{2I} \quad (3.3.47)$$

と、熱雑音ピークの面積も減衰のパラメータに依存しないことがわかる。

したがって、 Q 値が十分高い弱減衰の条件下では、共振ピークの高さと線幅が反比例し、面積が保存量と振る舞うことがわかる。この性質を用いて、積分結果が期待値通りになっているかを確認することで、バックグラウンドの補正が適切かどうかの較正をすることができる。

3.3.3 粘性減衰と構造減衰の Q 値

本節では、3.2 節で導入した 2 つの損失モデルに対する Q 値の振る舞いを比較する。

粘性減衰での Q 値は 3.3.1 節で求めた通り、

$$Q = \frac{\kappa}{b\omega} \sim \frac{\kappa}{b\omega_0} \quad (3.3.48)$$

$$\sim \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (3.3.49)$$

となっている。これと比較するため、構造減衰での Q 値も求める。

構造減衰での運動方程式は、損失角 $0 < \phi \ll 1$ を用いて、

$$I\ddot{\theta} + \kappa(1 + i\phi)\theta = 0 \quad (3.3.50)$$

である。 $\theta \propto e^{i\omega t}$ とすると、運動方程式は

$$-I\omega^2 + \kappa(1 + i\phi) = 0 \quad (3.3.51)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \cdot \sqrt{1 + i\phi} \quad (3.3.52)$$

$$\sim \omega_0 \left(1 + \frac{i\phi}{2}\right), \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}\right) \quad (3.3.53)$$

のように解くことができる。よって、固有角周波数の虚部が $\text{Im}[\omega] \sim \omega_0\phi/2$ となっているため、自由減衰の包絡は

$$\theta(t) \propto e^{-(\phi\omega_0/2)t} \cdot \cos(\omega_0 t + A) \quad (3.3.54)$$

のように表せることがわかる。したがって、減衰率 $\gamma = \phi\omega_0/2$ であり、一般に $Q = \omega_0/2\gamma$ であるので、

$$Q = \frac{\omega_0}{2(\phi\omega_0/2)} = \frac{1}{\phi} \quad (3.3.55)$$

と求まる。

また、半値幅と Q 値の関係についても調べる。構造減衰の伝達関数は、

$$H(\omega) = \frac{\theta(\omega)}{N(\omega)} = \frac{1}{\kappa(1 + i\phi) - I\omega^2} \quad (3.3.56)$$

であるので、この大きさの二乗は

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(\kappa - I\omega^2)^2 + (\kappa\phi)^2} \quad (3.3.57)$$

となる。共振の近傍で、 $\omega = \omega_0 + \delta$ ($|\delta| \ll \omega_0$) とおくと、

$$(\kappa - I\omega^2) = (\kappa - I(\omega_0 + \delta)^2)^2 \quad (3.3.58)$$

$$\sim -2I\omega_0\delta \quad (3.3.59)$$

となる。また、半値幅の条件から $\delta = \pm\omega_0\phi/2$ であるので、

$$\Delta\omega = \omega_0\phi \quad (3.3.60)$$

よって、 Q 値との関係は

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{\phi} \quad (3.3.61)$$

と求まる。

3.4 ねじれ振り子の熱雑音

3.4.1 ひずみ雑音への変換

本研究では、ねじれ振り子の観測量は回転角 $\theta(t)$ である。この角度の雑音が重力波ひずみ $h_\alpha(t)$ ($\alpha = +, \times$) の推定にも不確かさを与える。そこで、本節では、角度の雑音を、重力波ひずみとして見た時に等価な雑音へと換算した、等価ひずみ雑音 S_{hh} (equivalent strain noise)[4] を求める。

(3.1.33) より、ねじれ振り子の伝達関数は

$$H_\alpha(\omega) = \frac{q}{2I} \frac{\omega^2}{\omega^2 - i\omega\omega_0/Q - \omega_0^2} \quad (3.4.1)$$

と表される。

一般に、関係 $y(\omega) = G(\omega)x(\omega)$ が成り立つとき、パワースペクトル密度は

$$S_{yy}(\omega) = |G(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \quad (3.4.2)$$

と変換される。よって、角度の雑音スペクトル密度 $S_{\theta\theta}(\omega)$ と、等価ひずみ雑音 S_{hh} の関係は、

$$S_{\theta\theta}(\omega) = |H_\alpha(\omega)|^2 S_{hh}(\omega) \quad (3.4.3)$$

$$\iff S_{hh}(\omega) = \frac{S_{\theta\theta}(\omega)}{|H_\alpha(\omega)|^2} \quad (3.4.4)$$

で与えられるとわかる。

3.4.2 各減衰モデルでの S_{hh}

粘性減衰モデルでの回転角の熱雑音スペクトルは、(3.2.39) より、

$$S_{\theta\theta}(\omega) = \frac{4k_B T}{\omega^2} \frac{b}{b^2 + (I\omega - \kappa/\omega)^2} \quad (3.4.5)$$

で与えられる。これと伝達関数 (3.1.33) より、構造粘性減衰モデルでの S_{hh} は次のよう。

$$S_{hh}(\omega) = \frac{S_{\theta\theta}(\omega)}{|H_\alpha(\omega)|^2} \quad (3.4.6)$$

$$= \frac{4I^2}{q^2} \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\omega_0/Q)^2}{\omega^4} S_{\theta\theta}(\omega) \quad (3.4.7)$$

ここで、粘性減衰モデルでは $Q = \kappa/(b\omega_0)$ かつ $\omega_0^2 = \kappa/I$ であるから、

$$b = \frac{I\omega_0}{Q}, \quad \kappa = I\omega_0^2 \quad (3.4.8)$$

となる。これを (3.2.39) に代入すると、

$$S_{\theta\theta}(\omega) = \frac{4k_B T}{I} \frac{\omega_0/Q}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\omega_0/Q)^2} \quad (3.4.9)$$

となる。これをさらに (3.4.7) に代入すると、

$$S_{hh}^{(\text{vis})}(\omega) = \frac{16k_B T I}{q^2} \frac{\omega_0}{Q} \frac{1}{\omega^4} \quad (3.4.10)$$

と求まる。すなわち、粘性減衰モデルでの等価ひずみ雑音は ω^{-4} 、温度 T に比例し、 Q に反比例する。

同様に、構造減衰モデルの S_{hh} も求める。

構造減衰モデルでの回転角の熱雑音スペクトルは、(3.2.48) より、

$$S_{\theta\theta}(\omega) = \frac{4k_B T}{\omega^2} \frac{\frac{\kappa\phi}{\omega}}{\left(\frac{\kappa\phi}{\omega}\right)^2 + (\omega I - \frac{\kappa}{\omega})^2} \quad (3.4.11)$$

と表される。

また、構造減衰は、復元項が複素ばね定数 $\kappa(1 + i\phi)$ で表されるため、(3.1.30) の形から、伝達関数は

$$H_\alpha(\omega) = \frac{q}{2} \frac{\omega^2}{\kappa(1 + i\phi) - I\omega^2} \quad (3.4.12)$$

$$= \frac{q}{2I} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2(1 + i\phi)} \quad (\because \omega_0^2 = \kappa/I) \quad (3.4.13)$$

となる。したがって、伝達関数の大きさ二乗は、

$$|H_\alpha(\omega)|^2 = \left(\frac{q}{2I}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\phi\omega_0^2)^2} \quad (3.4.14)$$

と求まる。一方、 $S_{\theta\theta}$ の式に $\kappa = I\omega_0^2$ を代入して整理すると、

$$S_{\theta\theta}(\omega) = \frac{4k_B T}{I} \frac{\omega_0^2 \phi}{\omega} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\phi\omega_0^2)^2} \quad (3.4.15)$$

であるので、構造減衰モデルでの等価スペクトル雑音は次のようになる。

$$S_{hh}^{(\text{str})}(\omega) = \frac{16k_B T}{q^2} \frac{\omega_0^2}{Q} \frac{1}{\omega^5} \quad (3.4.16)$$

すなわち、構造減衰モデルでは S_{hh} は ω^{-5} に比例し、粘性減衰よりも低周波側で急激に悪化する。

第 4 章

実験内容

4.1 概要

本研究では、サファイアファイバーにより懸架したねじれ振り子を用い、ねじれモードの共振周波数および Q 値をリングダウン測定により評価した。同種の測定は Ooi Ching Pin により先行して報告されており [17]、本研究はその実験系を基礎として、測定の安定性および再現性の向上を目的とした改良を加えるものである。具体的には、支持構造の剛性向上による装置全体の揺れの抑制、ならびにねじれモードと並進モードのカップリング低減（固有振動数の分離）を主な方針として設計を行った。以下では、実験装置の構成および測定手順を順に詳述する。

4.2 実験装置

本節では、ねじれ振り子の Q 値測定に用いた実験装置の構成を述べる。まず、装置全体の概要を示し、続いて懸架系、支持構造、アクチュエータ、読み出し系の順に詳細を記述する。なお、先行研究 ([17]) で用いられた装置構成を基本形として踏襲しつつ、本研究では装置全体の揺れの抑制および、並進モードとのカップリング低減を目的として支持構造等に改良を加えている。改良点については、該当箇所での仕様と設計意図を併せて述べる。

4.2.1 装置全体の概要

実験装置の外観を図 (4.1) に示す。装置は、(i) サファイアファイバーおよびクランプからなる懸架系、(ii) 懸架されたテストマス、(iii) テストマス周辺を支持するステージ・支持構造、(iv) コイル-コイルアクチュエータ、(v) 光学読み出し系、(vi) 真空槽および排気系から構成される。励起時には、コイルによってテストマスへトルクを加えて振幅を増加させ、その後の自由減衰波形を取得して解析に用いた。

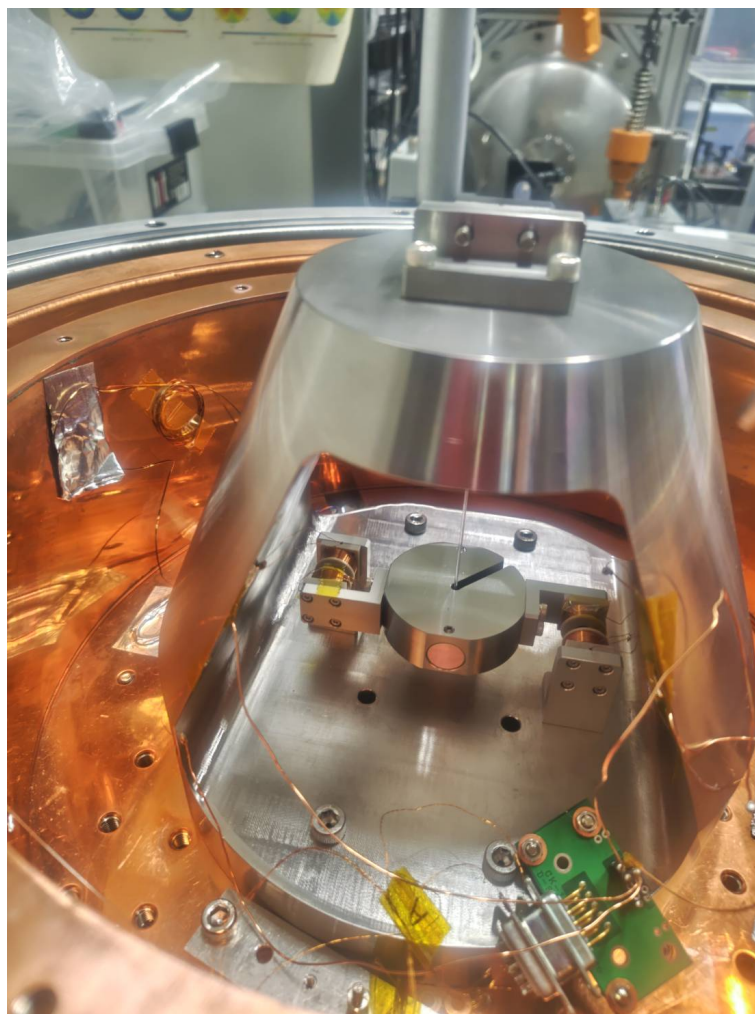


図 4.1 実験装置の外観

また、テストマスのねじれ運動の読み出しには光を用いた。真空槽の外部からレーザー光を導入し、テストマスに取り付けた反射鏡で反射させた後、その反射光を位置検出型フォトディテクター (PD) で受光する。テストマスの運動に伴う PD 上の光スポット位置変位を電気信号として記録し、これをねじれ角変位に対応する観測量として用いた。本研究で用いた PD は受光面上の光スポット位置の 2 次元変位を検出でき、以降ではこれを $x_{PD}(t)$, $y_{PD}(t)$ と表す。以下では、懸架系、テストマス、支持構造、アクチュエータ、真空系、読み出し系の順に、装置各部の仕様と測定手順を詳述する。

4.2.2 懸架系

本節では、テストマスを懸架するサファイアファイバーおよびクランプ機構について述べる。使用したサファイアファイバーは長さ 150.0mm、直径 1.0mm であり、懸架軸まわりのねじれ自由度を与える。サファイアは脆性材料で表面欠陥に敏感であるため、ファイバー表面を損傷しない固定方法および再現性の高い締結条件を採用した。以下ではクランプ構造、締結手順、懸架後の確認項目を順に述べる。



図 4.2 使用したサファイアファイバー

クランプは 2 枚のステンレスブロックから構成され、サファイアファイバーを平板面で挟み込むことで固定する。クランプ中央にスリットを設け、ファイバーをこの部分に通すことで位置決めを行なった。締結はクランプ固定用ネジ (2 本) により、行ない、左右交互に締結することでクランプの偏りを抑えた。

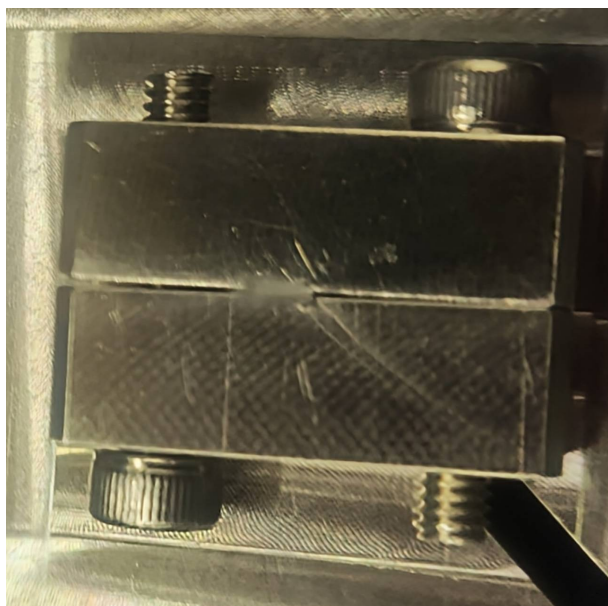


図 4.3 クランプの様子

各ネジの締結トルクはトルクレンチによって管理した。サファイアファイバーは脆性材料であり、過度な締結はファイバーの破断のリスクとなる一方、締結が不十分な場合は滑りが生じて摩擦による散逸が増加しうる。そこで本研究では、締結トルクを段階的に変化させ、破断の有無およびリングダウン波形の安定性（滑りや非指数減衰の有無）を確認しつつ、 Q 値に対して最適な締結トルク条件を検討する。

サファイアファイバーの上下端は、いずれも同一構造のクランプ機構を用いて固定し、締結トルクを同一条件に統一した。

4.2.3 支持構造

本節では、ねじれ振り子全体を支持する支持構造について述べる。ねじれ振り子の Q 値測定では、支持構造のたわみや装置全体の揺れに起因する雑音が発生しうる。特に、支持系の並進モードがねじれモードの近傍に存在する場合、モード間のカップリングによりリングダウン波形が自由減衰から逸脱し、 Q 値推定の不確かさの要因となり得る。そこで、本研究では、装置全体の揺れを抑制し、ねじれモードと並進モードの分離を進めることを目的として支持構造の改良を行なった。先行研究 ([17]) では、上部プレートを複数本の柱で支持するフレーム構造が採用されていた。

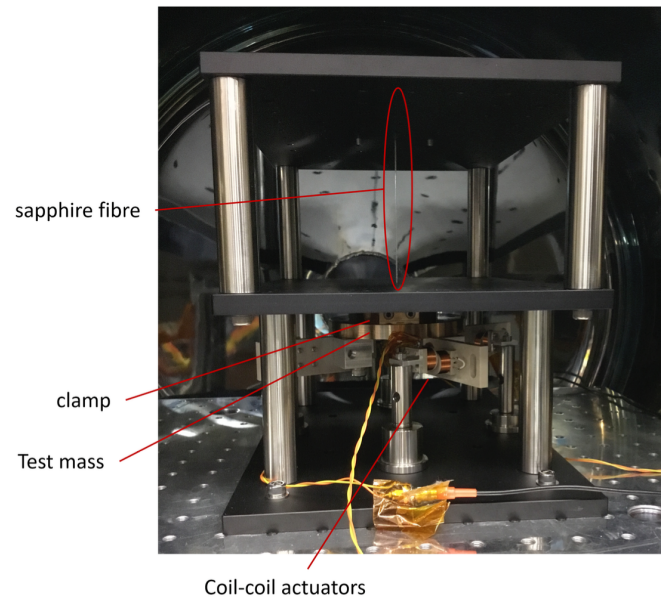


図 4.4 先行研究の支持構造

このような構造は組み立てや調整が容易で作業性に優れる一方、柱の変形や接合部の微小なたわみにより、上部プレートとベースプレート間のずれが生じやすい。これにより、装置全体の並進運動が励起されると、ねじれ振り子の Q 値測定に対して外乱成分として混入し得る。

本研究の支持構造は上記の影響を低減するため、上端クランプを支える上部プレートと、これを取り囲む厚肉シェルからなる、一体型フレームで構成した (図 4.5)。

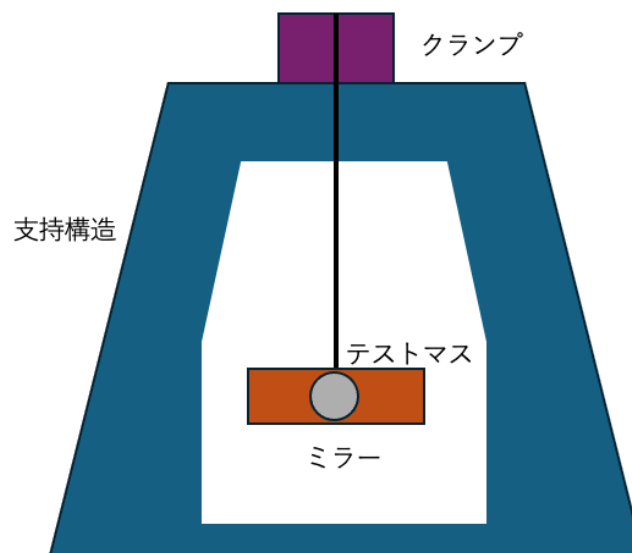


図 4.5 支持構造の図

シェル形状の採用により、断面二次モーメントを大きくし、支持構造の曲げ剛性を向上させることで、上端クランプの並進、傾き方向の揺れを抑えた。振り子の支持点の微小な運動を抑制することで、ねじれ運動の測定信号への並進成分の雑音の混入が低減される、また、支持構造の剛性増加により、支持系の固有振動数が高くなり、ねじれモー

ドと並進モードの周波数分離が進み、モードカップリングの低減に寄与すると考えられる。

ファイバー固定用治具の寸法を以下に示す。治具の底面は直径 $\phi = 200\text{mm}$ 、全高は 165mm である。テーパ部の肉厚は 25mm 、内側コーナーには $R10$ のフィレットが設けてある。底面には取付用の貫通穴 $\phi = 6.1\text{mm}$ を 8 箇所設け、2 列配置（列間 50mm ）とした。各列の穴は縦方向に 50mm ピッチで 4 点配置され、基準線から最上段穴までのオフセットは 95mm である。ファイバー導入部として中央に幅 10mm のスリットが設けてある。

4.2.4 アクチュエータ

構成と配置

本研究では、ねじれ振り子のねじれモードの励起のために、テストマスに外力を印加するアクチュエータを用いた。リングダウン測定では、対象モードの共振周波数近傍で十分な初期振幅を与えた後に駆動を停止し、自由減衰波形から減衰時定数を推定して Q 値を算出する。アクチュエータはコイル-コイル型であり、テストマス周辺に 2 箇所配置した (図 4.6)。

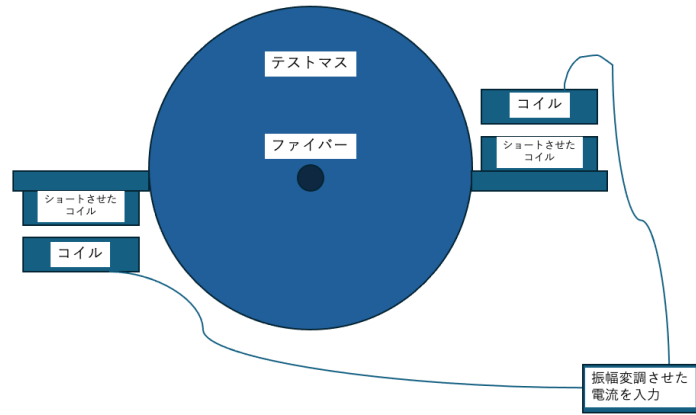


図 4.6 アクチュエータの概略図

2 つのアクチュエータはねじれ軸に対して概ね対称位置 (半径 $r \sim 5\text{cm}$) に取り付けられている。駆動信号の位相を調整することで、左右を逆向きに駆動し、並進成分を抑えてねじれ方向のトルクを印加する差動駆動、左右を同相に駆動し、並進成分を励起する同相駆動といったモード選択的な励起が可能である。本研究では、差動駆動を用い、対称とするねじれモードを励起した。

励起には、Moku-GO を用いて信号を生成し、 1kHz のサイン波に対して対称モードの共振周波数 f_0 の振幅変調を加えた波形をコイルへ印加した。具体的には、入力電圧を

$$V(t) = V_c[1 + \sin(2\pi f_0 t)] \sin(2\pi f_c t) \quad (V_c = 10\text{V}, f_c = 1\text{kHz}) \quad (4.2.1)$$

とした。

駆動に必要なトルク

ねじれ自由度 θ に対する復元は、フックの法則より

$$M = -\kappa\theta \quad (4.2.2)$$

で与えられる。ただし、 κ はねじれバネ定数である。したがって、角度 θ まで励起するのに必要なトルクは

$$\tau_{\text{req}} = \kappa\theta \quad (4.2.3)$$

である。

本研究は、反射光の位置を検出する光てこの手法を用いている。このとき、ミラーの角度変化とスポット変位 x の関

係は

$$x = 2L\theta \quad (4.2.4)$$

$$\iff \theta = \frac{x}{2L} \quad (4.2.5)$$

で与えられる。ただし、 L はミラーから PD までの光路長である。本研究での角度の概算として、 $L \sim 0.5\text{m}$ 、励起中のスポット振幅 $x \sim 1\text{mm}$ とすると、

$$\theta \sim \frac{1 \times 10^{-3}}{2 \times 0.5} = 1 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad (4.2.6)$$

である。

この大きさの励起に必要な力を求める。1 つのアクチュエータが半径 r の位置で接線方向に力 F を加えると、テストマスにかかるトルクは

$$\tau_{\text{act}} \sim 2rF \quad (4.2.7)$$

$\tau_{\text{act}} > \tau_{\text{req}}$ が必要であるので、

$$F_{\text{req}} = \frac{\kappa\theta}{2r} \quad (4.2.8)$$

となる。概算として、ファイバーからコイルまでの距離 $r \sim 0.05\text{m}$ 、角度の変動 $\theta \sim 10^{-3}\text{rad}$ を代入すると、

$$F_{\text{req}} \sim \frac{\kappa \times 10^{-3}}{2 \times 0.05} = 0.01\kappa \quad (4.2.9)$$

と求まる。ここで、ねじればね定数 κ は、せん断弾性率 μ 、ファイバ長 L 、断面二次極モーメント J を用いて

$$\kappa = \mu \frac{J}{L} \quad (4.2.10)$$

で与えられる [17]。また、ファイバが円柱であれば $J = \pi D^4/32$ である。本研究では、直径 $D = 1.0\text{mm}$ 、ファイバ長 $L = 150\text{mm}$ で、サファイアのせん断弾性率は $\mu \sim 145\text{GPa}$ 程度である [1] ので、これを用いると、

$$\kappa \sim 0.095\text{Nm/rad} \quad (4.2.11)$$

を得る。よって、励起に必要な力は

$$F_{\text{req}} \sim 0.01\kappa \sim 10^{-3}\text{N} \quad (4.2.12)$$

と見積もることができる。

4.2.5 真空系

Q 値測定は、空気の粘性による雑音および音響外乱を低減するため、真空チャンバ内で実施した (図 4.7)。チャンバは粗引き後にターボ分子ポンプに切り替えて排気し、測定時の到達圧力は概ね $P \sim 10^{-3}\text{Pa}$ 程度となった。



図 4.7 真空チャンバの様子

4.2.6 読み出し系

ねじれ振子運動は、位置検出型フォトダイオード (PD) によりスポット位置の揺れを x, y の二方向で検出して読み出した。PD 出力はデータロガーによって時系列として記録し、取得データを CSV 形式に変換して解析に用いた (図 4.8)。ねじれモードの主成分は x 軸に現れるため、本研究の解析では主に x 軸の時系列データを用いた。サンプリング周波数 f_s は測定条件により異なるが、いずれの測定でも $f_s \geq 1\text{kHz}$ を満たす。

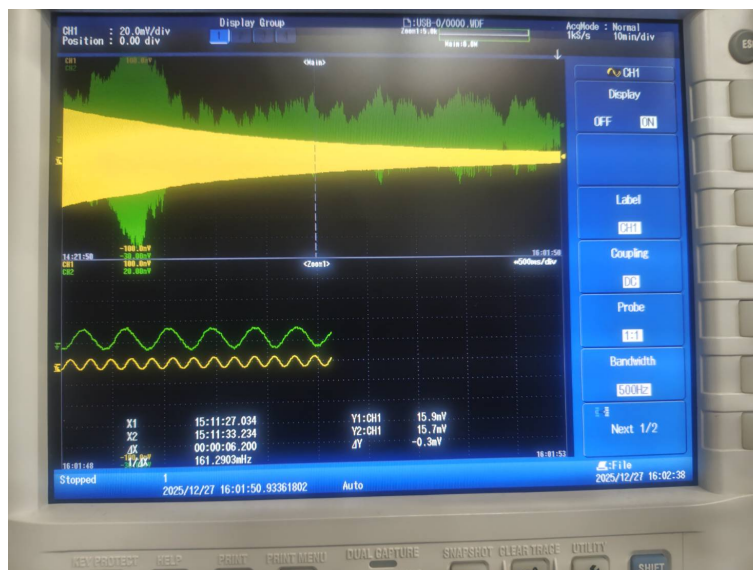


図 4.8 PD の出力を時系列データとして記録する様子

4.3 測定方法

リングダウン測定では、対象となるねじれモードの共振周波数近傍で十分な初期振幅を与えた後に駆動を停止し、自由減衰波形から減衰時定数を推定して Q 値を算出する。真空系および読み出し系の構成は前節に述べたとおりであり、測定は概ね $P \sim 10^{-3}\text{Pa}$ 程度の圧力で実施し、PD 出力をデータロガーで時系列として取得して解析に用いた。

4.3.1 測定手順

測定は以下の手順で行なった。

1. 共振周波数 f_0 の決定：

ねじれモードの共振周波数は概ね 5.5Hz 付近に存在するが、調整状態などにより、測定ごとにわずかに変動する。そこで、真空に引く前の段階で短時間の励起・測定を行ない、得られた時系列データをフーリエ変換してピーク周波数を同定することで、その値を当該測定の f_0 として励起に用いた。

2. 測定準備：

回路の抵抗を測定することでアクチュエータとして用いるコイルが断線していないことを確認した後、真空チャンバの蓋をし、真空チャンバの排気を開始する。読み出し系については、PD の x, y の 2 軸出力を同時にデータロガーへ入力し、PD の中央にスポットが当たるようにアライメントを調整する。

3. 励起：

真空チャンバ内の圧力が 10^{-3}Pa 程度に到達、安定したことを確認する。Moku-Go をコイルに接続し、ねじれモードの共振周波数近傍で正弦波駆動を行なう。励起中はデータロガーに表示される PD の出力波形を監視し、後述の基準を満たす範囲で初期振幅を調整する。具体的な励起時間は数秒程度であった。

4. 自由減衰の取得：

十分な初期振幅が得られた時点で駆動を停止し、自由減衰波形を連続で記録する。記録時間は原則として 60 分以上とし、指数減衰のフィッティングに十分な長さの時系列データを確保する。

5. データ保存：取得した WDF 形式の時系列データを CSV 形式に変換し、解析に用いる。解析は主としてねじれモード成分が現れる x 軸の時系列データに対して扱う。

4.3.2 励起振幅の設定

リングダウン測定では、読み出しの線形性を保ちつつ十分な S/N 比を得るため、励起振幅を「PD の出力が飽和しない範囲」で設定した。具体的には、励起中のデータロガー出力の振幅がおおよそ 50mV 程度となるように調整し、PD 出力が受光面の端まで振り切れる状況を避けた (図 4.9)。励起振幅は固定の規格値として厳密に定めるのではなく、測定ごとに波形を確認しながら上記条件を満たす範囲で決定した。

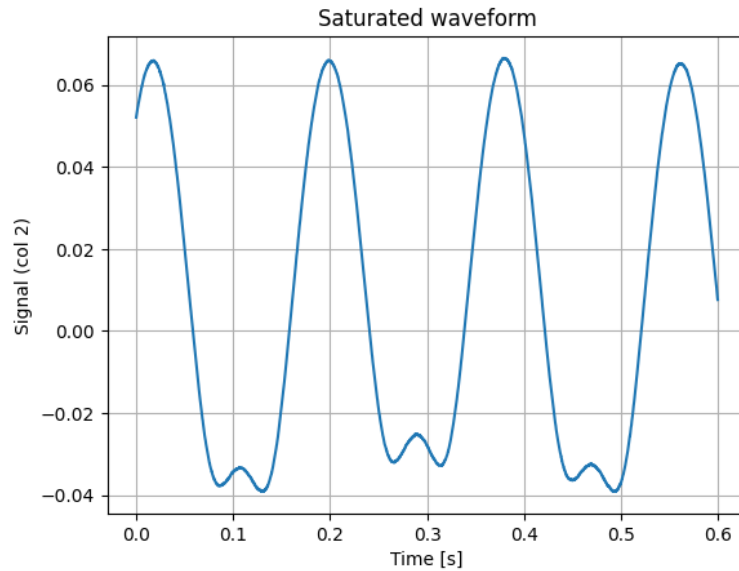


図 4.9 PD の受光面端に振り切れている際の波形

4.3.3 データの採否基準

解析に用いるデータは、励起中およびリングダウン開始直後の波形を目視で確認し、以下を満たすものを採択した。

- 飽和がないこと：
PD 出力が上限/下限に張り付かず、波形が潰れていない。
- 正弦波状であること：
励起中の波形が概ね正弦波に近く、顕著な歪みや断続的な跳びがない。
- モードの識別が明瞭であること：
ねじれモードの主成分が x 軸に現れ、 y 軸に比べ支配的であること。

上記の基準を満たさない場合 (例：図 4.9 は PD 飽和が生じている)、その測定結果は解析対象から除外し、励起振幅や光学調整を見直した上で再測定を行なった。

4.4 解析手法

本節では、取得した PD の時系列データから、ねじれモードの共振周波数 f_0 と減衰時定数 τ を推定し、 Q 値を算出する手順を述べる。解析には Python を用い、以下のようなデータ処理を行なった。

4.4.1 前処理

csv ファイルから解析対象のチャンネル (主に x 軸) を読み込み、直流成分を除去するため平均との差し引きを行なった。サンプリング周波数 f_s 、データ長 N を用いて、時刻配列を

$$t_n = \frac{n}{f_s} \quad (n = 0, 1, \dots, N - 1) \quad (4.4.1)$$

で定義した。

4.4.2 共振周波数 f_0 の推定

共振周波数 f_0 は、時系列データのフーリエスペクトルのピークから推定した。雑音ピークの誤検出を避けるため、探索周波数範囲を 1Hz～10Hz に制限し、この範囲で最大となる周波数ビンをピークとして選んだ。この最大ビンの

前後のビンのスペクトル振幅を用いた放物線補間により、ピーク位置を補正し、ピーク周波数の分解能を向上させた。

4.4.3 バンドパスフィルタによる帯域制限

リングダウン波形は、他モードや低周波ドリフトが重畳する場合があるため、包絡線の安定化を目的として、バンドパスフィルタを適用した。

4 次の Butterworth フィルタを用い、中心周波数を f_0 として

$$f_{\text{low}} = 0.5f_0 \quad (4.4.2)$$

$$f_{\text{high}} = 2.0f_0 \quad (4.4.3)$$

となる通過帯域を設定した。フィルタリングには位相歪みを抑えるため、前後方向に適用するゼロ位相フィルタを用いた。

4.4.4 包絡線の抽出

単一モードが支配的な減衰振動は

$$s(t) \sim A_0 e^{-t/\tau} \cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad (4.4.4)$$

と表される。本研究では Hilbert 変換により解析信号を構成し、その絶対値

$$A(t) = |\mathcal{H}[s(t)]| \quad (4.4.5)$$

を包絡線として用いた。Hilbert 変換は端点近傍で誤差が増えやすいため、時系列の先頭、末尾から 2 秒間を除外した。その後、包絡線の微小な揺らぎを抑え、指数減衰を見やすくするため、移動平均による平滑化を行なった。移動平均窓幅は 20ms とし、サンプル点数に換算した窓長で畳み込み平均をとった。

4.4.5 減衰時定数 τ の推定

平滑化した包絡線 $A(t)$ に対して以下のモデルで最小二乗フィットを行なった。

$$A(t) = A e^{-t/\tau} + C \quad (4.4.6)$$

包絡線は非負であるため、パラメータには $A, \tau, C \geq 0$ の条件を課し、初期値は $C_0 = 0, A_0 = A(t_{\text{start}}), \tau_0 = (t_{\text{end}} - t_{\text{start}})/5$ とした。フィッティングには `curve_fit` 関数を用い、共分散行列から τ の不確かさ σ_τ を評価した。

4.4.6 Q 値の算出

減衰が指数関数 $e^{-t/\tau}$ で表される場合、振幅の時定数 τ と Q 値の関係は

$$Q = \pi f_0 \tau \quad (4.4.7)$$

で与えられる。そこで、FFT から求めた f_0 と包絡線フィットから得た τ を用いて Q 値を算出した。また、 Q 値の誤差は、主に τ のフィット誤差に起因する不確かさであるとして

$$\sigma_Q \sim \pi f_0 \sigma_\tau \quad (4.4.8)$$

を用いた。

第 5 章

実験結果

5.1 測定条件と結果一覧

本章では、サファイアファイバーのねじれ振子子のリングダウン測定から共振周波数 f_0 と減衰時定数 τ を推定し、 Q 値を算出した結果の一覧を示す。

	真空圧 [Pa]	測定時間 [min]	締結トルク [N・m]	f_0 [Hz]	時定数 τ [s]	Q 値	備考
1	8.4×10^{-4}	120	-	5.4897	5997.7 ± 0.2	$1.03438 \times 10^5 \pm 3$	-
2	7×10^{-3}	100	-	5.512	5428.2 ± 0.1	$9.3997 \times 10^4 \pm 2$	-
3	5×10^{-4}	300	-	5.512	8147.38 ± 0.03	$1.41085 \times 10^5 \pm 0.6$	-
4	-(記録欠損)	150	上 1.0、下 1.0	5.350	6459.1 ± 0.1	$1.08667 \times 10^5 \pm 2$	測定後に破断確認
5	5×10^{-3}	150	上 0.3、下 0.3	4.988	2042.76 ± 0.08	$3.2010 \times 10^4 \pm 1$	-
6	1.6×10^{-3}	150	上 0.4、下 0.4	5.044	2283.09 ± 0.08	$3.6179 \times 10^4 \pm 1$	-
7	2.7×10^{-4}	150	上 0.5、下 0.4	5.046	2446.6 ± 0.1	$3.8785 \times 10^4 \pm 1$	-
8	5×10^{-2}	90	上 1.0、下 1.0	5.135	3100.4 ± 0.2	$5.0198 \times 10^4 \pm 3$	締結中に破断音
9	5×10^{-2}	30	上 0.6、下 0.6	5.374	2067.7 ± 0.9	$3.4910 \times 10^4 \pm 15$	測定後、冷却開始
10	3×10^{-6}	120	上 0.6、下 0.6	5.458	17411 ± 12	$2.98600 \times 10^5 \pm 200$	低温下 (4K) で測定
11	1×10^{-6}	120	上 0.6、下 0.6	5.382	1803.03 ± 0.07	$3.0484 \times 10^4 \pm 1$	10 を常温に戻し測定

表 5.1 測定条件および推定パラメータの一覧

5.2 代表リングダウン例

本節では代表的なリングダウン測定データ 1 例について、共振周波数 f_0 と減衰時定数 τ の推定手順および得られた Q 値を示す。解析手順の詳細は 4 章に示した通りであり、周波数スペクトルからピーク周波数を推定し、当該周波数帯をフィルタで抽出し、Hilbert 変換による包絡線 $E(t)$ を求め、指数関数でフィッティングすることで τ を推定した。

これから示すデータは、前節の 3 番目の測定結果に対応するものであり、常温、真空下で 300 分の測定を行なったものである。

まず、図 5.1 に示すスペクトルの最大ピークから共振周波数を推定し、 $f_0 \sim 5.512\text{Hz}$ を得た。以後の解析では、ねじれモード成分を抽出するため、2.756 ～11.024Hz のバンドパスを適用した。

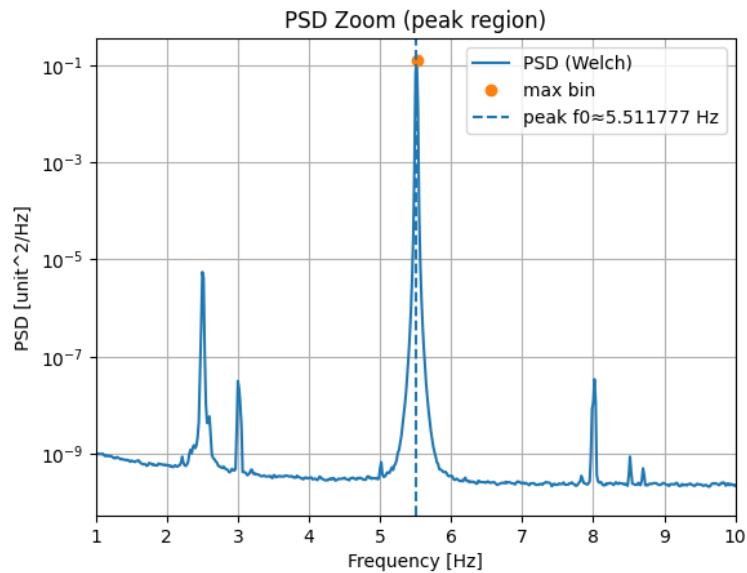


図 5.1 フーリエ変換によって得られたスペクトル分布

バンドパス後の信号に、Hilbert 変換を適用して包絡線 $E(t)$ を求め、移動平均により微小揺らぎを平滑化した。得られた包絡線に対し、

$$E(t) = A \exp(-t/\tau) + C \quad (5.2.1)$$

でフィッティングを行なった結果、 $\tau = 8147.38 \pm 0.03$ s および $C = 0.0327$ を得た (図 5.2)。

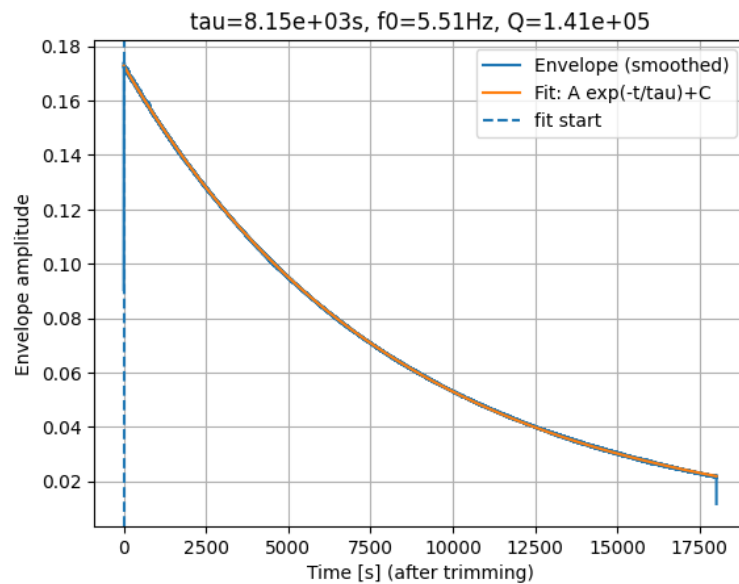


図 5.2 包絡線とフィッティング曲線

ここで、 Q 値は、 $Q = \pi f_0 \tau$ により算出し、 $Q = 141085 \pm 0.5$ となった。図 5.2 より、フィット曲線は包絡線の減衰をよく再現していることがわかる。

5.3 最適トルクの模索

クランプの締結トルクは、サファイアファイバーの破断リスクと、クランプの保持剛性を同時に左右する主要パラメータである。そこで、破断の有無と作業の再現性を確認し、実験に用いる暫定トルク条件を探索した。先行研究から新規導入したトルクレンチ (最小目盛り $0.4 \text{ N} \cdot \text{m}$) を用い、締結トルク $0.4 \text{ N} \cdot \text{m}$ でクランプを締結し

たところ、ファイバーがクランプ近傍で破断する事象が繰り返し観測された。破断後のファイバーを用いた確認実験でも、同条件で高い頻度で破断が生じた。また、 $1.0 \text{ N} \cdot \text{m}$ で締結した試料を実験後に確認したところ、クランプ内でファイバー破断が生じていることを確認した。

一方、トルクレレンチの規定範囲外の目盛りを用いて $0.3 \text{ N} \cdot \text{m}$ 相当で締結した場合、破断が生じる場合と生じない場合があり、破断成否の再現性が十分でなかった。この結果から、本実験系では $0.3 \text{ N} \cdot \text{m}$ 程度の低トルク域においても破断閾値が近傍に存在し、さらに締結操作、芯のずれ、接触状態等の締結条件の微小な差が破断成否に影響している可能性がある。

現時点では健全なファイバー残数が限られているため、広いトルク掃引による系統的評価は実施できず、今後はより低トルク域を高精度に設定できる工具の導入、締結手順の標準化等により破断リスクを軽減しつつ保持剛性を確保できる条件を再探索する方針とした。

さらに、本系では締結操作中にファイバーが破断しても、その場で確実に検知することが難しいことが分かった。破断が生じた場合でも、観測されるのはごく小さい破断音程度であり、締結完了後にクランプを開放して内部を目視で確認するまで破断に気づけない場合が多い。したがって、締結トルク条件の検討においては、締結後の目視確認を手順として組み込む必要がある。

この点を踏まえると、先行研究 ([17]) における締結手順、状態についても、締結中に破断が発生していたが見落とされていた可能性、あるいは、クランプ片側を先に締結する手順等により、ファイバーが適切に固定されなかった可能性が残る (図 5.3)。実際に、先行研究で採用されているとされる、締結トルク $1 \text{ N} \cdot \text{m}$ でクランプを試みたところ、5回の試行すべてでファイバー破断が生じた。以上より、締結トルク条件の比較、最適化においては、トルク値そのものに加えて締結手順および締結後の破断確認の有無が結果に与える影響を考慮する必要がある。

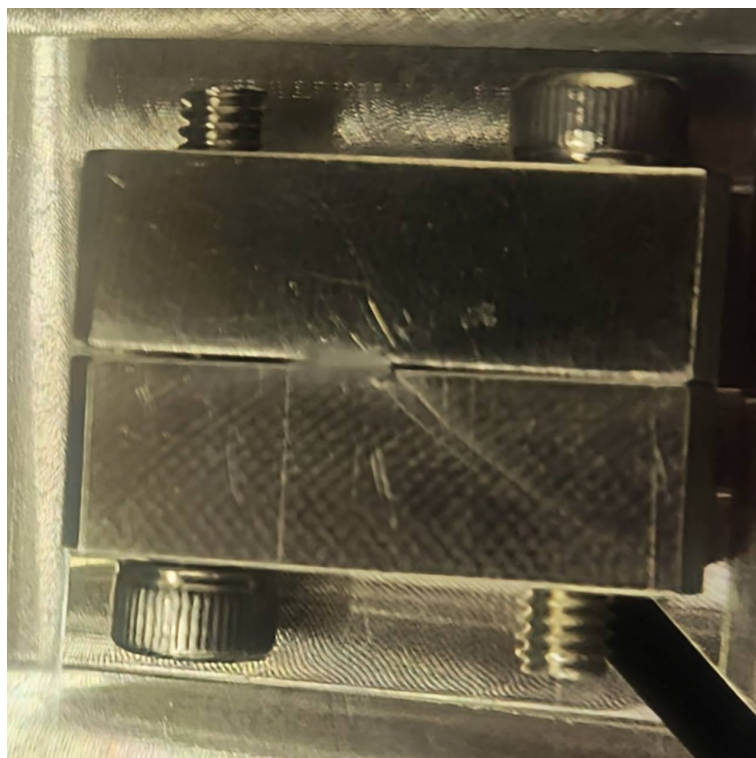


図 5.3 クランプ片側を先に締結した様子。クランプが左右非対称になっており、適切に固定できていない可能性がある

5.4 低温下での測定

5.4.1 測定手順・結果

低温下におけるねじれモードの Q 値を評価するため、試料を真空槽に封入し、数日間の真空排気および冷却を行ったのちにリングダウン測定を実施した。本測定では、締結トルク条件としてまず $1\text{ N}\cdot\text{m}$ でクランプした個体を用いる予定であった（表 5.1 の No. 8）。

しかし、冷却翌日に波形を確認したところ、出力波形が乱れて正弦波から大きく逸脱しており、さらに振幅の減衰が明らかに速いことが観測された（図 5.4）。

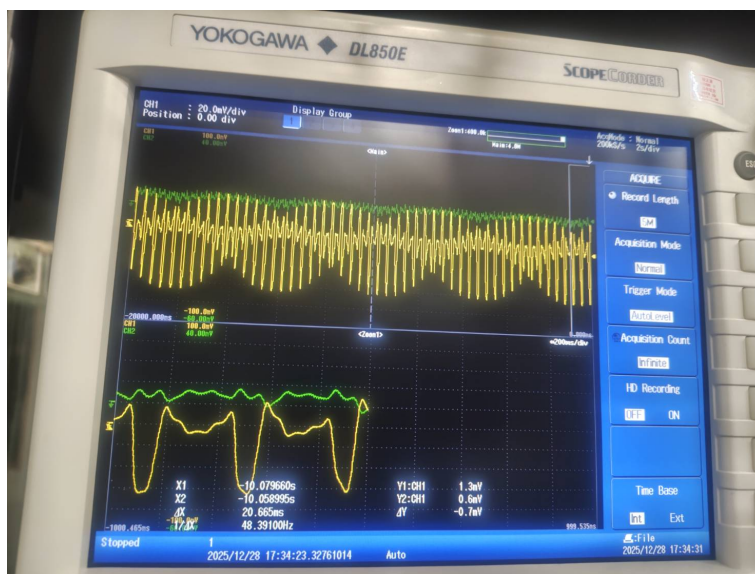


図 5.4 出力波形の乱れ

このため装置を開けて試料を取り出し、目視確認を行った結果、上側・下側のファイバーがともに破断していることが判明した。破断は締結時に明確な破断音を伴わず、外観上も直ちには判別できない場合があるため、波形の乱れや減衰時定数の異常が破断検知の重要な指標となる。

以上を踏まえ、破断リスクを抑えつつ十分な固定を得るため、前回締結時に破断音が確認されなかったトルク条件の上限付近である $0.6\text{ N}\cdot\text{m}$ を採用し、同条件で再度締結した試料を低温測定に供した。また、低温測定結果の解釈を明確にするため、同一の締結条件（ $0.6\text{ N}\cdot\text{m}$ ）に対して常温・低圧下でのリングダウン測定も併せて実施した（表 5.1 の No. 9）。

低温下（ $T = 4\text{ K}$ 、圧力 $P = 3.0 \times 10^{-6}\text{ Pa}$ ）において取得したリングダウン波形を図 5.5 に示す。波形は概ね正弦波形を保ち、包絡線は指数関数的に減衰した。

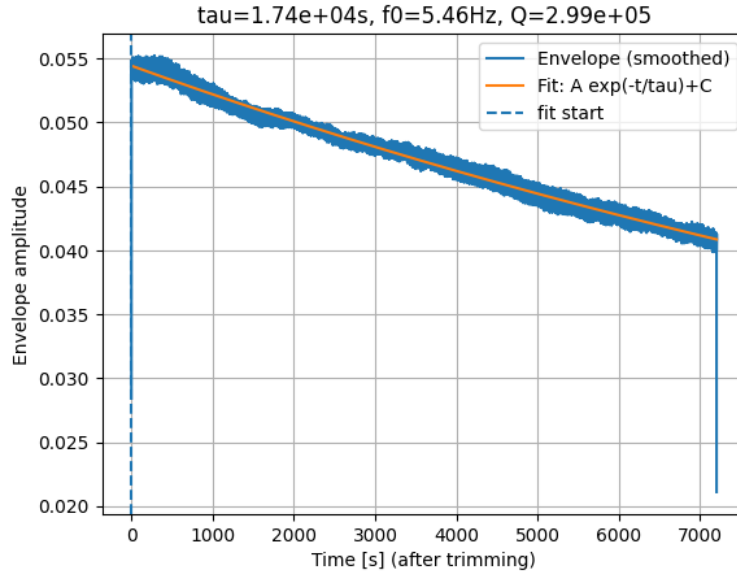


図 5.5 低温下で取得したリングダウン波形

フィッティングから得られた減衰時定数 τ および共振周波数 f_0 を用いて $Q = \pi f_0 \tau$ により Q 値を算出したところ、低温下での Q 値は

$$Q_{LT} = 2.986 \times 10^5 \quad (5.4.1)$$

となった。一方、常温（表 5.1 の No. 8）では

$$Q_{RT} = 3.491 \times 10^4 \quad (5.4.2)$$

が得られた。このように、低温環境下では、室温・低圧時と比較して減衰時定数 τ が大幅に増大した。

5.4.2 低温化による Q 値改善の解釈

低温化は熱雑音の低減 ($\propto T/Q$) に寄与するだけでなく、損失機構そのものを変化させることで Q 値を改善し得る。例えば、熱弾性散逸 (thermoelastic damping) は温度依存を持つ代表的な散逸機構の一つとして整理されており、温度域によって支配的寄与が変化し得ることが知られている [15, 10]。また、重力波検出器用の懸架系開発に関連して、サファイアファイバーは低温 (6 K) において $Q \sim 10^7$ が得られることが報告されており、材料として低温で高 Q を実現し得る [20]。本研究で観測された低温下での Q 値上昇も、材料内部損失の低下が寄与している可能性がある。

一方で、観測された改善が材料内部損失の変化のみで説明できるとは限らず、クランプ界面における微小すべり等の界面損失が低温で変化した可能性も考えられる。真空・低温下の摩擦特性は材料組合せに依存し、温度域によって変化の度合いが異なることが報告されている。[8]。さらに、ボルトの締結力は、ボルト・被締結体の熱膨張差や温度過渡により変化し得るため、冷却に伴って界面の拘束条件が変化し、結果として微小すべりが抑制される可能性がある [13, 21]。

5.4.3 室温下での再測定

低温測定後に冷凍機の電源を停止し、真空を維持したまま実験系の締結状態および光学系のアライメントを変更しない条件で昇温した。温度が室温 ($> 270\text{K}$) に到達した後、室温下で再度リングダウン測定を行なった (表 5.1 の No. 11)。その結果、得られた共振周波数および Q 値は、

$$\begin{aligned} f_0 &= 5.382\text{Hz} \\ Q &= 3.05 \times 10^4 \end{aligned}$$

となった。共振周波数、 Q 値はともに低温にする前に室温で測定したものに同程度をとっており、冷却後に室温に戻しても再現性があると考えられる。

また、この実験の後にクランプを確認すると、上下ともにファイバーが破断していることが確認された。

第6章

考察

6.1 表面損失の検討

本研究で得られたねじれモードの代表的な測定では表 5.1 に示す通り、共振周波数 $f_0 \sim 5.512\text{Hz}$ 、時定数 $\tau \sim 8147\text{s}$ から $Q \sim 1.4 \times 10^5$ を得た。

この値は先行研究 ([17]) で報告されている最大 $Q \sim 1.3 \times 10^5$ と同程度である。一方、ねじれ型重力波望遠鏡で想定されるサファイアファイバーの目標値は 10^8 程度と、依然として3桁程度不足している。支持構造等のセットアップを変更したにも関わらず Q 値が同程度に留まったのは、損失が支持系由来ではなく、ファイバー自身の表面状態やクランプ近傍の固定条件が支配的である可能性を示唆する。

6.1.1 表面損失モデル

本節では、薄いファイバーにおいて表面損失が実行的な Q 値を制限し得ることを [17] の議論に沿って導出する。

複数の損失機構がある場合の Q 値

Q 値は、1 周期あたりに失われるエネルギーによって定義できる (式 (3.3.1))。複数の散逸機構がある場合、エネルギーは $E = E_1 + E_2 + \dots$ 、散逸は $\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \dots$ と加算されるため、測定される「見かけの Q 値」 Q_{eff} は、

$$Q_{\text{eff}} = 2\pi \frac{E_1 + E_2 + \dots}{\Delta E_1 + \Delta E_2 + \dots} \quad (6.1.1)$$

と書ける。

散逸機構をファイバーの内部と表面に限定し、内部に蓄えるエネルギーを E_{bulk} 、表面層に蓄えられるエネルギーを E_{surface} とすると、

$$Q_{\text{eff}} = 2\pi \frac{E_{\text{bulk}} + E_{\text{surface}}}{\Delta E_{\text{bulk}} + \Delta E_{\text{surface}}} \quad (6.1.2)$$

である。さらに、表面層は十分に薄く、全体のエネルギーの大部分は内部に蓄えられるとすると

$$E_{\text{bulk}} \gg E_{\text{surface}} \quad (6.1.3)$$

と仮定できる。このとき、

$$\frac{1}{Q_{\text{eff}}} = \frac{\Delta E_{\text{total}}}{2\pi E_{\text{total}}} = \frac{2\pi \left(\frac{E_{\text{bulk}}}{Q_{\text{bulk}}} + \frac{E_{\text{surface}}}{Q_{\text{surface}}} \right)}{2\pi (E_{\text{bulk}} + E_{\text{surface}})} \quad (6.1.4)$$

$$\sim \frac{\frac{E_{\text{bulk}}}{Q_{\text{bulk}}} + \frac{E_{\text{surface}}}{Q_{\text{surface}}}}{E_{\text{bulk}}} \quad (6.1.5)$$

$$= \frac{1}{Q_{\text{bulk}}} + \frac{1}{Q_{\text{surface}}} \frac{E_{\text{surface}}}{E_{\text{bulk}}} \quad (6.1.6)$$

が得られる。すなわち、実行的な $1/Q$ は散逸の強さとして足し算になり、表面損失の寄与は蓄えられているエネルギーの比によって重み付けされることを意味する。

表面層が厚さ h をもち、その中で Q_{surface} が実現しているとする。この仮定のもと、それぞれの機構のエネルギー散逸を具体的に計算する。

共振モードの機械損失角 ϕ は、次のように定義される。

$$\phi \equiv \frac{\Delta E}{2\pi E}, \quad Q = \frac{1}{\phi} \quad (6.1.7)$$

また、材料内部の損失が場所により異なるとき、損失角は局所損失角 $\phi(\mathbf{r})$ を弾性エネルギー密度で重みづけした平均として表せる、すなわち、エネルギー密度 $u(\mathbf{r})$ を用いて表すと、

$$\phi = \frac{\int_V \phi(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) dV}{\int_V u(\mathbf{r}) dV} \quad (6.1.8)$$

となる。これは、局所損失角モデルと呼ばれる [19]。ファイバー全体の損失角は、(6.1.3) より、

$$\phi \sim \phi_{\text{bulk}} + (\phi_{\text{surface}} - \phi_{\text{bulk}}) \frac{E_{\text{surface}}}{E_{\text{total}}} \quad (6.1.9)$$

と近似できる。また、表面層が十分薄いとして、表面層内でのエネルギー密度は一定値 u_s をとるとすると、

$$E_{\text{surface}} \sim \int_S u_s h dS, \quad E_{\text{total}} = \int_V u(\mathbf{r}) dV \quad (6.1.10)$$

と書ける。

また、線形弾性体のひずみエネルギー密度は、一般に

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (6.1.11)$$

で与えられる。特に、一方向にのみ応力が存在する単軸応力では $u = \sigma\epsilon/2$ 、物体内部のある面に関して、面に平行の方向に力が作用するせん断では、せん断応力 σ_{xy} 、工学せん断ひずみ ϵ_{xy} に対して

$$u = \frac{1}{2} \sigma_{xy} \epsilon_{xy} \quad (6.1.12)$$

$$= \frac{1}{2} \mu \gamma^2 \quad (6.1.13)$$

と書ける。ここで μ はせん断弾性率、 γ は工学せん断ひずみである。[16]。

円柱ファイバのねじれ運動では、このせん断が支配的な弾性エネルギーであるため、以後 $u = \frac{1}{2} \mu \gamma^2$ を用いる。

次に、これを用いて $E_{\text{surface}}/E_{\text{total}}$ を求める。

半径 R (直径 $D = 2R$)、長さ L の円柱ファイバを考える、軸方向 x に沿ったねじれ角を $\phi(x)$ とすると、円柱ねじれのせん断ひずみは

$$\gamma(r) = r \frac{d\phi}{dx} \quad (6.1.14)$$

であり、半径 r に比例して増加する。

ねじれが一様 ($d\phi/dx = \Theta/L$ 、 Θ は全ねじれ角) なら

$$\gamma(r) = r \frac{\Theta}{L} \quad (6.1.15)$$

$$\gamma_{\text{max}} = \gamma(R) = R \frac{\Theta}{L} \quad (6.1.16)$$

となる。ファイバー内部に蓄えられる弾性エネルギーは、体積要素 $dV = 2\pi R dr dx$ を用いて

$$E_{\text{bulk}} = \int_0^L \int_0^R \frac{1}{2} \mu \left(r \frac{\Theta}{L} \right)^2 2\pi r dr dx \quad (6.1.17)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\Theta}{L} \right)^2 2\pi L \int_0^R r^3 dr \quad (6.1.18)$$

$$= \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\Theta}{L} \right)^2 2\pi L \frac{R^4}{4} \quad (6.1.19)$$

と計算できる。一方で、表面層に蓄えられる弾性エネルギーは、がじゅうぶん薄いとき、表面層の体積要素 $\sim h dS$ 、側面の面積要素 $dS = 2\pi R dx$ と近似できることから

$$E_{\text{surface}} \sim \int_0^L \frac{1}{2} \mu \left(R \frac{\Theta}{L} \right)^2 h (2\pi R) dx \quad (6.1.20)$$

$$= \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\Theta^3}{R} L \right)^2 h 2\pi R^3 L \quad (6.1.21)$$

となる。これらの比をとると、

$$\frac{E_{\text{surface}}}{E_{\text{bulk}}} \sim \frac{h 2\pi R^3 L}{2\pi L (R^4/4)} \quad (6.1.22)$$

$$= h \frac{8}{D} \quad (6.1.23)$$

が得られる。

エネルギー損失のほとんどが表面層で発生する ($\phi_{\text{surface}} \gg \phi_{\text{bulk}}$ であるなら、全体の損失角 (6.1.9) は、

$$\phi \sim \phi_{\text{bulk}} + \phi_{\text{surface}} \frac{E_{\text{surface}}}{E_{\text{total}}} \quad (6.1.24)$$

$$\sim \phi_{\text{bulk}} + \phi_{\text{surface}} h \frac{8}{D} \quad (6.1.25)$$

となる。したがって、ファイバーの Q 値は

$$\frac{1}{Q_{\text{eff}}} \sim \frac{1}{Q_{\text{bulk}}} + \frac{1}{Q_{\text{surface}}} h \frac{8}{D} \quad (6.1.26)$$

となる。ここで、表面損失パラメータ $\alpha_s \equiv h \phi_{\text{surface}}$ を導入すると、

$$\phi \sim \phi_{\text{bulk}} + \frac{8\alpha_s}{D} \quad (6.1.27)$$

と書ける。実際、表面損失パラメータ α_s は試料表面の仕上げに強く依存し、研磨など損傷が大きい場合はより大きくなり得ることが報告されている [19]。また、材料として fused silica の例ではあるが直径が小さいほど表面起因の散逸が支配的になり、概ね $D \leq 1\text{mm}$ で表面損失が優勢になるという実験的知見もある [11]。

6.2 クランプ損失の検討

先行研究では、ねじれ振子の実行的な Q 値を制限する要因として、ファイバーの表面状態に加えて、クランプ点での摩擦に起因する損失が挙げられている [17]。本研究でも、支持構造等のセットアップを変更したのにも関わらず得られた Q が先行研究と同程度に留まったことから、損失が支持系由来というよりは、ファイバー自身の表面状態またはクランプ近傍の固定条件が支配的である可能性を指摘した。本節ではこのうち、クランプに焦点を当て、損失を考察する。

6.2.1 先行研究におけるクランプ損失の位置付け

先行研究では、クランプ損失は測定における主要な損失源になり得る一方で、実際には内部損失と見分けがつきにくく、支配的である可能性が高いが切り分けが難しい損失として扱われている。また、薄いファイバーを直接クランプすること自体が困難であるため、太い部分のみをクランプすることで薄い部分の直接クランプを避ける工夫が紹介されている。

さらに、結晶ファイバーは金属線のように塑性変形して、食い込むことが期待できない。そのため平板クランプでは接触が不十分になりやすく、加えて金属クランプ側が変形して、時間とともに保持力が低下し得ることが指摘されている。これは、同じ締結トルクを与えても、接触面の状態によってファイバーに作用する法線力などの条件が変化し、結果として散逸が変わり得ることを意味する。

6.2.2 本研究の締結条件と Q 値の関係

本研究のクランプ構造・締結手順は 4.2.2 節に示した通りであり、ステンレス製ブロックでファイバーを挟み、左右交互に締結することで偏りを抑え、トルクレンチで締結トルクを管理した。一方で、5.3 節に示したように、低トルク域で破断閾値が近傍に存在し、接触状態などの微小な差が破断成否に影響する可能性が高い。また、締結中に破断してもその場で確実に検知しにくく、締結後にクランプを開放して目視確認する手順が必要である。

これらを踏まえ、本研究では複数の締結トルクで追加測定を行ったが、 Q 値は概ね 5×10^4 程度で頭打ちとなった。締結トルクを変化させても上限が大きく更新されず、クランプによる損失が実行的な Q 値を制限している可能性が高い。

6.2.3 Q 値の頭打ちの要因候補

クランプ側金属の変形による保持力低下

先行研究では、平板クランプは金属側が変形し、時間とともに保持力が低下し得る点が明示的に指摘されている。本研究の追加測定は、ファイバーの破断トルクを調べる目的で繰り返し締結を行なった後に観測されたものであるため、クランプの挟持面が塑性変形または面荒れを起こした可能性が高い。これによって、同一トルクでも実効法線力が低下しすべりが生じやすくなる、接触が局所化し、微小すべり (stick-slip) 条件が変化する、トルクと保持力の換算が再現しなくなる、といった形で散逸が増えた可能性がある。特に Q 値が 5×10^4 程度で頭打ちになり、トルク管理をする以前に測定された Q 値を下回っているという振る舞いは、トルク値の最適化そのものよりも、接触面の状態が支配的になった状況と解釈できる。

作業依存性と手順の未標準化

5.3 で示したように、低トルク域では締結条件の微小差（芯ずれ、接触状態など）が結果に影響し得る。本研究では、これまでの測定を共同実験者が主に締結していた経緯があり、追加測定での頭打ちには、締結の手順・力の掛け方・当たり出しといった暗黙知が反映された可能性もある。実際、現状の方針としても、締結手順の標準化が必要であることを述べている。

したがって、頭打ちの原因候補としてはクランプ部材の変形と並んで、締結手順の再現性不足が同程度に重要である。

6.2.4 検証と改善の方針

上記の要因を切り分けるには、(A) クランプ部材を新品にした条件と、(B) 現状部材のままの条件で、同一手順・同一トルク系列の再現試験を行い、 Q 値と波形の非指数性（すべり兆候）の頻度を比較することが有効である。また、締結後の破断確認によって、ファイバーの状態が実験ごとに異なっていないかの確認も必要となる。

さらに先行研究では、荷重を下げることで微小すべりが減り、クランプ損失が低減された可能性が示唆されている。本研究でも、クランプ損失が支配的であれば、テストマスの低荷重化が Q 値上限の更新に有効であると期待できる。

6.3 モード混入・モードカップリングの評価

6.3.1 モード混入が Q 値推定に与える影響

ねじれ振りのリングダウン測定では、対象とするねじれモードの自由減衰に、支持系の並進モード等が重畳・結合すると、得られる波形が単純な指数減衰から逸脱し、 Q 値推定に系統的な不確かさを導入し得る。本研究の装置設計でも、支持系の並進モードがねじれモード近傍に存在する場合に、モード間カップリングによりリングダウンが自由減衰から逸脱し得る点を課題として位置づけている。

また、支持構造を別の振動子として扱う結合モデルでは、支持構造の共振が主モードに近いと実効 Q 値が低下し得ることが示され、支持系固有振動数の高周波化が重要になる [17]。

6.3.2 本研究におけるモード混入の抑制策

本研究では、モード混入を抑えるために以下の対策を組み合わせた。

支持構造の剛性向上による周波数分離の促進

装置全体の揺れを抑制し、ねじれモードと並進モードの周波数分離を進める目的で支持構造の改良を行った。シェル形状を採用して断面二次モーメントを増やし、曲げ剛性を高めることで上端クランプの並進・傾き方向の揺れを抑える設計とした。

モード選択的な励起

2つのアクチュエータの位相を調整することで、左右逆位相の差動駆動により並進成分を抑えてねじれ方向トルクを印加できる。本研究では差動駆動を用いてねじれモード励起を行った。

解析上の帯域制限とデータ選別

リングダウン波形には他モードや低周波ドリフトが重畳する場合があるため、包絡線の安定化を目的として共振周波数 f_0 を中心としたバンドパスフィルタを適用した。

また、ねじれモード主成分が所定の軸で支配的に観測されること等を基準とし、基準を満たさない測定（読み出し飽和など）は解析対象から除外して再測定した。

6.3.3 実験結果に基づく評価

上記の設計・励起・解析を前提として、本研究で解析対象としたリングダウン波形は、明瞭なビート構造や周期的な包絡変調といった強い二重モード重畳を示す例は多くない。

解析による統計誤差はいずれの測定の場合も Q 値自身の 1% 以下にとどまり、解析由来の統計誤差は支配的ではない。このことは、少なくとも解析に採用したデータ集合に関しては、並進モード等の混入が主要因として推定を破綻させる状況は回避できていることを示唆する。

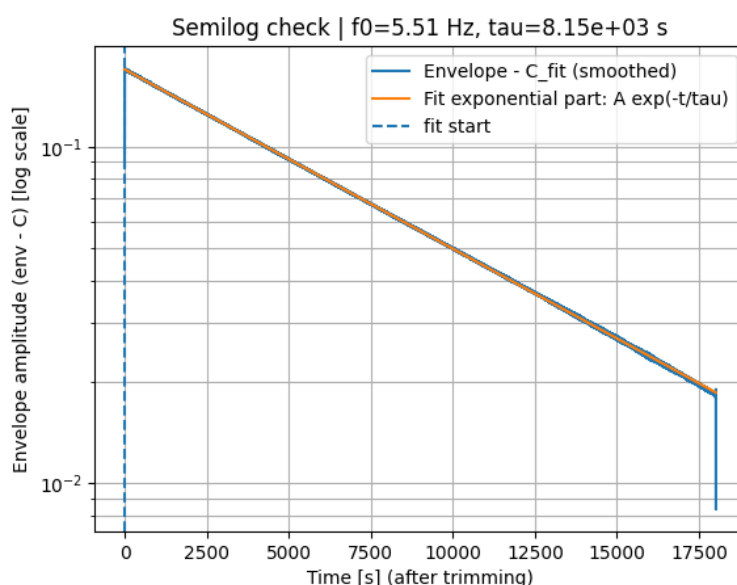


図 6.1 実験結果の半対数表示の例 (表 5.1 の No.3)

一方で、リングダウンが指数関数に良く従うことは、モードカップリングがゼロであることを意味しない点に注意が必要である。例えば、弱い結合によってねじれモードのエネルギーが他モードへ緩やかに流出する場合、見かけの損失はほぼ一定の減衰率として観測され、波形は指数的でありながら実効 Q 値が低下する。この場合、モード混入は非指数性ではなく、他の損失項と同様に 実効 Q 値を下げる寄与として吸収される。

6.3.4 残る可能性

モード混入が支配的でないことをより定量的に裏付ける、あるいは潜在的寄与を上限評価するため、今後は以下の診断が有効である。

スペクトル確認

共振周波数 f_0 近傍のフーリエスペクトルにおいて、他のモード由来の近接ピークが存在するか、また支持系固有振動数が十分高周波側へ離れているかを確認する。モード分離の設計意図は 4.2.3 の方針と一致する。

軸間相関

主軸と直交軸の同時解析により、混入が増えた条件で軸比や位相関係が変わるかを確認する。

フィルタ依存性のチェック

バンドパスの通過帯域は包絡安定化に有効だが、帯域幅を変えたときに推定 Q 値が有意に変化する場合、近接モード重畳やドリフト成分の影響が残っている可能性がある。

意図的な並進励起による同定

本装置は同相駆動により並進成分を励起できるため、同相駆動時の応答から並進モード周波数・減衰を同定し、ねじれモードとの距離（周波数分離）を評価する。

以上より、現状の解析対象データでは非指数性が目立たないことから、モード混入は少なくともリングダウン波形を大きく歪める主因ではないと考えられる。一方で、弱い結合が実効 Q 値を制限する可能性は残るため、上記の診断により寄与の上限評価を行うことが望ましい。

6.4 不確かさ・系統誤差の整理

第 5 章では、リングダウン波形から共振周波数 f_0 と減衰時定数 τ を推定し、 $Q = \pi f_0 \tau$ により Q 値を算出した。本節では、得られた Q 値の解釈に影響し得る不確かさ、系統誤差を整理し、6.2-6.3 節で得た結論を議論する。

6.4.1 本研究における Q 値推定と統計的不確かさ

本研究では、 f_0 を時系列データのフーリエスペクトルのピークから推定し、最大ビンの前後ビンを用いた放物線補間によってピーク位置を補正した。また、他モードや低周波ドリフトの重畳を抑え包絡線を安定化する目的で、 f_0 を中心としたバンドパスフィルタを適用した。

バンドパス後の信号に Hilbert 変換を適用して包絡線を求め、端点誤差を避けるため両端 2 秒を除外し、移動平均（窓幅 20ms）で平滑化した。平滑化包絡線 $A(t) = A \exp(-t/\tau) + C$ でフィットし、共分散行列から τ の不確かさ σ_τ を評価した。さらに、 $Q = \pi f_0 \tau$ により Q 値を算出した。本研究では、誤差の主要因を τ のフィット誤差とみなして、 $\sigma_Q \sim \pi f_0 \sigma_\tau$ を用いた。

表 5.1 の No.2 および No.3 は装置セットアップと締結条件を変更せずに行なった測定であるが、得られた Q 値は No.2 では $Q = 9.4 \times 10^4$ に対し、No.3 では 1.4×10^5 と、約 1.5 倍の差がある。一方で、各測定における包絡線フィットから得られる統計誤差は、No.2 では $\tau = 5428.2 \pm 0.1$ s と、相対的に十分小さい。したがって、本研究の誤差評価としては解析由来の統計誤差だけを用いるよりも、同一条件で複数回測定したときのばらつきを主要な不確か

さとして見積もる方が妥当である。実験で得られる Q 値の再現性による不確かさは、同一条件で得た N 回の測定値の標準偏差

$$\sigma_Q = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Q_i - \bar{Q})^2} \quad (6.4.1)$$

として評価し、フィッティングでの誤差と併せて議論するのが適切である。

6.4.2 指数減衰からの逸脱による系統誤差

ねじれモードのリングダウンが理想的な単一指数減衰から逸脱する要因として、モードカップリング、低周波ドリフト、非線形性（振幅依存）等が挙げられる。

本研究では、解析対象データの多くが半対数表示で高い直線性を示し、明瞭なビート構造や周期的包絡変調といった強い二重モード重畳は多くないことを確認した。これは、少なくとも採用データ集合に関して、指数減衰近似が破綻するような顕著な混入は避けられていることを示唆する。

一方で、6.3 節で述べた通り、波形が指数関数に良く従うことはモードカップリングがゼロであることを意味しない。弱い結合によりエネルギーが他モードへ緩やかに流出する場合、見かけ上はほぼ一定の減衰率として観測され、指数的でありながら実効的な Q 値が低下する可能性がある。

したがって、指数近似の良さは、推定が完全に無偏である保証ではないが、少なくとも指数モデルの明確な破綻は主要因ではない、という消極的な根拠にはなる。

6.4.3 解析手順への依存性

本研究の解析は、バンドパスフィルタ、Hilbert 包絡線、指数フィットから構成される。これらの処理は包絡線の安定化に有効である一方、処理パラメータの選び方によって Q 値推定が変化する可能性がある。特に重要なのは以下である。

フィルタ帯域幅依存性

近接モードが存在する場合、帯域幅の変更が他モード混入量を変え、時定数の推定に系統差を生む可能性がある。

端点処理・平滑化依存性

Hilbert 変換の端点誤差を避けるため先頭・末尾 2 秒を除外し、20 ms の移動平均で平滑化した。これらはノイズ低減に寄与するが、短いデータやノイズ床近傍を多く含む場合には、フィットの重み付けを実質的に変えることがある。

データ採否基準

飽和の有無、正弦波状であること、ねじれモード主成分が所定軸で支配的であること等を基準に解析対象を選別し、基準を満たさない測定は除外して再測定した。これは明らかに不適切な波形による系統誤差を抑える一方、採否境界近傍のデータをどう扱うかで結果が変わり得る。

以上より、解析起因の系統誤差をより定量的に扱うには、フィルタ帯域、平滑化窓幅、フィット区間（特にノイズ床近傍を含めるか）を変えたときの Q 値の変化量を感度として評価し、解析条件を変えても Q 値がどの程度不変かを示すことが有効である。これは 5 章の結果列挙とは独立に、推定の信頼性を補強する情報となる。

6.4.4 実験条件の再現性による系統誤差

本研究では、複数の締結トルクで追加測定を行ったが、 Q 値は概ね 5×10^4 程度で頭打ちとなり、締結トルクを変化させても上限が大きく更新されなかった。この上限の存在は、解析上の偶然誤差だけでは説明しにくく、実験条件、

とりわけクランプに由来する系統的制限を示唆する。この要因候補として、本研究では以下を挙げた。

クランプ側金属の変形

繰り返し締結後の追加測定で頭打ちが観測されていることから、挟持面の塑性変形や面荒れにより、同一トルクでも実効法線力が低下しすべりが生じやすくなる、接触が局所化して微小すべり 条件が変化する、トルクと保持力の換算が再現しなくなる、等を通じて散逸が増えた可能性がある。

手順の未標準化

低トルク域では芯ずれや接触状態など微小差が結果に影響し得ることを踏まえ、これまで共同実験者が主に締結していた経緯から、力の掛け方などの締結の暗黙知が頭打ちに反映された可能性もある。

これらは、測定ごとに Q 値がばらつくだけでなく、上限が系統的に決まる形で現れ得るため、結論に直結する重要な系統差である。したがって、解析手法の系統誤差を詰めることと並行して、クランプ部材状態（新品/使用後）や締結手順の標準化による再現試験を通じて、実験条件の系統差を切り分けることが不可欠である。

6.4.5 結論の頑健性

以上を踏まえると、本研究で観測された Q 値の頭打ちは、採用データ集合において指数減衰近似が大きく破綻していないこと、データ採否基準により飽和や波形異常を除外していること、トルク変更をしても上限が更新されないという再現した特徴を持つことから、解析上の偶然誤差のみで生じた見かけの上限とは考えにくい。

一方で、弱いモード結合が指数性を保ったまま実効的な Q 値を低下させ得る点や、解析条件依存性が潜在的な系統差となり得る点が残る。これらは今後、フィルタ依存性チェック等の診断により評価されるべきである。

6.5 熱雑音への含意

前節では、本研究で得られたねじれモードの Q 値推定に含まれる統計誤差・系統誤差を評価した。本節では、その代表値 Q_{meas} （第5章）を第3章で導出した等価ひずみ雑音に代入し、本研究の達成 Q が熱雑音限界をどの程度規定するかを見積もる。ここで扱うのはあくまで機械損失に起因する熱雑音の寄与であり、読出し雑音等を含めた総合感度は今後の課題として第6.6節で議論する。

6.5.1 等価ひずみ雑音の Q 依存性

第3章では、回転角雑音スペクトル密度 $S_{\theta\theta}(\omega)$ を、重力波ひずみとして見た等価ひずみ雑音 $S_{hh}(\omega)$ へ変換する関係として

$$S_{hh}(\omega) = \frac{S_{\theta\theta}(\omega)}{|H_\alpha(\omega)|^2} \quad (6.5.1)$$

を用いた（式 (3.4.4)）。このとき、損失モデルに応じて S_{hh} の周波数依存性が変わる。

粘性減衰モデルでは、等価ひずみ雑音は

$$S_{hh}^{(\text{vis})}(\omega) = 16k_B T \frac{I}{q^2} \frac{\omega_0}{Q} \frac{1}{\omega^4} \quad (6.5.2)$$

と表される（式 (3.4.10)）。すなわち $S_{hh}^{(\text{vis})} \propto T/Q$ であり、振幅スペクトル密度 $\sqrt{S_{hh}}$ としては $\sqrt{T/Q}$ に比例する。

一方、構造減衰モデルでは損失角 ϕ を用いて整理すると、（式 (3.4.14)–(3.4.15) および $Q = 1/\phi$ （式 (3.3.55)））

$$S_{hh}^{(\text{str})}(\omega) = 16k_B T \frac{I}{q^2} \frac{\omega_0^2}{Q} \frac{1}{\omega^5} \quad (6.5.3)$$

を得る。こちらも $S_{hh}^{(\text{str})} \propto T/Q$ であるが、低周波側での立ち上がりがより急である（ ω^{-5} ）。したがって、観測帯域をより低周波へ拡張する場合には、 Q の向上と低温化が熱雑音低減に対して特に重要となる。

6.5.2 本研究で得られた Q を代入した熱雑音レベル

第5章で得られた代表値を Q_{meas} 、測定温度を T_{meas} とおくと、本研究のねじれモードが熱雑音で制限される等価ひずみ雑音は式 (6.5.2) または式 (6.5.3) に

$$Q \rightarrow Q_{\text{meas}}, \quad T \rightarrow T_{\text{meas}}, \quad \omega = 2\pi f \quad (6.5.4)$$

を代入することで得られる。ここで I, q, ω_0 は試験マス・懸架系の幾何と共振周波数で定まる定数であるため、本研究における Q_{meas} の達成度が、そのまま S_{hh} の規模を決定する。

また、前節で評価した Q の不確かさ ΔQ は、 $S_{hh} \propto 1/Q$ より

$$\frac{\Delta S_{hh}}{S_{hh}} \simeq \frac{\Delta Q}{Q}, \quad \frac{\Delta \sqrt{S_{hh}}}{\sqrt{S_{hh}}} \simeq \frac{1}{2} \frac{\Delta Q}{Q} \quad (6.5.5)$$

の形で熱雑音見積もりに直接伝播する。したがって、リングダウン解析の系統誤差（モード混入、フィット窓依存など）の抑制は、単に Q の精度向上に留まらず、感度評価の信頼性にも寄与する。

6.5.3 低温化・ Q 向上が感度に与える改善量

熱雑音由来の等価ひずみ雑音は、両モデルで共通に $S_{hh} \propto T/Q$ であるため、温度・ Q の変更に対する改善比は簡潔に評価できる。例えば基準状態 (T_1, Q_1) から (T_2, Q_2) へ遷移したとき、

$$\frac{S_{hh}(T_2, Q_2)}{S_{hh}(T_1, Q_1)} = \frac{T_2/Q_2}{T_1/Q_1}, \quad \frac{\sqrt{S_{hh}(T_2, Q_2)}}{\sqrt{S_{hh}(T_1, Q_1)}} = \sqrt{\frac{T_2/Q_2}{T_1/Q_1}} \quad (6.5.6)$$

となる。したがって、低温化により T を下げること、および損失低減により Q を上げることは等価であり、両者を組み合わせることで振幅感度 $\sqrt{S_{hh}}$ を $\sqrt{T/Q}$ に比例して改善できる。

本研究で得られた Q_{meas} は、支持・締結条件（特にクランプ周辺）に強く依存することが示唆されており、ねじれ型重力波望遠鏡の熱雑音限界をさらに押し下げるには、支配的損失の同定とその低減が不可欠である。この点について、次節では改善策の優先順位（締結・表面・モード分離・低温化）を整理する。

6.5.4 目標感度を満たすための要求 Q 値

式 (6.5.2), 式 (6.5.3) は、ねじれ共振 ω_0 より十分低い周波数領域 ($\omega \ll \omega_0$) における熱雑音のスケーリングを与える。ここでは、熱雑音由来の等価ひずみ雑音が、所望の目標値 $S_{hh}^{\text{req}}(\omega)$ を下回るために必要な Q 値を見積もる。

粘性減衰モデル（式 (6.5.2)）について、 $S_{hh}^{(\text{vis})}(\omega) \leq S_{hh}^{\text{req}}(\omega)$ を満たす条件は

$$Q \geq Q_{\text{req}}^{(\text{vis})}(\omega) \equiv 16k_B T \frac{I}{q^2} \frac{\omega_0}{\omega^4} (S_{hh}^{\text{req}}(\omega))^{-1} \quad (6.5.7)$$

と書ける。同様に、構造減衰モデル（式 (6.5.3)）では

$$Q \geq Q_{\text{req}}^{(\text{str})}(\omega) \equiv 16k_B T \frac{I}{q^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^5} (S_{hh}^{\text{req}}(\omega))^{-1} \quad (6.5.8)$$

となる。両者の比を取ると

$$\frac{Q_{\text{req}}^{(\text{str})}(\omega)}{Q_{\text{req}}^{(\text{vis})}(\omega)} = \frac{\omega_0}{\omega} \quad (6.5.9)$$

であり、構造減衰モデルでは低周波側 (ω が小さい領域) ほど要求 Q がより厳しくなる。したがって、観測帯域を低周波へ拡張する設計では、 Q 向上と低温化 (T 低減) が熱雑音低減に対して特に重要となる。

6.5.5 本研究の代表値とねじれ型重力波望遠鏡の目標値に基づく改善量の具体例

第5章の測定結果(表 5.1)より、本研究では常温・真空下で代表的に $Q_{\text{meas}} \simeq 1.4 \times 10^5$ 程度のねじれモード Q 値が得られている。一方、先行研究の議論ではねじれ型重力波望遠鏡で目標とする Q 値は $Q_{\text{goal}} \sim 10^8$ 程度である。

熱雑音は $S_{hh} \propto T/Q$ (6.5.1–6.5.3 節) であるから、温度が同じ (T_{meas} 一定) と仮定すると

$$S_{hh}^{(\text{vis})}(\omega) = \frac{16k_B T}{Iq^2} \frac{\omega_0}{Q} \frac{1}{\omega^4}, \quad (6.5.2)$$

$$S_{hh}^{(\text{str})}(\omega) = \frac{16k_B T}{Iq^2} \frac{\omega_0^2}{Q} \frac{1}{\omega^5}. \quad (6.5.3)$$

すなわち、 Q のみを $Q_{\text{meas}} \rightarrow Q_{\text{goal}}$ と改善できた場合、パワースペクトル密度 S_{hh} は $Q_{\text{goal}}/Q_{\text{meas}}$ 倍、振幅スペクトル密度 $\sqrt{S_{hh}}$ は $\sqrt{Q_{\text{goal}}/Q_{\text{meas}}}$ 倍だけ低減する。

さらに低温化を併用する場合、式 (6.5.6) と同様に

$$\frac{\sqrt{S_{hh}(T_2, Q_2)}}{\sqrt{S_{hh}(T_1, Q_1)}} = \sqrt{\frac{T_2/Q_2}{T_1/Q_1}} \quad (6.5.10)$$

で与えられる。本実験では、室温を 300K すると、表 5.1 より、

$$\sqrt{\frac{T_2/Q_2}{T_1/Q_1}} = \sqrt{\frac{(4\text{ K})/(2.986 \times 10^5)}{(300\text{ K})/(3.491 \times 10^4)}} \sim 0.04 \quad (6.5.11)$$

と、低温化により熱雑音が 1/25 となっている。

6.5.6 小結

本節では、第3章で導出した等価ひずみ雑音に対して、第5章で得られた Q 値を代入することで、本研究の達成 Q が熱雑音限界をどの程度規定するかを整理した。熱雑音由来の等価ひずみ雑音は、粘性減衰・構造減衰いずれのモデルでも $S_{hh} \propto T/Q$ であり、低温化と Q 向上はいずれも $\sqrt{T/Q}$ に比例して振幅感度を改善する。一方で、総合感度は読み出し雑音等も含めて決まるため、熱雑音低減と並行して、他雑音とのバランスを考慮した設計指針が必要である。これらを第6.6節で議論する。

6.6 改善策の優先順位と総合感度への展望

本研究で得られた Q_{meas} は、支持・締結条件（特にクランプ周辺）に強く依存することが示唆された。ねじれ型重力波望遠鏡の熱雑音限界をさらに押し下げるには、支配的損失の同定とその低減が不可欠である。本節ではまず、熱雑音に読み出し雑音等を加えた総合感度の枠組みを簡潔に述べた上で、改善策の優先順位（締結・表面・モード分離・低温化）を整理する。

6.6.1 総合感度の枠組み

第6.5節では機械損失に起因する熱雑音の寄与 $S_{hh}^{(\text{therm})}$ のみを扱った。実際の観測では読み出し雑音や外乱等も重畳するため、等価ひずみ雑音の総和として

$$S_{hh}^{(\text{tot})}(\omega) = S_{hh}^{(\text{therm})}(\omega) + S_{hh}^{(\text{ro})}(\omega) + S_{hh}^{(\text{ext})}(\omega) \quad (6.6.1)$$

の形で評価するのが自然である。ここで $S_{hh}^{(\text{ro})}$ は読み出し系 (PD・電子回路等) に由来する雑音、 $S_{hh}^{(\text{ext})}$ は残留ガス揺らぎ、地面振動の回り込み、磁気外乱等の外部要因を表す。本研究の主眼は Q 値測定にあるため、まず $S_{hh}^{(\text{therm})}$ の低減（すなわち Q 向上と低温化）を優先課題として扱う。

また第 6.5 節で示した通り、熱雑音の振幅スペクトル密度は代表的に

$$\sqrt{S_{hh}^{(\text{therm})}} \propto \sqrt{\frac{T}{Q}} \quad (6.6.2)$$

とスケールする。したがって、温度と Q を $(T_{\text{old}}, Q_{\text{old}})$ から $(T_{\text{new}}, Q_{\text{new}})$ に変更したとき、熱雑音振幅の改善率は

$$\frac{\sqrt{S_{hh,\text{new}}^{(\text{therm})}}}{\sqrt{S_{hh,\text{old}}^{(\text{therm})}}} = \sqrt{\frac{T_{\text{new}}/Q_{\text{new}}}{T_{\text{old}}/Q_{\text{old}}}} \quad (6.6.3)$$

で与えられる。以下ではこのスケーリングを指針として、改善策の優先順位を議論する。

6.6.2 優先順位の決め方

改善策の優先順位は、熱雑音低減への寄与（ Q をどれだけ押し上げ得るか、あるいは T をどれだけ下げ得るか）、実現容易性（試験コスト、作業再現性、装置改造の大きさ）、診断能力（支配的損失の切り分けに資するか）の三点で評価するのが有効である。特に本研究では、締結条件に応じて Q の上限が系統的に決まる兆候があるため、最初に「クランプ起因の散逸」を最優先で抑えることが合理的である。

6.6.3 クランプ起因損失の低減

クランプ部は微小すべり、局所的な塑性変形、接触状態のばらつき等を通じて散逸を生み得る。本研究でも、締結トルクを変えても Q の上限が更新されにくいという特徴から、クランプ近傍が支配的損失となっている可能性が高い。したがって、まず以下を優先して実施する。

- 締結手順の標準化と再現試験

片締めを避けた対称締結、締結順序の固定、締結後の待ち時間を含め、手順を文書化して同一条件で繰り返し測定する。これにより作業依存や暗黙知の寄与を定量化できる。

- クランプ部材状態の管理

繰り返し使用で挟持面が塑性変形・面荒れする場合、同一トルクでも実効法線力や接触状態が変わり、 Q の減少として現れ得る。新品と使用後、あるいは研磨・交換後で Q を比較することで、部材劣化の寄与を切り分ける。

- トルクから保持力への橋渡し

トルクは摩擦係数等に依存して保持力に直結しないため、可能であればワッシャ・潤滑条件の統一等により変動要因を減らす。実効保持力の指標（すべり開始条件など）を併用できると望ましい。

これらは装置全体の大きな改造を必要とせず、かつ支配的損失の同定にも直結するため、最初の改善ステップとして費用対効果が高い。

6.6.4 表面損失の低減

先行研究の表面損失モデルでは、細径ファイバーほど表面の損失が Q を制限し得る。クランプ起因損失が十分に小さくなった後、なお Q が伸びない場合には表面損失が次の制限要因となり得る。候補としては、表面粗さ・加工損傷層・汚染等が挙げられる。

実施案としては、表面洗浄・取り扱い手順の統一、表面処理条件の異なるファイバーでの比較、直径依存の系統測定、が有効である。特に直径依存の系統測定は支配機構の診断能力が高く、表面損失モデルの妥当性検証にもなる。

6.6.5 モード分離、アライメント改善

第 6.3 節で議論したように、弱いモード結合は指数減衰を保ったまま実効的な Q を低下させ得る。したがって、ねじれモードと並進モードの周波数分離を進め、結合を弱めることは、真の損失低減と独立に重要である。

実施案としては、支持構造の剛性向上による並進共振の高周波化、試験マスの重心合わせとクランプ対称性の改善による結合項の低減、並進成分の同時計測とデータ駆動でのモード分離、が挙げられる。これらは Q 向上の上限を押し上げるだけでなく、測定値の再現性向上にも寄与する。

6.6.6 低温化

低温化は式 (6.6.2) より、温度低減が直接熱雑音を下げるという明確な利点を持つ。一方で、クランプ起因損失が支配的な段階では、温度を下げても Q が十分に改善しない可能性がある。また低温系では、熱収縮による締結条件の変化や、読み出し系の実装難度上昇も伴う。

したがって、低温化はクランプ損失の抑制およびモード分離の改善により常温での Q の上限が十分に押し上がった段階で本格的に導入するのが合理的である。ただし、低温化に向けたインタフェース設計（クランプ材選定、熱リンク、センサー配置等）は時間を要するため、常温での改善と並行して設計検討を進めることは有益である。

6.6.7 まとめ

以上を踏まえると、本研究の次段階として推奨される優先順位は

1. クランプ損失低減（手順標準化・部材状態管理・再現試験）
2. 表面損失低減（表面処理・直径依存などの系統測定）
3. モード分離・アライメント改善（結合低減と診断強化）
4. 低温化（常温での支配損失低減後に本格導入）

である。これにより、 Q 向上と温度低減を組み合わせると熱雑音を段階的に押し下げ、最終的には式 (6.6.1) で表される総合感度の支配項を同定しつつ、ねじれ型重力波望遠鏡の目標感度に向けた見通しを具体化できる。

第7章

まとめ

本研究では、ねじれ型重力波望遠鏡における低周波重力波観測の実現に向けて重要となる、サファイアファイバーで懸架されたねじれ振り子のねじれモードの Q 値測定を行った。重力波検出器の感度に対して熱雑音が本質的制限となる中で、本系の Q 値を実験的に把握し、支配的損失機構の候補を整理することを目的とした。

7.1 本研究で得られた知見

第4章では実験装置および測定・解析手法を整備し、第5章ではリングダウン測定によりねじれモードの Q 値を評価した。代表的な測定では、常温・真空下で $Q \sim 10^5$ オーダーの値が得られ、先行研究で報告されている最大値と同程度であった。一方で、ねじれ型重力波望遠鏡が想定する目標値 ($Q \sim 10^8$ 程度) に対しては依然として大きな隔たりがあり、さらなる損失低減が必要である。

また第6章の議論より、本研究で得られた Q_{meas} は支持・締結条件（特にクランプ周辺）に強く依存することが示唆され、締結トルクを変化させても Q の上限が更新されにくいという特徴から、クランプ近傍が支配的損失となっている可能性が高い。加えて、弱いモード結合は指数減衰を保ったまま実効的な Q を低下させ得るため、ねじれモードと並進モードの周波数分離やアライメントの改善は、真の損失低減と独立に重要な課題である。

7.2 熱雑音への含意

第6.5節で示した通り、熱雑音由来の等価ひずみ雑音は代表的に

$$\sqrt{S_{hh}^{(\text{therm})}} \propto \sqrt{\frac{T}{Q}} \quad (7.2.1)$$

とスケールする。したがって、低温化 (T 低減) と損失低減 (Q 向上) は同等に熱雑音を押し下げ得る。ただし、総合感度は熱雑音だけで決まらず、読み出し雑音や外乱の寄与も含めた支配項の同定が必要である。本研究はそのうち、まず熱雑音項を規定する Q 値に焦点を当て、改善指針を与えるものである。

7.3 今後の課題と展望

第6.6節で整理した通り、本研究の次段階として推奨される改善の優先順位は以下である。

1. クランプ損失低減
2. 表面損失低減
3. モード分離・アライメント改善
4. 低温化

特に本研究では、締結条件に応じて Q の上限が系統的に決まる兆候があるため、最初にクランプ起因の散逸を抑えることが、費用対効果・診断能力の両面で合理的である。その上で、クランプ起因損失が十分に抑えられた段階で表面損失の寄与を検証し、さらにモード分離の改善により実効 Q の低下要因を切り分けることで、 Q の上限を段階的に

押し上げられると期待される。

低温化は温度低減が直接熱雑音を下げる明確な利点を持つ一方で、クランプ起因損失が支配的な段階では Q が十分に改善しない可能性がある。したがって、低温化は常温での Q 上限が十分に押し上がった段階で本格導入するのが合理的であるが、熱収縮や読み出し系実装を含むインタフェース設計には時間を要するため、常温での改善と並行して設計検討を進めることが有益である。

以上より、本研究は ねじれ型重力波望遠鏡 の熱雑音低減に向けた Q 値測定の基盤を整備し、支配的損失機構としてクランプ近傍を最有力候補として位置づけた。今後は、優先順位に沿った系統的改善と総合感度の支配項同定を進めることで、ねじれ型重力波望遠鏡 の目標感度に向けた見通しを具体化できると期待される。

謝辞

本研究および本論文の作成にあたり、多くの方々にご指導・ご支援を賜りました。ここに深く感謝申し上げます。

まず、指導教員の安東正樹教授には、ご多忙の中にもかかわらず研究の方向性から実験内容に至るまで丁寧にご指導いただきました。研究内容を定める段階から数多くの助言を頂戴し、本研究を進める上で大きな支えとなりました。心より御礼申し上げます。

次に、安東研究室助教の小森健太郎助教には、実験計画の検討、装置の取り扱い、解析手法の議論に至るまで、日々きめ細やかなご指導をいただきました。特に、研究活動が思うように進まない時期にも変わらず気にかけてくださり、継続して研究に取り組める環境を整えていただきました。こうして修士論文をまとめることができたのは、ひとえに先生のお力添えのおかげです。深く感謝申し上げます。

また、共同実験者である轟優里さんには、修論の都合で度々予定を調整していただいたにもかかわらず、快く実験に付き合ってくださいました。実験操作や手順上の注意点など、実務的な面でも多くのことを教えていただき、大変助けられました。ここに感謝の意を表します。

さらに、研究室の皆様には、実験に関する助言や議論を通して多くの刺激と支援をいただきました。日頃のご協力に心より感謝いたします。

最後に、装置製作に際してお世話になった小野電機製作所の皆様にも感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Technical note: SPI single crystal sapphire products. https://www.2spi.com/catalog/documents/TECHNICAL_NOTE_Single_Crystal_Sapphire.pdf.
- [2] GWTC-4.0: Updated gravitational-wave catalog released, 2025. <https://www.ligo.caltech.edu/news/ligo20250826>.
- [3] B. P. Abbott, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, 116:061102, 2016.
- [4] R. X. Adhikari. Gravitational radiation detection with laser interferometry. *Reviews of Modern Physics*, 86:121–151, 2013.
- [5] M. Ando, K. Ishidoshiro, K. Yamamoto, K. Yagi, W. Kokuyama, K. Tsubono, and A. Takamori. Torsion-bar antenna for low-frequency gravitational-wave observations. *Physical review letters*, 105:161101, 2010.
- [6] L. Blanchet. Post-newtonian theory for gravitational waves. *Living Reviews in Relativity*, 27:1–292, 2013.
- [7] S. Bonazzola and E. Gourgoulhon. Gravitational waves from pulsars: Emission by the magnetic field induced distortion. *Astronomy and Astrophysics*, 312:675–690, 1995.
- [8] J. C. Burton, P. Taborek, and J. E. Rutledge. Temperature dependence of friction under cryogenic conditions in vacuum. *Tribology Letters*, 23(2):131–137, 2006.
- [9] H. B. Callen and T. A. Welton. Irreversibility and generalized noise. *Physical Review*, 83:34–40, 1951.
- [10] M. Cerdonio, L. Conti, A. Heidmann, and M. Pinard. Thermoelastic effects at low temperatures and quantum limits in displacement measurements. *Physical Review D*, 63:082003, 2001.
- [11] A. M. Gretarsson and G. M. Harry. Dissipation of mechanical energy in fused silica fibers. *Review of Scientific Instruments*, 70:4081–4087, 1999.
- [12] H.-T. Janka. Explosion mechanisms of core-collapse supernovae. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 62:407–451, 2012.
- [13] Y. W. Kwon, et al. Analysis of heat flow around bolted joints and variations of bolt preload under thermal load. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 131(6):061203, 2009.
- [14] K.-T. Lau. Searching for gravitational waves from the coalescence of high mass black hole binaries. The Ligo Laboratory, 2015.
- [15] R. Lifshitz and M. L. Roukes. Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems. *Physical Review B*, 61(8):5600–5609, 2000.
- [16] A. Najafi. A rapid review of the theory of elasticity, 2020. <https://iasbs.ac.ir/~najafi/Elasticity.pdf>.
- [17] C.-P. Ooi. Mechanical loss of crystal fibres for torsion pendulum experiments. Master’s thesis, University of Tokyo, 2018.
- [18] Y. Oshima. Angular signal amplification with a coupled cavity for torsion-bar gravitational-wave antenna. Master’s thesis, university of Tokyo, 2022.
- [19] S. D. Penn, et al. Frequency and surface dependence of the mechanical loss in fused silica. *Physics Letters A*, 352:3–6, 2005.
- [20] T. Uchiyama, T. Tomaru, D. Tatsumi, S. Miyoki, M. Ohashi, K. Kuroda, T. Suzuki, A. Yamamoto, and

- T. Shintomi. Mechanical quality factor of a sapphire fiber at cryogenic temperatures. *Physics Letters A*, 273(5-6):310–315, 2000.
- [21] Z. Zhang, et al. Influence of temperature on the bolt loads and variation of preload of a multi-bolt connection. *Advances in Civil Engineering*, p. 5636941, 2021.

ねじれ型重力波望遠鏡のための機械散逸の評価
(Evaluation of Mechanical Loss for Torsion-Bar Gravitational-Wave Antenna)

山口 由貴