

TAMA300 レーザー干渉計型重力波検出器の制御実験

谷口信介

平成11年2月4日

目次

| | |
|--|-----------|
| 第 1 章 Introduction | 1 |
| 第 2 章 重力波とその検出 | 3 |
| 2.1 重力波 | 3 |
| 2.1.1 Einstein 方程式の線形化 | 3 |
| 2.1.2 重力波の伝搬 | 4 |
| 2.1.3 重力波源 | 6 |
| 2.2 レーザー干渉計による重力波の検出原理 | 6 |
| 2.2.1 Michelson 干渉計による重力波の検出 | 6 |
| 2.2.2 Delay Line 型干渉計 | 8 |
| 2.2.3 Fabry-Perot-Michelson 型干渉計 | 9 |
| 2.3 世界各国の大型計画 | 9 |
| 2.4 TAMA300 project | 11 |
| 2.5 レーザー干渉計の雑音源 | 11 |
| 2.5.1 shot noise | 14 |
| 2.5.2 熱雑音 | 14 |
| 2.5.3 地面振動によるノイズ | 15 |
| 第 3 章 Fabry-Perot-Michelson 干渉計の光路長制御 | 17 |
| 3.1 Fabry-Perot cavity | 17 |
| 3.1.1 Fabry-Perot cavity の DC 応答 | 18 |
| 3.1.2 Fabry-Perot cavity の AC 応答 | 19 |
| 3.1.3 Fabry-Perot cavity での信号取得 | 20 |
| 3.2 Fabry-Perot-Michelson 干渉計の制御 | 21 |
| 3.2.1 Fabry-Perot-Michelson 干渉計の応答 | 21 |
| 3.2.2 frontal modulation 法の導入 | 23 |
| 3.2.3 復調信号の位相による微分 | 23 |
| 3.2.4 制御信号の取得 | 24 |
| 3.2.5 信号の分離 | 25 |
| 3.2.6 同差法による Fabry-Perot-Michelson 干渉計の制御 | 25 |

| | |
|---|-----------|
| 第 4 章 Fabry-Perot-Michelson 干渉計のアライメント | 27 |
| 4.1 laser 光のモード展開 | 27 |
| 4.1.1 Hermite Gaussian mode | 27 |
| 4.1.2 モード展開 | 28 |
| 4.2 misalignment の行列表現 | 29 |
| 4.2.1 光軸の平行移動 | 30 |
| 4.2.2 光軸の回転 | 31 |
| 4.2.3 beam waist の平行移動 | 32 |
| 4.3 Misaligned Fabry-Perot cavity | 32 |
| 4.3.1 Fabry-Perot cavity のモード選択性 | 33 |
| 4.3.2 misaligned Fabry-Perot cavity 反射光 | 33 |
| 4.3.3 Fabry-Perot cavity の形状に関するパラメーター | 34 |
| 4.3.4 mirror の傾きと cavity の光軸のずれ | 35 |
| 4.3.5 misalignment の行列表現 | 36 |
| 4.3.6 misaligned Fabry-Perot cavity からの反射光 | 37 |
| 4.4 Fabry-Perot-Michelson 干渉計の misalignment | 38 |
| 4.4.1 frontal modulation による非対称の導入 | 38 |
| 4.4.2 misaligned Fabry-Perot-Michelson 干渉計の応答 | 39 |
| 4.5 misalignment による影響 | 40 |
| 4.5.1 misaligned Fabry-Perot cavity の感度 | 40 |
| 4.5.2 misalignment による Fabry-Perot-Michelson 干渉計の感度の低下 | 41 |
| 4.5.3 misalignment によるコントラストの低下 | 42 |
| 4.5.4 CMRR の低下 | 43 |
| 4.6 wavefront sensing による misalignment の検出 | 43 |
| 4.6.1 misalignment に関する信号の取り出し | 44 |
| 4.6.2 wavefront sensor | 46 |
| 4.6.3 misalignment の信号分離 | 47 |
| 4.6.4 Fabry-Perot cavity における WFS を用いた misalignment の検出限界 | 50 |
| 4.7 TAMA300 parameter における試算 | 50 |
| 4.7.1 misalignment factor γ_F, γ_E の計算 | 51 |
| 4.7.2 TAMA300 における misalignment の要求値 | 51 |
| 4.7.3 Fabry-Perot cavity の信号の分離 | 52 |
| 第 5 章 TAMA300 Fabry-Perot-Michelson 干渉計 | 53 |
| 5.1 TAMA サイト | 53 |
| 5.1.1 全体図 | 53 |
| 5.1.2 地面振動 | 53 |
| 5.2 真空系 | 53 |
| 5.3 Optics | 55 |
| 5.3.1 真空槽と光学定盤の配置 | 55 |

| | | |
|--------------|--|-----------|
| 5.3.2 | input optics | 57 |
| 5.3.3 | mirrors, beam splitter, pick-off plate | 59 |
| 5.4 | 懸架・防振系 | 60 |
| 5.4.1 | スタック | 60 |
| 5.4.2 | suspension | 62 |
| 5.4.3 | stand-off | 62 |
| 5.5 | 検出系 | 64 |
| 5.5.1 | RF oscillator の分配 | 64 |
| 5.5.2 | Photo detector | 65 |
| 5.5.3 | Phase shifter | 65 |
| 5.5.4 | Demodulator | 65 |
| 5.5.5 | photo detector の noise 測定 | 65 |
| 5.5.6 | Wavefront Sensor | 66 |
| 5.5.7 | Gouy phase telescope | 66 |
| 5.5.8 | 光学定盤 | 67 |
| 5.6 | フィードバック系 | 67 |
| 5.6.1 | Coil-Magnet actuator | 67 |
| 5.6.2 | Coil-driver | 69 |
| 5.6.3 | アナログ信号光伝送システム | 69 |
| 5.7 | モニター系 | 70 |
| 5.8 | Length Sensing and Control | 70 |
| 5.8.1 | configuration of the control | 70 |
| 5.8.2 | δL_- loop | 72 |
| 5.8.3 | δl_- loop | 72 |
| 5.8.4 | δL_+ loop | 73 |
| 5.9 | Alignment Sensing and Control | 73 |
| 5.9.1 | Configuration of the control | 73 |
| 5.9.2 | wavefront sensing による制御 loop | 74 |
| 第 6 章 | TAMA300 Fabry-Perot-Michelson 干渉計の制御 | 75 |
| 6.1 | frontal modulation による FPM 干渉計の lock acquisition | 75 |
| 6.2 | 干渉計の長期運転 | 76 |
| 6.2.1 | 制御の安定性 | 76 |
| 6.2.2 | BS orientation control | 76 |
| 6.2.3 | laser thermal の制御 | 76 |
| 6.2.4 | その他 | 77 |
| 6.3 | alignment control による干渉計の性能の向上 | 77 |
| 6.3.1 | cavity の共振の安定化 | 77 |
| 6.3.2 | CMRR の改善 | 78 |
| 6.3.3 | コントラストの改善 | 78 |

| | | |
|--------------|---|------------|
| 6.4 | alignment control によるノイズの混入 | 79 |
| 6.4.1 | 非対称性によるノイズの混入。 | 79 |
| 6.4.2 | coil-magnet actuator の calibration | 79 |
| 6.4.3 | error signal の calibration | 81 |
| 6.4.4 | 干渉計の変位雑音 | 82 |
| 6.4.5 | alignment 制御による noise | 82 |
| 第 7 章 | 結論 | 91 |
| 7.1 | 実験結果 | 91 |
| 7.2 | 今後の課題 | 91 |
| 7.3 | alignment 制御による変位雑音対策 | 91 |
| 7.3.1 | wavefront sensor でのオフセット | 93 |
| 7.3.2 | misalignment に対する定量的考察 | 94 |
| 7.3.3 | coil-magnet actuator 関連 | 95 |
| 付 録 A | 光路長制御系の開発 | 97 |
| A.1 | shot noise | 97 |
| A.2 | TAMA300 phase I における shot noise limit の計算 | 98 |
| A.3 | 制御系の開発 | 99 |
| A.3.1 | TAMA parameter での信号分離度の計算 | 99 |
| A.3.2 | 信号の混合より生じる制御系への要求 | 99 |
| A.3.3 | 残留 rms 振動に対する要求 | 100 |
| A.3.4 | 鏡の弾性モードの共振からの要求 | 101 |
| A.3.5 | 制御系に対する要求のまとめ | 101 |
| 付 録 B | Hermite Gaussian mode | 103 |
| B.1 | lowest-order mode | 103 |
| B.2 | higher order mode | 104 |
| B.3 | Hermite-Gaussian mode | 105 |
| B.4 | 楕円 mode | 106 |

第1章 Introduction

Einstein によって重力波の存在が 1916 年に予言された。その存在が、間接的ではあるが初めて証明されたのが Einstein の予言から 70 年以上もすぎた 1989 年のことである。その証明は、J.H.Talor らによって連星パルサーの観測によってなされた。

比較的大きな重力波源としては、連星中性子星の合体や超新星爆発など、様々な天体現象が理論により予測されている。しかし、重力波は物資との相互作用が非常に小さいため直接検証は未だなされていない。重力波の直接検出は、実験物理学の最も challenging なテーマの一つである。

近年、各種技術の発展により、レーザー干渉計を用いた重力波の直接検出の可能性が見えてきた。そういった背景の中、現在、世界各国で長基線長の干渉計建設計画が進行中である。日本では TAMA300 project という基線長 300m の Fabry-Perot-Michelson 干渉計型重力波検出器が国立天文台三鷹キャンパスにおいて建設中である。

干渉計型重力波検出器による重力波の原理より干渉計を構成する鏡などの光学系が振り子状に懸架されている。そのため、つねに地面振動によって揺らされているので、干渉計を動作点に保つためには常に制御する必要がある。

ここで、重力波に対する感度を上げるために長い基線長を持った干渉計を建設しているのだが、長い基線長を持つマイナス面として鏡のミスアライメントに対して非常に敏感になる。干渉計を構成する鏡の揺れは干渉計の動作を不安定にし、さらに干渉計の性能を下げる。よって、大型干渉計においては鏡のアライメントに対して何らかの制御が必要になる。TAMA300 において 300 m Fabry-Perot cavity を用いたアライメント制御実験が 1998 年の 5 月まで行われ、アライメント制御に成功した。その後 TAMA300 においては 300 m Fabry-Perot cavity を両腕に持つ Fabry-Perot-Michelson 干渉計の制御実験を行い、Fabry-Perot cavity からの反射光を beam splitter において再結合させ干渉するという事に成功し、さらに alignment 制御を全自由度制御することが出来た。鏡の懸架された Fabry-Perot-Michelson 干渉計において実際にグローバルなアライメント制御を導入し全自由度制御に成功したのは TAMA300 が世界初の例である。それと同時に、TAMA300 は現時点において世界最長の基線長を持つ干渉計である。

レーザー干渉計型重力波検出器の開発には相対性理論の検証という目的以外にも、将来的には重力波による天文学を築くという目的がある。よって現在の重力波検出器は観測装置としての役割を持つことになる。観測装置としてレーザー干渉計型重力波検出器が要求されるのは、装置の安定性と感度である。アライメント制御は安定性と感度両方に対して必要である。本実験では、安定性の方を重視し TAMA300 Fabry-Perot-Michelson 干渉計を長時間運転することを目標に実験を行った。その結果約 5 時間連続に干渉計を動作させることに成功した。これで、TAMA300 の開発の 1 つのマイルストーンは達成されたわけだが、今後 TAMA300 は重力波検出器として感度という視点から見た性能が求められる。そのため本実験においても干渉計の感度やコントラストなどといった性能に関する性能評価も行った。ここで、TAMA300 は初めてアライメント制御をフルに

行った大型干渉計なので、性能評価はアライメント制御に関する物を中心に行った。その結果コントラストや CMRR 等はアライメント制御を導入することによって向上したが、感度はアライメント制御に起因するノイズが limit していることがわかった。

本論文では次の様な順序で実験の結果及び今後の課題についてまとめる。

第 2 章 重力波と干渉計型検出器について基本的な解説および、TAMA project について。

第 3 章 Fabry-Perot-Michelson 干渉計の光路長制御についての簡単な解説。

第 4 章 Fabry-Perot-Michelson 干渉計のミスアライメントについての計算および、wave-front sensing を用いたアライメント制御。

第 5 章 実験の set-up。

第 6 章 長期運転時の結果。アライメント制御が干渉計の性能に与える影響。

第 7 章 実験結果の考察および今後の課題。

本実験は TAMA project の中で行われた実験なので、干渉計の開発は TAMA group による物である。ここで、TAMA300 の開発の中で著者の関わった部分について明らかにしておく。まず、TAMA project においては、干渉計の Design や suspension 等の制作に関わるグループと干渉計本体に suspension や mirror などの install をおこない実験をするグループに分かれる。著者は後者のグループに属し、TAMA300 実機を用いた実験に 1997 年 11 月から現在まで参加している。内容は TAMA300 への suspension 等の設置や入射光学系、検出系の設置、回路の制作、その他各種測定など干渉計本体を用いた実験全般に関するアシスタント的な役割を主に行った。また、本論文は制御に関する話題が中心であるが、制御系の基本的な設計には参加しておらず、筆者が行ったのは、設計された servo filter を制作しその servo を用いて実際に干渉計を動かし、必要に有れば servo filter の改造などという事である。著者が中心になって行ったのは長期運転のための制御系の調節や BS orientation control、干渉計実機を用いたノイズの評価などである。以上のような背景の中、本論文の構成についても制御系の configuration 等も第 5 章の実験の set-up に含めた。これは、制御系も含めて 1 つの干渉計と見なして、このような干渉計を用いて著者が第 6 章にあるような実験を行ったというためである。また、基本的な制御系の設計に関しては appendix A にまとめた。

第2章 重力波とその検出

2.1 重力波

重力波は Einstein 方程式を線形近似することによって得られる波動解である。それは、空間のひずみとして光速で伝搬する。ここでは、Einstein 方程式を線形化することによって、重力波の解を導く。

2.1.1 Einstein 方程式の線形化

弱い重力場での重力波の固有モードを求めるために、まず、Einstein 方程式を線形化する。Ricci テンソル、Ricci スカラー は計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ を用いて局所慣性系では次のように書ける [1]。

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}) \quad (2.1)$$

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha} \quad (2.2)$$

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

ただし、 $_{,\alpha}$ は α による偏微分を表す。Ricci テンソルを用いて Einstein テンソル $G^{\alpha\beta}$ を次のように定義する。

$$G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \quad (2.4)$$

エネルギー運動量テンソル $T^{\alpha\beta}$ に対して Einstein 方程式は次のように定義されている。

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta} \quad (2.5)$$

ここで、平坦な Minkowski 計量を $\eta_{\alpha\beta}$ とおいて、Minkowski 計量からのずれ $h_{\alpha\beta}$ を用いて Einstein 方程式を記述することを考える。

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (2.6)$$

これより、

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\beta\mu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) \quad (2.7)$$

とかける。さらに次のような文字を導入して

$$\bar{h}^{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h \quad (2.8)$$

$$\bar{h} \equiv \bar{h}^\alpha_\alpha = -h \quad (2.9)$$

$$h^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \bar{h} \quad (2.10)$$

Einstein テンソルを書き直すと

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \{ \bar{h}'_{\alpha\beta,\mu} + \eta_{\alpha\beta} \bar{h}'_{\mu\nu}{}^{\mu\nu} - \bar{h}'_{\alpha\mu,\beta} - \bar{h}'_{\beta\mu,\alpha} + o(h^2_{\alpha\beta}) \} \quad (2.11)$$

$$\therefore G^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}^{\alpha\beta} \quad (2.12)$$

$$\therefore \square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu} \quad (2.13)$$

と書ける。

2.1.2 重力波の伝搬

次に真空中での重力波の伝搬について考える。真空中では $T^{\mu\nu} = 0$ なので、線形化された Einstein 方程式は次のように書ける。

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.14)$$

この方程式の解として次のような形のものを求める

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = \text{Re}\{ A^{\alpha\beta} \exp(ik_\mu x^\mu) \} \quad (2.15)$$

このとき TT-gauge と呼ばれているゲージをとると、次のような解が存在することが知られている [2, 3]。ここで、 z 軸方向から重力波が入射したと考えている。

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu} \quad (2.16)$$

この時 Ricci テンソルは次のような物だけが残る。

$$R_{j0k0} = -\frac{1}{2} h_{jk,00}^{\text{TT}} \quad (2.17)$$

$$R_{j0k0} = R_{0j0k} = -R_{j00k} = -R_{0jk0} \quad (2.18)$$

また、このとき、式 (2.15) で定義した $A_{\alpha\beta}$ に対して

$$A_{\alpha\beta}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_\times & 0 \\ 0 & A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

という解がえられる。

このような計量テンソルを持つ空間でどのように重力波が伝搬するかを考えると、2つの重力波の固有モードがあることがわかる。それぞれを h_+ , h_\times モードとよび以下のようにかける。

$$h_{+\alpha\beta}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \exp(ik_\mu x^\mu) \quad (2.20)$$

$$(h_{\times\alpha\beta}^{TT}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_\times & 0 \\ 0 & A_\times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \exp(ik_\mu x^\mu) \quad (2.21)$$

それぞれの重力波をベクトル場で書くと、と図 2.1, 2.2 の様になる。

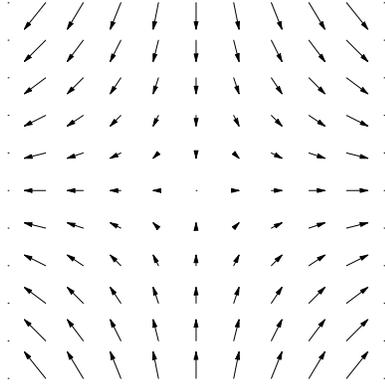


図 2.1: h_+ 。x 軸方向と y 軸方向で位相が 180 度ずれて伸び縮みする。

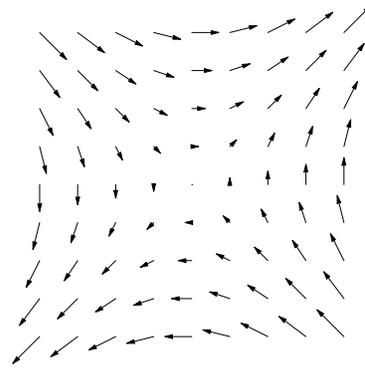


図 2.2: h_\times 。 h_\times を xy 平面内で 45 度回転したもの。

xy 平面上のにおかれた 2 つのテストマスの間の距離の変化を考える。このとき空間におかれた自由質点間の距離は次の様に変化する。ただし、ここで言う距離とは測地線の方程式から得られる固有距離のことである。

$$\frac{d^2}{d\tau^2} n_j = -R_{j0k0} n_k \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial t^2} n_k \quad (2.23)$$

$$= \text{Re} \left[-\frac{1}{2} \omega^2 A_{ik} \exp\{-i(\omega t - kz)\} n_k \right] \quad (2.24)$$

これより、 A_{ij} の 1 次の範囲でた自由質点間の距離の時間変化は次のように書ける。

$$n_j = n_j^{(0)} + \text{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \omega^2 A_{jk} \exp\{-i(\omega t - kz)\} n_k^{(0)} \right\} \quad (2.25)$$

h_+ モードについて計算してやると、

$$n_1 = n_1^{(0)} + \text{Re}\left\{-\frac{1}{2} \omega^2 A_+ \exp\{-i(\omega t - kz)\} n_1^{(0)}\right\} \quad (2.26)$$

$$n_2 = n_2^{(0)} + \text{Re}\left\{\frac{1}{2} \omega^2 A_+ \exp\{-i(\omega t - kz)\} n_2^{(0)}\right\} \quad (2.27)$$

となるので、図 2.1 のベクトルと同じ向きに距離が振動する。 h_\times モードについても同様である。

2.1.3 重力波源

重力波が理論的に予測されて、天体イベントの観測より間接的にその存在が証明されたように、天体イベントによってどのような重力波が放出されるかについては理論的な予測なされている。

| 重力波源 | 周波数 | 振幅 (h) | 頻度 |
|--------------------|-------------|------------|--------------|
| 連星中性子星の合体 (200Mpc) | 10 ~ 1000Hz | 10^{-21} | ~ 3/year |
| 超新星爆発 (銀河系内) | ~ 1kHz | 10^{-18} | ~ 3/century |
| 超新星爆発 (乙女座銀河団) | ~ 1kHz | 10^{-21} | several/year |
| 巨大ブラックホールの生成 | ~ 1mHz | 10^{-17} | 1/year |

表 2.1: 期待される重力波源

レーザー干渉計型重力波検出器で検出される得と思われる重力波源は 10Hz - 1kHz 程度に存在している。そのために、現在計画されてる大型干渉計計画では干渉計の観測帯域をその付近に設定して干渉計の設計を行っている。

重力波源としてはここで述べられた帯域以外にも予測されているがそれはレーザー干渉計型重力波検出器のの原理的なノイズ等の都合から観測対称になっていない [4]。

2.2 レーザー干渉計による重力波の検出原理

重力波の検出方法については

レーザー干渉計型の重力波検出器は、2.1 節で見た重力波の伝搬による自由質点間の距離の変動を利用して重力波の検出を行っている。つまり、この距離の変動を見てやることによって重力波が通過したかどうかを検出するというのがその原理であり、重力波による距離の変化を測るために、レーザー干渉計を用いている。ここでは、干渉計を構成する鏡が自由質点の代わりとなりレーザーを用いて自由質点間の距離の変動を測定する。次節でその検出原理について簡単に考えてみる。

2.2.1 Michelson 干渉計による重力波の検出

レーザー干渉計型重力波検出器の基本構成は Michelson 干渉計である。Michelson 干渉計によって重力波を検出するためには Michelson 干渉計を構成する mirror は空間中の自由質点になってい

る必要がある。空間中の自由質点ということを実現するために、Michelson 干渉計の mirror は通常、振り子状の suspension 懸架されており、観測帯域では自由質点と見なすことができる。

重力波 $h_+(t)$ が michelson 干渉計の光軸がの存在する平面に対して垂直に入射したとき、Michelson 干渉計を構成する mirror (テストマス) と beam splitter の間の固有距離は重力波によって振動する (図 2.3)。この時の Michelson 干渉計の信号について考えてみる。

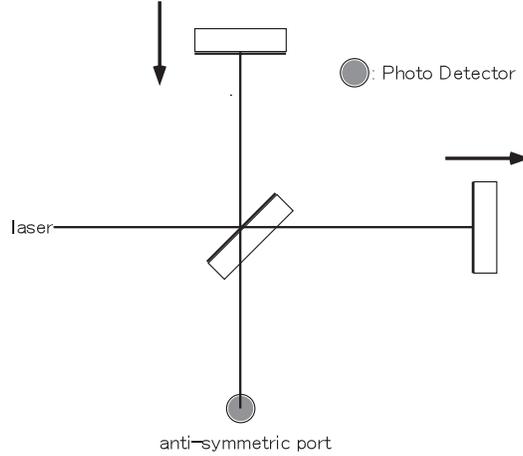


図 2.3: Michelson 干渉計への重力波の入射

四次元線素は TT gauge を用いて次のように書ける。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1+h)dx_1^2 + (1-h)dx_2^2 + dx_3^2 \quad (2.28)$$

いま Michelson 干渉計を構成する mirror を空間の自由質点と考えているので座標は変化しない。ここで、干渉計の両腕をそれぞれ 1-arm, 2-arm と呼ぶことにする。干渉計に入射して beam splitter で分けられた光が再び戻ってくるまでに光の走る距離を 1-arm, 2-arm それぞれについて $2L_1, 2L_2$ とおく。光子は $ds^2 = 0$ といった光路を通るので、 x_1 軸すなわち、1-arm について考えると次のようになる。

$$dx_1 = \frac{c}{\sqrt{1+h(t)}} dt \quad (2.29)$$

$$\oint_{1\text{-arm}} dx_1 = \oint_{1\text{-arm}} dt \frac{c}{\sqrt{1+h(t)}} \quad (2.30)$$

$$\Rightarrow 2L_1 = \oint_{1\text{-arm}} dt c \left(1 - \frac{1}{2} h(t) \right) \quad (h(t) \ll 1) \quad (2.31)$$

いま、光が beam splitter で分かれて再び beam splitter に戻ってくるのにかかる時間を τ_1 とおくと、

$$\tau_1 = \frac{2L_1}{c} + \oint_{1\text{-arm}} dt \frac{1}{2} h(t) \quad (2.32)$$

よって、光の周波数を $\Omega/2\pi$ とおいたとき、時刻 t に 2-arm から、BS に戻ってきた光の位相は $\phi_1(t)$ として、式 (2.32) について $h(t)$ の 1 次の項までとると、

$$\phi_1(t) = \Omega(t - \tau) \quad (2.33)$$

$$= \Omega \left(t - \frac{2L_1}{c} - \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L_1}{c}}^t dt h(t) \right) \quad (2.34)$$

となる。2-arm に関しても同様な計算をする。干渉計の anti-symmetric port (図 2.3 参照) で 1-arm, 2-arm それぞれに行って帰ってきた光の位相差を見ることができて、両者の位相差は

$$\Delta\phi_h = \Omega \int_{t-\frac{2L}{c}}^t dt h(t) \quad (2.35)$$

である ($L_1 = L_2 = L$ とおいた)。

いま重力波のある周波数成分だけに注目して、

$$h(t) = h_0 \cos \omega t \quad (2.36)$$

とおく。このとき、位相差は次のようにかける。

$$\Delta\phi_h = \Omega \int_{t-\frac{2L}{c}}^t dt h_0 \cos \omega t \quad (2.37)$$

$$= 2h_0 \frac{\Omega}{\omega} \sin \left(\omega \frac{L}{c} \right) \cos \left(t - \omega \frac{L}{c} \right) \quad (2.38)$$

この位相差は干渉計の anti-symmetric port や symmetric port (干渉計から光源側に戻ってくる光) において干渉縞の変動として観測される。

式 (2.38) からわかるように Michelson 干渉計は重力波の周波数によって応答が異なる。そこで、目的とする重力波に対して感度を最適化することを考える。2.1.3 節で見たように 10Hz - 1kHz 程度が目標となるので、例えば 1kHz の重力波に対して干渉計を最適化するとすると、式 (2.38) より Michelson 干渉計の片腕の長さが 75km になる。これだけ大きな Michelson 干渉計を地面の上に作るのは非現実的である。

そのため、実効的に光路長を長くする方法が考えられている。干渉計の光路長を実効的に長くする方法には大きく次の二つがある。

- Delay-Line 型干渉計
- Fabry-Perot 型干渉計

これらの特徴について少し見てみよう。

2.2.2 Delay Line 型干渉計

Delay Line 干渉計はまさしく光を何度も折り返すことによって光路長を稼いでいる干渉計である (図 2.4)

Delay line 方式は光を折り返す回数だけで干渉計の感度やバンド幅などが決まるという単純さを持つ。その一方で、実効的な光路長をのばそう (折り返し数を増やす) とすると、その分大きな鏡が必要になると言う欠点を持つ。

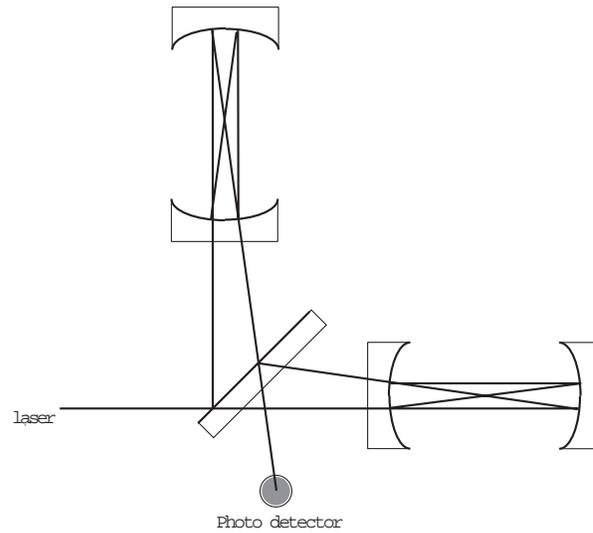


図 2.4: Delay Line 干渉計

2.2.3 Fabry-Perot-Michelson 型干渉計

これは Michelson 干渉計の両腕に Fabry-Perot cavity を用いて光を多重干渉させることによって実効的に光路長を稼ぐものである (図 2.5)

この場合 Finesse 等の Fabry-Perot cavity の性質が感度やバンド幅を決めるようになる。また、cavity 内で光が共振してなければ行けないので制御は複雑になる。しかし Delay line とちがって折り返す数が増えても鏡の大きさを大きくする必要がない。そのため現在の大型干渉計では主流になっており、TAMA300 においても Fabry-Perot 型を採用している。

2.3 世界各国の大型計画

これまで見てきたように重力波に対して感度を最適化するためには光路長の長い干渉計を作る必要がある事がわかった。それ以外に干渉計の基線長を長くする利点の 1 つは地面振動や熱雑音などの光路長を揺さぶるノイズによる影響を小さくするという意味も持つ。これは重力波の信号が空間のひずみに現れるためである。

現在、世界各国で大型重力波干渉計を作る project が進められており、それぞれ次のようなものである (表 2.2)

各国のプロジェクトの特徴を述べると、

LIGO ではアメリカ西部と東部に各 1 台の基線長 4km クラスのレーザー干渉計を作り、coincidence 実験が 2002 年ごろから行われる予定である。VIRGO プロジェクトでは多段懸架システムを用いて 10Hz という低周波の重力波にも高い感度を持つ [5]。GEO プロジェクトでは 600m とい

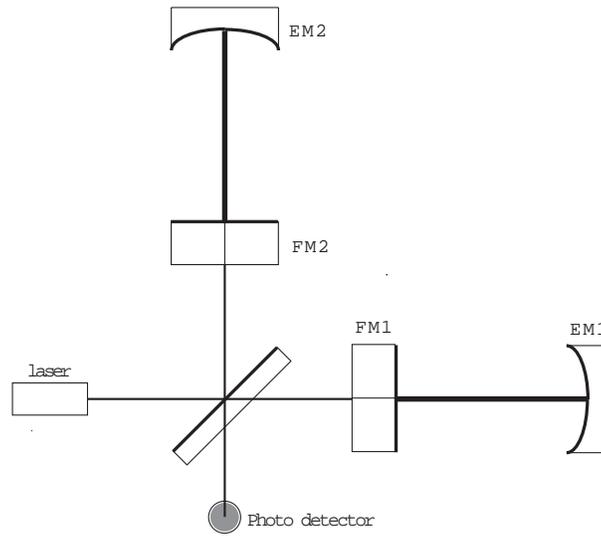


図 2.5: Fabry-Perot Michelson 干渉計

| 国 | 名称 | 基線長 | 方式 | 観測開始 |
|-----------|-------|---------|----|------|
| 米国 | LIGO | 4km × 2 | FP | 2002 |
| イタリア、フランス | VIRGO | 3km | FP | 2003 |
| イギリス、ドイツ | GEO | 600m | DL | 2001 |
| 日本 | TAMA | 300m | FP | 2000 |

表 2.2: 世界各国の大型干渉計計画

うサイズながらも先進的な技術を投入することによって、他の km クラスの干渉計と同等の感度を持つことが期待されている。TAMA は 300m というサイズだが世界に先駆けて観測態勢に入る。

2.4 TAMA300 project

TAMA300 project では、現在、国立天文台三鷹キャンパスにおいて基線長 300m のレーザー干渉計型重力波検出器の建設が行われている [6]。この干渉計のことを project 名と同じ TAMA300 と呼ぶ。TAMA300 は Fabry-Perot-Michelson 干渉計による重力波検出器である。最終的には power recycling という、レーザーパワーを実効的に上げる技術 [7] を導入し power-recycled Fabry-Perot-Michelson 干渉計として動作する。

TAMA300 の主たる役割は、以下の 2 点である。

- 将来の km クラスの大型干渉計に必要な技術の開発。
- 重力波の観測。

TAMA300 では 2 度の観測期間がありそれぞれを TAMA phase I, phase II と呼んでいる。どちらも Fabry-Perot-Michelson 干渉計であるが phase II では power-recycling を導入している。それぞれの観測帯域および目標感度は次のようになっている。

| | |
|------|---|
| 観測帯域 | 150-450 Hz |
| 目標感度 | $h_{\text{rms}} = 3 \times 10^{-20}$ (phase I) |
| | $h_{\text{rms}} = 3 \times 10^{-21}$ (phase II) |

TAMA project における本実験の位置

TAMA300 は最終的には power-recycled Fabry-Perot-Michelson 干渉計となるが、その建設過程をいくつかに分け、全体の各部分を平行に開発および建設して徐々に最終的な形に近づけるという流れを踏む (図 2.6, 2.4)。現在はまだ開発段階にあり、Fabry-Perot-Michelson 干渉計部分を作っている。

本実験は Recombine I という段階に位置しておりその目的は以下のような物である。

- Fabry-Perot-Michelson 干渉計部分の制御
- Fabry-Perot-Michelson 干渉計の特性評価

干渉計の感度を出すという目的はなく、干渉計の動作が主な目的になる。

2.5 レーザー干渉計の雑音源

レーザー干渉計型重力波検出器の感度を決定する原理的なノイズ源は主に次の物がある

- shot noise (photon counting noise)

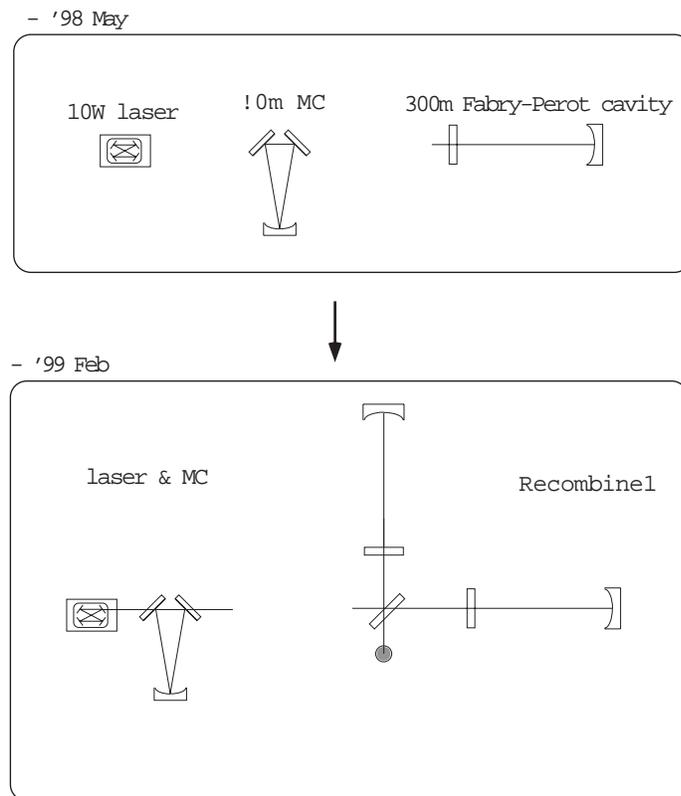


図 2.6: TAMA project の流れ 1

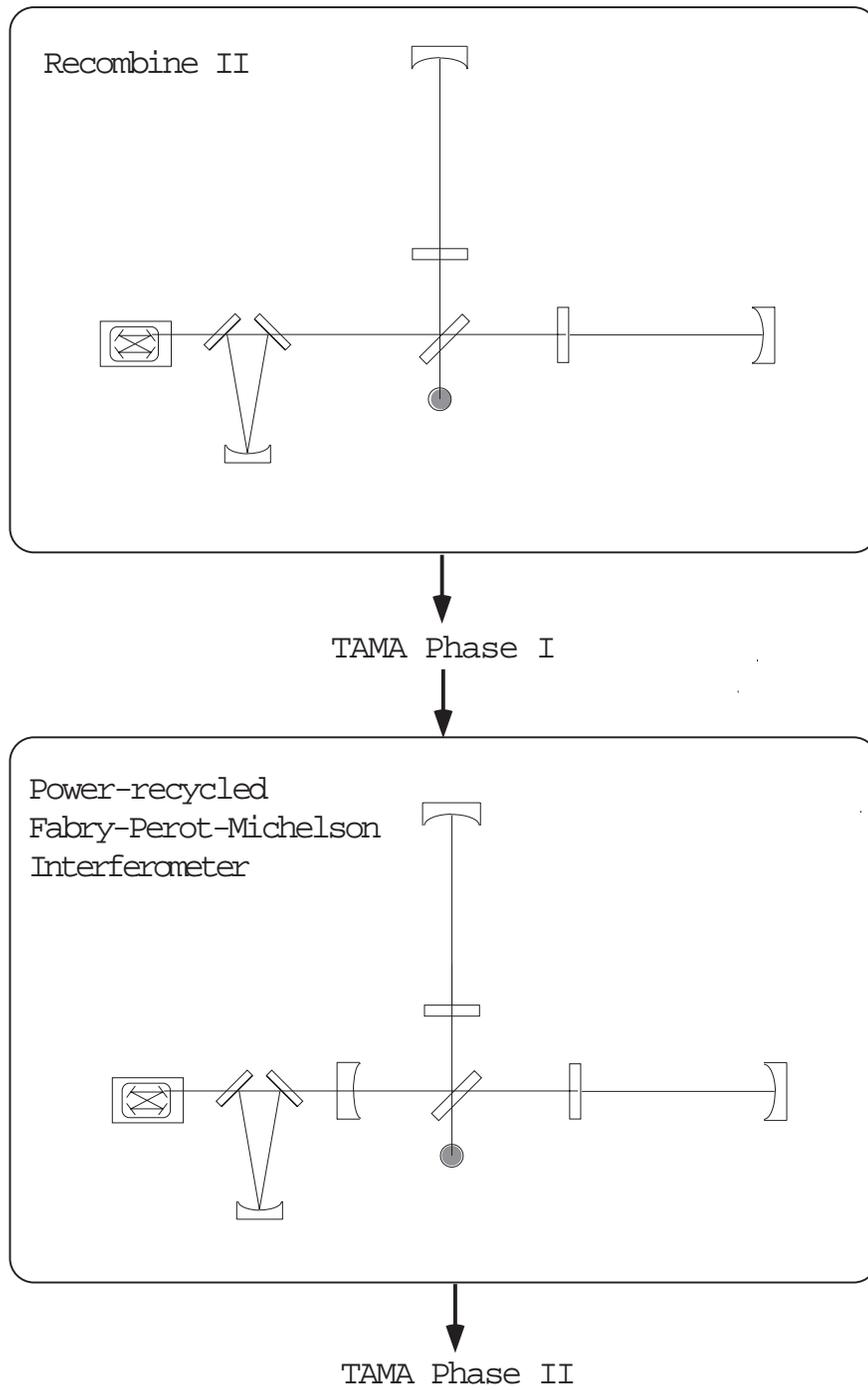


図 2.7: TAMA project の流れ 2

- 熱雑音
- 地面振動

おのおのは次のような性質を持つ。

2.5.1 shot noise

レーザー干渉計型重力波検出器ではレーザーを用いて自由質点(鏡)の間の距離を測っているため重力波の信号は光の強度の信号として現れる。ここで、光が量子であるために photo detector で光を検出する(光子の数を数える)過程において不確定性が生じる。

レーザー干渉計の photo detector での photo current のパワースペクトルは photo detector の量子効率を η , プランク定数を \hbar , 素電荷を e とおくと次のようにかける。

$$\langle i_n^2 \rangle = 2 \frac{e^2 \eta}{2\pi \hbar \nu} I_{PD} \quad (2.39)$$

shot noise のみを考えたとき、S/N 比が 1 で感度が最適になる干渉計の動作点を考えてみよう。いま、anti-symmetric port においた photo detector での入射パワーを次のようにおく。

$$I_{PD} = \frac{I_{\min} + I_{\max}}{2} + \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \cos \phi \quad (2.40)$$

干渉計の動作点を $\phi = \phi_0$ とすると、動作点からのずれ $\delta\phi$ は次のような photo current の変化として表される。

$$\delta I_{PD} = -\delta\phi \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \sin \phi_0 \quad (2.41)$$

干渉計で見るのは位相変化であるので、S/N = 1 の条件で検出される最小の位相変化 $\delta\phi$ は次のように書ける。

$$\sqrt{\frac{e^2 \eta}{\pi \hbar \nu} I_{PD}} = \frac{e\eta}{2\pi \hbar \nu} \delta\phi \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \sin \phi_0 \quad (2.42)$$

ここで、コントラスト¹が 1、つまり $I_{\min} = 0$ とすると

$$|\delta\phi| = \sqrt{\frac{4\pi \hbar \nu}{\eta I_{\max}}} \left| \frac{1}{\sin(\phi_0/2)} \right| \quad (2.43)$$

よって、干渉計の感度を最大にするには $\phi_0 = \pi$ すなわち、干渉光が完全にうち消しあった状態で干渉計を動作させるのがよい。また、入射レーザーパワーに関してもパワーが大きい方が shot noise limit が低くなることがわかる。

2.5.2 熱雑音

レーザー干渉計における熱雑音とは熱浴との相互作用から起こるもので、Brown 運動や抵抗の Nyquist 雑音と同様のものである。

まず、suspension に吊られたミラーが熱浴におかれていると考える。熱浴からエネルギーが流入し、suspension の振り子を構成する wire の共振や suspension の振り子自体の共振、さらにミラー自体の弾性振動モードが励起され干渉計の光路長が振動して雑音となる。

熱雑音はロス 0 なら熱がある限り存在するので完全になくすることはできない。そのため、干渉計型重力波検出器において原理的な雑音源の 1 つとなる。

TAMA 及び現在行われている干渉計型重力波検出器では、観測帯域での熱雑音が小さくなるように suspension 及び鏡の parameter を最適化している。ただし、各パラメーターは防振などほかの要因とも絡めて決定されなければいけないために非常に複雑である。そのためここでは詳しいパラメーターの決定については述べない ([8, 9, 10] 参照)。

現在、熱雑音による影響を減らす大まかな方針をまとめると以下の 2 つがある。

- 固有モードの共振周波数を観測帯域からはなす。
- Q 値を高くする。

TAMA において目標感度を得るために熱雑音に対して要求値が与えられる。mirror の形状や suspension system の仕様が熱雑音との関わりで決定すると、未知のファクターとして熱雑音に対する要求は最終的に Q 値によって与えられる。要求値は、

$$Q_{\text{internal}} > 2 \times 10^7 \quad (2.44)$$

$$Q_{\text{pendulum}} > 2.5 \times 10^6 \quad (2.45)$$

で与えられる²。

2.5.3 地面振動によるノイズ

干渉計を設置した地面の振動が mirror に伝わり、レーザー光の進行方向に対して並進方向の揺れとなると干渉計のノイズとして現れる。

地面振動のスペクトルに対しては典型的には

$$\delta x = \delta y = \delta z \sim \begin{cases} 10^{-5} \text{m}/\sqrt{\text{Hz}} & (0.1\text{Hz 以下}) \\ 10^{-7} \times \left(\frac{1\text{Hz}}{f}\right) \text{m}/\sqrt{\text{Hz}} & (f \geq 0.1\text{Hz}) \end{cases} \quad (2.46)$$

という値が知られている [8]。

干渉計型重力波検出器の観測帯域においてもやはり、干渉計の目標感度より遙かに大きく地面は揺れているため、何らかの防振システムが必要である。ここで、干渉計型重力波検出器においては mirror は空間中の自由質点と見なすために懸架システムに吊されているので、まず、この懸架システムを利用して防振を行う。

懸架システムによる防振の基本原理は振り子による防振である。簡単のため単振り子による防振効果について考えて見る。

²ただしこの値は TAMA phase II での目標感度 ($h_{\text{rms}} = 3 \times 10^{-21} [m/\sqrt{\text{Hz}}] @ 150 - 450\text{Hz}$) から要求される値である

まず、suspension point から mass への伝達関数は、

$$H(\omega) = \frac{\omega_0^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q} - \omega^2} \quad (2.47)$$

とかけるので、 $\omega_0 \ll \omega$ かつ $Q \gg \frac{\omega}{\omega_0}$ の時、

$$H(\omega) \sim \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \quad (2.48)$$

である。よって、共振点より周波数の高い領域では振動が ω^{-2} で防振されているのがわかる。つまり振り子の共振点を観測帯域よりも十分低くとることによって観測帯域において防振を行っている。

TAMA300 をはじめとする多くの干渉計では suspension による防振以外にもスタックという、金属製のブロックと弾性体のゴムを積み重ねた連成振動子系をくんだ防振装置を導入している [11]。防振系全体の構成としては、各懸架装置毎に、スタックで土台を作ってその上に suspension に懸架された mirror をおくとした物である。

第3章 Fabry-Perot-Michelson 干渉計の光路長制御

これまで見てきたように干渉計型重力波干渉計において干渉計を構成する鏡は振り子状に吊られている。そのため、地面振動により常に揺らされている。一方では、Fabry-Perot-Michelson (FPM) 干渉計を運転するために、Fabry-Perot cavity 内で光が共振して beam splitter でそれぞれの arm cavity から出てきたレーザー光が再び dark-fringe で干渉するという条件を満たさないといけない。よって、このような動作条件を満たすために干渉計の光路長について常に制御してやる必要がある。

現在、干渉計型重力波検出器の制御には feed back 制御を用いている。動作点からのずれに対して線形な制御信号を用いて feed back 制御を行う。こういった線形な制御信号が得られれば、適切な feed back loop を作ってやって干渉計を制御することが出来る。ここでは FPM 干渉計の光路長制御について、特に信号取得に重点を置いて考える¹。ただし、本章において、光学系は全て理想的にアライメントがされている物と考える。

FPM 干渉計を制御する方法にはいくつか有るが、TAMA300 をはじめとする大型干渉計計画においては frontal modulation 法という方法を用いる。frontal modulation 法が用いられるには同相信号と差動信号の分離がよいということと他の方法に比べて導入しやすいという点がある。本章ではまず、Fabry-Perot cavity の性質と制御について簡単に触れ、その後 frontal modulation 法を用いた FPM 干渉計の制御信号の取得について解説する。

3.1 Fabry-Perot cavity

Fabry-Perot cavity とは図 3.1 のような光学系のことである。レーザー光が入射する側の鏡を front mirror と呼ぶ²。

この節では、まず最初の 2 節で Fabry-Perot cavity の DC 応答と AC 応答について計算する。その後、Pound-Drever 法を用いた Fabry-Perot cavity の制御信号の取得について解説する。

この節では各 parameter を以下のように定義する。

¹feed back 制御の理論については本論文ではふれない。制御については [12] 参照。また、TAMA parameter を代入して考えた場合の光路長制御系の開発などについては appendix A 参照

²そのため front mirror を input mirror または coupling mirror と呼ぶこともある。

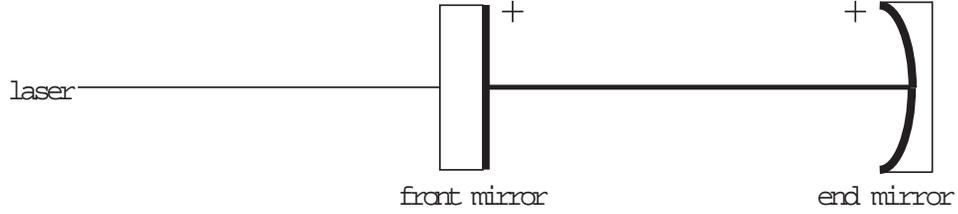


図 3.1: Fabry-Perot cavity

| 名前 | 定義 |
|-------|---------------------|
| r_F | front mirror の電場反射率 |
| r_E | end mirror の電場反射率 |
| t_F | front mirror の電場透過率 |

3.1.1 Fabry-Perot cavity の DC 応答

レーザー光の Fabry-Perot cavity における front mirror から end mirror までの位相変化を θ とおく。cavity 長を L とすると θ は次のようになる³。

$$\theta = 2\pi L/\lambda \quad (3.1)$$

これより、cavity の 電場振幅反射率 r_{cav} は次のようにかける。

$$r_{\text{cav}} = -r_F + t_F e^{i\theta} r_E e^{i\theta} t_F + t_F e^{i\theta} r_E e^{i\theta} r_F e^{i\theta} r_E e^{i\theta} t_F + \dots \quad (3.2)$$

$$= -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{2i\theta}}{1 - r_F r_E e^{2i\theta}} \quad (3.3)$$

上式は θ に関する周期 π の関数なので、通常は cavity 反射率は共振点 $2\theta = 2\pi \times (\text{整数})$ からのずれ ϕ の関数でかけられることが多い。

$$r_{\text{cav}}(\phi) = -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} \quad (3.4)$$

$$r_{\text{res}} = r_{\text{cav}}(0) = -r_F + \frac{t_F^2 r_E}{1 - r_F r_E} \quad (3.5)$$

$$r_{\text{anti}} = r_{\text{cav}}(\pi) = -r_F + \frac{t_F^2 r_E}{1 + r_F r_E} \quad (3.6)$$

$r_{\text{res}}, r_{\text{anti}}$ はそれぞれ入射光が cavity に共振している時と反共振の時の反射率である。

³実際の Fabry-Perot cavity には通常 Hermite-Gaussian mode の TEM₀₀ mode のレーザー光を入射するため Guoy phase による補正を入れてやる必要がある。ここでは簡単のため Guoy phase による補正は無視している

3.1.2 Fabry-Perot cavity の AC 応答

ここでは簡単に Fabry-Perot cavity の AC 応答について計算する。

式 (2.32) より、重力波を想定して光路長が $Lh(t)/2$ で変化しているとする。ただし、 Ω はレーザー光の周波数。

$$E_r = -r_F + \frac{t_F^2}{r_F} \sum_{n=1}^{\infty} (r_F r_E)^n e^{i\Omega t_n} \quad (3.7)$$

$$t_n = \frac{2L}{c} n + \int_{t-t_n}^t dt \frac{h(t)}{2} \quad (3.8)$$

ここで、 $h(t) \ll 1$ として近似すると

$$t_n = \frac{2L}{c} n + \int_{t-\frac{2L}{c}}^t dt \frac{h(t)}{2} \quad (3.9)$$

となる。

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt h(\omega) e^{i\omega t} \quad (3.10)$$

と、フーリエ変換して計算すると

$$E_r = -r_F + \frac{t_F^2 r_E}{1 - r_F r_E} \left(1 + i2\Omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\sin(\omega \frac{L}{c}) e^{-i\frac{L}{c} \omega}}{\omega} \frac{1}{1 - r_F r_E e^{-\frac{2L}{c} \omega}} h(\omega) e^{i\omega t} \right) \quad (3.11)$$

AC の応答関数 $H_{\text{FP-AC}}$ は次のように書ける

$$H_{\text{FP-AC}} = i\Omega \frac{t_F^2 r_E}{1 - r_F r_E} \frac{2\Omega \sin(\omega \frac{L}{c}) e^{-i\frac{L}{c} \omega}}{\omega} \frac{1}{1 - r_F r_E e^{-\frac{2L}{c} \omega}} \quad (3.12)$$

$$|H_{\text{FP-AC}}| = \frac{t_F^2 r_E}{(1 - r_F r_E)^2} \frac{\Omega L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{4L}{c} \mathcal{F} f)^2}} \quad (3.13)$$

ただし、 \mathcal{F} は cavity のフィネスと呼ばれる量で次のように与えられる。

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{r_F r_E}}{1 - r_F r_E} \quad (3.14)$$

\mathcal{F} は Fabry-Perot cavity の特徴を表す重要な量のひとつで、式 (3.13) よりわかるように大きいほど cavity の線幅は狭い。cavity のカットオフ周波数と線幅をフィネス \mathcal{F} を用いて表しておく。

$$f_{\text{cut-off}} = \frac{c}{4L\mathcal{F}} \quad (3.15)$$

$$\Delta f_{\text{BW}} = \frac{c}{2L\mathcal{F}} \quad (3.16)$$

Fabry-Perot cavity の AC 応答は式 (3.13) の様に 1 次の low pass 特性を持つのが特徴である。また、この時の cut-off 周波数は cavity の長さでフィネスによって決められる。

3.1.3 Fabry-Perot cavity での信号取得

レーザー光を Fabry-Perot cavity に共振させる時、Pound-Drever 法によるレーザー光の共振点からのずれに対する信号取得について考える。

Pound-Drever 法の原理は carrier の持つ位相情報を local oscillator とのビートをとることによって取り出すと言うことである。干渉計型重力波検出器の制御では local oscillator として位相変調 (phase modulation) による sideband を用いる場合が多い。TAMA300 においても位相変調を用いる。

位相変調による sideband を持ったレーザー光を Fabry-Perot cavity に入射した時のことを考えて、Fabry-Perot cavity の持つ lowpass 特性から変調周波数をうまく選んでやると carrier が cavity に対して共振している時 sideband は cavity に全く入ることができないという状態を作ることが出来る。この時、cavity からの反射光に対して carrier は cavity の情報を持っているが sideband は cavity の情報を全く持っていない。sideband と carrier で cavity にたいして異なる情報を持っていると、Pound-Drever 法によって情報を取り出すことが出来る。

周波数 $\omega_m/2\pi$ で位相変調 (phase modulation) をかけた光は 1 次の sideband のみを考慮したとき次のようにかける。

$$E_{\text{inc}} = E_0 \exp\{im \cos(\omega_m t)\} \quad (3.17)$$

$$= \{J_0(m) + \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(m)(e^{in\omega_m t} + e^{-in\omega_m t})\} E_0 \quad (3.18)$$

$$\doteq \{J_0(m) + iJ_1(m)e^{i\omega_m t} + iJ_1(m)e^{-i\omega_m t}\} E_0 e^{i\Omega t} \quad (3.19)$$

ただし、 $J_n(m)$ は Bessel 関数で以下のように定義される。

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \quad (3.20)$$

(3.19) 式より位相変調光を入射したとき cavity からの反射光は

$$E_r = \{r_{\text{cav}}(\phi)J_0(m) + ir_{\text{cav}}(\phi + \phi_m)J_1(m)e^{i\omega_m t} + ir_{\text{cav}}(\phi - \phi_m)J_1(m)e^{-i\omega_m t}\} E_0 e^{i\Omega t} \quad (3.21)$$

$$\phi_m = \frac{2L\omega_m}{c} \quad (3.22)$$

と書ける。この反射光を変調周波数 $\omega_m/2\pi$ で復調してやると、

$$V_{\text{demo}} = J_0 J_1 |E_0|^2 \text{IM}\{(r_{\text{cav}}(\phi + \phi_m)r_{\text{cav}}(\phi)^* - r_{\text{cav}}(\phi)r_{\text{cav}}^*(\phi - \phi_m))e^{i\delta}\} \quad (3.23)$$

となる⁴。ただし、 δ は復調の位相を表す。

いま、carrier の共振点 ($\phi = 0$) からのずれに対する信号を得たいのでその近傍での振る舞いを見てやる。また、変調周波数は carrier が共振したときに sideband が cavity の線幅に比べて共振点よりも十分遠いところにあるように変調周波数を選んでやると、sideband はほぼ反共振である

⁴ $J_0 = J_0(m)$, $J_1 = J_1(m)$ とおいた。

と考えられる。 $\phi = \delta\phi \ll 1$ として、信号がもっともよくとれる復調位相では、

$$V_{\text{demo}} = -2J_0J_1|E_0|^2(|r'_{\text{res}}|r_{\text{anti}} - |r'_{\text{anti}}|r_{\text{res}})\delta\phi \quad (3.24)$$

$$r'_{\text{res}} = r'_{\text{cav}}(0) = -i\frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}}}{(1 - r_{\text{F}} r_{\text{E}})^2} \quad (3.25)$$

$$r'_{\text{anti}} = r'_{\text{cav}}(\pi) = i\frac{t_{\text{F}}^2 r_{\text{E}}}{(1 + r_{\text{F}} r_{\text{E}})^2} \quad (3.26)$$

となる。通常、

$$|r'_{\text{res}}| \approx \frac{2}{\pi} \mathcal{F} r_{\text{res}} \quad (3.27)$$

$$\therefore |r'_{\text{anti}}| \ll |r_{\text{anti}}| \quad (3.28)$$

であるから、復調信号は次のようにかける。

$$V_{\text{demo}} = -2J_0J_1|E_0|^2|r'_{\text{res}}|r_{\text{anti}}\delta\phi \quad (3.29)$$

これより、Pound-Drever 法を用いて carrier の共振点付近では共振点からのずれ $\delta\phi$ に対して線形な信号が得られることがわかった。

3.2 Fabry-Perot-Michelson 干渉計の制御

Fabry-Perot-Michelson 干渉計を動作点に保つために制御すべき自由度は各 cavity の光路長の変動と、Michelson 干渉計部分の干渉状態、である。ここでは、それらの自由度に対する信号の取得について計算する。

3.2.1 Fabry-Perot-Michelson 干渉計の応答

まず、ここでは FPM 干渉計の応答について一般式を計算する [13]。

FPM 干渉計は図 3.2 のような光学系であり、Michelson 干渉計の両腕に Fabry-Perot cavity がはいっている物である。

また、各文字を次のように定義した。

TEM₀₀ Gaussian mode の入射光 E_{in} を FPM 干渉計に入射したときの応答を考える。FPM 干渉計全体の反射率および透過率は次のように書ける。ただし、ここでの干渉計の反射光とは干渉計の symmetric port に出てくる光を指し、透過光は、干渉計の anti-symmetric port に出てくる光を指す。

$$r_{\text{FPM}} = t_{\text{BS}}^2 r_{\text{C1}}(\Phi_1)e^{-i\phi_1} + r_{\text{BSf}}^2 r_{\text{C2}}(\Phi_2)e^{-i\phi_2} \quad (3.30)$$

$$t_{\text{FPM}} = r_{\text{BSf}} t_{\text{BS}} r_{\text{C2}}(\Phi_2)e^{-i\phi_2} - t_{\text{BS}} r_{\text{BSb}} r_{\text{C1}}(\Phi_1)e^{-i\phi_1} \quad (3.31)$$

| 文字 | 定義 |
|------------------|--|
| FM1 | Inline-arm に入れられた Fabry-Perot cavity の front mirror |
| EM1 | Inline-arm に入れられた Fabry-Perot cavity の end mirror |
| FM2 | Perpendicular-arm に入れられた Fabry-Perot cavity の front mirror |
| EM2 | Perpendicular-arm に入れられた Fabry-Perot cavity の end mirror |
| BS | Beam Splitter |
| L_1 | Inline-arm cavity の cavity 長 |
| L_2 | Perpendicular-arm cavity の cavity 長 |
| l_1 | FM1 から BS までの長さ |
| l_2 | FM2 から BS までの長さ |
| l_- | $l_1 - l_2$ |
| $r_{C1}(\Phi_1)$ | Inline-arm の Fabry-Perot cavity の振幅反射率 |
| $r_{C2}(\Phi_2)$ | Perpendicular-arm の Fabry-Perot cavity の振幅反射率 |
| r_{BSf} | BS の表面での振幅反射率。 |
| r_{BSb} | BS の裏面での振幅反射率 |
| t_{BS} | BS の振幅透過率 |
| r_{PO} | Pick-Off の振幅反射率 |
| t_{PO} | Pick-Off の振幅透過率 |

表 3.1: 各文字の定義

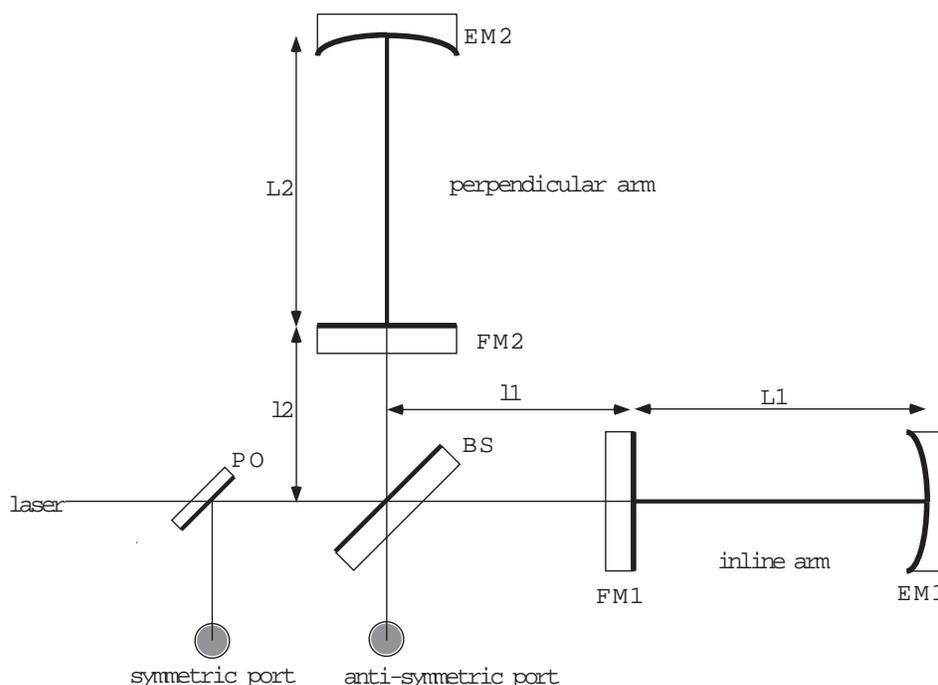


図 3.2: Fabry-Perot-Michelson 干渉計

3.2.2 frontal modulation 法の導入

shot noise による要求から、FPM 干渉計の anti-symmetric port では dark fringe になっている (2.5.1 節参照)。そのため動作点において、anti-symmetric port では sideband も carrier も打ち消しあっている状態である。動作点では信号が全くとれないことになってしまう。よって、動作点において anti-symmetric port で sideband (local oscillator) が無くなっていない状態を作る必要がある。

そのために、frontal modulation 法では BS と 2 枚の FM のあいだに差を付けておく。この状態で、位相変調光を入射すると carrier については dark fringe だが、sideband については dark からずれている状態になる。よって、干渉計の動作点においても sideband が無くなることなく制御信号を得ることが出来る。

3.2.3 復調信号の位相による微分

これまで見てきたように、干渉計の制御では動作点からのずれが線形すなわち 1 次で記述される範囲で考える。このことを少し一般的に考えてみよう。たとえば、制御信号を $V(x)$ 動作点を $x = x_0$ とすると、

$$V(x_0 + \delta x) = V(x_0) + \delta x \frac{d}{dx} V(x)|_{x=x_0} \quad (3.32)$$

であるから、動作点からの1次のずれ δx にかかる微係数 $\frac{d}{dx}V(x)|_{x=x_0}$ がどの程度の信号がとれるかということであらわす。

FPM 干渉計では cavity 長などを制御するので、 x には L_1 などの距離が対応する。ここで、光の位相に注目すると

$$4\pi\frac{L_i}{\lambda} = 2\pi n_i + \Phi_i (i = 1, 2 \quad n_i = \text{整数}) \quad (3.33)$$

$$4\pi\frac{l_i}{\lambda} = 2\pi m_i + \phi_i (i = 1, 2 \quad m_i = \text{整数}) \quad (3.34)$$

干渉計の応答は Φ_1 などの関数で書くことが出来る。ここでは Φ_1 などの位相に注目していそうでの微分を考えることにする。

frontal modulation による信号の取得は arm cavity の差動変動信号を同相変動信号から分離して得ることにあるので、位相のずれとして

$$\Phi_+ \equiv \Phi_1 + \Phi_2 \quad (3.35)$$

$$\Phi_- \equiv \Phi_1 - \Phi_2 \quad (3.36)$$

$$\phi_- \equiv \phi_1 - \phi_2 \quad (3.37)$$

を検出することを考える。

次に、

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_+} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \Phi_1} + \frac{\partial}{\partial \Phi_2} \right) \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_-} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \Phi_1} - \frac{\partial}{\partial \Phi_2} \right) \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_-} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_1} - \frac{\partial}{\partial \phi_2} \right) \quad (3.40)$$

を用いてそれぞれの場所におかれた photo detector に対する復調信号の微係数を計算する。

3.2.4 制御信号の取得

ここでは前節で述べた微分係数について実際に計算してやる。ただし、このとき、Perpendicular-arm, Inline-arm の間には反射率などに関する非対称性はないと考える。

干渉計への入射光は位相変調がかけられていて次のように書く。

$$E_{\text{inc}} = \{J_0(m) + iJ_1(m) \exp(i\omega_m t) + iJ_1(m) \exp(-i\omega_m t)\} E_0 \exp(i\Omega t) \quad (3.41)$$

また、新たに以下のような文字を導入する。

$$\alpha = \frac{\omega_m(l_1 - l_2)}{c} \quad (3.42)$$

$$\beta = \frac{\omega_m(l_1 + l_2)}{c} \quad (3.43)$$

symmetric port および anti-symmetric port での復調信号をそれぞれ $V_{\text{reflect}}, V_{\text{anti}}$ とおく。各に対する微係数は以下のようにかける。

$$\frac{\partial}{d\Phi_+} V_{\text{anti}} = 0 \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial}{d\Phi_-} V_{\text{anti}} = -4J_0J_1(t_{\text{PO}}r_{\text{BS}}t_{\text{BS}}t_{\text{P2}}^2)^2|E_0|^2|r'_{\text{res}}|r_{\text{anti}}\sin\alpha\text{Re}(e^{i(\delta-\beta)}) \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial}{d\phi_-} V_{\text{anti}} = -4J_0J_1(t_{\text{PO}}r_{\text{BS}}t_{\text{BS}}t_{\text{P2}}^2)^2|E_0|^2r_{\text{res}}r_{\text{anti}}\sin\alpha\text{Re}(e^{i(\delta-\beta)}) \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial}{d\Phi_+} V_{\text{reflect}} = 4J_0J_1(t_{\text{PO}}r_{\text{PO}}r_{\text{BS}}t_{\text{BS}}t_{\text{P2}}^2)^2|E_0|^2(-|r'_{\text{res}}|r_{\text{anti}} + r_{\text{res}}|r'_{\text{anti}}|)\cos\alpha\text{Re}(ie^{i(\delta-\beta)}) \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial}{d\Phi_-} V_{\text{reflect}} = -4J_0J_1(t_{\text{PO}}r_{\text{PO}}r_{\text{BS}}t_{\text{BS}}t_{\text{P2}}^2)^2|E_0|^2r_{\text{res}}|r'_{\text{anti}}|\sin\alpha\text{Re}(e^{i(\delta-\beta)}) \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial}{d\phi_-} V_{\text{reflect}} = 4J_0J_1(t_{\text{PO}}r_{\text{PO}}r_{\text{BS}}t_{\text{BS}}t_{\text{P2}}^2)^2|E_0|^2r_{\text{res}}r_{\text{anti}}\sin\alpha\text{Re}(e^{i(\delta-\beta)}) \quad (3.49)$$

ここで δ は復調位相を表す。

3.2.5 信号の分離

(3.2.4) 節の結果より、各 port から次のような信号が得られる事がわかる。ただし、添え字の Q, I は Quadrature phase と Inphase という復調位相を表す ([14] 参照)。

各制御信号に対する係数をまとめると以下ようになる。

| | δL_- | δl_- | δL_+ |
|-----------------|---|--|---|
| V_{DQ} | $ r'_{\text{res}} r_{\text{anti}}\sin\alpha$ | $r_{\text{res}}r_{\text{anti}}\sin\alpha$ | 0 |
| V_{RQ} | 0 | 0 | $r_{\text{PO}} r'_{\text{res}} r_{\text{anti}}\cos\alpha$ |
| V_{RI} | $r_{\text{PO}} r'_{\text{anti}} r_{\text{res}}\sin\alpha$ | $r_{\text{PO}}r_{\text{res}}r_{\text{anti}}\sin\alpha$ | 0 |

ここで、(3.27, 3.28) 式より通常の干渉計では次の様な関係が成り立つ。

$$|r'_{\text{res}}| \doteq \frac{2}{\pi} \mathcal{F}r_{\text{res}} \quad (3.50)$$

$$|r'_{\text{anti}}| \ll |r_{\text{anti}}| \quad (3.51)$$

V_{DQ} の信号から δL_- に関する信号が得られ、 V_{RQ} から δl_- に関する信号が得られる。 δL_+ については V_{RI} からとれる。

3.2.6 同差法による Fabry-Perot-Michelson 干渉計の制御

これまでのことを考慮して frontal modulation によって同相差動信号 ($\delta L_-, \delta L_+, \delta l_-$) を得た場合、基本的な制御のブロックダイアグラムは図 3.3 の様になる。このような同相差動信号を用いて干渉計を制御する方法を本論文では同差法と呼ぶ事にする。

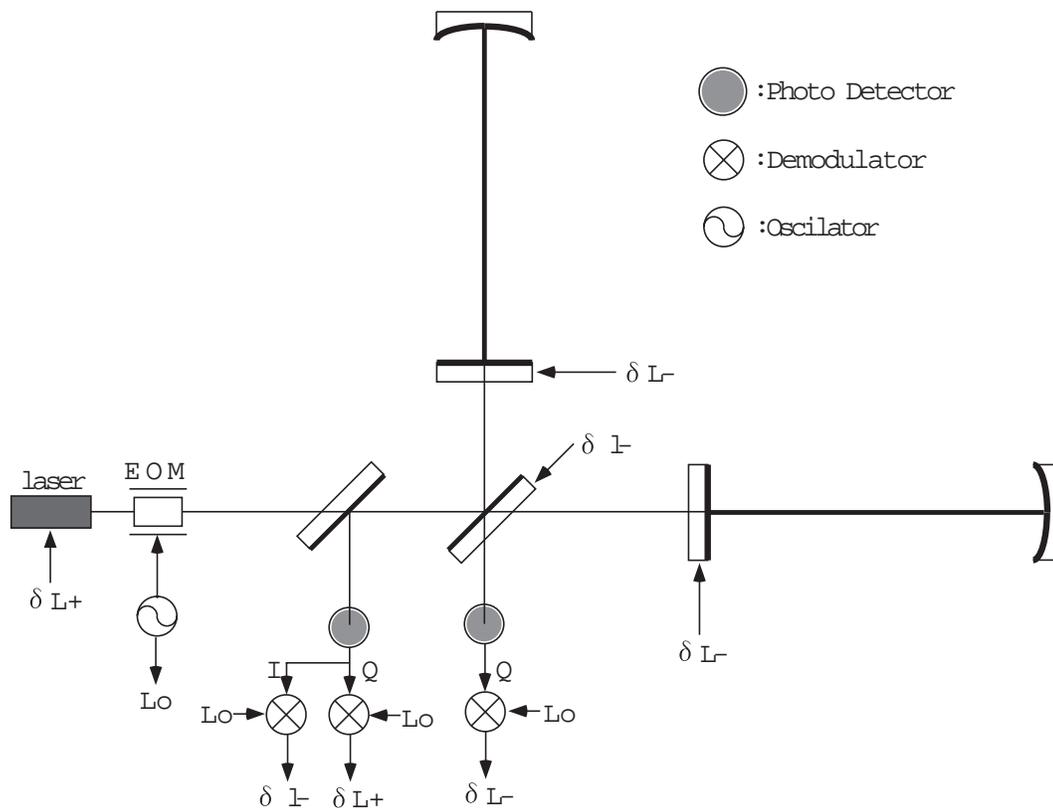


図 3.3: frontal modulation 法による FPM 干渉計の制御ダイアグラム。Oscillator からの信号 Lo は適当な分配機を用いて、各 Demodulator に分けられる。場合によっては δL_+ は mirror へ feed back される。 δL_- は front mirror, end mirror どちらへ feed back しても良い。

第4章 Fabry-Perot-Michelson 干渉計のアライメント

本章では FPM 干渉計のアライメントに関する話題を取り扱う。まず misalignment の数学的な取り扱いとそれを用いて misalign された FPM 干渉計の応答と、干渉計の性能に与える影響を計算する。次に、alignment control のための信号取得に我々が用いている、wavefront sensing と呼ばれる方法の原理について解説する。最後に、TAMA300 における misalignment の影響と alignment control について考察する。

FPM 干渉計のアライメントについて考えるのだが、各 Fabry-Perot cavity が入射光に対して alignment がとれていれば FPM 干渉計全体として alignment がとれている事になる。つまり、BS や入射光軸の misalignment は逆に Fabry-Perot cavity の misalignment と考えられる。よって、本章においても FPM 干渉計の misalignment について考える場合、BS の misalignment は Fabry-Perot cavity の misalignment として考える。

4.1 laser 光のモード展開

4.1.1 Hermite Gaussian mode

空間中を伝搬する laser 光を数式で表現することを考える。laser 光は空間中の伝場の伝搬なので、真空中での Maxwell 方程式を解くことによって得られる解は次のようになる¹。ただしレー

¹実際には式の導出に様々な仮定をしている。それらについては appendixB 参照。

レーザー光の光軸を z 軸にとっている。

$$E_{lm+}(x, y, z, t) = U_{lm+}(x, y, z) \exp(i\Omega t) \quad (4.1)$$

$$U_{lm+}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2^l l! 2^m m!}} \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \\ \times \exp\left\{i(l+m+1)\eta(z) - \frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} - i\frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} - ikz\right\} \quad (4.2)$$

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (4.3)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad (4.4)$$

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right) \quad (4.5)$$

$$\eta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (4.6)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (\text{Hermite 多項式}) \quad (4.7)$$

このような関数でかけるレーザーを Hermite Gaussian mode とよぶ ([15, 16] 参照)。上式において添え字 " n, m " がついている関数で表されるモードを TEM $_{nm}$ モードと呼ぶ。また各文字の定義について簡単に説明すると次のようになる。

| 文字 | 定義 |
|-----------|---|
| z_0 | Rayleigh Range (レイリー長) |
| w_0 | beam waist size。beam の最も細いところでの beam 半径 |
| $w(z)$ | 位置 z での beam 半径 |
| $R(z)$ | 位置 z での beam の曲率半径 |
| $\eta(z)$ | 位置 z での Gouy phase |

通常干渉計では TEM $_{00}$ mode で単一モードで発振しているレーザー光を用いる。

4.1.2 モード展開

mirror の misalignment を数式で表現することを考える。mirror の misalignment は光軸のずれと考えることが出来るので、mirror の misalignment ではなく光軸のずれを数式で表現することを考える。光軸のずれには大きくわけて、光軸の平行移動と光軸の回転があるがどちらも元となっている座標系が平行移動したり回転したりしていると考えることが出来る。よってレーザー光の表現に関して異なる座標系間で変換することが出来ればよい。ここでは、座標系間の変換について出来るだけ一般的な性質を考える。

まず、 (x, y, z) 系において z 軸正の方向にとんでいる Hermite-Gaussian mode の基底関数を $U_{kl+}(x, y, z)$ とおく。ただし、添え字の $+$ はレーザー光が z 軸正の方向に走っていることを表す。

ここで、(4.2) 式より $U_{kl+}(x, y, z)$ は次のような条件を満たす。

$$\int dx dy U_{kl}^* U_{mn} = \delta_{km} \delta_{ln} \quad (4.8)$$

(x', y', z') 系では $u_{\mu\nu+}(x', y', z')$ とかく。以下では括弧内の変数を省略する。

まず、 U_{kl+} を (x', y', z') 系において展開することを考える。

$$U_{kl+} = \sum_{\mu, \nu} u_{\mu\nu+} c_{\mu\nu:kl+} \quad (4.9)$$

$$c_{\mu\nu:kl+} = \int dx dy u_{\mu\nu+}^* U_{kl+} \quad (4.10)$$

同様にして

$$u_{\mu\nu+} = \sum_{k, l} U_{kl+} c_{kl:\mu\nu+} \quad (4.11)$$

$$c_{kl:\mu\nu+} = \int dx dy U_{kl+}^* u_{\mu\nu+} \quad (4.12)$$

$$= c_{\mu\nu:kl+}^* \quad (4.13)$$

となる (以下 \sum を省略)。

よって、 z 軸方向に走る任意のレーザー光の電場 E_0 は次のようにかかる。

$$E_0 = U_{kl+} E_{kl} \exp(i\Omega t) \quad (4.14)$$

$$= u_{\mu\nu+} c_{\mu\nu:kl+} E_{kl} \exp(i\Omega t) \quad (4.15)$$

このような展開をモード展開という。

4.2 misalignment の行列表現

次に 4.15 式で見たようなモード展開の展開係数 E_{kl} に関して異なる座標系間の変換行列 $c_{\mu\nu:kl+}$ を具体的に計算することを考える。ただしこの時光軸のずれは十分小さいものとする。

光軸のずれには、平行移動と回転とがあるが、mirror の misalignment に対応するのは、光軸の平行移動と、回転軸が光軸と直交するような回転である。また、回転の中心については、平行移動と回転を組み合わせることによって回転中心を選ぶことが出来るので、waist を中心とした回転について考える。ここで、光軸に沿った平行移動については misalignment の 2 次の効果なので十分小さいとして Fabry-Perot cavity の misalignment を考えるには無視するが、Fabry-Perot-Michelson 干渉計においては、frontal modulation を行うために導入された asymmetry が waist 位置の平行移動に対応するのでその表現をここで計算しておく。

また、通常重力波干渉計では TEM₀₀ モードの光を入射するので基本的に TEM₀₀ モードのレーザー光の光軸がずれたときのことを考える。

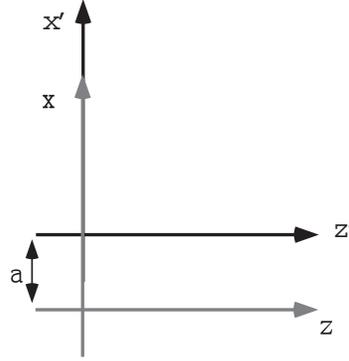


図 4.1: 座標軸の x 方向への平行移動: z 軸に平行に光軸があるとする。

4.2.1 光軸の平行移動

ここでは waist 位置を変えずに平行移動したレーザーに対する展開係数を求める。

いま、misalignment の 2 次の効果は考えないので、 xz 平面内で光軸が x 軸正の方向に a だけ平行移動したときについてのみ考えれば十分である。

$$U_{00+}(x', y, z) = U_{00+}(x - a, y, z) \quad (4.16)$$

$$= U_{00+}(x, y, z) - a \frac{d}{dx'} U_{00+}(x', y, z)|_{a=0} + \frac{1}{2} a^2 \frac{d^2}{dx'^2} U_{00+}(x', y, z)|_{a=0} + O(a^3) \quad (4.17)$$

平行移動 a が微小であると考えているので、結局、 U_{00}, U_{10} モードだけがドミナントとなるので次のようにかける。

$$U_{00+}(x - a, y, z) = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{w_0} \right)^2 \right\} U_{00+} + \frac{a}{w_0} U_{10+} \quad (4.18)$$

また、 U_{10+} モードについても同様に計算することが出来る。

$$U_{10+}(x - a, y, z) = -\frac{a}{w_0} U_{10+} + \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{w_0} \right)^2 \right\} U_{00+} \quad (4.19)$$

上式に対して、(4.9) 式で見たような展開係数で考える。このときは基底として U_{00+}, U_{10+} しかでてこないで展開係数は 2×2 行列で書くことができる。

$$U_+ = a'_0 U'_{00+} + a'_1 U'_{10+} \quad (4.20)$$

$$= a_0 U_{00+} + a_1 U_{10+} \quad (4.21)$$

とすると、 $(a'_0, a'_1), (a_0, a_1)$ の関係は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{w_0} \right)^2 & -\frac{a}{w_0} \\ \frac{a}{w_0} & 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{w_0} \right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

これから、光軸の平行移動に関する行列を次のように定義する。

$$D_+(a) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{w_0} \right)^2 & -\frac{a}{w_0} \\ \frac{a}{w_0} & 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{w_0} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

また、 z 軸負の方向に進む光に関しては式 (4.44) より、

$$D_-a = \{D_+(a)\}^* \quad (4.24)$$

となる。

4.2.2 光軸の回転

ここでは beam waist を中心に光軸が微小回転したときの展開係数を求める。

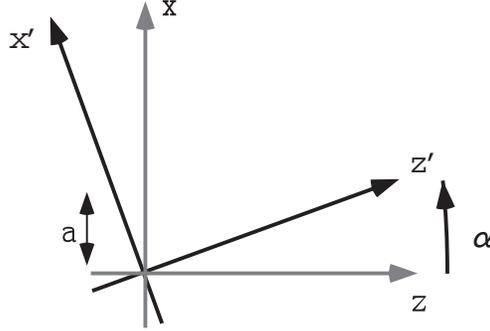


図 4.2: x - z 平面内での座標軸の回転: ただし原点が waist 位置する。

この時も平行移動と同様に、 xz 平面内で光軸が回転したときのみを考えれば十分である。この時の回転角を α とすると TEM₀₀ mode のレーザーは次のようにかける。

$$U_{00+}(x', y', z') = U(x \cos \alpha - z \sin \alpha, y, x \sin \alpha + z \cos \alpha) \quad (4.25)$$

$$= U_{00+}(x, y, z) + \alpha \frac{d}{d\alpha} U_{00+}(x', y, z')|_{\alpha=0} + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} U_{00+}(x', y, z')|_{\alpha=0} + O(\alpha^3) \quad (4.26)$$

$$= U_{00+}(x, y, z) + \alpha \left(\frac{\partial z'}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial x'}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial x'} \right) U_{00+}(x', y, z')|_{\alpha=0} \quad (4.27)$$

$$+ \frac{1}{2} \alpha^2 \left(\frac{\partial z'}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial x'}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 U_{00+}(x', y, z')|_{\alpha=0} \quad (4.28)$$

$$U_{00+}(x \cos \alpha - z \sin \alpha, y, x \sin \alpha + z \cos \alpha) = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 \right\} U_{00+} - i \frac{\alpha}{\alpha_0} U_{10+} \quad (4.29)$$

$$U_{10+}(x \cos \alpha - z \sin \alpha, y, x \sin \alpha + z \cos \alpha) = -i \frac{\alpha}{\alpha_0} U_{10+} + \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 \right\} U_{00+} \quad (4.30)$$

$$\alpha_0 = \frac{w_0}{z_0} \quad (4.31)$$

ここで、光軸の回転を表す行列を次のように定義する。

$$A_+(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 & -i \frac{\alpha}{\alpha_0} \\ -i \frac{\alpha}{\alpha_0} & 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

また、 z 軸負の方向に進む光に関しては式 (4.44) より、

$$A_-\alpha = \{A_+(\alpha)\}^* \quad (4.33)$$

となる。

4.2.3 beam waist の平行移動

ここでは beam waist が光軸に沿って微量平行移動したときについて考える。
このとき、

$$U_{00+}(x, y, z') = U_{00+}(x, y, z - \delta) \quad (4.34)$$

$$= U_{00+}(x, y, z) - \delta \frac{\partial}{\partial z'} U_{00+}(x, y, z')|_{\delta=0} + O(\delta^2) \quad (4.35)$$

$$\cong U_{00+} - i\delta(\eta'(z) - k)U_{00+} \quad (4.36)$$

$$\cong U_{00+} \exp[i\{k\delta - \eta(z + \delta) + \eta(z)\}] \quad (4.37)$$

となる。同様にして、

$$U_{10+}(x, y, z - \delta) \cong U_{10+} \exp[i\{k\delta - 2\eta(z + \delta) + 2\eta(z)\}] \quad (4.38)$$

よって、beam waist 位置の平行移動を表す行列は次のように書ける。

$$P_+(\delta) = \begin{pmatrix} \exp[i\{k\delta - \eta(z + \delta) + \eta(z)\}] & 0 \\ 0 & \exp[i\{k\delta - 2\eta(z + \delta) + 2\eta(z)\}] \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

4.3 Misaligned Fabry-Perot cavity

まず、Fabry-Perot cavity が入射光に対して alignment がとれていないときについて定性的に考えてみる。Fabry-Perot cavity が入射光軸に対して misalign している時、入射光は TEM₀₀ モー

ドのみでも cavity 内の座標系で見ると複数のモードが混ざっているように見える。ここで重要なことは、Fabry-Perot cavity にはモード選択性があり、異なるモードには異なる応答をするという性質を持つということである (4.3.1 節参照)。つまり、Fabry-Perot cavity におけるレーザー光の共振条件は cavity 内のモードで決まっているので cavity 内の座標系で見たときに入射光が複数のモードを持っていると、入射光のあるモードが共振しているときには別のモードは共振していないということが起こりうる。このとき、cavity の透過光や反射光には cavity 内のモードを反映した光が帰ってくるということとなる。言い変えると、cavity の内部、特に misalignment に関する何らかの情報をを持った光が cavity の中から出てくるということの意味する。

alignment control のためには misalignment を検出する (sense) する手段が必要であるが、それはまさに上で述べた性質を利用して cavity 内部の情報を取り出す物である。misalignment の情報を検出する方法については 4.6 節で述べる。この節ではそのための準備として、Fabry-Perot cavity において front mirror の傾きと end mirror の傾きが Fabry-Perot cavity の光軸に対してどのように影響するかを考える。次に、その傾いた Fabry-Perot cavity に対して Hermite-Gaussian mode がどのように展開されるかを考える。

4.3.1 Fabry-Perot cavity のモード選択性

3.1 節で見たように Fabry-Perot cavity は cavity 内をレーザー光が行って帰ってくる間の位相変化によって応答が決まる。

Fabry-Perot cavity において共振するレーザー光は Hermite-Gaussian モードを基本モードとして持つ。TEM_{nm} モードの Hermite-Gaussian モードが進行方向に $z = z_1$ から $z = z_2$ へ進んだときの位相変化は $\theta_{nm}(z_1, z_2)$ とおくと、

$$\theta_{nm}(z_1, z_2) = -k(z_2 - z_1) + (n + m + 1)(\eta(z_2) - \eta(z_1)) \quad (4.40)$$

とかける。上式において、第 2 項が Gouy phase shift と呼ばれる物で普通の平面波の位相変化からずれを表す。これよりわかるように、異なるモードに対しては異なる応答を示す。

4.3.2 misaligned Fabry-Perot cavity 反射光

misaligned Fabry-Perot cavity の反射光が「モード展開」と「Fabry-Perot cavity のモード選択性」を用いて一般的にどのようにかけられるか計算してみる。

Fabry-Perot cavity にレーザー光を入射するときレーザー光に対して alignment のとれてない Fabry-Perot cavity に対する cavity 反射光について考える。misalignment があるということは cavity 内の座標系と入射光の座標系とが異なっているということの意味する。

U_{kl} を入射レーザー光に対する基底関数、 $u_{\mu\nu}$ を misaligned Fabry-Perot cavity に対する基底関数とする²。

Fabry-Perot cavity はそのモード選択性から入射レーザー光の周波数や高次モード (例えば TEM₁₀ モード等) によって異なる反射率を持つ。よって、 $u_{\mu\nu+}$ モードに対する cavity 反射率を $r_{c,\mu\nu+}$ と

²逆に Fabry-Perot cavity に対して misaligned されたレーザー光が入射すると考えてもよい。また、ここではレーザー光の mismatching は考えない。

おくと、 U_{kl+} が入射したとき cavity 反射光は以下のようにかける。

$$r_{\text{cav}} U_{kl+} = u_{\mu\nu-} r_{c,\mu\nu+} c_{\mu\nu:kl+} \quad (4.41)$$

$$= U_{ij-} c_{ij:\mu\nu-} r_{c,\mu\nu+} c_{\mu\nu:kl+} \quad (4.42)$$

ただし、

$$c_{ij:\mu\nu-} = c_{ij:\mu\nu+}^* \quad (4.43)$$

$$= c_{\mu\nu:ij+} \quad (4.44)$$

である。

つぎに、単一モードでないレーザー光

$$U = U_{kl+} A_{kl} \quad (4.45)$$

を Fabry-Perot cavity に入射した時を考える。このとき Fabry-Perot cavity からの反射光は、

$$R_{\text{cav}} U = r_{\text{cav}} U_{kl+} A_{kl} \quad (4.46)$$

$$= U_{ij-} c_{ij:\mu\nu-} r_{c,\mu\nu+} c_{\mu\nu:kl+} A_{kl} \quad (4.47)$$

$$= U_{ij-} A_{ij-} \quad (4.48)$$

よって、

$$A_{ij-} = c_{ij:\mu\nu-} r_{c,\mu\nu+} c_{\mu\nu:kl+} A_{kl} \quad (4.49)$$

$$= R_{ij:kl} A_{kl} \quad (4.50)$$

となり、Fabry-Perot cavity の反射を表す行列 $R_{ij:kl}$ がわかればよい。

以下の節で misaligned Fabry-Perot cavity の反射を表す行列 $R_{ij:kl}$ に対応する行列を具体的に計算することを考える。

4.3.3 Fabry-Perot cavity の形状に関するパラメーター

図のような Fabry-Perot cavity を考える。Fabry-Perot cavity に対する各パラメーターを次のように定義する。

| 文字 | 定義 |
|-------|----------------------------------|
| R_F | front mirror の曲率 ³ 。 |
| R_E | end mirror の曲率 |
| L | cavity length |
| L_F | beam waist から front mirror までの距離 |
| L_E | beam waist から end mirror までの距離 |

表 4.1: Fabry-Perot cavity の形状に関する基本パラメーター

まず、レーザー光が cavity にマッチしているという条件から次のことがわかる⁴。

$$z_0 = \sqrt{\frac{L(R_F - L)(R_E - L)(R_F + R_E - L)}{(R_F + R_E - 2L)^2}} \quad (4.51)$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left(\frac{L(R_F - L)(R_E - L)(R_F + R_E - L)}{(R_F + R_E - 2L)^2} \right)^{1/4} \quad (4.52)$$

$$L_F = \frac{L(R_E - L)}{R_F + R_E - 2L} \quad (4.53)$$

$$L_E = \frac{L(R_F - L)}{R_E + R_F - 2L} \quad (4.54)$$

4.3.4 mirror の傾きと cavity の光軸のずれ

ここでは Fabry-Perot cavity を構成する front mirror や end mirror が傾くと cavity の光軸がどれだけずれるかを考える。

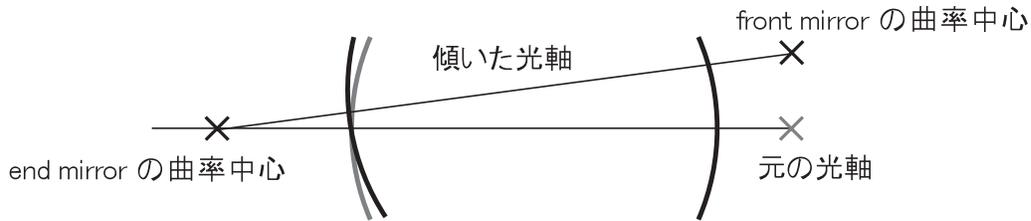


図 4.3: Fabry-Perot cavity の光軸の傾き

まず、Fabry-Perot cavity の光軸はどこにあるかについて考える。cavity を構成する mirror はそれぞれ完全な球体の一部分と考えることができるので、front mirror と end mirror の曲率中心を結んだ線が Fabry-Perot cavity の光軸となる。このことから、図 4.3 より front mirror が xz 平

⁴詳しい計算等は [16, 17, 18] 参照。

面内で反時計回りに α_F だけ傾いたときに光軸の傾き及び平行移動は以下のようにかける。

$$\text{光軸の傾き} = \theta_F = -\arctan\left(\frac{R_F \sin \alpha_F}{R_F \cos \alpha_F + R_E - L}\right) \quad (4.55)$$

$$\text{光軸の平行移動} = a_F = -(R_E - L) \tan \theta_F \quad (4.56)$$

$$= -\frac{(R_E - L)R_F \sin \alpha_F}{R_F \cos \alpha_F + R_E - L} \quad (4.57)$$

同様にして end mirror が α_E だけ傾いたときについても計算すると以下のようにかける。

$$\text{光軸の傾き} = \theta_E = -\arctan\left(\frac{R_E \sin \alpha_E}{R_E \cos \alpha_E + R_F - L}\right) \quad (4.58)$$

$$\text{光軸の平行移動} = a_E = \frac{(R_F - L)R_E \sin \alpha_E}{R_E \cos \alpha_E + R_F - L} \quad (4.59)$$

4.3.5 misalignment の行列表現

front mirror と end mirror が両方傾いたときの、光軸の平行移動と傾きに関する行列を計算する。前節の結果より、 $\alpha_F, \alpha_E \ll 1$ とするとそれぞれ次のようにかける。

$$\theta_F \cong -\frac{R_F}{R_F + R_E - L} \alpha_F \quad (4.60)$$

$$\theta_E \cong -\frac{R_E}{R_E + R_F - L} \alpha_E \quad (4.61)$$

$$a_F \cong -\frac{R_F(R_E - L)}{R_F + R_E - L} \alpha_F \quad (4.62)$$

$$a_E \cong \frac{R_E(R_F - L)}{R_E + R_F - L} \alpha_E \quad (4.63)$$

したがって Fabry-Perot cavity 全体について misalignment を mirror の傾きによって表す行列は次のようになる。

$$M_+(\alpha_F, \alpha_E) = A_+(\theta_F + \theta_E)D_+(a_F + a_E) \quad (4.64)$$

$$= \left(\begin{array}{c} 1 - \frac{1}{2} |\gamma_F \alpha_F + \gamma_E \alpha_E|^2 - i\frac{1}{2} \text{Im}\{(\gamma_F \alpha_F + \gamma_E \alpha_E)^2\} \\ \gamma_F \alpha_F + \gamma_E \alpha_E \\ -(\gamma_F \alpha_F + \gamma_E \alpha_E)^* \\ 1 - \frac{3}{2} |\gamma_F \alpha_F + \gamma_E \alpha_E|^2 + i\frac{1}{2} \text{Im}\{(\gamma_F \alpha_F + \gamma_E \alpha_E)^2\} \end{array} \right) \quad (4.65)$$

$$\gamma_F = -\frac{R_F(R_E - L)}{w_0(R_F + R_E - L)} + i\frac{R_F}{\alpha_0(R_F + R_E - L)} \quad (4.66)$$

$$\gamma_E = \frac{R_E(R_F - L)}{w_0(R_E + R_F - L)} + i\frac{R_E}{\alpha_0(R_E + R_F - L)} \quad (4.67)$$

以後、 γ などを misalignment factor と呼ぶことにする。

4.3.6 misaligned Fabry-Perot cavity からの反射光

ここでは misaligned された Fabry-Perot cavity からの反射光についてこれまで求めた行列等を用いて考える。

aligned Fabry-Perot cavity による cavity の反射率について、いま、 U_{00}, U_{10} モードと2つのモードしか考えていないのでそれぞれに対する反射率を r_{C0}, r_{C1} とする。(3.1.1) 節では Gouy phase による位相変化を考慮に入れていなかったがここでは考慮に入れる必要がある。TEM₀₀ mode に対する cavity 反射率を次のようにおく。

$$r_{C0} = -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\phi_0}}{1 - r_F r_E e^{-\phi_0}} \quad (4.68)$$

この時 TEM₁₀ mode は Gouy phase 分位相が異なるので、cavity 反射率は次のようにかける。

$$r_{C1} = -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\phi_0 + 2i\eta}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi_0 + 2i\eta}} \quad (4.69)$$

$$\eta = \eta(z_E) - \eta(z_F) \quad (4.70)$$

ここで、alignment のとれている cavity からの反射を表す行列は次のようにかける。

$$R_{\text{cav}}^{\text{aligned}} = \begin{pmatrix} r_{C0} & 0 \\ 0 & r_{C1} \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

以上より、misalignment された Fabry-Perot cavity からの反射を表す行列は次のように計算される。

$$R_{\text{cav}}^{\text{mis}}(\alpha_F, \alpha_E) = M_-(-\alpha_F, -\alpha_E) \begin{pmatrix} e^{2i(\eta(L_F) - kL_F)} & 0 \\ 0 & e^{2i(2\eta(L_F) - kL_F)} \end{pmatrix} R_{\text{cav}}^{\text{aligned}} M_+(\alpha_F, \alpha_E) \quad (4.72)$$

$$= \{M_+(\alpha_F, \alpha_E)\}^t R_{\text{cav}}^{\text{aligned}} M_+(\alpha_F, \alpha_E) \quad (\text{式 (4.44) より}) \quad (4.73)$$

$$= \begin{pmatrix} r_{C0}(1 - |^2 - i\text{Im}\{, ^2\}) + r_{C1}, 2e^{2i\eta(L_F)} & -r_{C0}, * + r_{C1}, e^{2i\eta(L_F)} \\ -r_{C0}, * + r_{C1}, e^{2i\eta(L_F)} & r_{C0}, *^2 + r_{C1}(1 - 3|, *|^2 - i\text{Im}\{, *^2\})e^{2i\eta(L_F)} \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

$$, = \gamma_F \alpha_F + \gamma_E \alpha_E \quad (4.75)$$

これより、TEM₀₀ mode の光が misaligned Fabry-Perot cavity に入射したとき反射光は次のように書ける。

まず、入射光を次のように書く

$$E_{\text{inc}} = U_{00+} E_0 \exp^{i\Omega t} \quad (4.76)$$

すると反射光は次のようになる

$$E_{\text{ref}} = (U_{00-} \ U_{10-}) R_{\text{cav}}^{\text{mis}}(\alpha_F, \alpha_E) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} E_0 \exp(i\Omega t) \quad (4.77)$$

4.4 Fabry-Perot-Michelson 干渉計の misalignment

FPM 干渉計全体としての misalignment の効果についてここで考える。

本章のはじめにも述べたように、FPM 干渉計の misalignment といった場合、通常 Fabry-Perot cavity の misalignment を考える。これは、入射光に対して Fabry-Perot cavity が align していれば Michelson 部分に関しても align していると考えることが出来るからである。

これまで見たように Fabry-Perot cavity が misalign すると Fabry-Perot cavity にためられるエネルギーが減少する。このことは Fabry-Perot cavity の内部の情報を持った光が減るために光路長に対する感度が下がるということを意味する。また、misalignment によって余計な光が漏れてくると言うことは干渉計の anti-symmetric port に余計な光が漏れてきて shotnoise limit を低下させるという効果を生む。干渉計の対称性という観点からも、misalignment によって干渉計の両 arm 間に非対称な変化が起こると、Common Mode Rejection(CMRR) の低下 ([19]) も考えられる。

こういったように misalignment は様々な形で FPM 干渉計の性能を低下させる。まず本説で misalignmet に対する FPM 干渉計の応答について計算する。次節 (4.5 節) で具体的に個々の影響について考える。

4.4.1 frontal modulation による非対称の導入

FPM 干渉計では光路長制御のために frontal modulation という方法を用いられることが多く、TAMA300 でも frontal modulation を採用する。frontal modulation を用いる時、両腕の間で beam splitter から arm cavity の間に距離の差 (asymmetry) が付けられている。

この時、両方の arm cavity に対して完全に beam matching をとることができない。よって、beam waist はそれぞれの片腕を構成する Fabry-Perot cavity の理想的な waist 位置の中間に設定する。ただし、通常 frontal modulation によって導入される asymmetry は arm cavity の Rayleigh range よりも十分小さいので無視されることが多い。

ここではまず、frontal modulation を導入することによる Beam waist の位置の変化したときの misaligned Fabry-Perot cavity の応答を考える。

$$l_{-} = l_1 - l_2 \quad (4.78)$$

とすると、Perpendicular arm は $l_{-}/2$ だけ cavity からみて BS がわに beam waist がずれてい

る。その効果を入れると Inline arm cavity からの反射行列 A_1 は、

$$A_1 = P_-(l_-/2)R_{1\text{cav}}^{\text{mis}}P_+(-l_-/2) \quad (4.79)$$

$$= \{P_+(-l_-/2)\}^t R_{1\text{cav}}^{\text{mis}} P_+(-l_-/2) \quad (4.80)$$

$$= e^{\{-i(kl_- - \frac{l_-}{z_0})\}} \begin{pmatrix} r_{C0}(1 - |, 1|^2 - i\text{Im}\{\frac{2}{1}\}) + r_{C1}, 1^2 & \\ & (-r_{C0}, 1^* + r_{C1}, 1)e^{i\frac{l_-}{2z_0}} \\ & & (-r_{C0}, 1^* + r_{C1}, 1)e^{i\frac{l_-}{2z_0}} \\ & & & \{r_{C0}, 1^2 + r_{C1}(1 - 3|, 1|^2 - i\text{Im}\{\frac{2}{1}\})\}e^{i\frac{l_-}{z_0}} \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

$$= e^{\{-i(kl_- - \frac{l_-}{z_0})\}} \tilde{A}_1 \quad (4.82)$$

となる。ここで、 $, 1$ は Inline arm に入っている Fabry-Perot cavity の misalignment factor であり次のようにかける。

$$, 1 = \gamma_F \alpha_{F1} + \gamma_E \alpha_{E1} \quad (4.83)$$

ただし、 α_{F1}, α_{E1} はそれぞれ Inline arm の front mirror, end mirror の傾きである。misalignment に関わる mirror の傾きについては 2 自由度あるがここでは簡単のため 1 自由度のみを考えている。また、 $\eta(l_-) \doteq \frac{l_-}{z_0}$ とした。同様に Perpendicular arm cavity からの反射行列も次のように書ける。

$$A_2 = P_-(-l_-/2)R_{2\text{cav}}^{\text{mis}}P_+(l_-/2) \quad (4.84)$$

$$= e^{i(kl_- - \frac{l_-}{z_0})} \begin{pmatrix} r_{C0}(1 - |, 2|^2 - i\text{Im}\{\frac{2}{2}\}) + r_{C1}, 2^2 & \\ & (-r_{C0}, 2^* + r_{C1}, 2)e^{-i\frac{l_-}{2z_0}} \\ & & (-r_{C0}, 2^* + r_{C1}, 2)e^{-i\frac{l_-}{2z_0}} \\ & & & \{r_{C0}, 2^2 + r_{C1}(1 - 3|, 2|^2 - i\text{Im}\{\frac{2}{2}\})\}e^{-i\frac{l_-}{z_0}} \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

$$= e^{i(kl_- - \frac{l_-}{z_0})} \tilde{A}_2 \quad (4.86)$$

上式より asymmetry による Gouy phaser に与える影響は $\frac{l_-}{z_0}$ の部分である通常 z_0 は cavity 長程度の大きさでありそれに対して asymmetry l_- は非常に小さい。よって asymmetry による影響は無視されることが多い。

4.4.2 misaligned Fabry-Perot-Michelson 干渉計の応答

前項の結果からより、FPM 干渉計の symmetric port と anti-symmetric port に出てくる光に関する反射行列は次のように書ける。

$$R_{\text{FPM}} = e^{-i\phi_+/2} (e^{-i\phi_-/2} r_{\text{BSf}}^2 \tilde{A}_1 + e^{i\phi_-/2} t_{\text{BS}}^2 \tilde{A}_2) \quad (4.87)$$

$$T_{\text{FPM}} = e^{-i\phi_+/2} (e^{-i\phi_-/2} r_{\text{BSf}} t_{\text{BS}} \tilde{A}_1 - e^{i\phi_-/2} r_{\text{BSb}} t_{\text{BS}} \tilde{A}_2) \quad (4.88)$$

$$\phi_+ = \phi_1 + \phi_2 \quad (4.89)$$

$$\phi_- = \phi_1 - \phi_2 \quad (4.90)$$

ただし ϕ_1 等の文字の定義は 3.2.1 節において定義したものとおなじである。

4.5 misalignment による影響

ここでは簡単のために、carrier の TEM₀₀ モードが cavity に共振しているのでそれ以外のモードは全く共振していないと考えて、

$$r_{C0,0} = r_{\text{res}} \quad (4.91)$$

$$r_{C0,i} = r_{\text{anti}} \quad (i = -1, 1) \quad (4.92)$$

$$r_{C1,n} = r_{\text{anti}} \quad (n = -1, 0, 1) \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial r_{C0,0}}{\partial \Phi} = r'_{\text{res}} \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial r_{C0,i}}{\partial \Phi} = r'_{\text{anti}} = 0 \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial r_{C1,n}}{\partial \Phi} = r'_{\text{anti}} = 0 \quad (4.96)$$

とおく。

4.5.1 misaligned Fabry-Perot cavity の感度

ここでは misalignment による Fabry-Perot cavity の感度の低下について考える。

Fabry-Perot cavity の反射光は次のようにかかる。

$$E_r = \sum_{n=-1}^1 i^n J_n(U_{00} \quad U_{10}) R_{\text{cav},n}^{\text{mis}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} E_0 e^{i(\Omega + n\omega_m)t} \quad (4.97)$$

いま Fabry-Perot cavity において carrier の roundtrip での phase offset を Φ とすると、Pound-Drever 法で得られる信号の Φ での微係数は次のようになる。

$$\frac{\partial V_{\text{demo}}}{\partial \Phi} = -2J_0 J_1 |r'_{\text{res}}| |r_{\text{anti}}| (1 - |r_{\text{anti}}|^2) + O(\epsilon^4) \quad (4.98)$$

つまり、 $1 - |r_{\text{anti}}|^2$ だけ感度が落ちているのがわかる。

ここで、cavity 内部にためられるパワーという観点から考察してみよう。これまでに見てきたように、misalignment があるとき TEM₀₀ モードの入射光

$$U_{00} E_0 e^{i\Omega t} \quad (4.99)$$

を cavity 内のモード (u_{00}, u_{10}) によって展開すると次のようにかかることがわかる。

$$\left\{ \left(1 - \frac{1}{2} |r_{\text{anti}}|^2 - i \frac{1}{2} \text{Im}(r_{\text{anti}}^2) \right) u_{00} + u_{10} \right\} E_0 e^{i\Omega t} \quad (4.100)$$

これは cavity にためられる power が

$$\left| 1 - \frac{1}{2} |r_{\text{anti}}|^2 - i \frac{1}{2} \text{Im}(r_{\text{anti}}^2) \right|^2 = 1 - |r_{\text{anti}}|^2 + O(\epsilon^4) \quad (4.101)$$

に減っていることを意味する。この減少は Fabry-Perot cavity の感度の低下と一致する。

4.5.2 misalignment による Fabry-Perot-Michelson 干渉計の感度の低下

前節で Fabry-Perot cavity の感度の低下について議論したが FPM 干渉計も同様に感度の低下が起こる。

干渉計の感度として重要な δL_- の感度の低下について考える。

まず定性的に考えてみる。Fabry-Perot cavity 単独の場合と同様に、Fabry-Perot cavity の内部にためられる光のパワーが落ちることによる感度の低下が考えられる。さらに、FPM 干渉計の場合は光が干渉し合って差動変動信号 (δL_-) が出てくるかどうかという物も関係してくる。

以上のことを実際に計算してみる。4.4.2 節で見たように FPM 干渉計の anti-symmetric port に漏れ出す光は次のようにかかる。

$$E_{\text{anti}} = \sum_{n=-1}^1 i^n J_n(U_{00} \quad U_{10}) T_{\text{FPM},n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\Omega+n\omega_m)t} \quad (4.102)$$

これより cavity 長の差動変動成分 δL_- に関する感度を計算する。つまり anti-symmetric port において quadrature phase で復調した信号の

$$\delta\Phi_- = \frac{4\pi}{\lambda} (\delta L_2 - \delta L_1) \quad (4.103)$$

に対する微係数を計算すると次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial\Phi_-} V_{AQ} = -\frac{1}{2} J_0 J_1 |r'_{\text{res}}| r_{\text{anti}} \sin\alpha \text{Re}\{(2 - |, 1|^2 - |, 2|^2 - \text{Im}(\cdot, 1)^2 - \text{Im}(\cdot, 2)^2) + 2(\text{Im}(\cdot, 1 + , 2))^2\} + O(\cdot, 4) \quad (4.104)$$

ただし、ここでは簡単のため asymmetry による Gouy phase の変化 $\eta(l_-/2)$ は無視した。式 (4.5.2) において第 1 項が元々の光軸の TEM₀₀ モードが misalignment によって減少した効果を現して、第 2 項が TEM₁₀ モードが cavity に共振する効果を現す。ここで、FPM 干渉計の front mirror は flat であると仮定している。つまり、 $R_F = \infty$ であるから

$$\text{Im}(\cdot, 1) = \text{Im}(\gamma_F \theta_F + \gamma_E \theta_E) \quad (4.105)$$

$$= \frac{R_F}{\alpha_0(R_F + R_E - L)} \theta_F \quad (4.106)$$

であるといえる。つまり、 $\cdot, 1, \cdot, 2$ の虚部は front mirror の傾きによる物と考えられる⁵。このことを念頭に再び式 (4.5.2) の第 1 項を見てみると $(-|, 1|^2 - |, 2|^2)$ が cavity に共振する TEM₀₀ モードが減る効果を現して、 $-\text{Im}(\cdot, 1)^2 - \text{Im}(\cdot, 2)^2$ が TEM₀₀ の sideband が減る効果を現す。sideband について front mirror に関する項しか利かないのは sideband は cavity に共振しないためである。次に、第 2 項についても同様に考えることができる。第 2 項は元々の形は

$$-\frac{1}{2} J_0 J_1 |r'_{\text{res}}| r_{\text{anti}} \sin\alpha \{i(\cdot, 1 + , 2)^* 2\text{Im}(\cdot, 1 + , 2)e^\delta\} \quad (4.107)$$

と書くことができる。ただしここで δ は復調位相を表す。はじめの $(\cdot, 1 + , 2)$ が両 arm cavity に共振してもれてきた carrier の TEM₁₀ モードの大きさを表し、 $\text{Im}(\cdot, 1 + , 2)$ が sideband の TEM₁₀

⁵ Gouy phase による補正を考慮に入れると front mirror が曲率を持っている場合でも同様のことがいえる。

モードの大きさを表す。ここで、TEM₁₀ の信号に対して復調位相を最適化して考えると

$$-\frac{1}{2} J_0 J_1 |r'_{\text{res}}| r_{\text{anti}} \sin \alpha |, 1 + , 2| 2\text{Im}(, 1 + , 2) \quad (4.108)$$

だけの信号が得ることが出来るが、実際には、 $, 1, , 2$ はそれぞれ揺らいでいる量であり、復調位相は misalignment の無いときに最適化するので、式 (4.5.2) の様な値が得られる。

4.5.3 misalignment によるコントラストの低下

ここでは misalignment によるコントラストの低下について考える。コントラストは次のように定義される。

$$C = \frac{P_{\text{max}} - P_{\text{min}}}{P_{\text{max}} + P_{\text{min}}} \quad (4.109)$$

ここでの $P_{\text{max}}, P_{\text{min}}$ は photo detector に入射する光のパワーでそれぞれ最大値・最小値を表す。干渉計への入射光を TEM₀₀ mode として、anti-symmetric port が bright になっている条件で考えると、

$$P_{\text{max}} \sim \left| R_{\text{FPM}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \quad (4.110)$$

$$P_{\text{min}} \sim \left| T_{\text{FPM}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \quad (4.111)$$

となる。

frontal modulation による信号分離を考えたとき、anti-symmetric port には必ず sideband が漏れ出すので、ここでは carrier のコントラストのみを考える。

理想的な干渉計では carrier コントラストは 1 であるが、misalignment などがあるとコントラストが低下する。ここでは、cavity 反射率などの性質などは Inline arm と Perpendicular arm で理想的な状態になっているとして、misalignment によるコントラストの低下のみを考える。carrier コントラストは以下のように書ける。

$$1 - C_{\text{carrier}} = 2 \frac{\left| T_{\text{FPM}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2}{\left| R_{\text{FPM}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 + \left| T_{\text{FPM}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2} \quad (4.112)$$

$$= \frac{1}{2} \left| (, 1^* - , 2^*) - (, 1 - , 2) \frac{r_{\text{anti}}}{r_{\text{res}}} \right|^2 + o(, l, \eta' \text{ の 3 次以上の項}) \quad (4.113)$$

となる。上式より Inline arm, Perpendicular arm 両方に common ではないっている misalignment はコントラストに影響しない事がわかる。

4.5.4 CMRR の低下

まず、CMRR(Common Mode Rejection Ratio) について説明する。3.2.5 節で見たように理想的な干渉計の場合は anti-symmetric port においては差動系の信号 ($\delta L_-, \delta l_-$) しか出てこないが、実際の干渉計は理想的に対称ではないので同相系の信号 (δL_+) が混ざってしまう。symmetric port の I-phase (V_{SI}) に出てくる同相系の信号の大きさ ($\delta L_{+,SI}$) に対する、anti-symmetric port の Q-phaser ($\delta L_{+,AQ}$) に出てくる信号の大きさの比を CMRR と呼ぶ。

anti-symmetric port での両 arm cavity に関する同相変動信号 (δL_+) は理想的な場合は打ち消し合うはずであるが、misalignment によって同相信号がうち消されずに漏れてくる (Common Mode Rejection Ratio の低下)。ここではその原因と具体的な値を計算する。

misalignment によって CMRR が低下する原因には 2 種類ある。1 つは、cavity 内で共振する光のエネルギーが各 arm cavity の間で異なると、carrier の持っているそれぞれの arm cavity の情報の大きさが異なるために情報の大きさの差によって同相信号が antisymmetric port に漏れてきてしまう効果である。もう 1 つは、arm cavity に関する情報を持った carrier の光軸が各 arm cavity からの反射光の間でずれることによって片方の腕の情報が干渉によって打ち消し合わないために同相信号が漏れてくると言う物である。

それでは、misalignment による CMRR の低下について具体的に計算してみよう。

anti-symmetric port の Quadrature phase に現れる cavity 長の同相信号は次のようにかかる。

$$V_{AQ} = \frac{1}{2} r'_{\text{res}} r_{\text{anti}} \text{Re}\{(|_1|^2 - |_2|^2) \sin \alpha + i(|_1^* - |_2^*) \text{Im}(|_1 + |_2) \sin \alpha\} \quad (4.114)$$

上式において第 1 項が両 arm cavity 間における情報の大きさの差による物で、第 2 項が干渉せずに出てくる光の効果である。干渉せずに出てくる光の方にも asymmetry (l_-) の効果を現す。また、 $\sin \alpha$ が入っているのは、復調位相が差動変動信号 (δL_-) が最もよくとれるように調節してあるからである。

よって、CMRR は、

$$\epsilon_{\text{CMRR}} = \cot \alpha \{ \text{Re}(|_1 + |_2) \text{Re}(|_1 - |_2) + 2 \text{Im}(|_1 - |_2) \text{Im}(|_1 + |_2) \}^{-1} \quad (4.115)$$

とかける。 $(\eta \left(\frac{l_-}{2} \right) \sim 0$ とした)

4.6 wavefront sensing による misalignment の検出

以上のことから制御の必要があるのでここでは misalignment の検出のための wavefront sensing について解説する。automatic alignment control では鏡とレーザー光の間の misalignment を検出して、misalignment に関する線形な信号を取り出す必要がある。

cavity の laser 光に対する misalignment の検出では大きくわけて機械変調法 [20]、アンダーソン法 [21]、wavefront sensing [22] がある。これらどれもが何らかの変調を加えることによって制御を行っている。これらの中で、wavefront sensing は cavity (干渉計) の光路長制御に用いている変調をそのまま使うことができる。つまり、干渉計そのものに特別な変化を加える必要がないという利点を持つ。そのため wavefront sensing という方法が現在大型干渉計計画において主流となっている。

wavefront sensing によって misalignment を検出するためには wavefront sensor という分割型ディテクターと demodulator と適当な加減算機からなる検出器と、Gouy phase telescope という適当な Gouy phase を作るために設計されたレンズ系が用いられる [23, 24]。これらについては、本節で wavefront sensing の原理とともに解説する。

制御すべき misalignment については、光軸に対して mirror の回転軸が垂直に交わる 2 自由度ある。つまり mirror 1 つに対して、2 自由度制御する必要がある。それぞれの自由度には pitch, yaw と名前が付けられておりそれぞれ図 4.4 のような回転を表す。

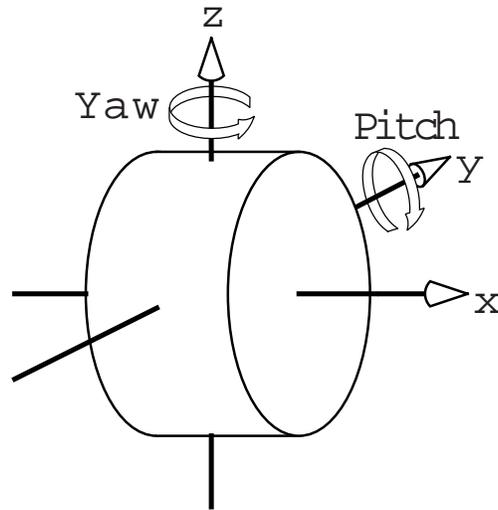


図 4.4: mirror の回転の名称。pitch, yaw: 干渉計を構成する光学系は xy 平面内にくまれており、光軸は x 軸にとる。

4.6.1 misalignment に関する信号の取り出し

wavefront sensing による misalignment の信号取り出しは Pound-Drever 法による Fabry-Perot cavity の光路長制御と同様の原理である。光路長制御においては cavity 内で共振して cavity から漏れてくる carrier の持つ位相情報を front mirror で直接反射される sideband を reference として用いて検出している。wavefront sensing による misalignment の検出も同じ考え方で行われる。

TEM_{00} のレーザー光が入射光軸に対して傾いた鏡に反射されると光軸が傾くのだが、このことを入射光軸から見てやると TEM_{10} , TEM_{01} 等といった高次の Hermite-Gaussian mode が励起されたと考えることができる。つまり、高次モードに misalignment の情報が含まれているということである。このことは光路長制御において、位相のずれた光に cavity の光路長の変化の情報が含まれているという事に対応する。高次モードを検出するために local oscillator として sideband が使われる。つまり、 TEM_{00} モードと TEM_{10} 等の高次モードとのビートをとることによって高次モードを検出する⁶。ただし、この時注意しなければいけないのは単に傾いた鏡で反射された光は、

⁶ TEM_{20} モードなどの高次モードも励起されるが misalignment が微小である時には misalignment の 2 次以上の効

いくら入射光軸から見て高次モードが混ざってるように見えても、反射光軸から見ると純粹な TEM₀₀ モードであるから、レーザー光のモードそのものには鏡の傾きに対する情報は何も含まれていない。言い換えると、carrier も sideband (local oscillator) も同じように misalignment の影響を受けるので carrier と sideband が同じ情報を含んでいるためいくらビートをとってもなにもでてこない。そこで Fabry-Perot cavity のモード選択性が利用される。Fabry-Perot cavity のモード選択性によって carrier と sideband の間で misalignment に関する異なる情報が含まれるとすることが重要である。ではこのことを具体的に計算してみよう。

レーザー光源からでた光を

$$E_0 U_{00+} \exp(i\Omega t) \quad (4.116)$$

とおく。この光を変調指数 m [rad] 変調周波数 $f_m = \omega_m/2\pi$ [Hz] で位相変調した光 (E_{inc} とおく。) は 1 次の side band まで考えると次のようにかける⁷。

$$E_{\text{inc}} = \{J_0(m) + iJ_1(m) \exp(i\omega_m t) + iJ_1(m) \exp(-i\omega_m t)\} E_0 \exp(i\Omega t) \quad (4.117)$$

$$= \sum_{n=-1}^1 i^n J_n(m) \exp\{i(\Omega + n\omega_m)t\} \quad (4.118)$$

次に、cavity の固有モードを 4.3.2 節で定義したように $u_{\mu\nu}$ とおく。misalignment による 2 次の効果 ($o(,^2)$ 以上の項) を無視すると、位相変調がかかったレーザー光の cavity からの反射光は次のようにかける⁸。

$$\begin{aligned} E_r &= \sum_{n=-1}^1 (u_{00-} \quad u_{10-}) R_{\text{cav},n}^{\text{aligned}} M_{+,n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} i^n J_n \exp\{i(\Omega + n\omega_m)t\} \\ &= J_0 \{r_{C0,0} u_{00-} +, r_{C1,0} u_{10-}\} E_0 \exp(i\Omega t) \\ &\quad + iJ_1 \{r_{C0,1} u_{00-} +, r_{C1,1} u_{10-}\} E_0 \exp\{i(\Omega + \omega_m)t\} \\ &\quad + iJ_{-1} \{r_{C0,-1} u_{00-} +, r_{C1,-1} u_{10-}\} E_0 \exp\{i(\Omega - \omega_m)t\} \end{aligned} \quad (4.120)$$

ここで、下添え字 ",0" ",1" ",-1" はそれぞれ carrier, 上下 1 次の sideband を表す。また、通常のレーザー干渉計型重力波検出器では front mirror は flat またはほとんど flat であるから $\eta(z_F)$ の項は省略した。今後特に断りがない場合は front mirror は flat であると考えて $\eta(z_F)$ の光は無視する。

, は 式 (4.75) で定義した様な misalignment による高次モードの混合を表す parameter で

$$, = \gamma^F \alpha_F + \gamma^E \alpha_E \quad (4.121)$$

である。つまり, は misalignment に対して 1 次である。misaligned Fabry-Perot cavity からの反射光 E_r を受光面が一樣な photo detector で検出すると、 $u_{00-} \times u_{10-}^*$ の項に相当する部分は積分されてゼロになってしまう。すると、結局、, の 2 次の項つまり misalignment の 1 次の項が残らない。

果なので考えない。

⁷ $J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m)$ (n は正の整数)

⁸ ここでは cavity の固有モード $u_{\mu\nu}$ を用いて計算したが、元々の入射光のモード U_{ij} を用いても同様の結果になる。

そこで、

$$\int dx dy u_{00} u_{10}^* F(x, y) = \kappa \neq 0 \quad (4.122)$$

となるような形状因子 $F(x, y)$ を持つ photo detector を用いる。言い換えると、 TEM_{00} と TEM_{10} モードのビームは干渉の空間分布になるので、干渉の勾配を見る。このような干渉の勾配を見る装置を wavefront sensor という。具体的にどのような物を使うかについては次の節で紹介する。

つぎに、実際にどのような信号が得られるかを計算する。photo detector (wavefront sensor) の受光面における Gouy phase を η として、次の事がいえる。

$$\tilde{u}_{10} = \exp(-i\eta) u_{10} \quad (4.123)$$

$$\Rightarrow \arg(\tilde{u}_{10}) = \arg(u_{00}) \quad (4.124)$$

よって wavefront sensor からの信号は以下ようになる。

$$V_{\text{QPD}} = \kappa J_0 J_1 |E_0|^2 \text{Re} \{ e^{i\delta} ((r_{\text{C0}}^* r_{\text{C1},1}, e^{i\eta} + r_{\text{C1}}^* r_{\text{C0},1}, e^{-i\eta}) - (r_{\text{C0}} r_{\text{C1},-1}, e^{-i\eta} + r_{\text{C1}} r_{\text{C0},-1}, e^{i\eta})) \} \quad (4.125)$$

κ : photo detector の形状によって決まるファクター

δ は復調位相を表す⁹。

このとき、cavity に対して carrier の u_{00} モードが共振しているとする、carrier の高次モードや sideband はほとんどすべて共振点から cavity の line width に比べて十分遠いところにあると考えられる¹⁰。よって、以下の様に共振条件を入れると

$$r_{\text{anti}} = r_{\text{C0},n} = r_{\text{C1},n} = r_{\text{C1},0} \quad (n = 1, -1) \quad (4.126)$$

$$r_{\text{res}} = r_{\text{C0}} \quad (4.127)$$

wavefront sensor の出力は次のようにかかる。また、この時の復調位相は Quadrature phase である。

$$V_{\text{QPD}} = -2\kappa J_0 J_1 |E_0|^2 (r_{\text{res}} - r_{\text{anti}}) r_{\text{anti}} \text{Im}(e^{i\eta}) \quad (4.128)$$

以上より、misalignment によって励起される TEM_{10} モードの量、が1次で取り出すことができることがわかった。

4.6.2 wavefront sensor

photo detector の受光面上の2カ所の出力に対して差をとることで干渉の勾配を見ている。yaw の自由度を検出する時は上式の x, y は逆転する。

⁹ここでは、信号を電圧や電流でなく強度で表している。

¹⁰このことは一般的には成り立たないが、通常 Fabry-Perot cavity を設計するときには carrier が共振点にあるときは高次モードや sideband は共振点から十分遠いところにあるようにする。

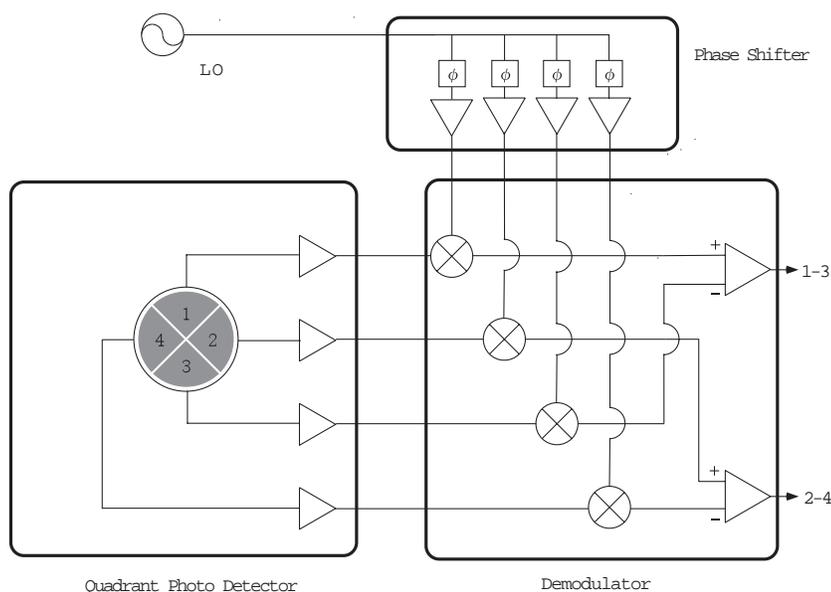


図 4.5: Wavefront sensor: 4 分割 photo detector(Quadrant Photo Detector)、demodulator、phase shifter の 3 つの部品から構成される。

また、 κ の値は理想的には次のようになる。

$$\kappa = \int dx dy U_{00} U_{10}^* F(x, y) \quad (4.129)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \quad (4.130)$$

4.6.3 misalignment の信号分離

実際に、Fabry-Perot cavity を制御するときは、front mirror, end mirror 両方を制御しなければ行けないので双方に関する制御信号を得る必要がある¹¹。よって、Fabry-Perot cavity の場合について front mirror の揺れに対する信号と end mirror の揺れに対する信号の分離について考える。

front mirror と end mirror で光軸の回転と平行移動について異なる変化を起こすということが、信号分離の原理となる。もう一つの原理は、Pound-Drever 法において位相変調を加えた光を用いているので位相変化に対して信号が得られるということである。sideband と carrier の光軸が異なる場合について考えてみる。まず、光軸が平行のとき、laser beam の断面を見た時のことを考える。carrier と sideband の周波数差は通常数 10 MHz なのに対して laser の発振周波数は数 100 THz と十分大きいので、断面上の一部分を見ると sideband から見て carrier は単に大きさが変化しているだけである(図 4.6.3)。よって、Pound-Drever 法による信号はどの部分でもとることは出来ない。

¹¹ただし、front mirror, end mirror に対して完全に分離された信号をとる必要はない。

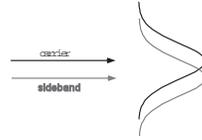


図 4.6: carrier の光軸が sideband に対して平行移動したとき。図の右側の曲線は断面でのレーザー光の電場分布を表す。

つぎに、光軸が平行でないとき。同様に、laser beam の断面を見ると、ある断面上の部分では sideband と carrier で位相が異なる (図 4.6.3)。よって、Pound-Drever 法による信号が得られる。

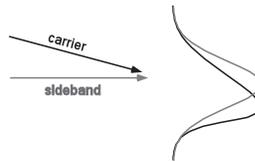


図 4.7: carrier の光軸が sideband に対して平行で無いとき。図の右側の線は断面でのレーザー光の電場の分布について位相を含めて表す。紙面内の水平方向を実軸で、紙面垂直方向を虚軸と考えている。

また、この信号の符号が断面上の領域によって異なっているので適当な加減算を行うことによって 0 でない信号が得られる。ここで、適当なレンズ系を用いて平行な光を曲げてやることで信号が出るようにしたり、平行でない光を曲げて信号が出ないようにしたり、といったことが出来る (図 4.6.3, 4.6.3)。つまり、misalign された Fabry-Perot cavity からの反射光を carrier には front mirror によって光軸が回転/平行移動された光と end mirror によって光軸が回転/平行移動された光が混ざっていると考えると、それぞれの光軸をレンズ系によって曲げてやることによって片方の光軸からの信号を見えなくすることによって信号分離がなされる。wavefront sensing による信号分離の基本アイデアはこのようになっているのだが実際に干渉計で用いる laser beam は平面光ではなく適当な広がりを持った Gaussian beam である。そのため、waist において波面での位相がそろっていた 2 本の平行光も waist 以外の場所において平面な detector で受けると detector 面では光の位相がそろわなくなる。よって、そのことを考慮に入れて計算する必要がある。つぎに、Gaussian beam で有ることを考慮に入れ、これまでの計算結果を用いて実際に計算する。

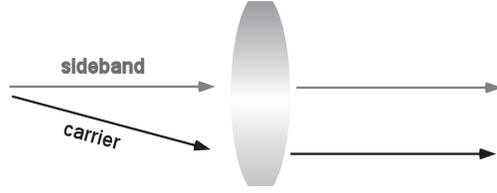


図 4.8: レンズによってお互いに平行な光軸を平行でなくする。

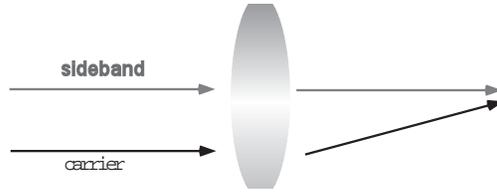


図 4.9: レンズによってお互いに平行でない光軸を平行にする。

光軸の回転/平行移動をモード展開によって表現する。モード展開したときに光軸の回転だと TEM_{10} モードに付く係数が虚数で、平行移動だと実数である。計算上、このことを利用して misalignment の信号分離を行っている。このことを具体的に計算する。

、を式 (4.75) で定義したように、 $\gamma = \gamma_F \alpha_F + \gamma_E \alpha_E$ とおく。すると式 (4.128) は次のようにかける¹²。

$$V_{\text{QPD}} = -2\kappa J_0 J_1 |E_0|^2 (r_{\text{res}} - r_{\text{anti}}) r_{\text{anti}} \text{Im}\{(\gamma_F \alpha_F + \gamma_E \alpha_E) e^{i\eta}\} \quad (4.131)$$

さて、式 (4.131) より、たとえば $\gamma_F e^{i\eta} = \text{実数}$ となるような Gouy phase を選んでやると、次のようにかける。

$$V_{\text{QPD}} = -2\kappa J_0 J_1 |E_0|^2 (r_{\text{res}} - r_{\text{anti}}) r_{\text{anti}} \text{Im}\{\gamma_E \alpha_E e^{i\eta_E}\} \quad (4.132)$$

ただし、 η_E は end mirror sensitive (front mirror insensitive) な Gouy phase を表す。これより、end mirror の傾き α_E に関する情報のみを取り出されることがわかる。

実際に cavity 等を制御するときにはこのような Gouy phase による信号分離を行う。しかしながら、Gouy phase の定義より $\eta(z)$ のみでは $-\pi/2$ から $\pi/2$ までしか変化しない。そこで、今考えている Gouy phase はレーザー光が空間を進む間の積算なので、適当なレンズ系を用いてレ-

¹² 簡単のため、 $\eta(L_F)$ の項は省略した

レーザー光を絞ったり広げたりすることによって wavefront sensor における Gouy phase を適当な値にする。こういったレンズ系のことを Gouy phase telescope と呼ぶ。

以上が WFS の原理であり、Fabry-Perot cavity の場合 front mirror と end mirror に対する信号の分離というのは、「片方の mirror に関する情報を消す」ことによって行われている。

4.6.4 Fabry-Perot cavity における WFS を用いた misalignment の検出限界

ここでは、shot noise によって決められる misalignment の検出限界について考える。まず、QPD を構成する1つの photo detector に流れる光電流 i_{DC} は photo detector の量子効率を考慮すると次のようにかける。

$$i_{DC} = \frac{1}{4} \frac{eg_{QPD}|E_r|^2}{h\nu} \quad (4.133)$$

ただし、 g_{QPD} は QPD の一面を構成する photo detector の量子効率である。

これより、QPD の2個の PD の出力の差、つまり WFS に用いる信号に含まれる shot noise を計算すると次のようにかける。

$$i_{shot} = \sqrt{2}\sqrt{2ei_{DC}} [A/\sqrt{Hz}] \quad (4.134)$$

$$= e\sqrt{g_{QPD}|E_r|^2/h\nu} \quad (4.135)$$

$$= e\sqrt{g_{QPD}|E_0|^2(|J_0r_{res}|^2 + 2|J_1r_{anti}|^2)/h\nu} \quad (4.136)$$

ただし、misalignment による、の2次以上の項は無視した。

また、signal は次のようにかける。

$$i_{signal} = \frac{eg_{QPD}}{h\nu} V_{QPD}[A] \quad (4.137)$$

$$= -\frac{eg_{QPD}}{h\nu} 2\kappa J_0 J_1 |E_0|^2 (r_{res} - r_{anti}) r_{anti} \text{Im}\{(\gamma_F \alpha_F + \gamma_E \alpha_E) e^{i\eta}\} \quad (4.138)$$

$$= -2\frac{eg_{QPD}}{h\nu} \kappa J_0 J_1 |E_0|^2 (r_{res} - r_{anti}) r_{anti} \text{Im}\{\gamma_i \alpha_i e^{i\eta}\} \quad (i = F, E) \quad (4.139)$$

よって、misalignment の検出限界 α_{mis_shot} は、

$$\alpha_{mis_shot} = i_{shot} / \frac{\partial i_{signal}}{\partial \alpha} \quad (4.140)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h\nu}{g_{QPD}|E_0|^2}} \frac{\sqrt{|J_0r_{res}|^2 + 2|J_1r_{anti}|^2}}{\kappa J_0 J_1 (r_{res} - r_{anti}) r_{anti} \text{Im}(\gamma_i e^{i\eta})} \quad (i = F, E) \quad (4.141)$$

より計算する事ができる。

4.7 TAMA300 parameter における試算

ここでは TAMA300 の parameter を代入して alignment 制御の要求値などについて計算する。ただし、mirror の反射率や損失は設計値である。

| 言葉 | 記号 | 数値 |
|-------------------|-------------------|-------------------------------|
| cavity 長 | L | 300[m] |
| front mirror 曲率半径 | R_F | ∞ |
| end mirror 曲率半径 | R_E | 450[m] |
| front mirror 反射率 | r_F^2 | 0.988 |
| end mirror 反射率 | r_E^2 | 0.9999 |
| mirror loss | A_{loss} | 50ppm |
| front mirror 透過率 | t_F^2 | $1 - r_E^2 - A_{\text{loss}}$ |
| BS 反射率 | r_{BS}^2 | $(1 - A_{\text{loss}})/2$ |
| BS 透過率 | t_{BS}^2 | $(1 - A_{\text{loss}})/2$ |

4.7.1 misalignment factor γ_F, γ_E の計算

つぎに、 γ_F, γ_E について計算する。

$$\gamma_F = \frac{R_F(L_E - R_E)}{w_0(R_F + R_E - D)} + i \frac{R_F}{\alpha_0(R_F + R_E - D)} \quad (4.142)$$

$$= -1.7697 \times 10^4 + i2.5027 \times 10^4 \quad (4.143)$$

$$\gamma_E = \frac{R_E(R_F - L_F)}{w_0(R_E + R_F - D)} + i \frac{R_E}{\alpha_0(R_E + R_F - D)} \quad (4.144)$$

$$= 5.3091 \times 10^4 \quad (4.145)$$

これらを用いて TAMA における alignment の計算を行う。

4.7.2 TAMA300 における misalignment の要求値

(4.5.3) 節で見たように misalignment によりコントラストは低下する。式 (4.109) より次のようなコントラストの値を要求値として出す。

$$\text{carrier コントラスト} : C_{\text{carrier}} = 0.99 \quad (4.146)$$

まずは共振・反共振の時の cavity 反射率について計算する。

$$r_{\text{res}} = -r_F + \frac{t_F^2 r_E}{1 - r_F r_E} \quad (4.147)$$

$$= \frac{-r_F + r_E(1 - A_{\text{loss}})}{1 - r_F r_E} \quad (4.148)$$

$$= 0.97532 \quad (4.149)$$

$$r_{\text{anti}} = -r_F + \frac{t_F^2 r_E}{1 + r_F r_E} \quad (4.150)$$

$$= -0.99997 \quad (4.151)$$

次に式 (4.113) を用いてコントラストの低下を計算する。ここでは common の misalignment はコントラストに効かないのだが実際には各 mirror が random に同じ量だけ揺れていると考えて、次

のような要求値が計算される。

$$\alpha_{\text{rms}} = 9.0 \times 10^{-7} \text{ [rad]} \quad (4.152)$$

4.7.3 Fabry-Perot cavity の信号の分離

これまでの計算結果より次のことが分かる。

$$\arg(\gamma_{\text{F}}) = \arg(-1.7697 \times 10^4 + i2.5027 \times 10^4) \quad (4.153)$$

$$= 2.1862 \quad (4.154)$$

$$\arg(\gamma_{\text{E}}) = \arg(5.3091 \times 10^4) \quad (4.155)$$

$$= 0 \quad (4.156)$$

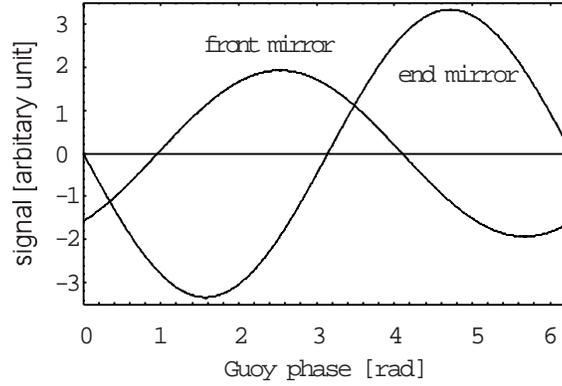


図 4.10: Fabry-Perot cavity における信号分離

式 (4.131) を用いて front mirror と end mirror に対する信号の感度を wavefront sensor における Gouy phase η の関数で書くとグラフ 4.10 の様になった。具体的には、

$$f(\eta) = \text{Im}(\gamma_{\text{F}}\alpha_{\text{F}}e^{i\eta}) \quad (4.157)$$

$$g(\eta) = \text{Im}(\gamma_{\text{E}}\alpha_{\text{E}}e^{i\eta}) \quad (4.158)$$

をプロットした。

以上より、信号を完全に分離する Gouy phase は以下ようになる。

$$\eta_{\text{F}} = \pi \times (\text{整数}) \quad (4.159)$$

$$\eta_{\text{E}} = 0.9553 + \pi \times (\text{整数}) \quad (4.160)$$

第5章 TAMA300

Fabry-Perot-Michelson 干渉計

5.1 TAMA サイト

5.1.1 全体図

TAMA300 は東京都三鷹市にある国立天文台内に建設されている。300m の両 arm cavity は国立天文台の敷地を使って arm が東西南北に設置されている (図 5.1 参照)。

5.1.2 地面振動

TAMA300 サイトにおいて地面振動は測定されている (5.2)。

$$\delta x = \delta y = \delta z \sim \begin{cases} 10^{-5} \text{m}/\sqrt{\text{Hz}} & (f < 0.1 \text{Hz}) \\ 10^{-7} \times \frac{1}{f^2} \text{m}/\sqrt{\text{Hz}} & (f \geq 0.1 \text{Hz}) \end{cases} \quad (5.1)$$

よりも 1-10Hz あたりですこし地面振動が大きいのが特徴である。

5.2 真空系

Mode matching telescope, beam splitter, pick-off plate, および 300 m Fabry-Perot cavity は全て1つの繋がった真空装置の中に設置されている。

真空度に関しては干渉計からの要求値として 10^{-4} Pa という値がある。干渉計からの要求値に対して 300 m の laser beam duct は 2×10^{-6} Pa 台の真空度が得られており、suspension 等の入った chamber でも 10^{-5} Pa の真空度が得られている。干渉計からの要求値よりも 1 桁から 2 桁良い真空度を得ているのは使用しているイオンポンプなどの寿命等からの要求である。

chamber に物を入れると真空度を悪化させるのだが、真空度については真空テスト用 chamber において真空試験が行われている [25]。

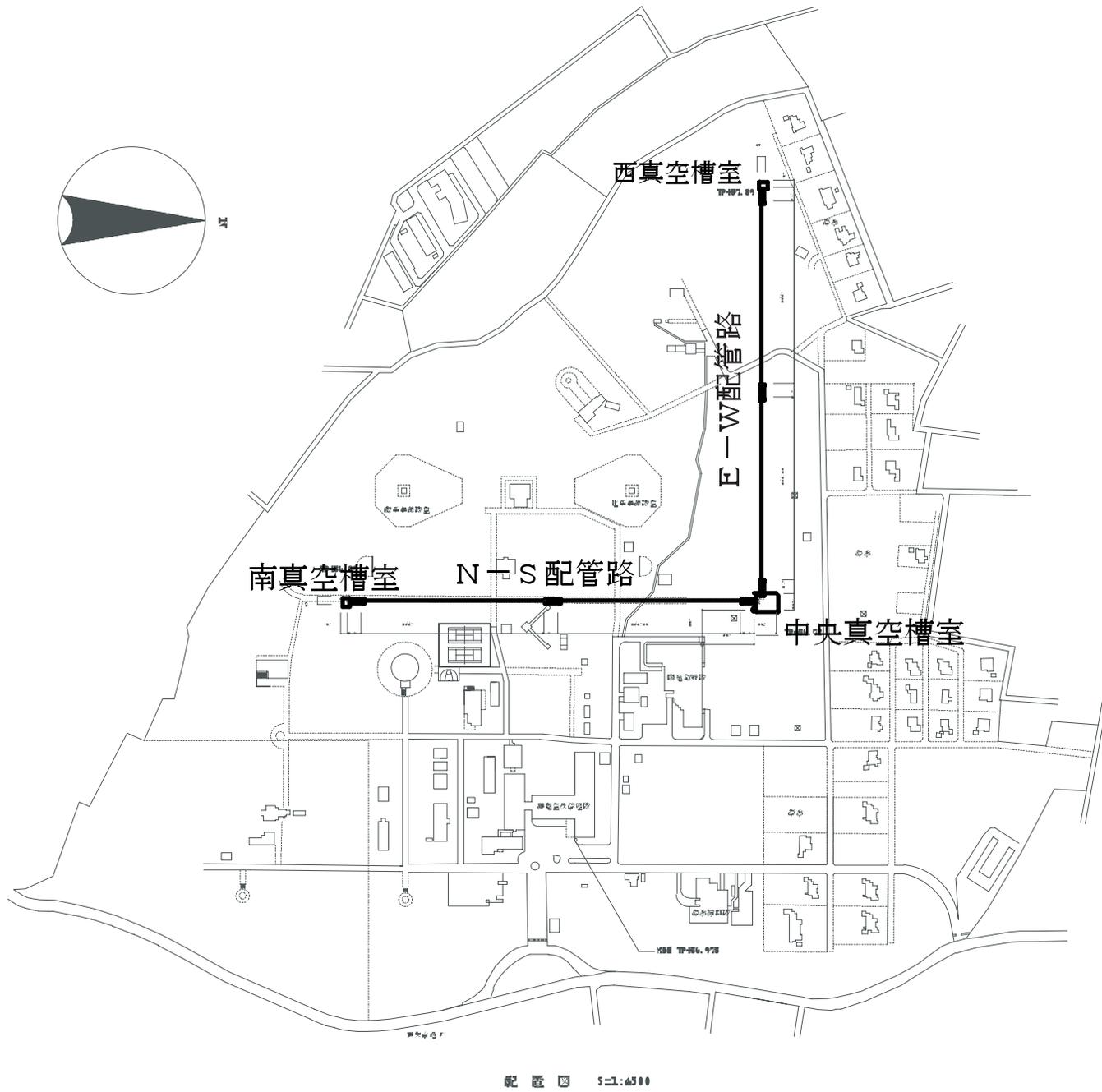


図 5.1: TAMA300 の全体図

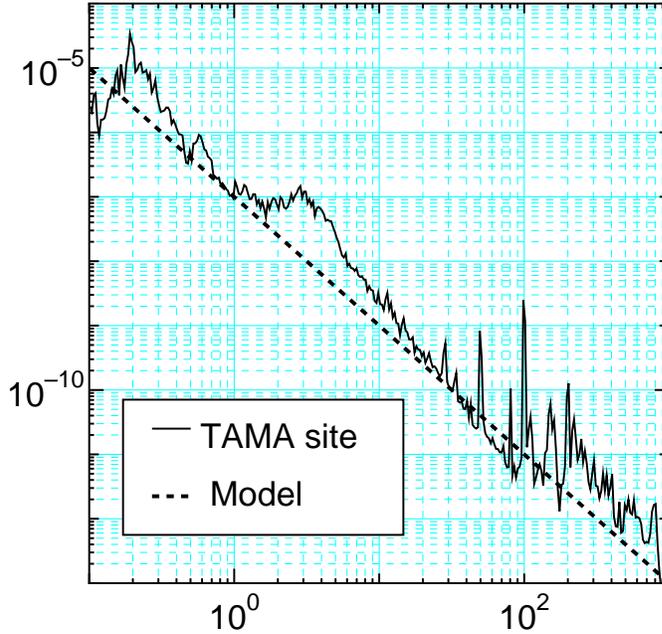


図 5.2: 国立天文台三鷹キャンパス (TAMA300 サイト) における地面振動の測定値。このデータは <http://t-munu.phys.s.u-tokyo.ac.jp/> より入手した。

5.3 Optics

Optics の parameter は設計値で以下のようにになっている [26]。それぞれの物は日本航空電子 (JAE) に制作を依頼したものである。

| 言葉 | 記号 | 数値 |
|------------------------|------------------------|----------|
| 共振器長 | L | 300m |
| Front Mirror の曲率半径 | R_F | ∞ |
| End Mirror の曲率半径 | R_E | 450m |
| Front Mirror の強度反射率 | r_F^2 | 98.8% |
| End Mirror の強度反射率 | r_E^2 | 99.99% |
| Pick-off Mirror の強度反射率 | r_{P1}^2, r_{P2}^2 | 0.7% |
| Beam Splitter の反射率 | r_{BSf}^2, r_{BSb}^2 | 50% |
| Beam Splitter の透過率 | t_{BSf}^2, t_{BSb}^2 | 50% |
| mirror の Loss | A_{loss} | 50ppm |

5.3.1 真空槽と光学定盤の配置

光学定盤は入射光学系用として 1 枚 ($1.2\text{m} \times 1.8\text{m}$)、出射光学系用は、各 pick-off mirror からの光を採る物が計 2 枚 ($1.2\text{m} \times 1.8\text{m}$)、anti-symmetric port 用が 1 枚 ($0.9\text{m} \times 0.75\text{m}$)、300m

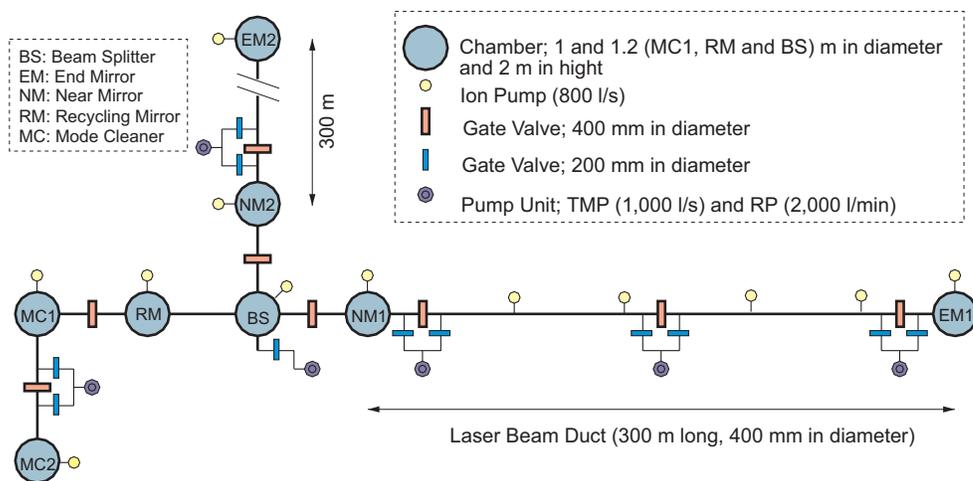


図 5.3: TAMA300 の真空系: 現在は MC1 と RM chamber との間は繋がっていない。RM chamber に mode-matching telescope が入っており、BS chamber に beam splitter および 2 枚の pick-off plate が入っている。front mirror および end mirror はそれぞれ NM chamber と EM chamber に入っている。

Fabry-Perot cavity の透過光用が 1 枚 (0.9m × 0.75m) ある。

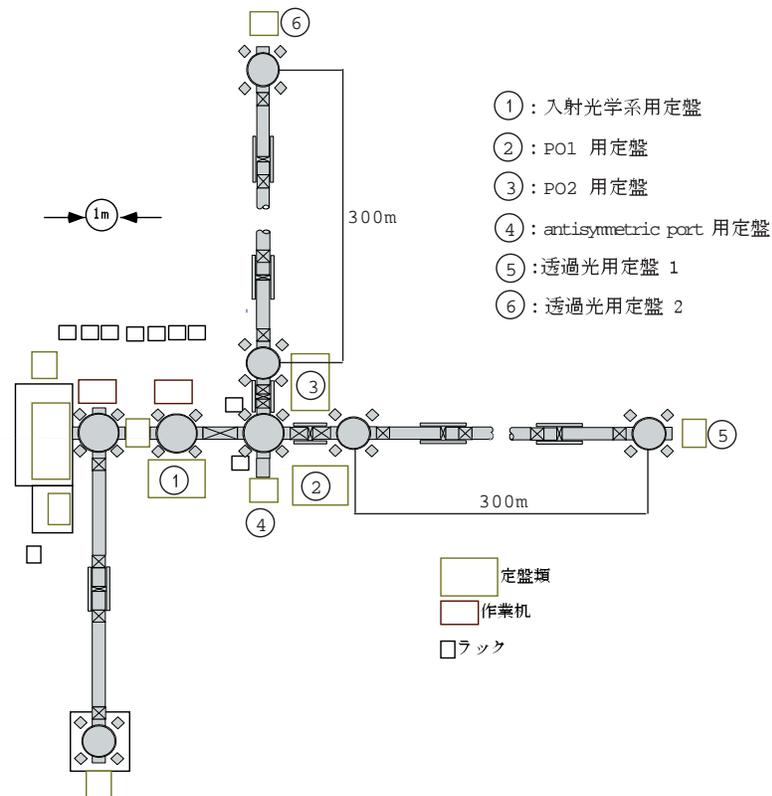


図 5.4: 真空槽と光学定盤のレイアウト。laser beam の入射は chamber に打ち込んでから一度 steering mirror で曲げて、300m の Inline arm cavity に入射する。左の 2 個の chamber と duct は 10m mode cleaner 用。

5.3.2 input optics

recombine1 では LIGHTWAVE 社の 700mW YAG laser を用いた。入射光学系をおいた定盤は図のようになっている。

特徴としては、recombineII 以降では modecleaner(MC) という光のモードを整形する装置 () を導入するのでそのときを想定して一度定盤上で MC と同じ beam profile を作っている。

入射光学系の Faraday Isolator より symmetric port の光を採っている。

700mW laser

光源となる laser は、LIGHTWAVE 社の model 126-1064-700 を用いている。このレーザーは波長 1064nm、TEM₀₀ mode で、約 700mW のパワーを出すことができる。

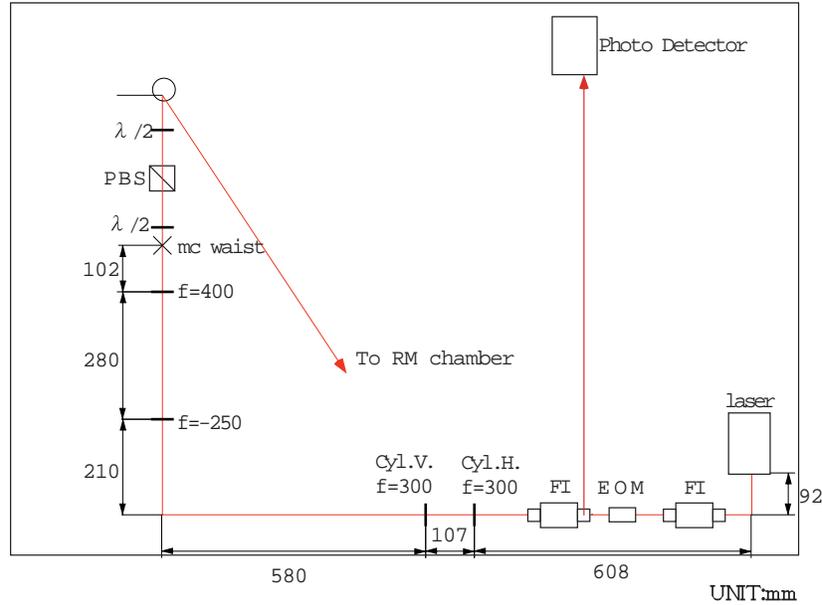


図 5.5: 入射光学系: FI:Faraday Isolator, EOM:Electro-Optic Modulator, Cyl:Cylindrical lens,

典型的な、周波数雑音は

$$\frac{10^4}{f} [\text{Hz}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (5.2)$$

で与えられる [27]。

Isolater

FPM 干渉計では、Fabry-Perot cavity に対して alignment のとれたレーザー光を入射するために干渉計から反射してきた光はそのままレーザー光源に戻ってくる。この戻り光はレーザーを壊す危険性があるので Farady-Isolator を入れる事によってレーザー光源に光が戻らないようにしている。

Faraday-Isolator は IO-7-YAG-HP (透過率:93%, isolation ratio: 33-40dB), IO-10-YAG-VHP (透過率:88-92%, isolation ratio: 30-38dB) を 2 段で用いている¹。

recombine1 では frontal modulation による制御を行う際、symmetric port の光を Faraday-Isolator の部分からとる。

EOM

Pound-Drever 法による信号取得を行うためには位相変調をかける。そのため EOM (Electro-Optic Modulator) を入れている。

¹透過率および isolation ratio はカタログ値。

EOM には New Focus 社製の共振型位相変調器 model-4003 を用いた。ここで、光路長制御およびアライメント制御に用いる 15.235 MHz の位相変調を加えている。

Adjustment of the laser profile

laser からできた beam はそのままだと楕円ビームである。よって、干渉計に入射するまえに 2 枚の cylindrical lens ($f=300\text{mm}$) を用いてビームが真円に近くなる様に整形してた。

ビームプロファイルから計算した最大結合強度は 99.6% となった。

Adjustment of the polarization

BS で光を分割するために S 偏光に合わせる。ここでは、はじめに PBS を用いて縦偏光の成分だけを取り出し、その直前に入れた $\lambda/2$ 板を回して PBS 後の power が最大になるように偏光を調整している。

MC 出射光への mode matching

TAMA300 の最終的な configuration では Mode Cleaner 出射光を Mode Matching Telescope によって arm cavity に対する mode matching を行う。

recombine1 では Mode Cleaner を使わないが Mode Matching Telescope は TAMA 仕様に作られた物を用いる。そのため、laser profile を一度 MC 出射光と同じにする。MC 出射光への Mode Matching は lens を入射定盤上に配置して行った。

arm cavity への mode matching

つぎに、Mode Matching Telescope を用いて arm cavity への mode matching を行った。TAMA300 の arm cavity は長さ 300m と長く、空気中を伝搬すると空気の揺らぎによって波面が著しく乱れるため beam profile を測定できる front mirror 周辺と end mirror 周辺しかない。そのため、beam profile 等の測定は行わず、空気中をレーザー光が end mirror tank 周辺までとばし、まずそこで、ビームが絞られるように粗調を行った。その後、真空ダクト中に光をいれて end mirror 周辺でさらにビームが絞られるようにした。

telescope は図 5.6 のような lens 構成にいる。telescope が揺れると beam jitter が生じ beam jitter は干渉計の雑音源となるため、telescope 全体が wire と spring で吊られて防振されている。防振については特に仕様はなくそのままおくよりも揺れが少ないという程度である [28]

5.3.3 mirrors, beam splitter, pick-off plate

各 mirror は JAE 社製である。

各 mirror の表面荒さは約 $\lambda/40$ 以下。

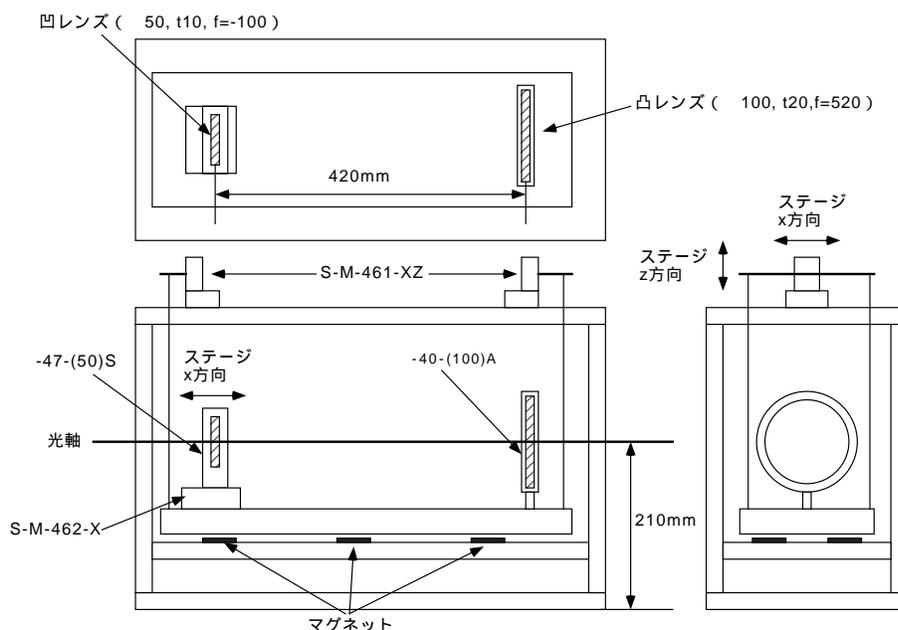


図 5.6: Mode Matching Telescope

arm cavity 用の mirror には P10 素材を用いている。p10 は光学特性が一様等方であるのが特徴である。

5.4 懸架・防振系

本実験で用いられた懸架システムは、TAMA300 で今後も使われる物と同じ物である。

5.4.1 スタック

mirror を懸架している suspension などはスタックの上に置かれている。

スタックは、ゴムをバネと見なしてバネとおもりの連成振動子系をくむのが基本的概念である。おもりとして SUS ブロックを用いて、SUS ブロックの間にゴムをサンドする構造になっている (図 5.7)。

TAMA300 で用いられているスタックについては 3 段構造になっており、300Hz で 90dB 以上の防振比がえられている [11]。

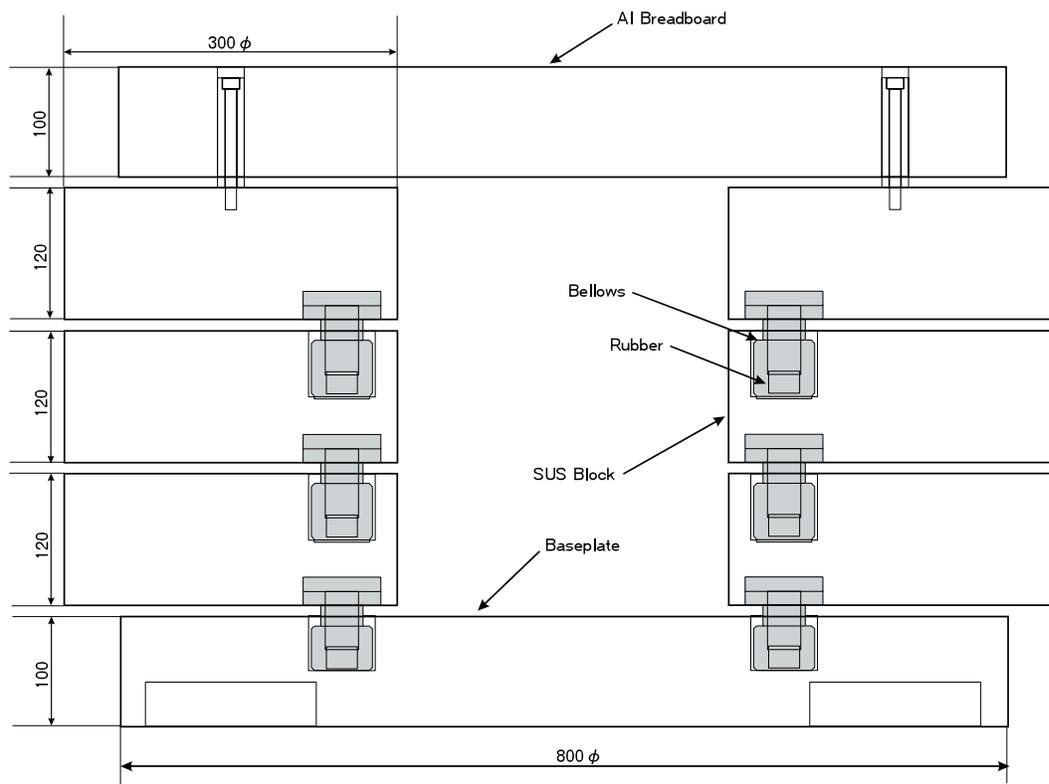


図 5.7: スタックによる防振系

5.4.2 suspension

arm cavity を構成する front mirror, end mirror や beam splitter, pick-off plate などは全て suspension に懸架されている²。suspension に懸架されているのは mirror (test mass) を空間中の自由質点と見なすためであり。それと同時に地面振動に対する防振の役割を果たす。

suspension の mirror mass を吊る部分は 2 段等長の振り子で構成されており、各振り子の長さは約 25cm である。wire の強度と、violin mode の共振によって mirror に余計なノイズが加わらないという要求から、中段マスは $100\mu\text{m}$ のタングステンワイヤーで懸架されており、mirror は $50\mu\text{m}$ のタングステンワイヤーを用いてワイヤー二本で懸架されている。

arm cavity 用の suspension のは図 5.8 の様になっている。

mirror には溝付きの stand-off ($\phi 2\text{mm} \times 4\text{mm}$) がつけられており溝にワイヤーをかける用になっている。これはワイヤーと mirror の側面との摩擦による loss を減らすして Q 値をよくする役割を持つ [29]。そのため、stand-off に掘られた溝の曲率はワイヤー径よりも小さく成っている。また、stand-off には mirror のドリフトを軽減する役割も持つ。

suspension は、picomotor を用いて懸架れた mirror の suspension point を動かすことが出来、mirror の x, y, z, pitch, yaw, の 5 つの自由度に動かすことが出来る。mirror の alignment の粗調などはこの picomotor を用いて行う。また pitch, yaw の自由度については picomotor の他に PZT 素子を用いて動かすことが出来る。ただし、PZT 素子は現在使われていない。

wire によって mirror を吊っただけでは共振によって mirror が大きく揺れてしまうので、揺れの振幅を小さくするために何らかの damping を施す必要がある。TAMA300 の suspension では、中段マスにおいて eddy-current を用いた damping を行っている。また、damping 用の magnet も magnetsupport に懸架されているため damping によって防振比が低下する影響を押さえている。

arm cavity 用の suspension に関する主な parameter は表 (5.1)(5.2) に列挙した。

| | |
|--------------|------------------|
| 中段マスの質量 | 1.2 kg |
| 下段マスの質量 | 1 kg |
| 上段の振り子長 | 0.26 m |
| 下段の振り子長 | 0.25 m |
| 上段マスの wire 径 | $100\mu\text{m}$ |
| 下段マスの wire 径 | $50\mu\text{m}$ |

表 5.1: suspension に関する parameter

5.4.3 stand-off

mirror には stand-off が取り付けられている。stand-off は直径約 2 mm、長さ約 4 mm である。

²TAMA group によって設計され NIKON 社に製作を依頼して作った、TAMA300 仕様の suspension を用いている。

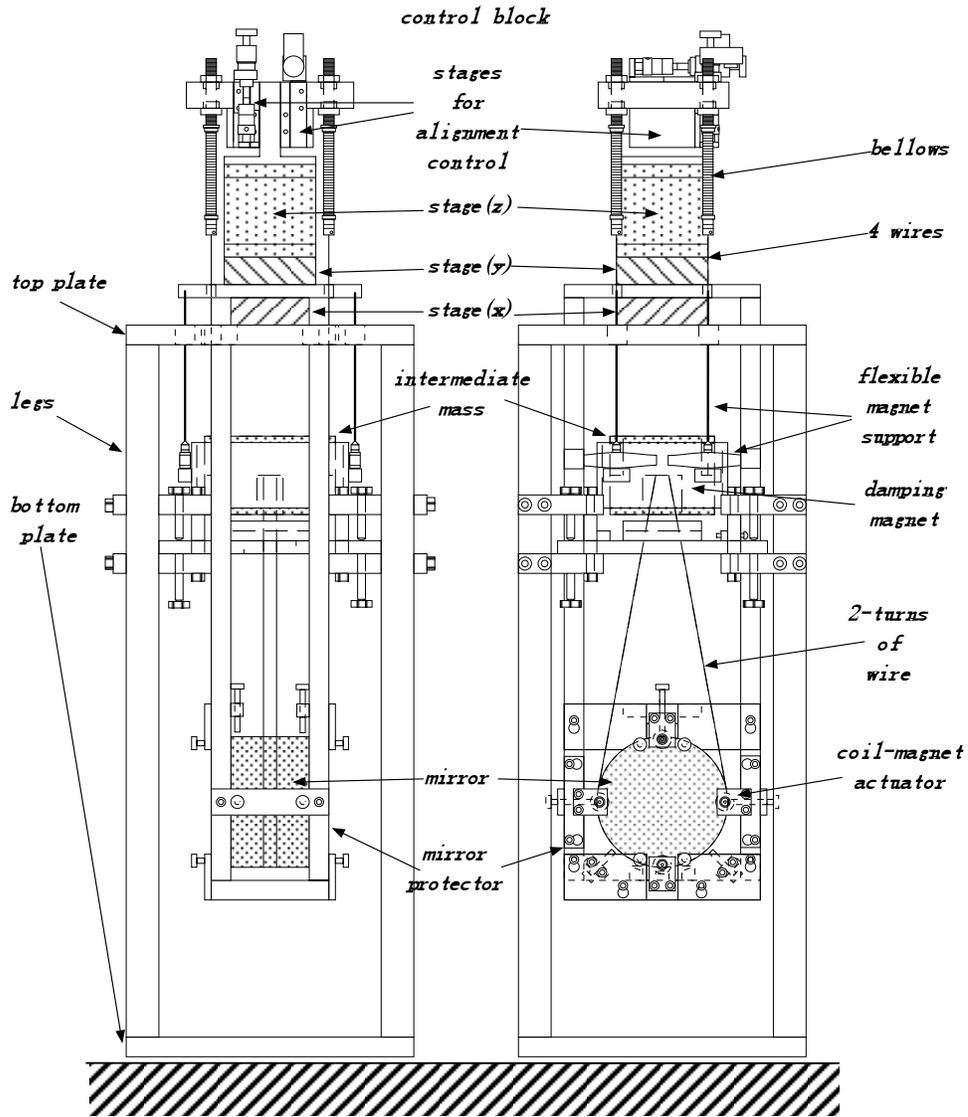


図 5.8: arm-cavity 用 suspension

| | |
|--------------------|----------------------|
| 光軸方向の共振周波数 | 1 Hz |
| 鉛直方向の共振周波数 | 5 Hz |
| pitch rotation | 5 Hz (first order) |
| yaw rotation | 1 Hz (first order) |
| violin mode の共振周波数 | 533 Hz (first order) |

表 5.2: suspension の主な共振周波数

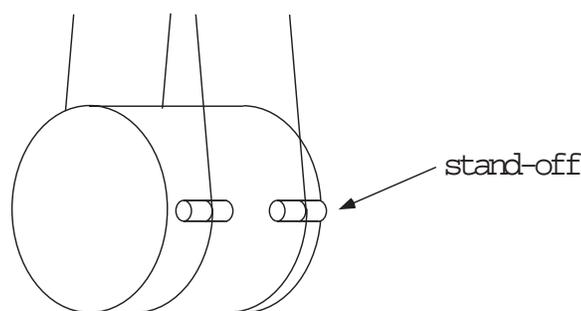


図 5.9: mirror への stand-off の接着。接着には vacseal を使用。

5.5 検出系

5.5.1 RF oscillator の分配

power divider は R&K 社製の物と自作のものを用いた。それ以外に distributor として日本通信機株式会社（日通機）製の物を用いた。

TAMA300 では 15.235 MHz の信号はシンセサイザー (Hewlett-Packard 社製:HP3324A) の出力を用いている。

15.235MHz の RF の信号は EOM と demodulator に分配する必要がある。

さらに demodulator は length 制御用と alignment 制御用があるので分配数が増えている。

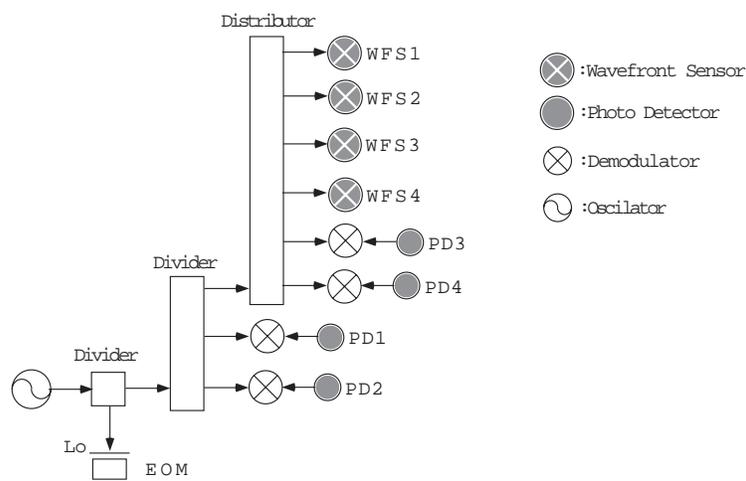


図 5.10: RF oscillator の分配。まず Power Divider で振幅を $1/\sqrt{2}$ にして、次の Power Divider で $1/4$ になり次の Distributor では RF 信号の振幅はそのまま 6 系統に分配される。ただし、この図には描かれていないが、2 つめの Power Divider は 1 系統は現在使われていないので $50\ \Omega$ でターミネイトしてある。

5.5.2 Photo detector

Clear Pulse 社製 TAMA300 仕様の photo detector[30] を用いた。
 photo diode には浜松フォトニクス社製の G3476-05 が用いられている。
 最大入力レンジは一台あたり約 100mW 程度。そのため TAMA300 では Beam Splitter を用いて光をいくつかに分けることによって多くの光を得るようにしている。
 量子効率については $\eta = 0.74[\text{W}/\text{A}]$ 以上という値が得られている。

5.5.3 Phase shifter

復調位相の調節のために demodulator に local 信号として入れる RF の正弦波の位相を動かしてやる必要がある。そのために Phase Shifter を用いる。
 length 制御用には minicircuit 社製の SPH-16 使った自作機をもちいた。

5.5.4 Demodulator

干渉計の lock acquisition のためには各 arm に入れられた pick off mirror から採った光を用いる。pick off mirror からの光を復調するには minicircuit 社の TUF-3LH を用いて作った自作器を用いた。

anti-symmetric port および symmetric port からえられる length の信号には日本通信機製 I&Q demodulator を用いた。

I&Q demodulator はある復調とそれに対して 90 度復調位相をずらした信号が両方常にえられる仕組みになっている。また、PLL を用いて local 信号をシンセサイザーからの入力に lock することによって I-phase, Q-phase と呼ばれる 90 度異なる復調位相の直交性について安定度の高い安定性がえられている³。

5.5.5 photo detector の noise 測定

clear pulse 社製の TAMA 仕様 Photo Detector、日通機製 I&Q demodulator を用いた時の検出系の暗電流 (I_{det}) とゲイン (g_{det}) について調べた。

測定には photo detector に光を入れたときの demodulator の雑音 [$\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$] は

$$V = g_{\text{det}} \sqrt{2e(i_{\text{DC}} + i_{\text{det}})} \quad (5.3)$$

とかける事を利用した。photo detector に入れる光の量を変化させてそのときの photo diode に流れる電流 i_{det} と demodulator の出力雑音 [$\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$] を plot して、(5.3) 式でフィッティングする事によって $i_{\text{det}}, g_{\text{det}}$ を得た。

³ PLL(phase locked loop) については [31, 32] 参照

| phase | $I_{\text{det}}[\text{A}]$ | $g_{\text{det}}[\Omega]$ |
|-------|----------------------------|--------------------------|
| Q | 1.64×10^{-2} | 2.07×10^3 |
| I | 8.774×10^{-3} | 2.32×10^3 |

表 5.3: clear pulse 社製の photo detector と日本通信機社製 I & Q demodulator の I_{det} および g_{det} 。

5.5.6 Wavefront Sensor

本節での測定結果等については [33] より引用。
概略図は 4.5 の様になっている。

quadrant photo detector

wave frontsensor では位相の波面における空間分布を見るので、TAMA では 4 分割 photo detector を用いる。

TAMA300 仕様 quadrant photo detector。photo diode には EG&G 社製の 4-element diode, YAG-444A-4 を使用している

phase shifter

TAMA300 仕様 phase shifter。

LO 入力に 15.25MHz 0dBm の信号を入力したとき、phase shifter からの出力信号の振幅変化は 1.5dB - 1dB 程度。

demodulator

TAMA300 仕様 demodulator。

wavefront sensor 用の quadrant photo detector を用いて暗電流を測定したところ回路の暗電流換算雑音は 5.6mA。これに対して仕様は、7.2mA に相当する散射雑音が見えることである。

5.5.7 Gouy phase telescope

Gouy phase telescope に関しては、理想的な waist の位置などから計算した設計して、それらを実際に配置した上でさらに信号がよくとれる位置に動かして信号が分離される位置に最終的にいた。lens の位置などは 図 5.11, 5.12 参照。

5.5.8 光学定盤

以上のような検出系は光学定盤上に配置してある。図 5.11, 5.12 の様に配置した光学定盤の位置については図 5.3.1 参照。

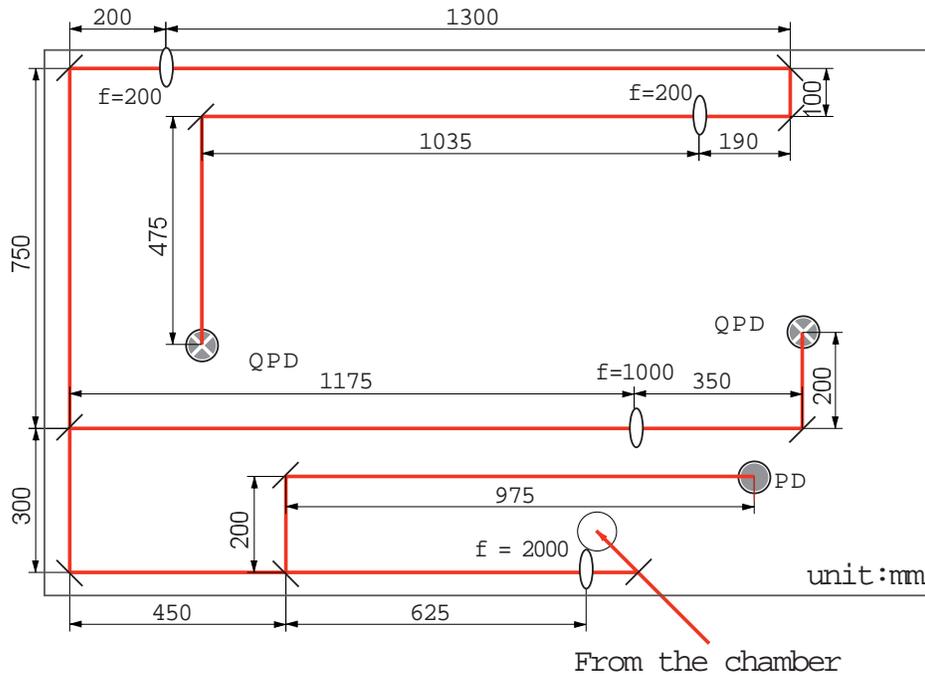


図 5.11: Inline arm 用検出系光学定盤

5.6 フィードバック系

5.6.1 Coil-Magnet actuator

吊られた mirror を制御するための actuator は magnet-coil actuator を用いている。magnet は mirror に対して mirror 1 つあたり 4 個の magnet が + または × で 貼られている (図 5.13, 5.14 参照)。BS が × で 貼られているのは入射レーザー光が透過するので、coil があまりじゃまにならないようにするためである。

実際に作成した magnet-coil actuator についてカップリングは実測値で 1 個あたり、0.135gw/A である。電線の巻き数は、カップリングに対する要求から 37 巻きと決定された [34]。用いる線材は住友電工のセラミック電線である。

コイルボビンの素材は真空度に対する要求からマコールを使う。

magnet-coil actuator に用いる magnet に関しては EM2, BS には $\phi 1\text{mm} \times 5\text{mm}$ の magnet が

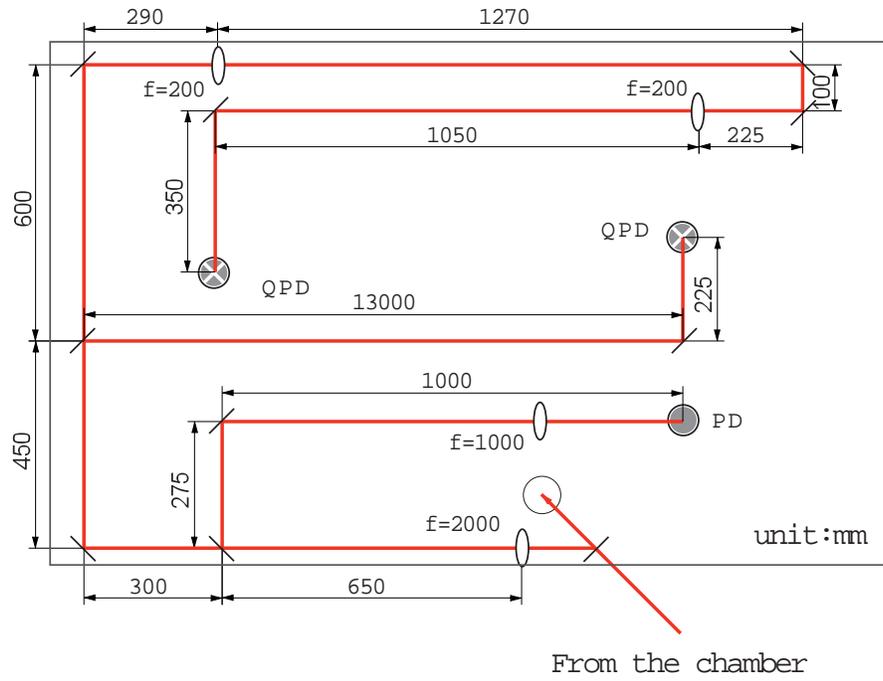


図 5.12: Perpendicular arm 用検出系光学定盤

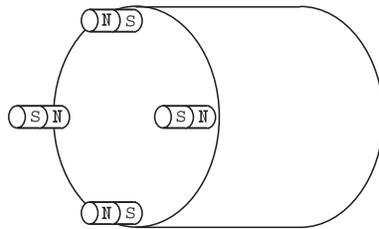


図 5.13: arm cavity 用 mirror への magnet の取り付け

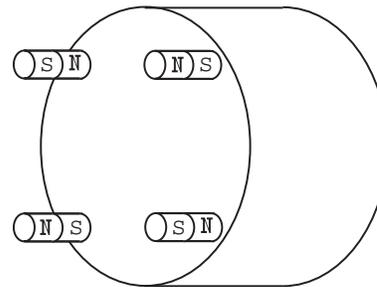


図 5.14: beam splitter への magnet の取り付け

貼られており、FM1,FM2,EM1 には $\phi 1\text{mm} \times 5\text{mm}$ の大きさの magnet が貼られている。

5.6.2 Coil-driver

magnet-coil actuator は coil に流す電流の多少によって加えられる力が変化する。通常、coil には 100 mA オーダーの比較的大きな電流を流す能力が必要になる。そのため大電流を流せる専用の coil-driver が必要になる。

TAMA300 仕様の coil-driver を用いた⁴。

coil-driver の入力電圧は定格 $\pm 5\text{V}$ で、 $\pm 100\text{mA}$ 流せるようになっている。

5.6.3 アナログ信号光伝送システム

TAMA300 では alignment 制御信号をはじめとするアナログ信号を中央真空槽室から End room まで伝送する必要がある。しかもこの信号は制御信号であるために低雑音であることが要求される。よって TAMA300 においては将来の km クラスの干渉計に向けての R&D の意味も含めて 16bit という高精度サンプリングで 11.6kHz サンプリング周波数のアナログ信号光伝送システムを開発した [35, 36]。このシステムは 4ch で双方向通信が可能である。また、アナログ信号光伝送システムは制御信号の伝達以外にも透過光強度のモニターや beam splitter の orientation control にも用いられている。

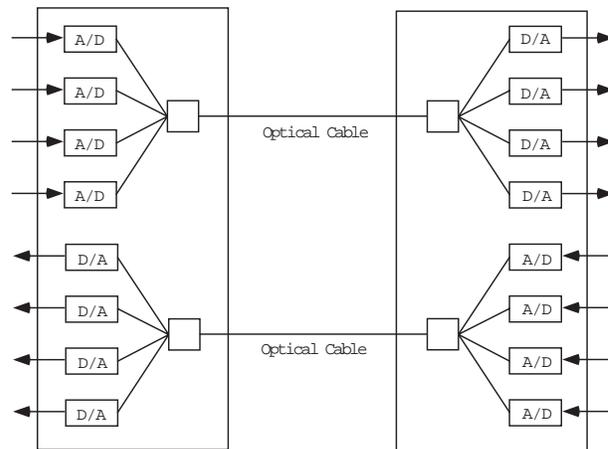


図 5.15: アナログ信号光伝送システムの概略図。4ch 分の信号を光変換ユニットで光に変換して、光ファイバーによって信号を D/A 側に送っている。

基本スペックをまとめると次のようになる。デジタル回路特有の量子化ノイズおよびトランジションノイズに関しては実測値では、典型的には次のようなスペクトルを持つ。ただしサンプリン

⁴設計は東大の河邊氏による物で制作は中城電機に依頼した。current-noise や read-out ノイズを考慮して低雑音仕様になっている。

| 言葉 | 数値 |
|-----------|----------|
| サンプリング周波数 | 11.6 kHz |
| ビット数 | 16 bit |
| ダイナミックレンジ | ±10[V] |

表 5.4: アナログ信号光伝送システムの基本性能

グ周波数を f_S [Hz] とおいた。

$$N(f) = 3 - 4 \frac{\sin(\pi f / f_S)}{\pi f / f_S} \mu\text{V} / \sqrt{\text{Hz}} \quad (5.4)$$

これはアナログ回路に比べると 2 ~ 3 桁大きいノイズであるので、干渉計の雑音にならないためにはノイズカットのためのフィルターをつけるなどの何らかの対策が必要になる。しかし、今回の実験では特に対策は施されていない。

アナログ信号光伝送システムの伝達関数は、

$$H(f) = e^{-i\pi f / f_S} \frac{\sin(\pi f / f_S)}{\pi f / f_S} \quad (5.5)$$

となる。我々が必要としているような DC-20Hz 程度の低周波ではほとんどフラットな特性であると考えられる。

5.7 モニター系

干渉計の状態のモニターのために CCD カメラを用いた。CCD カメラを用いるのは主に initial alignment と cavity に共振する光の確認用である。

TAMA300 では initial alignment 用に真空ダクト中の光軸にターゲットを入れることが出来る。そのターゲットに当たる光を CCD カメラで見てダクト中のどこを laser beam が通っているかを見る。

cavity に共振する光の確認には、mirror 表面での laser spot の形を見ることで高次モードか基本モードかの確認をおこなう。

5.8 Length Sensing and Control

frontal modulation を用いて各 arm cavity および Michelson 部分について制御信号を同相 (δL_+)、差動 (δL_- , δl_-) にわけて取得し制御を行う。そのため、同差法と呼ぶこの論文では呼ぶ。

5.8.1 configuration of the control

3.2.5 節にあるようにそれぞれ分離度のいい信号を各 mirror または laser にフィードバックする (図 5.16)

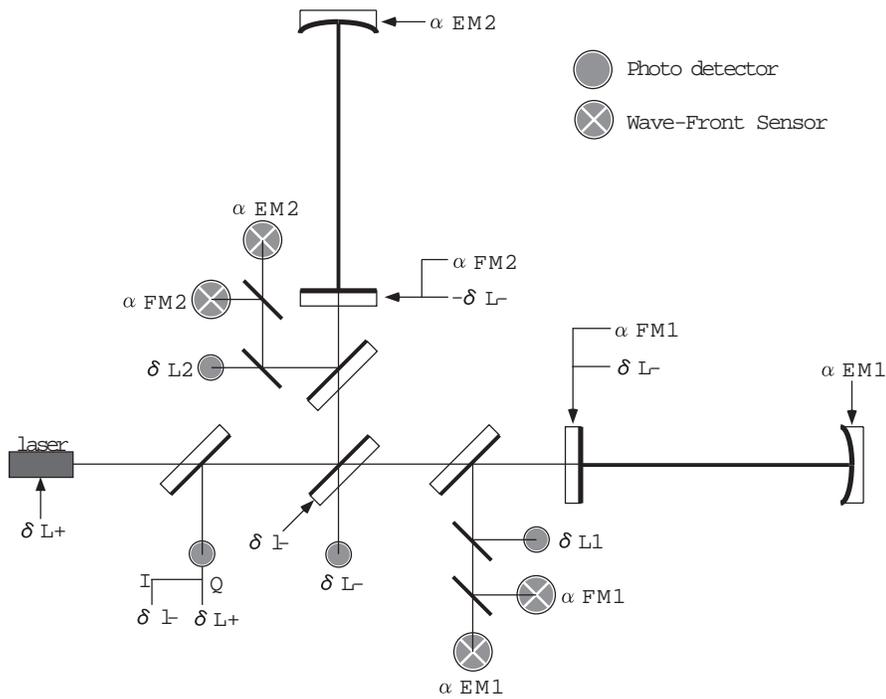


図 5.16: 同差法による制御の configuration。symmetric port, anti-symmetric port から δL_- , δL_+ , δL_- の信号を得る。各 pick off mirror から得ている $\delta L1$, $\delta L2$ という各 arm cavity の独立な変動信号は lock acquisition の時に用いる。

5.8.2 δL_- loop

anti-symmetric port の Quadrature phase より δL_- の信号を取得しそれを 2 枚の front mirror の coil-magnet actuator に差動でフィードバックする。制御帯域は DC から約 800 Hz である。

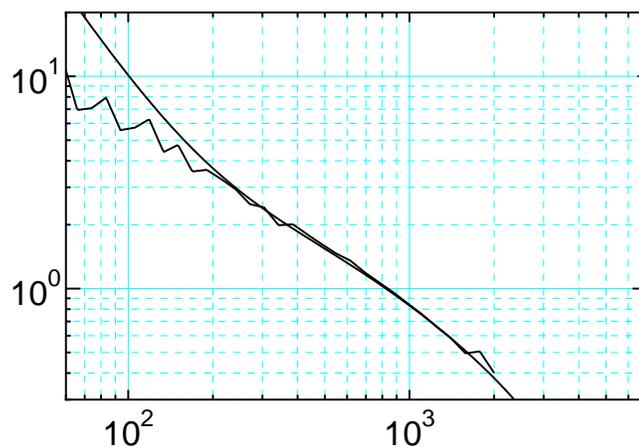


図 5.17: δL_- loop の open loop 伝達関数。なめらかな曲線は実測値を fitting したグラフ。

5.8.3 δl_- loop

symmetric port の Quadrature phase より δl_- の信号を取得しそれを BS の coil-magnet actuator にフィードバックする。制御帯域は DC から約 30 Hz である。

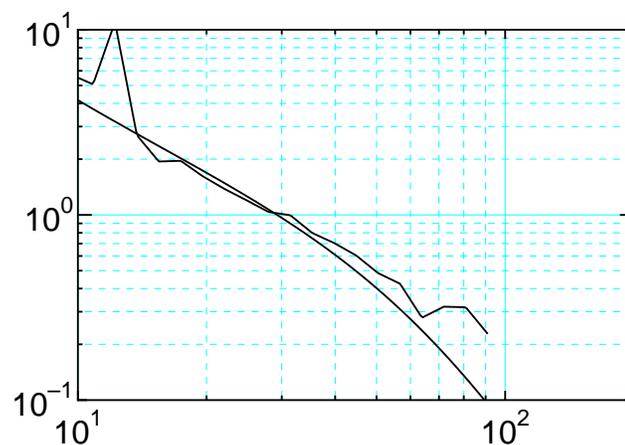


図 5.18: δl_- loop の open loop 伝達関数。なめらかな曲線は実測値を fitting したグラフ。

5.8.4 δL_+ loop

symmetric port の inphase より δL_+ の信号を取得しそれを laser 周波数にフィードバックする。制御帯域は DC から約 50kHz である。

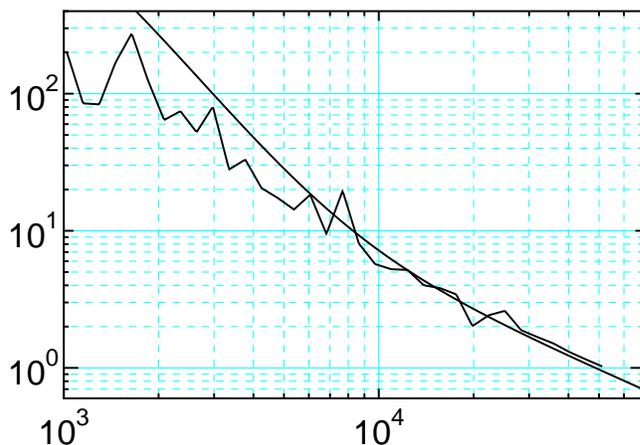


図 5.19: δL_+ loop の open loop 伝達関数。なめらかな曲線は実測値を fitting したグラフ。

5.9 Alignment Sensing and Control

5.9.1 Configuration of the control

alignment control については wavefront sensing を用いて misalignment を検出し、各 mirror へは coil-magnet actuator によって制御信号を feed back している。

図 5.16 に制御のブロックダイアグラムを示す。各 arm に入れられた Fabry-Perot cavity の制御は BS と各 FM の間に入れられた pick off mirror から取り出した光を用いた。

FPM 干渉計の制御を行うのに Fabry-Perot cavity の制御しか行わないのは、各 Fabry-Perot cavity がそれぞれの cavity に対する入射光に alignment がとれていれば、結果的に BS 上でそれぞれの cavity からの反射光が元来た位置に戻ってくるからである。つまり BS の misalignment は Perpendicular arm 内の Fabry-Perot cavity が補う事によって吸収される。

wavefront sensing を用いて Fabry-Perot cavity の front mirror/ end mirror の信号分離は Gouy phase telescope によって行うのだが、その設計については 5.5.7 節に述べたように現物あわせで行っている。実際のレンズ系の配置については図 5.11, 5.12 参照。信号の分離比は 1:3 から 1:5 程度得られている。

5.9.2 wavefront sensing による制御 loop

各 mirror に関する alignment control の制御帯域は DC から 20 Hz 弱である。全ての自由度に関して同じ制御 filter を用いている。

第6章 TAMA300 Fabry-Perot-Michelson 干渉計の 制御

6.1 frontal modulation による FPM 干渉計の lock acquisition

frontal modulation による制御信号取得は光路長に関して干渉計が動作点にある状態。すなわち、 $\delta L_-, \delta L_+, \delta l_-$ が全て動作点にある時、1つの自由度が動作点からずれに対して制御信号がえられる。よって、干渉計が全く制御されてない状態から干渉計を動作点に持って行くには適切な手順を踏む必要がある。このように干渉計が全く動作していない状態から動作点に持っていくことを lock acquisition と呼ぶ。

本実験では lock acquisition には pick-off plate から得た光を用いた。各 pick-off plate から得られた $\delta L_1, \delta L_2$ の信号を電氣的に加減算して $\delta L_1 - \delta L_2, \delta L_1 + \delta L_2$ の信号を作る(ここで便宜上それぞれを $\delta \tilde{L}_-, \delta \tilde{L}_+$ と名付ける。)。ただし、 $\delta L_1, \delta L_2$ はそれぞれ別のところからとられるのでその大きさは異なる。そのため単純に加減算をただけでは、理想的な $\delta L_-, \delta L_+$ は得ることが出来ない。よって、電氣的に信号の大きさの調節を行った。調整は次のように行う。まず、 $\delta \tilde{L}_+$ を laser pzt に feed back する。この時両 arm cavity が交互に lock するがそのとき両方の arm cavity が同じくらいの頻度で lock するように調整する。微調整は干渉計全体が lock してから $\delta \tilde{L}_-$ に laser 周波数の雑音など δL_+ の影響が出来るだけ小さくなるようにする。

干渉計全体の lock は次のように行われる。両 arm cavity に光が共振している状態を作り、その状態で、 $\delta \tilde{L}_+$ のみを干渉計の laser PZT に feed back する。片腕が $\delta \tilde{L}_+$ を用いて lock した時点で lock した腕について ASC を ON にして片腕の lock を維持する。次に、 δL_- を干渉計に feed back してもう片腕が lock するのを待つ。この時 lock している方の cavity について ASC の servo を入れておかないと、もう片腕が δL_- によって lock する前に unlock してしまう。もう片腕が lock したらその時点で ASC の servo を入れる。次に symmetric port から得られる δl_- を用いて BS を lock する。この状態で、初めて正しい $\delta L_+, \delta L_-$ がそれぞれ symmetric port, anti-symmetric port より得られる。次に $\delta L_+, \delta L_-$ と $\delta \tilde{L}_+, \delta \tilde{L}_-$ を入れ替えるのだがそれには加算機を使って行った。 $\delta \tilde{L}_-$ を filter に入れる手前に加算機を入れておき本物の δL_- が出てきたらそこに加算して $\delta \tilde{L}_- + \delta L_-$ で制御する。次に $\delta \tilde{L}_-$ をぬいて干渉計を制御する。また、ここで $\delta \tilde{L}_-, \delta L_-$ で大きさが異なるがこれは干渉計に適当な信号を加えてその信号が $\delta \tilde{L}_-, \delta L_-$ それぞれでどれだけの大きさと符号出てくるかをあらかじめ調べて調節しておく。 δL_+ についても同様の手順によって切り替えを行う。Alignment control の on/off はおもに、片腕のロックをおちないように押さえるとい

う目的で行われ、とくにこの順番でなければいけないということはない

干渉計をロックすると図 6.1, 6.2, 6.3 のように cavity の透過光強度が上昇し anti-symmetric port が dark fringe に成る。

6.2 干渉計の長期運転

干渉計を制御することに成功し、次に干渉計の長期運転を目指した。最終的に約 5 時間干渉計を動作させることに成功した。この時の cavity の透過光強度および anti-symmetric port の光の強度は図??, 6.5, 6.6 の様になった。alignment 制御を全て落とすと干渉計全体が不安定になり数分しか lock が持たないことから、干渉計を安定に動作させるためには alignment control が非常に役立っていることがわかる。

しかし、alignment control を入れるとすぐに長時間ロックするわけではなく様々な理由で干渉計は unlock している。ここでは実験によりわかった unlock の理由とその対策について述べる。

6.2.1 制御の安定性

干渉計の感度を考慮すると δl_{-} および alignment 制御は干渉計の観測帯域で gain を十分落とすような設計にしなければいけない (appendix A, 7.3 節参照)。そのような場合 servo 系に対する余裕が厳しくなる。そのため δl_{-} や alignment の制御については、出来るだけ lock がしやすい物にした。

6.2.2 BS orientation control

本実験では Fabry-Perot-Michelson 干渉計の長期運転を目標としていたのだが、干渉計の unlock の原因として beam splitter の角度方向のドリフトが大きいことがわかった。本来 beam splitter の角度揺れやドリフトは perpendicular arm の cavity が alignment 制御によって追従する事によって吸収するが beam splitter のドリフトが数時間で 1×10^{-4} [rad] 程度 (300m で 3cm の beam の pointing の移動) と比較的大きい。そのため alignment 制御のダイナミックレンジを越えてしまう、または end mirror のアパチャーを越えてしまう等と言った理由により、干渉計が unlock してしまう。

そこで 300m Fabry-Perot cavity の透過光を使った BS orientation control (図 6.7 参照) によって BS の低周波でのドリフトを押さえることにした。

その結果、制御帯域は約 0.5 Hz 以下程度で BS のドリフトを押さえることができた。光てこの error signal のスペクトルは制御しているときとしていないときで図 6.2.2, 6.2.2 のようになった。

6.2.3 laser thermal の制御

本実験において当初、光路長の δL_{+} の信号は全て laser PZT に制御を返している。しかし、laser PZT への feed back 信号をモニターしていると 1-数時間で feed back 電圧が上限を越えてし

まうことがわかった。つまり laser 周波数または干渉計の光路長の同相変動成分のドリフトが非常に大きく PZT のみでは吸収しきれないことがわかった。

よって、長期運転のために低周波は laser thermal に制御を返すことにした。thermal actuator の効率はカタログによると 10^{-4} なので PZT にくらべて 1600 倍効率が大きい。また、 $10\text{k}\Omega$ の入力インピーダンスを持っているために feed back 用 filter に出力インピーダンスをつけることでゲイン調整を行った。

laser thermal へ feed back する制御回路は図 6.2.3 のような構成になっている。

これより PZT loop を 1 つの伝達関数と見ると thermal loop の伝達関数は

$$\frac{G_{\text{thermal}}}{1 + G_{\text{PZT}}} \quad (6.1)$$

となる。ただし $G_{\text{thermal}} = FtFpHfpmi$, $G_{rmPZT} = FpHfpmi$ 。

実際に thermal loop の伝達関数を測定してみたところ図 6.2.3 の様になった。

これより thermal loop の制御帯域が 0.015 Hz 以下であった¹。

6.2.4 その他

干渉計の unlock の原因にはそのほかにもいろいろとありその多くは干渉計の各部分がドリフトしていくことによりそのドリフトを押さえきることが出来ないまたはドリフトにより干渉計の状態が変わるという物である。よってこれらのドリフトを押さえることによってさらなる長時間ロックが可能であると考えられる。

6.3 alignment control による干渉計の性能の向上

alignment control によって干渉計の動作が安定になり、さらに、cavity が入射光軸に対して alignment のとれた状態になるためにコントラストや CMRR 等といった干渉計の基本的性能が改善される。ここではまず alignment control によって干渉計の性能が上昇する点についてまとめる。

6.3.1 cavity の共振の安定化

misalignment の揺らぎは、cavity 内で共振する光の量の揺らぎになる。また、cavity 内で共振する光の量は cavity の透過光の大きさの比例するので透過光の変動を見ることによって cavity 内で共振する光の量の変動を見ることが出来る。alignment control によって制御がかかると、常に入射光軸に対して cavity の alignment がとれている状況なので透過光強度は安定になる。

図 6.12 は片腕についてロックする様子である。まずはじめに光路長制御がロックして、次に front mirror, end mirror について pitch の自由度をロックしてさらに yaw の自由度をロックした。alignment control を全自由度をロックしたときに透過光強度が上昇し安定になっているのがわかる。つまり、mirror の角度揺れが押さえられ、しかも DC 的にも alignment が良くあった状態になっているということである。

¹ 15mHz 以下はスペアナが対応していない為に伝達関数をとることが出来なかった。

透過光強度の揺らぎに注目すると、alignment control が入っていない状態では 5Hz 1Hz で透過光強度が揺れているのがわかる。5Hz, 1Hz というのはそれぞれ suspension の pitch/yaw の共振周波数に対応している。10Hz の揺らぎは alignment がベストで合っている状態の周辺を 5 Hz で通過することによって 2 次の効果が 10 Hz に現れている物である。

6.3.2 CMRR の改善

まず CMRR の測定について。CMRR cavity 長の同相変動制分 δL_+ が symmetric port、anti-symmetric port の error signal (V_{SI}, V_{AQ}) それぞれに現れる大きさの比率である。cavity 長を同相に振るために laser PZT に適当な正弦波を加えて測定を行った。laser 周波数を振ったときに、 V_{SI}, V_{AQ} に現れる信号の大きさを $\delta V_{SI,L+}, \delta V_{AQ,L+}$ とおくと CMRR (ϵ_{CMRR}) は次のように書ける

$$\epsilon_{CMRR} = \frac{\frac{\partial L_+}{\partial V_{SI}} \delta V_{SI,L+}}{\frac{\partial L_-}{\partial V_{AQ}} \delta V_{SI,L+}} \quad (6.2)$$

alignment control のあるなしによる CMRR の変化について測定した。

まず alignment control があるときは CMRR は

$$\epsilon_{CMRR} = 80 \sim 90 (@1kHz) \quad (6.3)$$

つぎに alignment control を切った時であるが、全ての alignment control を切った状態では干渉計のロックの状態が不安定であったためはかることが出来なかった。そこで、alignment control を 1 自由度切った状態で測定した。

$$\epsilon_{CMRR} = 30 \text{ 前後 } (@1kHz) \quad (6.4)$$

であった。

6.3.3 コントラストの改善

alignment control がある時と無いときでのコントラストについて比較する。

コントラストは Michelson 部分が free の時の anti-symmetric port の光の強度の最大値と最小値をそれぞれ I_{\max}, I_{\min} として

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (6.5)$$

と定義される。ここでは free の時 (arm cavity は lock している) の antisymmetric port の光の強度について I_{\max} とし、Michelson 部分をロックしたときの光の強度を I_{\min} として計算した。

alignment control があるときと無いときでコントラストの平均値と揺らぎはそれぞれ表 ?? のようになった²。

²ここで alignment control を全て入れたときでも 4.5.3 節におけるコントラストの要求値よりも悪い値になっているが、99% という要求値は carrier に対するコントラストの要求値である。この測定では sideband の影響を見積もっていないのでこれだけではコントラストの要求を満たすかどうかはわからない。

| ASC ON/OFF | 平均値 | 標準偏差 |
|---------------|--------|-------|
| ASC 全自由度 ON | 97.34% | 0.14% |
| ASC 2 自由度 OFF | 94.61% | 3.74% |
| ASC 4 自由度 OFF | 88.93% | 8.57% |

表 6.1: alignment control の on/off 時のコントラストの平均値と標準偏差。

6.4 alignment control によるノイズの混入

alignment control によって干渉計の性能が良くなる一方で、制御によって鏡を揺らしていることで alignment の揺れが干渉計の光路長の揺れになって結果として干渉計の変位雑音³になる。ここではその影響について考える。

6.4.1 非対称性によるノイズの混入。

まず alignment 制御が干渉計の光路長 (length) のノイズになる経路について考える。それには、mirror への laser beam の centering のずれと coil-magnet actuator の非対称性による混入の 2 通りある (図 6.4.1, 6.4.1 参照)。laser beam が mirror の中心に当たっていると mirror の角度揺れによる光路長の変化は回転の角度の 2 次効果にしかならないが、中心からずれていると 1 次で光路長が変化してしまう。つぎに、coil-magnet actuator の coupling に非対称性があると mirror を角度揺れを加えたときに並進方向に mirror が揺れてしまう。

6.4.2 coil-magnet actuator の calibration

ここで、mirror を並進方向 (length) および pitch/yaw に動かすためには coil-magnet actuator を用いているのだが、具体的に coil-magnet actuator にどれだけの電圧 [V] を加えると鏡がどれだけ並進方向に動くか [m] はわからないので、測定した。これらの calibration を行うことで干渉計の変位雑音と alignment 制御による干渉計の変位雑音を知ることが出来る。

まずは、coil-magnet actuator で mirror を並進方向に動かしたときの calibration を行った。

FMI, FM2, BS についての、coil-magnet actuator の calibration のために、これらの鏡で Michelson 干渉計を作った (FMMI: Front Mirror Michelson Interferometer)。FMMI を構成したとき、symmetric port と anti-symmetric port の光量を I_S, I_A とそれぞれおくと次のようになる。ただし δl_- は l_1, l_2 を光の波長でわったあまりである。

$$I_S = I_0 \sin^2 \left(2\pi \frac{\delta l_-}{\lambda} \right) \quad (6.6)$$

$$I_A = I_0 \cos^2 \left(2\pi \frac{\delta l_-}{\lambda} \right) \quad (6.7)$$

実験においてはこれらの値は photo detector からの出力 (V_A, V_S [V]) で得られるので、それらの

³変位雑音については 6.4.4 節参照

バランスを電氣的にとって引き算をすると次のような信号が得られる。

$$V_{\text{DC}} = V_A - V_S \quad (6.8)$$

$$= V_0 \cos \left(4\pi \frac{\delta l_-}{\lambda} \right) \quad (6.9)$$

となる。ここで、 $V_{\text{DC}} = 0$ となる周辺で考えると、 $\delta l_- \rightarrow \lambda/8 + \delta l_-$ として、

$$V_{\text{DC}} = V_0 \frac{4\pi}{\lambda} \delta l_- \quad (6.10)$$

となる。ここで、 V_{DC} を用いて FMMI を lock する。

FMMI をロックさせた状態で適当な正弦波信号 $v_{\text{sig}} ([V])$ を coil-magnet actuator に加えてやると V_{DC} に出てくる信号は次のように書ける。

$$V_{\text{DC}} = \frac{1}{|1 + G_{\text{DC}}|} A_{\text{pendulum}} \frac{\partial x_{\text{mirror}}}{\partial v} v_{\text{sig}} \quad (6.11)$$

と書ける。いま我々が得たい数値は $\frac{\partial x_{\text{mirror}}}{\partial v}$ [v/m] (calibration factor) である。ここで、 G_{DC} は FMMI ロックの open loop 伝達関数で、 A_{pendulum} は suspension に懸架された mirror に力を加えたときの mirror の動く量の伝達関数である。ここでは suspension の共振周波数 (約 1 Hz) よりも十分高い周波数で測定を行ったので、

$$A_{\text{pendulum}} = - \left(\frac{1\text{Hz}}{f\text{Hz}} \right)^2 \quad (6.12)$$

と考えた。(6.11) 式において $\frac{\partial x_{\text{mirror}}}{\partial v}$ をのぞく全てのパラメータは既知、もしくは独立して測定することが出来るので、 $\frac{\partial x_{\text{mirror}}}{\partial v}$ を得ることが出来る。FM1, FM2, BS についてこのような測定を行って coil-magnet actuator における calibration factor を得た。

EM1, EM2 についても Michelson 干渉計を用いて同様に calibration を行うことが出来るが、そのためには FM を取り除かなければいけないので、別の方法を用いることにした。原理的には perpendicular arm, inline arm それぞれ独立に制御し、FM, EM それぞれに正弦波信号を加えたときに pick-off mirror から採った光から得られる光路長の信号 $\delta L_1, \delta L_2$ にどれだけの信号が出てくるかを測定して、FM との比較から EM についての calibration factor を得る事が出来る。しかしながら、300 m Fabry-Perot cavity を用いて測定をする場合は少し事情が異なる。300 m と cavity が長いので周波数雑音の影響が大きくなる。よって、laser を cavity にロックするためには周波数安定化を行わなければロックできなかった ([37])。そのため Fabry-Perot cavity 片方だけで lock するには laser 周波数にも制御を返す必要が生じ、そのため制御帯域を広くとらなければいけない。すると、(6.11) 式の G_{DC} に相当する部分の値が大きくなり、error signal で

$$\frac{1}{|1 + G_{\text{cavity}}|} A_{\text{pendulum}} \frac{\partial x_{\text{mirror}}}{\partial v} v_{\text{sig}} \quad (6.13)$$

を読みとることが出来なくなる。そのため、片方の 300 m Fabry-Perot cavity を用いて周波数安定化を行い、もう片方の 300 m Fabry-Perot cavity を独立に制御して測定を行った。

以上の測定から表 6.4.2 の様な測定結果が得られた。

| 鏡 | calibration factor[m/V] |
|-----|-------------------------|
| FM1 | 9.5×10^{-11} |
| FM2 | 1.0×10^{-10} |
| EM1 | 8.7×10^{-11} |
| EM2 | 2.793×10^{-11} |
| BS | 4.8×10^{-11} |

表 6.2: coil-magnet actuator の calibration factor

次に、pitch/yaw の角度揺れを coil-magnet actuator に加えたときにどれだけ mirror が並進方向に動くかを測定した。測定法は EM の calibration をするときと全く同様である。300 m Fabry-Perot cavity の片方の cavity で周波数安定化を行ってもう片方を独立に mirror のみに制御を返し、lock した。この状態で coil-magnet actuator によって pitch/yaw に適当な正弦波信号を加えて、に error signal に出てくる信号の大きさを測定した。いま、FM の並進方向については calibration factor $(\frac{\partial x_{\text{mirror}}}{\partial v})_{\text{FM},x-x}$ がわかっているので、信号の大きさの比をとることによって、例えば FM の pitch に電圧を加えたときにどれだけ FM が並進方向に動くかという calibration factor $(\frac{\partial x_{\text{mirror}}}{\partial v})_{\text{FM},p-x}$ [V/m] が得られる同様にして全ての自由度に対して feed back 電圧から並進方向の calibration factor を得ることが出来た (表 6.3)。

FM に関しては FMMI を用いることによって pitch/yaw の feed back からどれだけ 並進方向に動くかを調べることが出来る。ほぼ同じ様な値が得られた。また、BS については FMMI を用いることによって pitch/yaw の feed back から並進に動く量がわかる。

ここでは、length に対する pitch/yaw の混入比という形で表 6.3

| 鏡 | 混入比 | | |
|-----|--------|-------|-------|
| | length | pitch | yaw |
| FM1 | 1 | 0.22 | 0.26 |
| EM1 | 1 | 0.18 | 0.002 |
| FM2 | 1 | 0.18 | 0.057 |
| EM2 | 1 | 0.057 | 0.067 |
| BS | 1 | 0.38 | 0.16 |

表 6.3: mirror に pitch/yaw の信号を加えたときにどれだけ mirror が length 方向に動くかという混入比。

6.4.3 error signal の calibration

次に干渉計の変位感度を調べるために error signal($V_{\text{AQ}}, V_{\text{SI}}$) の calibration を行った。具体的には、cavity の光路長がどれだけ ([m]) 動くと error signal がどれだけ ([V]) 現れるかである。手順は以下の通りである。変位感度を得るためには V_{AQ} の calibration のみでよいが周波数雑音の影

響を見るために V_{SI} の calibration も行った。

いま、EMI の coil-magnet actuator に v_{sig} [V] の正弦波信号を加えた時を考える。この時、 V_{AQ} [V] に現れる信号は次のように書ける。

$$V_{AQ} = \frac{\partial v_{AQ}}{\partial \delta L_-} \frac{1}{|1 + G_{L_-}|} |H_{cav}| \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)_{EM1, x-x} v_{sig} \quad (6.14)$$

ここで、 G_{L_-} は L_- 制御の open loop 伝達関数、 H_{cav} は Fabry-Perot cavity の伝達関数である。いま、我々が得たいのは $\frac{\partial v_{AQ}}{\partial \delta L_-}$ [v/m] であるが (6.14) 式においてそれ以外の数値については全て既知であるから。この測定によって $\frac{\partial v_{AQ}}{\partial \delta L_-}$ [v/m] を得ることが出来る。同様にして、その他の calibration factor を得ることが出来る。

以上の様な測定をすることによって次のような calibration factor を得ることが出来た (図 6.4.3)

| 文字 | calibration factor |
|---|----------------------------|
| $\frac{\partial v_{AQ}}{\partial \delta L_-}$ | 1.5×10^{10} [V/m] |
| $\frac{\partial v_{SI}}{\partial \delta L_+}$ | 4.1×10^9 [V/m] |

表 6.4: 各制御信号の calibration factor

6.4.4 干渉計の変位雑音

レーザー干渉計型重力波検出器は重力波を検出するための物であり、その感度は重力波に対する感度ということになる。干渉計がどれだけの感度を持っているかというのは、信号と雑音の大きさが同じになるところ ($S/N = 1$) までは感度を持っていると考える。重力波の信号は δL_- について現れるので δL_- を見る部分の信号 V_{AQ} において δL_- 換算でどれだけのノイズが乗っているかを求める。

干渉計のが lock しているとき V_{AQ} スペクトル S_{AQ} [V/ $\sqrt{\text{Hz}}$] を次のようにして δL_- のノイズスペクトル D_{L_-} [m/ $\sqrt{\text{Hz}}$] に換算できる。

$$D_{L_-} = |1 + G_{L_-}| \frac{1}{|H_{cav}|} \left(\frac{\partial v_{AQ}}{\partial \delta L_-} \right)^{-1} S_{AQ} \text{ [m}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (6.15)$$

このようにしてもとめた干渉計の変位雑音は図 6.17 のようになった。

6.4.5 alignment 制御による noise

ここで、alignment 制御がどれだけ干渉計の noise に成っているかについて考える。

ただしこの時に注意しなければいけないことがある。mirror での length から alignment への coupling は mirror への miscentering と coil-magnet actuator において非対称な力が加わることの 2 通りあるのだが、miscentering による 混入は mirror が実際に揺れている量に比例して増えて、coil-magnet actuator による混入は mirror へ加えている角度揺れの feed back 量によって決

まっている。mirror への miscentering による混入を r_{C-MMC} 、coil-magnet actuator による混入を r_{C-CMA} とおく。mirror の実際の揺れを α 、coil-magnet actuator によって力を加えることによって揺れている量を

α_{CM} とすると、角度揺れから並進方向に漏れる量はつぎのようにかける。

$$r_{C-MMC}\alpha + r_{C-CMA}\alpha_{CM} \quad (6.16)$$

元々 mirror が揺れている量を α_0 とおくと並進方向に漏れる量は alignment 制御の帯域内では

$$r_{C-MMC} \frac{1}{G_{\text{angle}}} \alpha_0 - r_{C-MMC}\alpha_{\text{feed}} \quad (6.17)$$

とかけ、mirror への miscentering によるノイズは十分小さいと考えられる。一方 alignment 制御の帯域外では、元々の mirror の揺れは十分小さいと考えて、

$$(r_{C-MMC}\alpha + r_{C-CMA})\alpha_{\text{feed}} \quad (6.18)$$

となる。

上記の測定で測定されたのは $r_{C-MMC} + r_{C-CMA}$ である。現在干渉計の雑音として考えている帯域は数 100Hz ~ 数 kHz といった alignment 制御の帯域よりも十分高い領域なので、miscentering による混入と coil-magnet actuator による混入とを分離することは行わなかった。また coil-magnet actuator の calibration によって得られているのは $r_{C-MMC} + r_{C-CMA}$ である。

つぎに、FPM 干渉計をロックしたときに alignment 制御の feed back 電圧のスペクトル $S_{\text{asc}} [V/\sqrt{\text{Hz}}]$ が得られたときそれがどれだけの変位雑音 $D_{\text{asc}} [m/\sqrt{\text{Hz}}]$ になっているかについては次のようになる。

$$D_{\text{asc}} = \left(\frac{\partial x_M}{\partial v} \right)_{M, \text{rot}-x} A_{\text{rot}} (M = \text{FM1/EM1/FM2/EM2}, \text{rot} = \text{pitch/yaw}) \quad (6.19)$$

以上の測定から干渉計の変位雑音に対する alignment control の影響は図 6.18 のようになった。

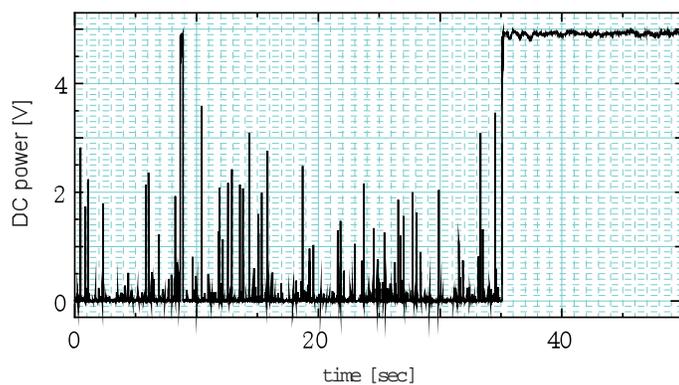


図 6.1: inline arm cavity の透過光強度。DC power は photo detector の出力。

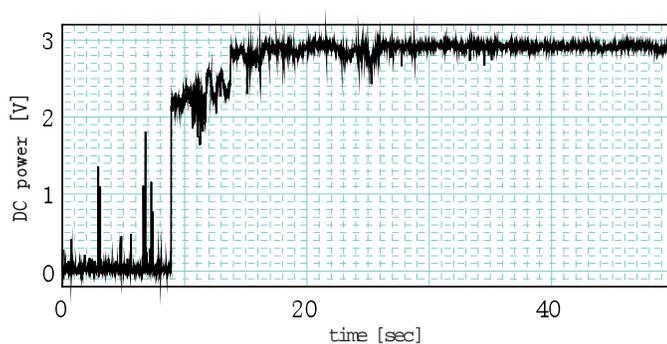


図 6.2: perpendicular arm cavity の透過光強度。DC power は photo detector の出力。inline arm と値が異なるのは perpendicular arm の透過光側には BS control 用に光をわけたりして configuration が異なるためである。

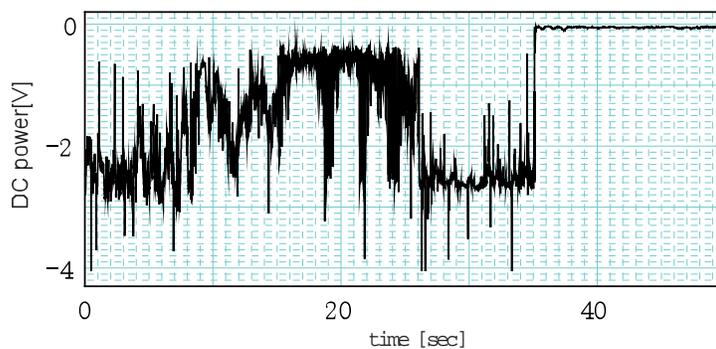


図 6.3: anti-symmetric port の強度。DC power は photo detector の出力そのまま。ただし、0 [V] が入射 power 最小である。

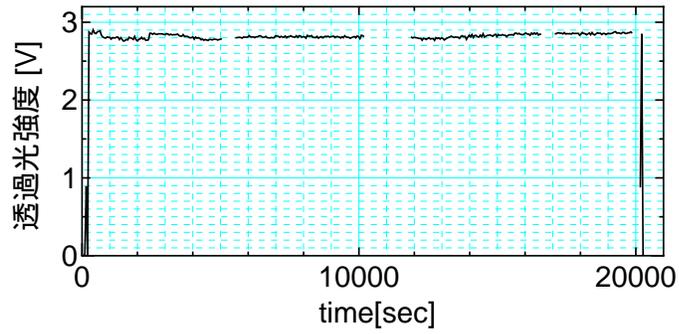


図 6.4: perpendicular arm cavity の透過光強度。ただし、photo detector の出力の生データである。途中で data が切れているのはデータロガーの save をしているためである。

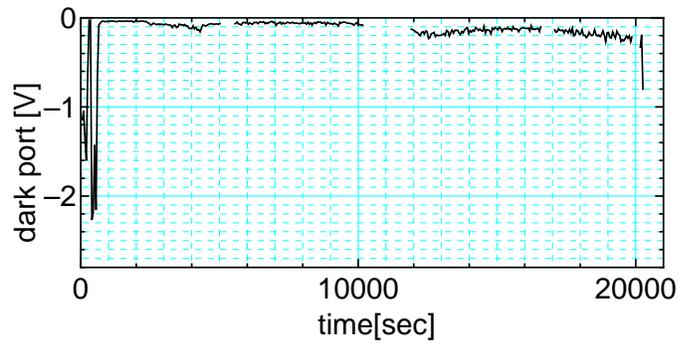


図 6.5: inline arm cavity の透過光強度。

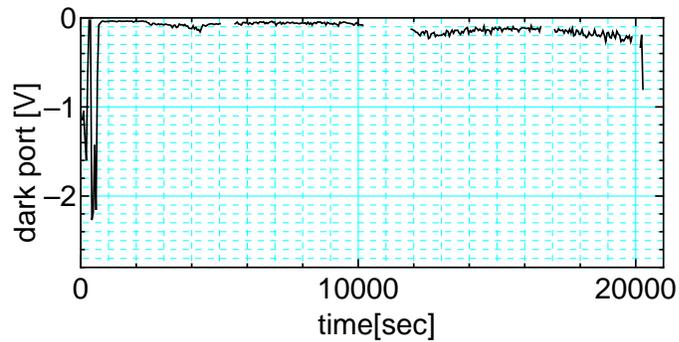


図 6.6: anti-symmetric port (dark port) の光の強度

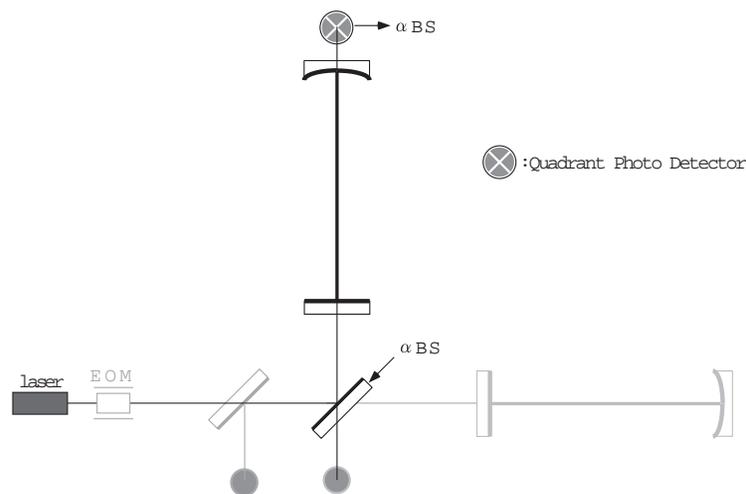


図 6.7: 光てこによる BS の orientation control。end mirror 側から、beam splitter 側への信号の伝達はアナログ信号光伝送システムを用いる。

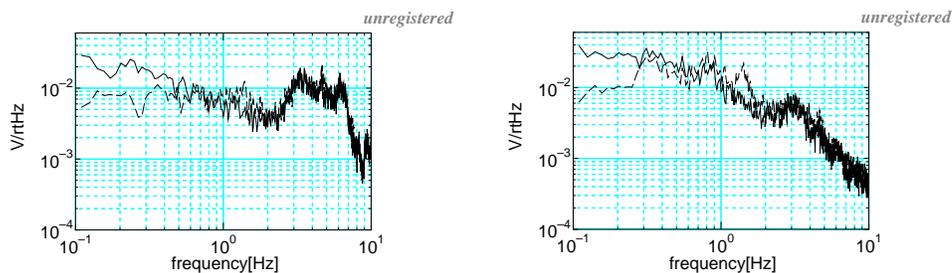


図 6.8: BS pitch orientation control:実線が 図 6.9: BS yaw orientation control:実線・点線
制御のあるときで点線が制御の無いとき 線の定義については pitch と同様。

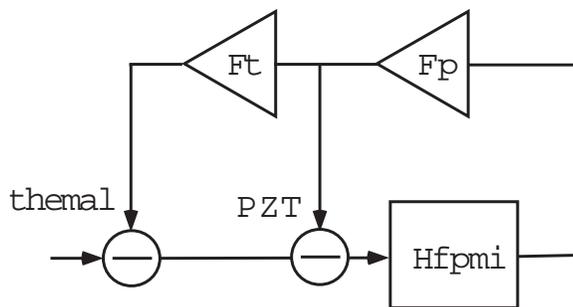


図 6.10: thermal loop の configuration。Hfpmi は FPM 干渉計の δL_+ loop の伝達関数。Fp, Ft はそれぞれ PZT loop と thermal loop の servo filter の伝達関数。

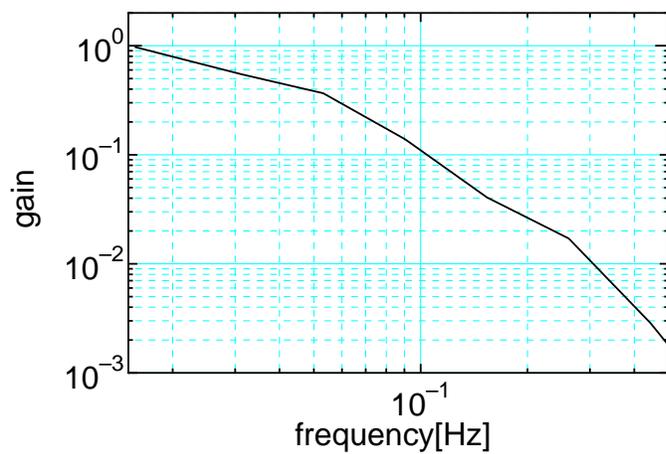


図 6.11: thermal loop の伝達関数

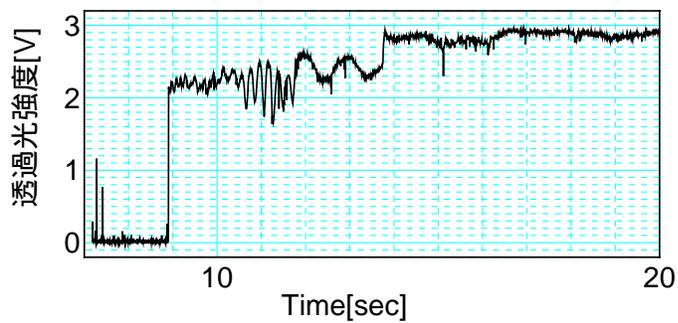


図 6.12: alignment control による透過光の上昇。透過光強度は photo detector の出力 [V] の生データのままである。

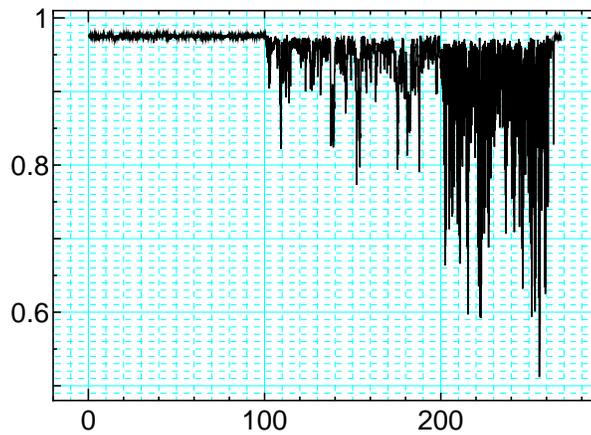


図 6.13: 全自由度 alignment control ON/OFF の時のコントラストの変動。縦軸がコントラスト。横軸は時間 [sec]。100sec で alignment control を 2 自由度 (FM2, EM2 の pitch) 制御を off にした。さらに 200sec で 2 自由度 (FM1, EM1 の pitch) の制御を off にした。

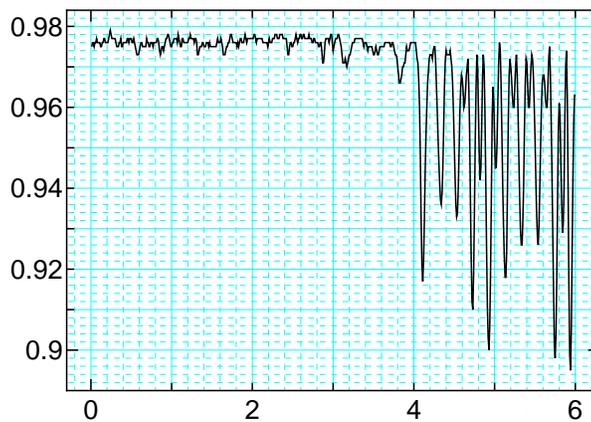


図 6.14: alignment control を off にした直後の拡大図。alignment control が無いと pitch の 5 Hz の共振がよく見られる。

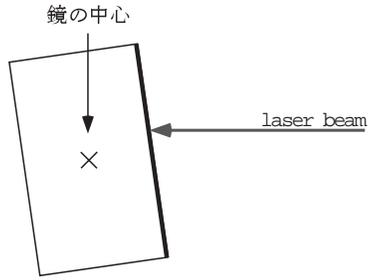


図 6.15: miscentering による混入

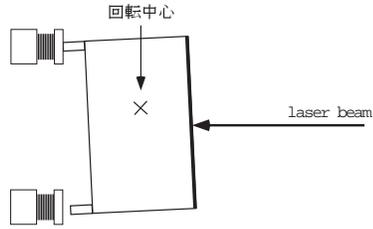


図 6.16: coil-magnet actuator の非対称性による混入

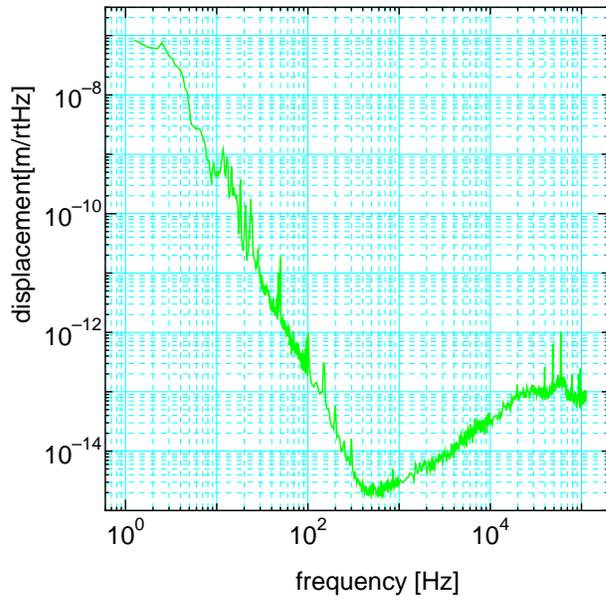


図 6.17: 干渉計の変位雑音。

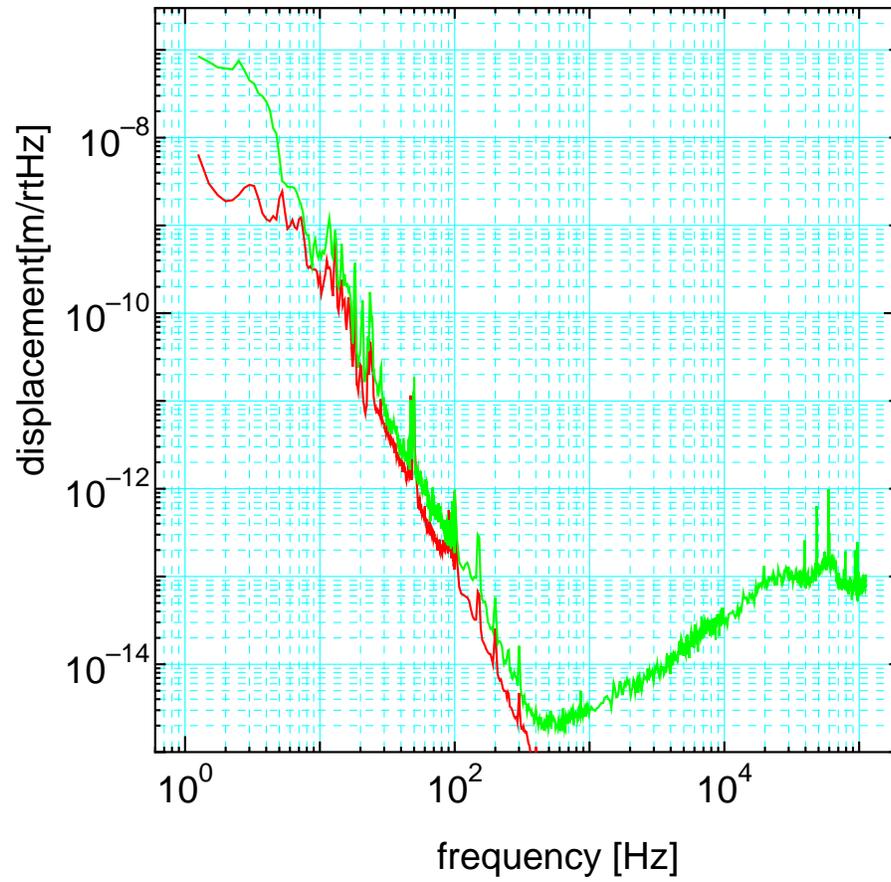


図 6.18: 干渉計の変位雑音に対する alignment 制御の混入。alignment 制御 8 自由度分の影響に関して 2 乗平均を取った。

第7章 結論

7.1 実験結果

今回の TAMA300 300 m Fabry-Perot-Michelson 干渉計における光路長およびアライメント制御実験により次のようなことがわかった。

- 300 m Fabry-Perot-Michelson 干渉計において mirror を吊った状態で、wavefront sensing を用いてアライメントおよび光路長、全自由度制御することに成功した。
- 必要最小限の制御以外にも様々な物がドリフトしていくので長時間運転を行うためにはドリフトの制御は必要である。
- アライメント制御により干渉計の動作が非常に安定になり、ドリフト等を制御することによって 時間ロックが落ちずに干渉計を動作させることができた。
- アライメント制御によって干渉計のコントラスト、CMRR が改善する。
- 現段階においてアライメント制御によるノイズが干渉計の感度を決めてしまっている。

7.2 今後の課題

TAMA300 では次の段階として、これまで干渉計部分とは別に開発されてきた 10 W laser と 10 m mode cleaner を導入して。今度は干渉計の感度を上げるという作業を行う。

本実験においては将来干渉計の感度を上げなければいけないということを考慮に入れつつも、300 m Fabry-Perot 干渉計を安定に動作させるということを第 1 目標としてきたので、noise について明らかに無視している部分もある。

ここでは今後干渉計の感度を上げるために必要な課題について今回の実験に関わる物についてのみまとめる。

7.3 alignment 制御による変位雑音対策

本実験において、アライメント制御のおかげで干渉計のコントラストや CMRR が改善されさらに干渉計の動作が安定になったという効果が見られた。しかしながら、これらの改善点は rms での misalignment が小さくなることによる改善点である。misalignment のスペクトルに関してみると、alignment 制御の制御帯域以外では逆に alignment 制御によって鏡を振っていることに

なる。さらに、alignment と length の混合によって干渉計の感度としては alignment 制御によって逆に干渉計が揺らされてしまっている。

将来干渉計のノイズを下げる段階においては alignment によるノイズを下げる必要がある。それにはいくつかの方法がある。まず、1つは alignment から length への coupling を小さくすることである。

6.4 節で見たように alignmnet から length へ couple する経路はいくつかある。1つはレーザー光が mirror の中心に当たっていないために、mirror に角度揺れを加えたときに、角度揺れが光路長の変動になってしまうという物である。本実験において、レーザー光の mirror への centering はあまり正確に行われておらず、将来 centring を違わせることによって miscentering による coupling を軽減することは可能であると考えられる。もう1つは制御に用いている coil-magnet actuator の非対称性による物である。coil-actuator に非対称性があると鏡に角度揺れを加えたときでも鏡が並進方向に揺すられてしまう。coil-actuator の非対称性についても各 coil-driver の電圧から coil に流れる電流への変換効率を変えることによって調節することが可能である。

alignment から length への混入を防ぐためには coil-magnet による回転中心と laser beam の mirror に当たっている位置を相対的に合わせればよい訳ではない。なぜなら、laser beam の mirror への centering については熱雑音によって振り子の 角度揺れが励起される影響 mirror の中心から 1mm-0.5mm 以内に合わせなければいけない ([38] 参照) 事が知られている。このため、mirror における length と alignment の混入はビームの centring と coil-magnet actuator の非対称性の除去の両方をおこなわなければならない。

現在、角度揺れから並進揺れへの混入比は 0.2 を越えるような場所が多い (6.3 参照) それに対して、TAMA では混入比を 0.01 位まで押さえることを目標としている。よって、centering と actuator のバランスをとることで全体として 1/10 程度 alignment 制御によるノイズを落とすことが出来ると予想される。

次に alignment 制御によるノイズを小さくする方法としては alignmnet 制御のゲインが観測帯域で十分小さくなるようなサーボ系を作ることである。error signal 換算での電気雑音が v_n [V] だけある時 alignment control 1 系統あたり mirror の並進揺れは次のようにかかる。

$$\delta x_n = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)_{\text{mirror,pitch/yaw-x}} A_{\text{pitch/yaw}} F_{\text{ASC}} v_n \quad (7.1)$$

$\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)_{\text{mirror,pitch/yaw-x}}$ pitch/yaw に対する coil-magnet actuator に加える電圧から並進揺れへの混入を表す ([m/V])。 $A_{\text{pitch/yaw}}$ は pitch/yaw の actuator から実際の角度揺れへの伝達関数を表す。 F_{ASC} は alignment 制御用 servo filter の伝達関数を表す。現在 alignment 制御用 servo filter には特に雑音対策はされておらず、まだ、雑音対策をする余地が十分ある。ただ、mirror の角度揺れを十分に押さえるためには 20 Hz 程度の帯域が必要でありそれに対して干渉計の観測帯域が 150 - 450 Hz であるから 150Hz までに servo の gain を十分落とすことは困難である。おそらく 2 桁弱なら落とせると考えられる。

つぎに、error signal の電気雑音であるが、現在光源に 700 mW laser を用いているために demodulator からの output (wavefront sensing の error signal) は、shot noise ではなく detector noise に制限されている。これは detector に光を入れたときと全く光を入れないときの demodulator からの output 電圧が全く同じ noise floor を持っていることから確認される。

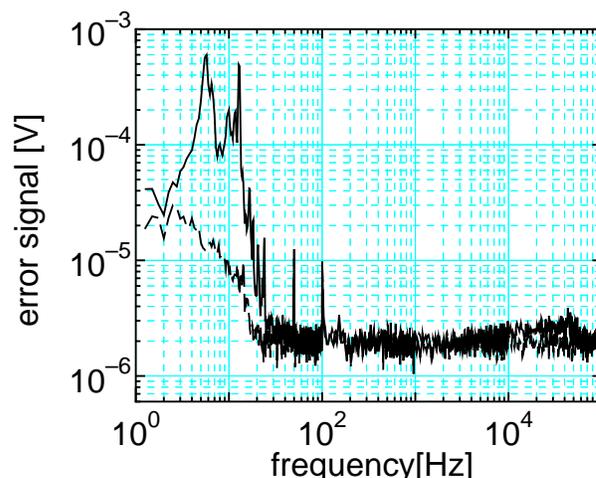


図 7.1: 実線：干渉計の運転時に wavefront sensor に光を入れたときの output (error signal) のスペクトル $[V/\sqrt{Hz}]$ 。破線：wavefront sensor に光を入れないときと入れたときのスペクトル $[V/\sqrt{Hz}]$ 。

将来 10 W laser が導入されればその分 wavefront sensor の signal が増える。実際に干渉計に入っている光が現在 300 mW 程度で、10 W laser が導入された時点で 3 W 程度と考えられているので信号は約 10 倍になる。ここで、光量が増えればその分ショットノイズも増えるのだがショットノイズの増加は光量の平方根で増大し、それに対して現段階においては detector の雑音で limit されているために $\sqrt{10}$ 倍以上は S/N で得をすることになる。

以上 3 種類のノイズの軽減が見込まれる。これら以外に alignment 制御から干渉計の変位雑音になる部分がないとすると alignment 制御による雑音は 3 ~ 4 桁程度は落とすことが出来る物と見込まれる。

TAMA300 において、これらの対策を施し、alignment 制御によるノイズを小さくすることが今後の課題の 1 つである。

7.3.1 wavefront sensor でのオフセット

wavefront sensor において wavefront sensor への centering による offset があることが次のように確認された。BS の orientation control のために cavity 透過光をモニターしているのだが、BS を free にした状態で wavefront sensor への centering を動かすと cavity 透過光の向きが異なった (図 7.2)。

これは cavity の光軸が変化することになる。原理的には wavefront sensor への centering に関わりなく wavefront sensing の error signal が取れるのでこれは何か余計な offset が加わっていることになる。

通常、光路長制御の error signal においても様々な原因から offset が加わる。wavefront sensor においても代表的な物で次の 3 つがある。1 つが RF 信号に電氣的ノイズが乗ってしまうこと。

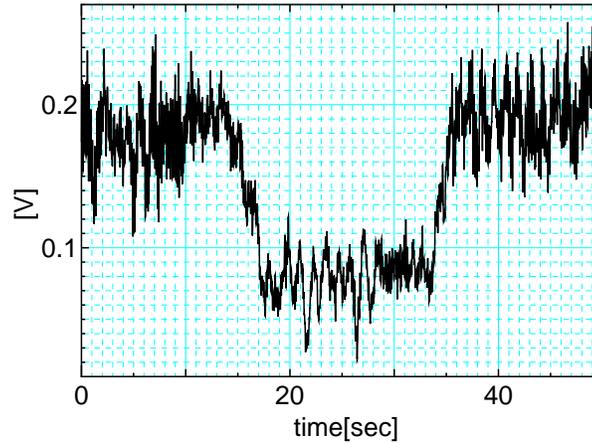


図 7.2: wavefront sensor への centering を動かしたときの透過光の光軸の変化。wavefront sensor への centering を動かすことによって cavity の alignment が変化する。WFS4 (FM2 sensitive な detector) の centering を pitch 方向に動かしたところ、透過光も pitch 方向に動いた。

もう 1 つが理想的な位相変調が出来ずに強度変調が混ざってしまい、復調信号に offset が乗ること。もう 1 つは wavefront sensor 特有だが carrier が cavity の共振の中心にロックしないために carrier の位相が sideband に対してずれてしまい offset が乗ることである。最後の原因は carrier は最終的には cavity の中心に lock するようにしなければいけないので carrier の lock を最適化することで解決される。前の 2 つは定常的な物ではないのでそれらに対して何か対策が必要である。強度変調は必ずいくらか混ざってくるので完全になくすることは出来ない。よって、wavefront sensor において、QPD の各 photo detector に入る光量に比例した量なので wavefront sensor への centering を常に合わせることで解決する。また、wavefront sensor への centering を合わせることによって carrier が共振点からずれることによる offset をうち消すことが出来る。RF の電気的な offset は透過光が最大になるように調節するしかない。しかし、光路長制御の offset も alignment 制御の offset も透過光強度が最大になるように合わせなければいけないのだが、透過光強度という 1 つの指標に対して複数の物を調節するのは原理的には不可能でなくても実際にはきわめて困難である。よって、はじめから offset があまり乗らないように wavefront sensor のすぐ近くで復調するなどの対策も必要と思われる。それでもやはり、最終的な段階では offset を合わせる必要があるには成る。

7.3.2 misalignment に対する定量的考察

今回の実験においては misalignment に関してじっさいに misalignment がどれだけあってそれによってコントラストや CMRR がどうなっているなどと言う、定量的な考察は全く行っていない。

今後干渉計の感度に関して考得ようになると何が干渉計の感度を limit しているかということ調査するためには、misalignment による定量的に考える必要がある。

7.3.3 coil-magnet actuator 関連

本文中でも述べたように、coil-driver における雑音電流による効果などを考慮すると現状において coil-magnet actuator の coupling が大きすぎるのがわかっている。これは、干渉計を lock に引き込むことが出来なかったために magnet を大きくしたためである。magnet を大きくしたことによって2つの noise が大きくなる。1つは coil driver での雑音が大きくなる事と magnet が大きくなるために mirror の Q 値が小さくなって結果として熱雑音が大きくなることである。

本実験において magnet を大きくして actuator の power を大きくしないといけなかった直接的原因は feed back 電圧が高い周波数 saturate するからである。このため、干渉計が lock しにくく、lock してもすぐに unlock してしまっていた。この高い周波数での saturate の原因の一つに laser の周波数雑音が大きすぎるためだという理由が考えられる。これは干渉計の周波数安定化 loop の gain をあげると mirror への feed back 電圧が小さくなったことで確認される。今後、MC とつなぐと MC によって周波数雑音が押さえられるために lock に引き込みやすくなると期待される。そうすると、magnet を小さくしたり、coil-magnet actuator の coupling を小さくしたりすることが出来るので coil driver の雑音や、mirror の Q 値の低下によって、現在問題になるであろうと予想されている noise は小さくすることが出来る。

また、coil-magnet actuator の coupling を小さくすると dynamic range が足りなくなるかもしれないという問題があるが、これは別の部分の actuator を使って dynamic range を稼ぐ予定である。しかしながら、coil-magnet actuator を小さくすることによって外乱に弱くなってしまう。外乱の問題については手の施しようがないと思われる。

付録 A 光路長制御系の開発

A.1 shot noise

レーザー干渉計型重力波検出器において shot noise は量子力学の不確定性原理から生じる物である。よって原理的なノイズとして干渉計の感度の上限を定める。shot noise と δL_- 等の各自由度の信号の大きさが等しくなる ($S/N = 1$) ときの δL_- の大きさを shot noise limit と言う。shot noise limit はどのような信号取得法を使ってどのような状態で干渉計を動作させるかに影響される量である。干渉計をつくときの感度目標は shot noise 等の原理的なノイズによって limit されている状態である。よって、干渉計の制御系を開発する上でも制御によるノイズが干渉計の感度を limit してはいけないので shot noise 等の干渉計の目標感度を十分考慮して干渉計の制御系を開発してやる必要がある。そのため、ここでは TAMA300 で用いられる frontal modulation によって信号を取得する場合の shot noise limit について計算してやる。

干渉計型重力波検出器は、両 arm 間の差動変動信号 δL_- に重力波の信号が出てくるので、dark port からとれる δL_- 信号の shot noise limit ¹が干渉計の重力波に対する感度を決定する。よって、主に δL_- の shot noise limit について考える。

shot noise の大きさは 2.5.1 で見たように photo detector における DC 的な光の強度で決定される。よって δL_- における shot noise limit を計算するには dark port での DC 的な光の強度を知る必要がある。ここで、もし干渉計が両 arm に対して全く対称ならば、carrier は全く dark port に漏れてこないで sideband の大きさのみを考えればよい。しかし通常、わずかな非対称性によって carrier が dark port に漏れてくる。その大きさはコントラストという量で表すことが出来、コントラストは次のように定義される。

$$C = \frac{I_{\min} - I_{\max}}{I_{\min} + I_{\max}} \quad (\text{A.1})$$

I_{\min}, I_{\max} はそれぞれ干渉計の dark fringe と bright fringe の時の光の強度である。TAMA300 ではコントラスト 99% を目標としているので、ここではコントラスト 99% を仮定して shot noise limit を計算する。

エネルギー保存より

$$I_{\min} + I_{\max} = |E_0|^2 (J_0^2 r_{\text{res}}^2 + 2J_1^2 r_{\text{anti}}^2) \quad (\text{A.2})$$

$$\therefore I_{\min} = \frac{1-C}{2} |E_0|^2 t_{\text{po}}^2 t_{\text{pp}}^2 (1 - A_{\text{BSLoss}}) (J_0^2 r_{\text{res}}^2 + 2J_1^2 r_{\text{anti}}^2) \quad (t_{\text{PY}} = t_{\text{PX}} \text{とした}) \quad (\text{A.3})$$

¹ shot noise limit とは shot noise の大きさと signal の大きさの S/N 比が 1 になる δL_- の大きさのことである

次に dark port において photo current に含まれる shot noise を計算すると次のようになる。

$$i_{\text{PD_shot}} = e \sqrt{2 \frac{\eta}{h\nu} I_{\min} [A/\sqrt{Hz}]} \quad (\text{A.4})$$

実際に干渉計で使われる信号は photo detector の信号を復調した物なのでその大きさは 1/2 になる [39]。よって、復調信号に含まれる shot noise は次のようにかける。

$$i_{\text{demo_shot}} = e \sqrt{\frac{\eta}{h\nu} I_{\min}} \quad (\text{A.5})$$

よって、 δL_- の変位感度の shot noise limit を計算すると次のようになる。

$$\delta L_- = \frac{\lambda}{4\pi} \sqrt{\frac{h\nu}{\eta} \frac{1-C}{2} \frac{1}{I_0} \frac{\sqrt{(1 - A_{BS_loss})(J_0^2 r_{\text{res}}^2 + 2J_1^2 r_{\text{anti}}^2)}}{J_0 J_1 |r'_{\text{res}}| r_{\text{anti}} \sin \alpha}} \quad (\text{A.6})$$

ここで I_0 は入射レーザーパワー。

(A.7)

δL_+ , δl_- 等についても同様に shot noise limit を計算することが出来る。

A.2 TAMA300 phase I における shot noise limit の計算

ここでは実際に TAMA300 において shot noise limit がどの程度であるかを知るために実際に TAMA300 phase I における干渉計の parameter を代入して各制御信号に対する shot noise limit を計算する。ここで、同様に recombine1 における shot noise limit を計算する事もできる。recombine 1 では実効的なレーザーパワーを約 300mW と考えて、上記の shot noise limit を $\sqrt{10}$ 倍すればよい。しかし、recombine1 の段階では干渉計の感度をあげることは目標として考えられていないので recombine1 の段階において shot noise limit を考慮する意味はあまりない。

recombine1 として shot noise limit を計算する意味は recombine1 の段階で制御系の開発という目標があり、このとき、出来るだけ最終的な形態に近い制御系を作ることが望ましい。よって、最終的なノイズを考慮した制御系設計するために各自由度に対する shot noise limit について知る必要がある。

各パラメータについては次のようにおいた²。

| 変数 | 記号 | 数値 |
|------------------|----------------------|-----------|
| asymmetry | l_- | 0.8[m] |
| 変調指数 | m | 0.65[rad] |
| 量子効率 | η | 0.8 |
| carrier contrast | C_{carrier} | 0.99 |
| レーザーパワー | I_0 | 3[W] |

²変調指数はコントラスト 99% という条件から δL_- の shot noise limit が低くなるように最適化した。また sideband に関しては frontal modulation による非対称性から元々 dark port に光が漏れてきて sideband のみを考えたときのコントラストが 99% を越えているので、carrier に対するコントラストを carrier contrast として 99% とした。

(3.2.5)(A.1) 節より。各自由度に対する shot noise limit を計算すると以下のようになった。

| 自由度 | shot noise limit [m/ $\sqrt{\text{Hz}}$] |
|--------------|---|
| δL_- | 2.0×10^{-19} |
| δl_- | 3.2×10^{-16} |
| δL_+ | 2.5×10^{-19} |

A.3 制御系の開発

ここでは干渉計の制御系の設計について考える。

recombineI では干渉計の雑音のことはあまり考えないが、目的の1つである「制御系の開発」では recombineI 以降 phaseI での感度を考慮した制御系を用いる。よって、感度を出す制御系の設計を前提とする。

Fabry-Perot-Michelson 干渉計の光路長制御にはいくつか方法があるが、ここでは TAMA phase I の最終形態である frontal modulation を用いた制御系について考える。

A.3.1 TAMA parameter での信号分離度の計算

(3.2.5) 節より、TAMA parameter での信号分離度を計算する。

下の表は各 port について信号が最大になる自由度について normalize されている。

| port | 自由度 | |
|-----------------|----------------------|----------------------|
| | L_- | l_- |
| V_{DQ} | 1 | 3.0×10^{-3} |
| V_{RQ} | 3.0×10^{-3} | 1 |

A.3.2 信号の混合より生じる制御系への要求

A.3.1 で見たように δl_- , δL_- に対する信号が完全に分離していない。また、 δl_- の shot noise limit が高いため (A.2 節より) δl_- の制御によるノイズが δL_- の信号に混ざってきて結果的に δL_- のノイズ、つまり重力波に対するノイズ、となる。よって δl_- の制御系には観測帯域で十分にゲインを落とす要求がされる。

δl_- の制御系の open loop 伝達関数を $G_{\delta l_-}$ とおくと shot noise limit まで制御された、 δl_- のノイズ(揺れ)は次のようにかかる。

$$\delta l_- = \frac{G_{\delta l_-}}{1 + G_{\delta l_-}} \delta l_{-\text{shot}} \quad (\text{A.8})$$

anti-symmetric port での δl_- , δL_- の信号の分離度を

$$\delta l_- : \delta L_- = \epsilon : 1 \quad (\text{A.9})$$

とおくと、anti-symmetric port に混入してくる δl_- のノイズは次のようにかかる。

$$\epsilon \frac{G_{\delta l_-}}{1 + G_{\delta l_-}} \delta l_{\text{-shot}} \quad (\text{A.10})$$

よって、 δl_- の混入によって δL_- の信号を汚さない条件は safety factor を S とおいて次のようにおける。

$$x_{\text{req}} > S \epsilon \frac{G_{\delta l_-}}{1 + G_{\delta l_-}} \delta l_{\text{-shot}} \quad (\text{A.11})$$

x_{req} は TAMA phaseI の目標感度である。以上より

$$G_{\delta l_-} < 5 \times 10^{-2} (@150 - 450\text{Hz}) \quad (\text{A.12})$$

という要求が出る。

A.3.3 残留 rms 振動に対する要求

Pound-Drever 法による制御信号は次のように書くことができる。

$$V_{\text{demo}} \propto P \delta \Phi \quad (\text{A.13})$$

P は laser の強度雑音である。よって laser に強度雑音があるとき $\delta \Phi$ の rms 振動と couple して制御信号に雑音が加わる。その雑音は次のような関係がある。

$$\delta V_{\text{demo}} \propto \delta P \delta \Phi_{\text{rms}} \quad (\text{A.14})$$

レーザーの強度安定化が TAMA の要求値である、

$$\frac{\delta P}{P} \leq 10^{-8} \quad (\text{A.15})$$

を実現しているとき、mirror の rms 振動 $\delta L_{\text{-rms}}$, $\delta l_{\text{-rms}}$ に対する要求値を計算する。

δL_- に関しては TAMA の要求値より次の条件を満たしていればよい。

$$\delta L_{\text{-req}} > S \frac{\delta P}{P} \delta L_{\text{-rms}} \quad (\text{A.16})$$

よって δL_- の rms 振幅の要求値は

$$\delta L_{\text{-rms}} < 5 \times 10^{-12} \text{ [m]} \quad (\text{A.17})$$

と与えられる。次に、 δl_- については、shot noise 以下であればよいので、

$$\delta l_{\text{-shot}} > \frac{\delta P}{P} \delta l_{\text{-rms}} \quad (\text{A.18})$$

よって、

$$\delta l_{\text{-rms}} < 3.2 \times 10^{-8} \text{ [m]} \quad (\text{A.19})$$

という要求値が得られる。

A.3.4 鏡の弾性モードの共振からの要求

feed back 制御系においては、制御帯域外でも実際には mirror mass に何らかの力を加えている。通常 mirror の弾性振動の Q 値は mirror の熱雑音に対する要求から非常に Q 値が高く設定されている。そのため、mirror の共振周波数において feed-back 系の open loop gain が 1 を越えてしまうと mirror の弾性振動を励起してしまう。

この効果が問題になるのは高い周波数まで mirror に直接制御を返す δL_- 制御ループである。

いま、mirror が約 30kHz に最低次の弾性振動モードを持ち、Q 値が 10^6 とする。このとき、共振周波数において mirror の弾性振動モードが制御に影響を与えないために、mirror mass に制御に返す loop の gain を 10^{-6} 以下にする。

$$G_{\delta L_-} < 10^{-6} \quad (@30kHz) \quad (\text{A.20})$$

A.3.5 制御系に対する要求のまとめ

以上から制御系に対する要求をまとめる。

| 自由度 | shot noise limit | 残留 rms | 制御ゲイン |
|--------------|-----------------------|------------------------|-------------------------------|
| δL_- | 2.0×10^{-19} | $< 5 \times 10^{-12}$ | $< 10^{-6} (@30kHz)$ |
| δl_- | 3.2×10^{-16} | $< 3.2 \times 10^{-8}$ | $< 5 \times 10^{-2} (@150Hz)$ |

付録B Hermite Gaussian mode

B.1 lowest-order mode

真空中における電場の方程式、

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E(x, y, z, t) = 0 \quad (\text{B.1})$$

を用いて、レーザーの空間モードに関する方程式を導く [16, 15]。

まず、レーザー光軸を z 軸にとって、式 (B.1) に、

$$E(x, y, z, t) = \phi(x, y, z) \exp \{ i(\Omega t - kz) \} \quad (\text{B.2})$$

を代入する。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial}{\partial z} - k^2 + \frac{\Omega^2}{c^2} \right) \phi(x, y, z) = 0 \quad (\text{B.3})$$

今、 z 軸方向に平行にレーザー光が進んでいるので、 z に関する 2 次の微分の項は無視すると、

$$(B.3) \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi(x, y, z) = 0 \quad (\text{B.4})$$

そして、微分方程式の解として次のような形のものを求める。

$$\phi(x, y, z) = A(z) \exp \left\{ -ik \frac{x^2 + y^2}{2F(z)} \right\} \quad (\text{B.5})$$

式 (B.4) に代入して、

$$\left\{ \left(\frac{k}{2} \right)^2 \left(\frac{d}{dz} F(z) - 1 \right) (x^2 + y^2) - \frac{2ik}{F(z)} \left(\frac{F(z)}{A(z)} \frac{d}{dz} A(z) + 1 \right) \right\} A(z) = 0 \quad (\text{B.6})$$

自明な解 $A(z) = 0$ 以外の解を持つには、任意の x, y に対して $\{ \}$ 内は 0 でなければならない。よって、次の方程式が得られる。

$$\frac{dF(z)}{dz} = 1 \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{dA(z)}{dz} = -\frac{A(z)}{F(z)} \quad (\text{B.8})$$

$$\Rightarrow F(z) = z - z' + iz_0 \quad (z', z_0 \text{は実数}) \quad (\text{B.9})$$

$$A(z) = \frac{A_0}{F(z)} \quad (A_0 \text{は定数}) \quad (\text{B.10})$$

ここで、 z 軸に関して原点を任意にとってよいので $z' = 0$ とする。整理すると、

$$\Phi(x, y, z) = \frac{A_0}{F(z)} \exp \left\{ -ik \frac{x^2 + y^2}{2F(z)} \right\} \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{A_0}{iz_0} \frac{\exp\{i\eta(z)\}}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}} \exp \left[\left\{ -\frac{k}{2z_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} - \frac{ik}{2z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)\right)} \right\} (x^2 + y^2) \right] \quad (\text{B.12})$$

$$= \frac{A_0}{iz_0} \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[\left\{ -\frac{1}{w(z)^2} - \frac{ik}{2R(z)} \right\} (x^2 + y^2) + i\eta(z) \right] \quad (\text{B.13})$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{2z_0}{k}} \quad (\text{B.14})$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad (\text{B.15})$$

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \right) \quad (\text{B.16})$$

$$\eta(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (\text{B.17})$$

となり、 $w(z), R(z)$ はそれぞれ、位置 z での waist size とレーザーの波面の曲率半径になっている。 $\eta(z)$ は、通常の球面波からの位相のずれを表もので、一般的に Guoy phase と呼ばれているものである。

ここで求めた基本モードを規格化する。すなわち、

$$\int dx dy \Phi^*(x, y, z) \Phi(x, y, z) = 1 \quad (\text{B.18})$$

より、定数 A_0 の値を求める。

$$\Phi(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \exp \left[\left\{ -\frac{1}{w(z)^2} - \frac{ik}{2R(z)} \right\} (x^2 + y^2) + i\eta(z) \right] \quad (\text{B.19})$$

$$(\text{B.20})$$

B.2 higher order mode

次に、高次の Gaussian mode を計算する。

高次モードを考える。式 (B.4) の解として次のような関数を仮定する。

$$\Phi_{n,l}(x, y, z) = \frac{A(F(z))}{F(z)} X_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{f(z)} \right) Y_l \left(\frac{\sqrt{2}y}{f(z)} \right) \exp \left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2F(z)} \right) \quad (\text{B.21})$$

式 (B.4) に代入して整理すると、

$$\frac{d}{d\xi} X(\xi) + \frac{d}{d\zeta} Y(\zeta) - ik \left(\frac{f^2}{F} - \frac{f'}{f} \right) \left(\xi \frac{d}{d\xi} X(\xi) + \zeta \frac{d}{d\zeta} Y(\zeta) \right) + \frac{2kf^2}{2F} \left(1 - \frac{A'F}{A} \right) (X(\xi) + Y(\zeta)) = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$\xi = \frac{\sqrt{2}x}{f(z)} \quad (\text{B.23})$$

$$\zeta = \frac{\sqrt{2}y}{f(z)} \quad (\text{B.24})$$

となる¹。上式において $\xi\zeta$ に関しては独立なので変数分離して考えることが出来る。

ここで、式 (B.22) を満たす解の一つとして $X_n(\xi)$ が Hermite 関数となるものがあり ([16, 17])、そのとき式 (B.4) の解は次のようにかける。

$$\Phi_{n,l}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_l \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \exp \left\{ i(n+l+1)\eta(z) - \frac{x^2+y^2}{w^2(z)} - i \frac{k(x^2+y^2)}{2R(z)} \right\} \quad (\text{B.25})$$

となる。

また、 y 方向の高次モードも同様に計算できる。

B.3 Hermite-Gaussian mode

以上をまとめると、一般に z 軸を光軸とするレーザーは Hermite-Gaussian mode と、呼ばれる関数で表現される。そして、それらは次のような関数で表現される。

z 軸に対して正の方向にレーザーが走っているとき、Hermit-Gaussian mode は

$$E_{lm+}(x, y, z, t) = U_{lm+}(x, y, z) \exp(i\Omega t) \quad (\text{B.26})$$

$$U_{lm+}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2^l l! 2^m m!}} \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} H_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \quad (\text{B.27})$$

$$\times \exp \left\{ i(l+m+1)\eta(z) - \frac{x^2+y^2}{w^2(z)} - i \frac{k(x^2+y^2)}{2R(z)} - ikz \right\} \quad (\text{B.28})$$

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (\text{B.29})$$

とかける。また、 z 軸負の方向に進むレーザー光は

$$E_{lm-} = U_{lm-} \exp(i\omega t) \quad (\text{B.30})$$

$$U_{lm-} = U_{lm+}^* \quad (\text{B.31})$$

となる。

¹ $f = f(z)$, $F = F(z)$, $A = A(F(z))$, $f' = \frac{d}{dz} f(z)$ などと、変数を省略した。以降、同様な表記については注意書きのない限り変数の省略とする。

B.4 楕円 mode

通常レーザーから出てくるビームは真円ではなく、楕円である。ここでは楕円モードの光に最もマッチする真円の Hermite Gaussian mode について考える。

レーザーの進行方向を z 軸に沿って正の方向と考えたとき楕円レーザーの x 方向の waist 半径および位置をそれぞれ ω_1, d_1 、 y 方向については ω_2, d_2 とおく。この時、楕円モードのレーザー光を次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 U_e &= \left(\frac{2}{\pi\omega_1^2(z-d_1)} \frac{2}{\pi\omega_2(z-d_2)} \right)^{1/4} \\
 &\times \exp \left\{ i \frac{\eta_1(z-d_1)}{2} - \left(\frac{1}{\omega_1^2(z-d_1)} + i \frac{k}{2R_1(z-d_1)} \right) x^2 \right\} \\
 &\times \exp \left\{ i \frac{\eta_2(z-d_2)}{2} - \left(\frac{1}{\omega_2^2(z-d_2)} + i \frac{k}{2R_2(z-d_2)} \right) y^2 - ikz \right\} \quad (B.32)
 \end{aligned}$$

$$\omega_i(z) = w_i \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_i} \right)^2} \quad (B.33)$$

$$z_i = \frac{\pi\omega_i^2}{\lambda} \quad (B.34)$$

$$R_i(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_i}{z} \right) \right) \quad (B.35)$$

$$\eta_i(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_i} \right) \quad (i = 1, 2) \quad (B.36)$$

上式の楕円レーザーと TEM00 モードとの結合強度は次の式で与えられる。

$$(\text{結合強度}) = \left| \int dx dy U_{00}^* U_e \right| \quad (B.37)$$

結合強度が最大になるような TEM00 モードのレーザー光の waist 半径 ω_0 と位置 d を計算すると以下ようになる。

$$d = \frac{z_2 d_1 + z_1 d_2}{z_1 + z_2} \quad (B.38)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left\{ z_1 z_2 \left(1 + \left(\frac{d_1 - d_2}{z_1 + z_2} \right)^2 \right) \right\}^{1/4} \quad (B.39)$$

このとき結合強度は次のように書ける

$$\frac{z_1 z_2}{(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2})^2} \left(1 + \left(\frac{d_1 - d_2}{z_1 + z_2} \right)^2 \right)^{-1} \quad (B.40)$$

関連図書

- [1] Bernard F. Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 1990.
- [2] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John A. Wheeler. *GRAVITATION*. W.H. FREEMAN AND COMPANY New York, 1973.
- [3] ランダウ, リフシッツ. 場の古典論 (原書第6版). 東京図書株式会社, 1984.
- [4] Kip S. Thorne. *300 years of gravitation*. Cambridge university press, 1987.
- [5] The VIRGO collaboration. *VIRGO Final conceptual design*. 1992.
- [6] K. Tsubono. 300 m laser interferometer gravitational wave detector (tama300) in japan.
- [7] D. G. Blair, editor. *The detection of gravitational waves*. Cambridge University Press, 1991.
- [8] 新井宏二. 基線長 300m レーザー干渉計型重力波検出器のための懸架システムの開発, 1997.
- [9] 山元一広. TAMA の mirror の Q 値の下限について. internal report, Nov. 1996.
- [10] 山元一広. TAMA300 の Suspension System 及び鏡の熱雑音の推定, 1997.
- [11] 桑原文彦. TAMA300 で用いられるスタック型防振装置の評価, 1998.
- [12] 中野道雄, 美多勉. 制御基礎理論. 昭晃堂, 1984.
- [13] Martin W. Regehr. *Signal Extraction and Control for an Interferometric Gravitational Wave Detector*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1995.
- [14] 安東正樹. Fabry-Perot 型レーザー干渉計重力波検出器の制御, 1996.
- [15] 霜田光一. レーザー物理入門. 岩波書店, 1983.
- [16] Anthony E. Siegman. *LASER*. University Science Books, 1986.
- [17] Amnon Yariv. *Electro Optics*. Oxford University Press, 1991.
- [18] H. Kogelnik and T. Li. Laser beams and resonators. *Proc. of The IEEE*. 54, 1312, 1966.
- [19] 栃久保邦治. Fabry-Perot 共振器のアライメント制御, 1996.
- [20] K. Kawabe, N. Mio, and K. Tsubono. Automatic alignment-control system for a suspended fabry-perot cavity. *Appl. Opt.*, Vol. 33, No. 24, pp. 5498–5505, August 1994.

- [21] Dana Z. Anderson. Alignment of resonant optical cavities. *Appl. Opt.*, Vol. 23, No. 17, pp. 2944–2949, September 1984.
- [22] E. Morrison, Brian J. Meers, David I. Robertson, and H. Ward. Automatic alignment of optical interferometers. *Appl. Opt.*, Vol. 33, No. 22, pp. 5041–5049, August 1994.
- [23] E. Morrison, Brian J. Meers, David I. Robertson, and H. Ward. Experimental demonstration of an automatic alignment system for optical interferometers. *Appl. Opt.*, Vol. 33, No. 22, pp. 5037–5040, August 1994.
- [24] Nergis Mavalvala. *Alignment Issues In Laser Interferometric Gravitational-Wave Detectors*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1997.
- [25] 堀越一雄. TAMA300 用懸架システムの真空特性. 1998 年春の学会.
- [26] 日本航空電子ミラー資料. 1998.
- [27] 谷口信介. TAMA300 における 300m Fabry-Perot 共振器の制御 I. 1998 年春の学会.
- [28] 谷口信介. TAMA300 用 matching telescope の防振テスト. TAMA300 length & alignment, Design & Fabrication meeting.
- [29] 川村静児. private communication.
- [30] 森脇成典. TAMA300 photo detector の性能評価. internal report, 1998.
- [31] 上田晃三. PLL による復調用信号源の開発. 坪野研輪講資料, Nov. 1997. <ftp://t-munu.phys.s.u-tokyo.ac.jp/pub/kozo/pll/pll.ps>.
- [32] Roland E. Best. *Phase-Locked loops*. McGraw-Hill, 1993.
- [33] 河邊径太, 柘久保邦治, 佐々木愛一郎, 上田晃三. 四分割 RF フォトディテクタの評価報告書. internal report, Aug. 1997. <ftp://t-munu.phys.s.u-tokyo.ac.jp/pub/kawabe/nittsuki/report.ps>.
- [34] 新井宏二. TAMA300 用マグネット・コイル・アクチュエータのカップリング測定. internal report, Jan. 1998. <ftp://t-munu.phys.s.u-tokyo.ac.jp/pub/arai/magnet-coil/magnet-coil.ps>.
- [35] 沼田健司. 新アナログ信号光伝送システムの性能評価. internal report, July 1998. <ftp://t-munu.phys.s.u-tokyo.ac.jp/pub/numata/AD-DA/analog.pdf>.
- [36] 谷口信介. アナログ信号光伝送システムの性能評価. internal report, september 1997. <ftp://t-munu.phys.s.u-tokyo.ac.jp/pub/shinsuke/AD-DA/HOUKOKU.ps>.
- [37] 柘久保邦治. private communication.
- [38] 山元一広. Beam Centering に関する現状報告. internal report, Aug. 1998. <ftp://t-munu.phys.s.u-tokyo.ac.jp/pub/yamamoto/centering/centering.ps>.
- [39] Adrian Ottewill and Malik Rakhmanov. Correlation function and power spectrum of non-stationary shot noise. *LIGO-T970085-02-D*, March 1997.

謝辞

本実験は TAMA project という大きな project の一環にある実験であり、そのため、TAMA project に関わる全ての人の協力があってこそ初めて実現された物でした。