修士論文
ローレンツ不変性検証のための
モノリシック光学系の開発
Development of Monolithic Optical System for Lorentz Invariance Test

東京大学 大学院理学系研究科 物理学専攻
安東研究室
武田 紘樹 (TAKEDA, Hiroki)

2018 年 1 月 4 日提出
2018 年 1 月 29 日最終版提出

目次

概要

光路の一部に媒質を加えた非対称光リング共振器とダブルパス構成を用いた奇パリティの光速の異方性探査に感度を持ち、Lorentz 不変性を検証できる光学系を、モノリシック光学系という光学素子を一枚の土台に直に接着することで振動感度を低減することができる光学系で製作した。製作したモノリシック光学系は入射光学系と共振器が一体となった世界初のモノリシック光学系である。Template と手動ステージによる上部からの支持によるモノリシックアラインメント手法を開発し要求値を上回る精度でのアラインメントに成功した。製作した紫外線硬化樹脂モノリシック光学系の雑音やセンサー効率などの特性を先行研究と比較することで開発したアラインメント手法の有用性を示した。また、光路の一部に媒質を加えた非対称光リング共振器とダブルパス構成を用いた奇パリティの光速の異方性探査実験において仮定されてきていた同相雑音除去比という共振器調変動の影響を抑制することができる程度の指標となるパラメーターを温調によって実測した。モノリシック光学系の振動評価と得られた同相雑音除去比の値を用いて非対称光リング共振器による奇パリティの光速の異方性の高精度探査のための雑音見積もりを行い、Lorentz 不変性の破れが指摘されているレベルでの異方性探査が製作したモノリシック光学系で可能であることを示し、雑音源に対する定量的な評価と理解を得た。将来的には散射雑音レベルでの奇パリティの異方性探査も可能であり、これは現在の偶パリティの異方性探査の精度を二桁更新する精度である。

記法/記号

本論文で用いた記法や記号等についてまとめる。

本論文では数学記法、記号に慣例的なものを使用した。

c	光速 $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s
h	Planck 定数 $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Jṡ
e	電荷素量 $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C
k_B	Boltzmann 定数 $k_B = 1.381 \times 10^{-23}$J/s
ϵ_0	真空中の誘電率
μ_0	真空中の透磁率
λ	レーザー波長 $\lambda = 1550$nm
ν	レーザー周波数 $\nu = c/\lambda$
ω	レーザー角周波数 $\omega = 2\pi\nu$
L	幾何的な共振器一周長
L_{eff}	光学的な共振器一周長
$\mathcal{F}$	共振器フィネス
n	媒質の屈折率
ω_{rot}	共振器の回転周波数
T_{rot}	共振器の一回転の周期 $T_{\mathrm{rot}} = 2\pi/\omega_{\mathrm{rot}}$
$\delta\nu$	光リング共振器の両周りの共振周波数差
$x(t)$	時間関数、時間領域データ
$X(s), X$	s 領域関数 (Laplace 変換)
$X(f), X$	周波数関数、周波数領域データ (Fourier 変換)
$\mathcal{P}_x$	$x(t)$ のパワースペクトル密度、x の次元が U のとき、$\mathcal{P}_x$ の次元は U/$\sqrt{\mathrm{Hz}}$

略称

本書で用いた略語についてまとめる。

AOM	acousto-optic modulator (音響光学素子)
BS	beam splitter
CMB	cosmic microwave background(宇宙マイクロ波背景放射)
CMRR	common mode rejection ratio(同相雑音除去比)
FP	Fabry-Perot cavity
FSR	free spectral range
FWHM	full width at half maximum(半値全幅)
GR	General Relativity(一般相対性理論)
HWP	half-wave plate(1/2 波長板、λ/2 板)
LPF	low-pass filter
PBS	polarizing beam splitter
PD	photo detector, photo diode(光検出器)
PM	polarization maintaining(偏波保持)
PZT	lead zirconate titanate, Pb(Zr$_{x}$, Ti$_{1-x}$)O3(ピエゾ素子)
QWP	quarter-wave plate(1/4 波長板、λ/4 板)
SG	signal generator(信号発生器)
SM	Standard Model(標準模型)
SM	single mode(単一モード)
SME	Standard Model Extension(拡張標準理論)
SR	Special Relativity(特殊相対性理論)
UGF	unity gain frequency

第 1 章 序論

本章では研究背景を述べる。本研究の主題である Lorentz 不変性とは、Lorentz 変換による物理法則や物理量の種々の不変性を指す。これは現代物理学の主要な二つの理論、すなわち時空の理論である相対性理論と素粒子物理学における標準模型においても採用されており、現代物理学において Lorentz 不変性が宇宙の基本的な対称性として採用されていることがわかる。まず Lorentz 不変性についてまとめ、次に相互作用を統合しようとする理論的研究や種々の観測から、Lorentz 不変性の破れが示唆されていることと光子の Lorentz 不変性検証の現状について述べる。最後にこれらの先行研究を受けて本研究の開発や測定の意義について説明する。

1.1 Lorentz 不変性

Lorentz 不変性とは Lorentz 変換による種々の不変性を指す。まず、物理法則を表すあるテンソル方程式を考えてみる。テンソル方程式は座標系の取り方に無関係な関係式なので、任意の座標系で成立する関係式である。物理学ではテンソルの成分間の関係式としてテンソル方程式を見ることが多い。例えば次のようなテンソルのある座標系での成分間の等式が成り立っているとする。

$$G^{\mu\nu}(x) = T^{\mu\nu}(x) \tag{1.1}$$

両辺のテンソルの成分は Lorentz 変換

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{1.2}$$

の元でそれぞれ、

$$G'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} G^{\alpha\beta}(x) \tag{1.3}$$

$$T'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta}(x) \tag{1.4}$$

と変換する。したがって Lorentz 変換後の座標系でも

$$G'^{\mu\nu}(x') = T'^{\mu\nu}(x') \tag{1.5}$$

が成り立つ。これは正確には Lorentz 共変性と呼ぶべきものだが、物理学では式の形が不変という意味で Lorentz 不変性という用語を用いることが多い。

また、ラグランジュ形式の理論においてラグランジアンがスカラー、すなわち Lorentz 不変な形で与えられていれば、その理論は Lorentz 不変になる。例えば簡単のため、$A_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$ をある場の量に依存するテンソルとし、ラグランジアンがこれらの縮約で得られているとすると、

$$\begin{aligned} S' = \int L' = \int A'^{\mu\nu}(x')B'_{\mu\nu}(x') &= \int \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}A^{\alpha\beta}(x)(\Lambda^{\gamma}{}_{\mu})^{-1}(\Lambda^{\delta}{}_{\nu})^{-1}B_{\gamma\delta}(x) \\ = \int A^{\mu\nu}(x)B_{\mu\nu}(x) = \int L = S \end{aligned} \tag{1.6}$$

のようにラグランジアンも作用も Lorentz 変換に対して不変になる。ラグランジュ形式の理論においては作用の変分から場の方程式が得られるので、その理論も Lorentz 不変になる。変分法とラグランジュ形式の詳細は Appendix A にまとめた。

Lorentz 不変性は一般相対性理論 (GR) における一般相対性原理や特殊相対性理論 (SR) における特殊相対性原理のみならず、Standard Model などの素粒子物理学、場の量子論においても重要な対称性として取り入れられており、宇宙の基本的な対称性と考えられている。一般相対性理論と Standard Model については Appendix B と Appendix C にまとめた。

1.2　Lorentz 不変性の破れ

ところが、String Theory や Loop Quantum Gravity などの重力とその他の基本相互作用を統一しようとする理論的な研究では、あるエネルギースケールで Lorentz 不変性が破れている可能性が示唆されている [1]。また、宇宙背景放射 (CMB) の異方性観測からは、CMB の双極子成分がゼロになるような座標系である CMB 静止系の存在、すなわちある種の prefered frame の存在が示唆されている [2]。したがって高精度で実験的に Lorentz 不変性の検証をすることが必要とされている。現代物理学の原理検証、新しい理論の構築や既存の理論の修正などの観点から Lorentz 不変性を高精度で検証することは非常に重要なことであることがわかる。Lorentz 不変性の破れの発見は、Lorentz 不変性を基本的な対称性として採用している現代物理学の多くの

理論にブレイクスルーをもたらすことは明らかである。また Lorentz 不変性の破れがなくとも、Lorentz 不変性の検証は量子重力理論などの基本的な四つの相互作用を統一する理論的な研究などに実験的な知見と制限を与えることができる。本研究は Lorentz 不変性の破れの中でも光子の Lorentz 不変性の検証を目指すものである。光子の Lorentz 不変性の破れは光速の異方性を意味することから、世界中で光速の異方性探査が活発に行われている。光子の Lorentz 不変性の破れによる光速の異方性には偶パリティの破れと奇パリティの破れがあり、その破れに対応する代表的な光速の異方性がそれぞれ往復光速の異方性と片道光速の異方性である。往復光速の異方性は Michelson-Morley の実験 [3] と同様の手法で、光の往復する方向による光速差 $\delta c/c$ が 10^{-18} の高い精度で検証されている [4]。一方片道光速の異方性は Michelson 干渉計や通常の光共振器では異方性信号がキャンセルされてしまう。そこで、片道光速の異方性は光路の一部に媒質を入れ非対称化した光リング共振器を用いて、光の行きと帰りによる光速差 $\delta c/c$ が 10^{-15} の精度で検証されている [5]。

1.3　本研究の意義

Lorentz 不変性の破れに対して定量的な予言はないが、プランクスケールと電弱相互作用のスケールの比である 10^{-17} 程度のレベルから Lorentz 不変性の破れの可能性が指摘されている [6]。したがって、さらに高い精度で光子の Lorentz 不変性検証をする必要がある。本研究では光子の Lorentz 不変性の破れの中でも特に片道光速の異方性のような奇パリティの光速の異方性の高精度探査を目指すために光学系の改良・開発と、将来の高精度検証のために同相雑音除去比という特徴的なパラメータを実測し、その結果を用いて定量的な雑音見積もりを行った。

先行研究 [5, 7–9] においては上述したように、光路の一部に媒質を入れ非対称化した光リング共振器を用いて Lorentz 不変性の破れによる奇パリティの光速の異方性を探査し、片道光速の異方性 $\delta c/c$ が 10^{-15} の精度で検証されているが、その感度は装置の回転機構の雑音や振動によって制限されている。Lorentz 不変性の検証実験では一般に光学系全体を回転させ信号に変調をかける必要がある。よって片道光速の異方性探査だけでなく往復光速の異方性探査においても光学系を回転させて実験を行なっている [10, 11]。このように回転台の振動による雑音は光子の Lorentz 不変性検証において主要な雑音源となっている。本研究ではこれらの先行研究を受けて、光リング共振器を用いた奇パリティの光速の異方性探査による Lorentz 不変性検証実験における振動感度低減のためのモノリシック光学系の開発を行った。モノリシック光学系とは一枚の土台に光学素子を直に接着させることで振動感度を低減することができる光学系である。ところ

がモノリシック光学系は振動感度を低減するために光学素子をしっかりと固定させるため、アラインメントをとるのが一般に難しい。本研究ではこのモノリシック光学系のアラインメント手法開発も行った。同様の光学素子配置である先行研究 [5] と雑音レベルやセンサーの効率等を評価することで開発したアラインメント手法や製作したモノリシック光学系の有用性を示した。

また、先行研究 [5, 7–9] の構成は共振器調変動に対する同相雑音除去が働く環境変動に強い構成をとることで高感度を実現している。しかし同相雑音除去の効果の程度を表す同相雑音除去比については $\gamma_{\mathrm{CMRR}} \sim 1/100$ が仮定されてきていたが、これまで実際にその値の測定や評価は行われていなかった [5]。今後より高い精度で光子の Lorentz 不変性を検証するためには同相雑音除去比を測定し、各種の雑音の定量的な評価をして雑音対策を講じることが必要不可欠である。そこで本研究では製作した先行研究と同様の光学配置を持つモノリシック光学系で、温度変動を外部から与え共振器長を変化させることで同相雑音除去比の測定を行った。またこの温調によって測定した結果を踏まて雑音の定量的評価を行ない、今後の奇パリティの光速の異方性探査による光子の Lorentz 不変性検証実験におけるその感度と雑音源の関係、雑音対策について論じた。

本論文の構成は以下の通りである。2 章では Lorentz 不変性の破れを導入した理論である Standard Model Extension(SME) のレビューを行い、検証理論をまとめる。3 章では光路の一部に媒質を入れ非対称化した光リング共振器を用いた奇パリティの光速の異方性探査による Lorentz 不変生検証実験の実験理論についてまとめる。4 章 5 章では本研究の二つのメインテーマであるモノリシック光学系の開発と同相雑音除去比の測定について述べる。4 章では製作したモノリシック光学系と、開発したモノリシック光学系アラインメント手法について述べ、それらの評価と有効性について述べる。5 章では温調による同相雑音除去比の測定と測定結果をもとに得られた雑音見積もりを与える。また、AppendixA では変分法、AppendixB では一般相対性理論、AppendixC では標準模型、AppendixD では光学、AppendixE では信号理論、AppendixF ではフィードバック制御、AppendixG では本研究で使用した回路についてまとめた。本書で用いた記号、記法、略語については本章よりも前にまとめた記法・記号、略称のページを参照して欲しい。

1.4　本章のまとめ

・Lorentz 不変性は現代物理学における基本的な対称性である。

・量子重力理論の理論的研究や CMB の観測から Lorentz 不変性の破れが示唆されている。

・Lorentz 不変性の破れは光速の異方性を意味し、光速の異方性には奇パリティの異方性と偶パリティの異方性の二種類がある。

・Lorentz 不変性の破れが示唆されている精度での検証にはより高い精度での異方性探査が必要である。

・Lorentz 不変性の高精度検証には一般に振動感度の低減が必要であり、本研究ではその一つの手段であるモノリシック光学系とそのアラインメント手法の開発を行った。

・非対称光リング共振器を用いた Lorentz 不変性のより高い精度の検証には正確な雑音の評価と見積もりのために同相雑音除去比という環境変動の影響を低減する程度を表すパラメータを実測する必要がある。本研究では温調によって同相雑音除去比を測定した。

第 2 章 Lorentz 不変性検証理論

本章では Lorentz 不変性の検証理論について述べる。まず、通常の電磁気学における Lorentz 不変性と Maxwell 方程式についてまとめる。Lorentz 不変性の検証では、Lorentz 不変性の破れの効果を含む検証理論のパラメータを評価することで検証する。Lorentz 不変性の検証理論として最も一般的でよく使われている理論に Standard Model Extension(SME) がある [6]。これは、一般的な Lorentz 不変性の破れと CPT 対称性の破れを特徴付けることができる包括的な低エネルギー有効場の理論である。本研究は光子の Lorentz 不変性を検証するものなので、SME の光子のセクターについてまとめる。最後に SME における Lorentz 不変性の破れの効果が光速の異方性として現れることを説明し、本章以降の光速の異方性探査実験の原理の理解に繋げる。

2.1 Lorentz 不変性と Maxwell 方程式

ここでは、Lorentz 不変性を取り入れた現代物理学における光子の理論、つまり $U(1)$ ゲージ粒子についてまとめる。電磁場はポテンシャル (ゲージ場) と呼ばれるスカラー関数の勾配の和の不定性を持つ一形式 $\boldsymbol{A}$ によって規定される。電磁場の Lagrangian 密度は、

$$L = -\frac{1}{4} F_{ab} F_{cd} g^{ac} g^{bd} \tag{2.1}$$

で与えられる。ここで、電磁場テンソル $\boldsymbol{F}$ は、

$$F_{ab} = 2A_{[b;a]} \tag{2.2}$$

で定義され、g は計量テンソルである。電磁場の Lagrangian 密度は 1 章で述べたように Lorentz 不変な形になっており、得られる理論体系は Lorentz 不変になる。$\boldsymbol{A}$ について変分を実行することで、

$$F_{ab;c} g^{bc} = 0 \tag{2.3}$$

を得る。この式と $d\boldsymbol{F} = d(d\boldsymbol{A}) = 0$ より導かれる

$$F_{[ab;c]} = 0 \tag{2.4}$$

の二式を source-free な Maxwell 方程式という。

この source-free な Maxwell 方程式を $g = \eta$ とし、よく知られた電磁場ベクトル $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}$ に対する方程式に直すと次のようになる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{2.5}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = 0 \tag{2.6}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.7}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{2.8}$$

これらの方程式から $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ の各成分 u に対する波動方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = 0 \tag{2.9}$$

が導かれる。source-free な空間では電磁場はこのような波動方程式に従う。

2.2 Standard Model Extension

Standard Model Extension(SME) は一般的な Lorentz 不変性の破れと CPT 対称性の破れを特徴付けることができる包括的な低エネルギー有効場の理論である。SME の Lagrangian 密度において Lorentz 不変性の破れを表す項は Lorentz 不変性を起こす微分演算子とそれに付随する係数、場の量との縮約をとった観測者に依存するテンソル成分として導入される。SME は Lorentz 不変性の検証実験で検証理論としてよく用いられる。本研究に関連して、本節では SME の光子の sector について [12] のレビューを行うことでまとめる。Standard Model Extension のより厳密で詳細な議論ついては [6] や [12] を参照されたい。また、SME の光学実験的な側面については [12] や [13] を参照されたい。

2.2.1　Standard Model Extension における光子の Lagrangian 密度

Lagrangian 密度の構成

まず、Lorentz 不変性の破れを誘起する全ての質量次元の作用素を構成する。ここでは任意の Lorentz 不変性の破れと CPT 対称性の破れを許す電磁気学における 2 次の作用理論について述べる。一方でこの理論は通常の U(1) ゲージ不変性と並進対称性を持つとする。よって、得られる有効場の理論は電荷とエネルギー、運動量を保存する理論となる。座標系に独立で現在の観測と無矛盾な Lorentz 不変性の破れを示す低エネルギー理論は Lorentz 不変性の破れに対応する係数と縮約をとった通常のテンソル演算子を含む多項式の Lagrangian 密度として表される。この係数は Lorentz 不変性の破れを引き起こす背景場として見ることができ、それらは基本的なテンソル場の真空の期待値に対応する。以上の一般的な考えを source-free な線形電磁気学に応用すると、作用 S は光子の場、つまり電磁場ポテンシャル (ゲージ場)A_μ とその微分の 2 次の関数として表される。したがって作用 S は以下のような項 $S_{(d)}$ によって展開される。

$$S_{(d)} = \int d^4x \mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1 \ldots \alpha_d} A_{\alpha_1} \partial_{\alpha_3} \ldots \partial_{\alpha_d} A_{\alpha_2} \tag{2.10}$$

ここで d はテンソル作用素の次元である。d が奇数ならば $S_{(d)}$ の項は CPT 対称性を破り、d が偶数ならば $S_{(d)}$ の項は CPT 対称性を保存する。係数 $\mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1 \ldots \alpha_d}$ は質量次元 $4-d$ を持つ。一般的にはこれらの係数は動的で時空座標に依存していても構わない。このようにして一般的に全ての係数 $\mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1 \ldots \alpha_d}$ を取り扱うのは複雑で取り扱いにくい。そこで、簡単のために S の並進のもとでの不変性と U(1) ゲージ対称性を課すことにする。これによってこれらの係数は定数に制限され、理論はエネルギー運動量保存と、電荷の保存を満たすことになる。[*1] この簡単化によって Lorentz 不変性の破れを表す作用素にある種の対称性が導入され、独立成分を減らすことになる。

そこで、まず作用 S の構造から係数 $\mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1 \ldots \alpha_d}$ に現れる性質について議論する。$\mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1 \ldots \alpha_d}$ は $d-2$ 個のインデックス $\{\alpha_3, \ldots, \alpha_d\}$ について微分演算の可換性から完全対称になる。また、式 (2.10) の被積分関数を $d-2$ 回部分積分し表面項を落とすことで CPT の奇パリティな項は $\mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1 \ldots \alpha_d}$ の最初の二つのインデックスについて反対称に、CPT の偶パリティな項は最初の二つ

[*1] このように $\mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1 \ldots \alpha_d}$ は定数なので式 (2.10) の被積分関数 $\mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1 \ldots \alpha_d} A_{\alpha_1} \partial_{\alpha_3} \ldots \partial_{\alpha_d} A_{\alpha_2}$ は、テンソル量 (正確にはテンソルの成分) であることに注意

のインデックスについて対称であることがわかる。[*2] これで、係数に関する固有の対称性が得られた。次に項別にゲージ不変性を課すことによって $S_{(d)}$ のさらなる対称性を得る。通常の $U(1)$ ゲージ不変性 (変分 $\delta_g A_\mu = \partial\Lambda$ の元での不変性) を課す。すなわち変分

$$\delta_g S_{(d)} = -\int d^4x \mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1\cdots\alpha_d}\Lambda\partial_{\alpha_3}\cdots\partial_{\alpha_d}(\partial_{[\alpha_1}A_{\alpha_2]\pm} + \frac{1}{2}\partial_{[\alpha_1}\partial_{\alpha_2]\pm}\Lambda) \tag{2.12}$$

が任意の関数 Λ に対して消えることとする。この方程式を直接調べるのは取り扱いにくいので、Young diagram を用いて Lorentz 不変性の破れを起こす作用素を既約表現分解することで、さらなる対称性を調べる。$\mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1\cdots\alpha_d}$ の後ろの $d-2$ 個のインデックスに対する完全対称性は、これらのインデックスの任意のペアについて反対称な全ての表現が許されないことを意味している。これによって、既約なテンソルを対称テンソルの積から得ることができ、最終的に 5 つの表現の可能性が残される (図 2.1)。

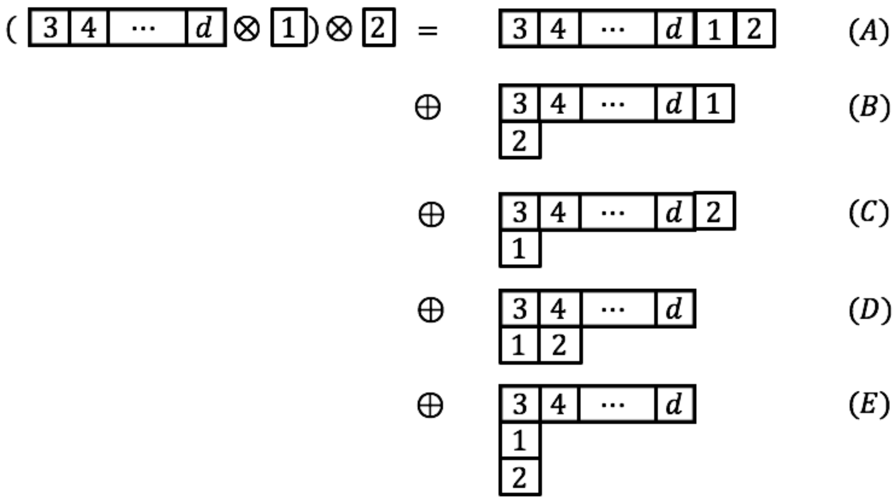

図 2.1　Young diagram を用いた $S_{(d)}$ 項に対する表現分解

CPT の奇パリティな項について考える。(A) は $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ に対して対称であり、その非対称性と矛盾する。また (B)、(C) は $\delta_g S_{(d)}$ が消えず gauge invariant なので不適。(D) は $1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4$

[*2] これは以下のようにしてもわかる。式 (2.10) の A_μ についての変分を実行することで (表面項を無視)、

$$\begin{aligned} \delta S_{(d)} &= \int d^4x \mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_d}(\partial_{\alpha_3}\ldots\partial_{\alpha_d}A_{[\alpha_2})\delta A_{\alpha_1]\pm} \\ &= \int d^4x \mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_2\alpha_1\ldots\alpha_d}(\partial_{\alpha_3}\ldots\partial_{\alpha_d}A_{[\alpha_1})\delta A_{\alpha_2]\pm} \\ &= \int d^4x \pm \mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_d}(\partial_{\alpha_3}\ldots\partial_{\alpha_d}A_{[\alpha_2})\delta A_{\alpha_1]\pm} \end{aligned} \tag{2.11}$$

が得られるからである。ここで $+$ は CPT-even、$-$ は CPT-odd に対応し、$[\ ]_+$ は対称化、$[\ ]_-$ は反対称化を表す。

についての同時の互換に対する対称性から不適となる。(E) は $\{1,2,3\}$ に対する反対称性がゲージ不変性を保証するので適当である。したがって全てのゲージ不変な CPT の奇パリティな項に対応する演算子には、表現 (E) に属する係数 $\mathscr{K}^{\alpha_1\cdots\alpha_d}{}_{(d)}$ のみが関係する。ゲージ不変な CPT の奇パリティな項に対しては $d\geq 3$ を満たす奇数 d がとれることになる。同様の議論から、CPT の偶パリティな項について考えると、表現 (D) のみが許される。したがって全てのゲージ不変な CPT の偶パリティな項に対応する演算子には、表現 (D) に属する係数 $\mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1\cdots\alpha_d}$ のみが関係する。ゲージ不変な CPT の偶パリティな項に対しては $d\geq 4$ を満たす偶数 d がとれることになる。

ここで取り扱いを簡単にするために係数 $\mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1\cdots\alpha_d}$ を CPT の奇パリティな項と CPT の偶パリティな項についてそれぞれ再定義する。CPT の奇パリティな $\mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1\cdots\alpha_d}$ に対して、

$$(k_{AF}^{(d)})_\kappa{}^{\alpha_1\ldots\alpha_{d-3}} := \frac{1}{3!}\epsilon_{\kappa\mu\nu\rho}\mathscr{K}_{(d)}^{\mu\nu\rho\alpha_1\ldots\alpha_{d-3}} \tag{2.13}$$

と定義する。表現 (E) の対称性は、$(k_{AF}{}^{(d)})_\kappa{}^{\alpha_1\ldots\alpha_{d-3}}$ の $d-3$ 個の上付きインデックスについての完全対称性と、トレースの条件 $(k_{AF}^{(d)})_{\alpha_1}{}^{\alpha_1\ldots\alpha_{d-3}}=0$ に訳される。表現 (E) の既約な表現空間の次元は、

$$N_{AF}^{(d)} = \frac{1}{2}(d+1)(d-1)(d-2) \tag{2.14}$$

となる。例えば低次の具体例を挙げると、$d=3$ に対しては 4、$d=5$ に対しては 36、$d=7$ に対しては 120 となる。

CPT の偶パリティな $\mathscr{K}_{(d)}^{\alpha_1\cdots\alpha_d}$ に対して、

$$(k_F^{(d)})^{\kappa\lambda\mu\nu\alpha_1\ldots\alpha_{d-4}} := \mathscr{K}_{(d)}^{\kappa\mu\lambda\nu\alpha_1\ldots\alpha_{d-4}} \tag{2.15}$$

と定義する。表現 (D) の対称性は、$(k_F^{(d)})^{\kappa\lambda\mu\nu\alpha_1\ldots\alpha_{d-4}}$ の最初の 4 つのインデックスに対するリーマンテンソルと同じ対称性と、他の $d-4$ 個の上付きインデックスの完全対称性に訳される。表現 (D) の既約な表現空間の次元は、

$$N_F^{(d)} = (d+1)d(d-3) \tag{2.16}$$

となる。例えば低次の具体例を挙げると、$d=4$ に対しては 20(1 つは Lorentz 不変)、$d=6$ に対しては 126、$d=8$ に対しては 360 となる。

Standard Model Extension における光子の Lagrangian 密度

以上の構成により SME における光子の Lagrangian 密度は最終的に以下のように与えられる。

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}A_\lambda(\hat{k}_{AF})_\kappa F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{2.17}$$

ここで $\hat{k}_{AF}, \hat{k}_F$ はそれぞれ CPT-odd,CPT-even な破れを引き起こす微分作用素である。これらの作用素は、

$$(\hat{k}_{AF})_\kappa = \sum_{d=\mathrm{odd}} (k^{(d)}_{AF})_\kappa{}^{\alpha_1\cdots\alpha_{d-3}}\partial_{\alpha_1}\cdots\partial_{\alpha_{d-3}} \tag{2.18}$$

$$(\hat{k}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu} = \sum_{d=\mathrm{even}} (k^{(d)}_F)^{\kappa\lambda\mu\nu\alpha_1\cdots\alpha_{d-4}}\partial_{\alpha_1}\cdots\partial_{\alpha_{d-4}} \tag{2.19}$$

のように $d \geq 3$ について展開される。ここで $k^{(d)}_{AF}$ は式 (2.14) の独立成分を持つ式 (2.13) で定義される。また $k^{(d)}_F$ は式 (2.16) の独立成分を持つ式 (2.15) で定義される。[*3]minimal Standard Model Extension と呼ばれる繰り込み可能な項のみからなる最低次の SME は $k_{AF} := k^{(3)}_{AF}, k_{AF} := k^{(4)}_F$ とすることで得られる [6]。

運動方程式は原理的には得られた SME における光子の Lagrangian 密度式 (2.17) を変分を実行することで得られるが、Lagrangian 密度が無限和を含むために通常の変分を行うことができない。ところが式 (2.17) をより基本的な理論の低エネルギー理論だと捉え、連続している各項は前の項の摂動を表いると考え、和をある有限値 d までで打ち切るとこの問題を回避することができる。これによってゲージ不変な運動方程式

$$(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\partial_\nu + (\hat{k}_{AF})_\nu\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} + (\hat{k}_F)^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu)F_{\alpha\beta} = 0 \tag{2.20}$$

が得られる。ここでテンソル場

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &:= F^{\mu\nu} - 2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\hat{k}_{AF})_\alpha A_\beta + (\hat{k}_F)^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \\ &= \hat{\chi}^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} + 2\hat{X}^{\mu\nu\rho}A_\rho \end{aligned} \tag{2.21}$$

を定義する。ここで、$\hat{\chi}, \hat{X}$ は次式で定義されるそれぞれ 4 階、3 階のテンソル演算子である。

$$\hat{\chi}^{\mu\nu\rho\sigma} := \frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}\eta^{\mu\sigma}) + (\hat{k}_F)^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{2.22}$$

[*3] 式 (2.14) や式 (2.16) は表現の既約分解によって得られた不変部分空間のうち、(ゲージ不変などの) 要請された対称性をもつ不変部分空間の (もちろん独立な) 基底の数、つまり次元を与える。これは同時に独立成分の個数を与えていることになる。

$$\hat{X}^{\mu\nu\rho} := \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\hat{k}_{AF})_\sigma \tag{2.23}$$

$\hat{X}$ は CPT 対称性の破れに関連する 3 階のテンソル演算子である。運動方程式はテンソル場 $G^{\mu\nu}$ に対する次の方程式に訳される。

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = 0 \tag{2.24}$$

もちろんこの方程式は Lagrangian 密度の構成からゲージ不変であるが、$G^{\mu\nu}$ はゲージの選択に依存し $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\hat{k}_{AF})_\alpha\partial_\beta\Lambda$ だけの不定性を持つ。通常の巨視的媒質中の電磁気学では、構成 4 階テンソル χ が、2 形式の場の強さ F から巨視的な 2 階テンソル場の強さ G への写像として $G^{\mu\nu} = \chi^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ として導入される。本文の議論はこれと対応づけるように構成テンソル $\hat{\chi}, \hat{X}$ を定義し、構成関係式 (2.21) を求めている。求められた SME における構成関係式 (2.21) は線形であるが、通常の線形媒質における電磁気学とは異なって、微分の性質から非局所的な性質を有していることがわかる。

$G^{\mu\nu}$ を有効ベクトル変位場 $\boldsymbol{D}$ と有効準ベクトル磁場 $\boldsymbol{H}$ に分解すると、運動方程式は sourcefree な非等方 Maxwell 方程式と同じ形をとる。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0, \quad \nabla\times\boldsymbol{H} - \partial_0\boldsymbol{D} = 0 \tag{2.25}$$

ここで、

$$\boldsymbol{D} := \boldsymbol{E} + 2(\hat{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{AF}})\times\boldsymbol{A} + \hat{\kappa}_{DE}\cdot\boldsymbol{E} + \hat{\kappa}_{DB}\cdot\boldsymbol{B} \tag{2.26}$$

$$\boldsymbol{H} := \boldsymbol{B} - 2(\hat{k}_{AF})_0\boldsymbol{A} + 2\hat{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{AF}}A_0 + \hat{\kappa}_{HB}\cdot\boldsymbol{B} + \hat{\kappa}_{HE}\cdot\boldsymbol{E} \tag{2.27}$$

である。また、

$$\begin{aligned}
(\hat{\kappa}_{DE})^{jk} &:= -2(\hat{k}_F)^{0j0k} \\
(\hat{\kappa}_{HB})^{jk} &:= \frac{1}{2}(\hat{k}_F)^{lmrs}\epsilon^{jlm}\epsilon^{krs} \\
(\hat{\kappa}_{DB})^{jk} &= -(\hat{\kappa}_{HE})^{kj} := (\hat{\kappa}_F)^{0jlm}\epsilon^{klm}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

である ($k_F^{(4)}$ の場合についてこれを 3×3 の行列に SO(3) 分解している文献が [13] であり、ここでの定義はこれの一般化である)。

$\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}$ を用いて Lagrangian 密度を書き表すと、

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}) \tag{2.29}$$

となる。この表式もまた巨視的な媒質中の通常の電磁気学での表式と対応している。しかし、保存するエネルギー運動量テンソルを構成する上ではこの類似性は失われる。SME における保存するエネルギー運動量テンソルは次のようになる。

$$T^{\alpha}{}_{\beta} = -G^{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\beta}L + \frac{1}{2}(\partial_{\beta}A_{\gamma} - A_{\gamma}\partial_{\beta})G^{\alpha\gamma} \tag{2.30}$$

第二項までは通常の電磁気学と同じ表式だが、最後の項が付け加えられているため $F_{\mu\nu}, G^{\mu\nu}$ に関して異なる形式となっている。最後の項は通常の電磁気学では別個に保存するのでエネルギー運動量テンソルから取り除かれるのである。ところが一般の Lorentz 不変性を破る項を導入した SME ではエネルギー運動量保存を保つために最後の項が必要とされる。

2.2.2　光速の異方性

本節では光子の Lorentz 不変性の破れを光速の異方性として導入し、得られた表式を簡単化することによって実験の解析をする上で Lorentz 不変性の破れの効果を簡便に表現する方法を示す。

前小節でレビューを与えた Standard Model Extension は光子の Lorentz 不変性を一般的に記述できる理論である。ところがその一般性のために実際の実験セットアップで雑音評価などの種々の解析をするときに必要以上の煩雑さを導入することになってしまう。そこで Lorentz 不変性の破れを光速の異方性として導入する。光子の Lorentz 不変性が破れているということは、光子の性質が Lorentz 変換のもとで不変でなくなり、慣性系の間で共変でなくなるということである。したがって、Lorentz 不変性の破れの効果の一つとして電磁波の速度である光速が慣性系の間で不変でなくなり光速の異方性が現れる。このことから光子の Lorentz 不変性の破れを光速の異方性として導入することで、実験の解析をする上で Lorentz 不変性の破れの効果を簡便に表現することができる。

SME の枠組みではこのような定式化は Camouflage 係数という係数を用いて行われる [12]。実際の実験の計算やデータ解析では光子の Lorentz 不変性の破れの効果が異方性として現れた光速を次のように極座標の角成分について完全系をなしている球面調和関数で展開することで光速

の異方性を導入する。[*4]

$$c(\theta,\phi) = 1 + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} \mathrm{Re}[(\mathrm{\bar{y}_l^m})^* \mathrm{Y_l^m}(\theta,\phi)] \tag{2.31}$$

ここで、$\theta \in [0,\pi], \phi \in [0,2\pi)$ はそれぞれ極座標系における極角と方位角であり、($\bar{y}_l^m \in \mathbb{C}$、

$$Y_l^m(\theta,\phi) := (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \tag{2.32}$$

は球面調和関数である ($P_l^m(x)$ はルジャンドルの陪多項式である)。球面調和関数の定義とその関数形から各項がどのような光速の異方性を表しているかが直ちにわかる。$l=0$ の項は光速の等方的なずれを、l が奇数の項は $Y_l^m(\pi-\theta,\phi+\theta) = -Y_l^m$ より光の行きと帰りによる光速差を生む奇パリティな光速の異方性 (片道光速の異方性) を、l が偶数の項は $Y_l^m(\pi-\theta,\phi+\theta) = Y_l^m$ より光の往復する方向による光速差を生む偶パリティな光速の異方性 (往復光速の異方性) を表していることがわかる。本研究の実験セットアップでは片道光速の異方性を探査できるセットアップになっているので、l が奇数の項の係数 $\bar{y}_l^m$ が 0 であるかどうかを検証することができる。

2.3　本章のまとめ

・Standard Model Extension(SME) は一般的な Lorentz 不変性の破れと CPT 対称性の破れを特徴付けることができる包括的な低エネルギー有効場の理論である。

・SME の Lagrangian 密度において Lorentz 不変性の破れを表す項は Lorentz 不変性を起こす微分演算子とそれに付随する係数、場の量との縮約をとった観測者に依存するテンソル成分として導入される。

・SME の Lorentz 不変性の破れを表す項は光速の異方性を導入し、Camouflage 係数として表現される。

・実際に Lorentz 不変性を検証する光学実験の解析では、光速を球面調和関数で展開することで光速の異方性を表す。

[*4] 異方性探査におけるデータ解析では実験によって測定された球面調和関数の展開係数と Camouflage 係数の関係を考慮して解析を行い、Camouflage 係数を評価する必要がある。[5]

第 3 章
実験理論

本章では光リング共振器を用いた Lorentz 不変性の破れ検証の実験原理について述べる。本研究は Lorentz 不変性の破れの中でも片道光速の異方性のような奇パリティな光速の異方性を探査することができる実験系である。すなわち、本研究は奇パリティの光速の異方性を探査することで、光子の Lorentz 不変性を検証することができる実験系になっている。

3.1 測定原理

前章の最後で述べたように、光子の Lorentz 不変性の破れを光速の異方性として表現することで、実験の解析をする上で Lorentz 不変性の破れの効果を簡便に表すことができる。そこで以降では実験原理を簡潔に示すために、光速の異方性についての式 (2.31) において最低次の異方性までで表現した最も簡単な表式

$$c(\theta) = 1 - a\cos\theta \tag{3.1}$$

を Lorentz 不変性の破れによる奇パリティな光速の異方性を表す式として用いることとする。ここで、a は光速の異方性の球面調和関数展開係数 $\bar{y}_l^m$ と $a = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\bar{y}_1^0$ の関係にある。

図 3.1 のような共振器長が $L := l_1 + l_2 + l_3$ で、3 枚の鏡 M1,M2,M3 で構成された光リング共振器の光路の一部に、長さ d、屈折率 n の媒質が挿入された光リング共振器を考える。簡単のため光リング共振器が座標 θ についての単位ベクトル平面内にあるとし、媒質の方向を座標 θ にとると、光リング共振器の左回りの共振周波数 ν_L は共振条件 (レーザー光が共振器を一周する間に受ける位相変化が 2π の整数倍 (詳細は Appendix D)) より

$$\frac{m}{\nu_L} = \frac{(l_1 - d)}{c(\theta)} + \frac{nd}{c(\theta)} + \frac{l_3}{c(\theta - \theta_2 + \pi)} + \frac{l_2}{c(\theta + \theta_3 + \pi)} \quad (m \in \mathbb{N}) \tag{3.2}$$

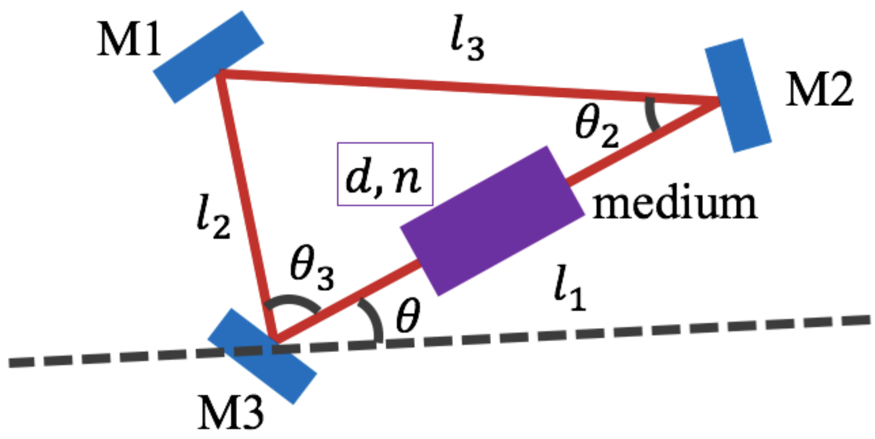

図 3.1　測定原理

となる。$c(\theta)$ に式 (3.1) を代入し a について展開すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{m}{\nu_L} &\simeq l_1 + (n-1)d + l_2 + l_3 + a[(l_1 - d)\cos\theta + nd\cos\theta - l_3\cos(\theta - \theta_2) - l_3\cos(\theta + \theta_3)] \\
&= L + (n-1)d + a(n-1)d\cos\theta
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

となる。同様に右回りの共振周波数 ν_R は、

$$
\frac{m}{\nu_R} = L + (n-1)d - a(n-1)d\cos\theta \tag{3.4}
$$

となる。奇パリティの異方性がないとき $(a = 0)$ の共振周波数 ν_{res} は

$$
\nu_{\mathrm{res}} := \frac{m}{L + (n-1)d} \tag{3.5}
$$

となるので、これを用いて上記の左回り、右回りの共振周波数を書き表すと、

$$
\begin{aligned}
\nu_L &= \frac{m}{L + (n-1)d}\frac{1}{1 + a(n-1)d\cos\theta/(L + (n-1)d)} \\
&\simeq \nu_{\mathrm{res}} - \nu_{\mathrm{res}}\frac{a(n-1)d\cos\theta}{L + (n-1)d}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
\nu_R \simeq \nu_{\mathrm{res}} + \nu_{\mathrm{res}}\frac{a(n-1)d\cos\theta}{L + (n-1)d} \tag{3.7}
$$

したがって、左回りの共振周波数と右回りの共振周波数の差 $\delta\nu$ は

$$
\frac{\delta\nu}{\nu_{\mathrm{res}}} := \frac{\nu_L - \nu_R}{\nu_{\mathrm{res}}} = -\frac{2a(n-1)d}{L + (n-1)d}\cos\theta \tag{3.8}
$$

となる。以上のようにして左回りと右回りの共振周波数の差を取得することで奇パリティの光速の異方性がないとき ($a = 0$) には 0 になり、奇パリティの光速の異方性があるとき ($a \neq 0$) には非ゼロになる異方性信号を得ることができ、奇パリティの光速の異方性を null 測定することができる。本論文では $\delta\nu/\nu_{\mathrm{res}}$ またはこれに比例する信号を異方性信号という。[*1]

このように閉ループの一部の屈折率を変えることで奇パリティの光速の異方性に感度を持たせることを最初に利用し、Sagnac 干渉計を用いて異方性探査を行ったのが 1973 年の Trimmer らによる実験である [14]。彼らは片道光速の異方性 $\delta c/c$ を 8.4×10^{-11} の精度で探査している。その後 Baynes らはこの原理を光リング共振器に用いて Lorentz 不変性検証を行い、片道光速の検証精度は向上していった [15]。光リング共振器の両回りの共振周波数を比較するのに Baynes らは二つのレーザーを用いていたが、この構成ではロックインを避けるために二つのレーザー周波数をずらす必要があり、null 測定になっていなかった。道村氏らは一つのレーザーを用い、左回りの共振による透過光を打ち返して右回りに入射させることで両回りの共振周波数を比較するダブルパス構成をとることで null 測定を実現し、片道光速の異方性 $\delta c/c$ を 10^{-15} の精度で探査した [5]。本研究の実験原理は道村氏の実験に即している。次節ではこの実験原理について述べる。

3.2　実験原理

本節では以上の測定原理をもとにした奇パリティの光速の異方性探査の実験原理と実験装置について述べる。実験原理は先行研究 [5] に即している。本研究は媒質を共振器の光路に加えた非対称光リング共振器を用いて Lorentz 不変性の破れの中でも片道光速の異方性のような奇パリティの光速の異方性を探査することができる実験系である。実験セットアップの全体図が図 3.2 である。

レーザーからの光はコリメータによって空間光になり、媒質 (シリコン) を光路の一部に加えた光リング共振器に左回り (反時計回り) に入射する。左側の PD のポートで得た入射光 (レーザー光) の周波数と光リング共振器の左回りの共振周波数 ν_L の差に比例した信号[*2]を各種のフィルターを通してレーザーに内蔵された周波数変調機構のピエゾ (PZT) に返しフィードバック制御することでレーザーの周波数を左回りの共振周波数に制御する。一方、左回りに入射したビームの透過光は打ち返し用の鏡によって反射され、再び光リング共振器に右回り (時計回り) に入射

[*1] 実際の異方性探査では光学系を信号変調のために回転させるが、本研究では実際に異方性探査を行なっているわけではないので感度などは静止時のものである。しかしこの場合にも異方性信号が得られるポートの信号という意味で異方性信号という用語を用いる。
[*2] 本研究ではこのような周波数さの信号を得るのに偏光解析法を用いている Appendix D。

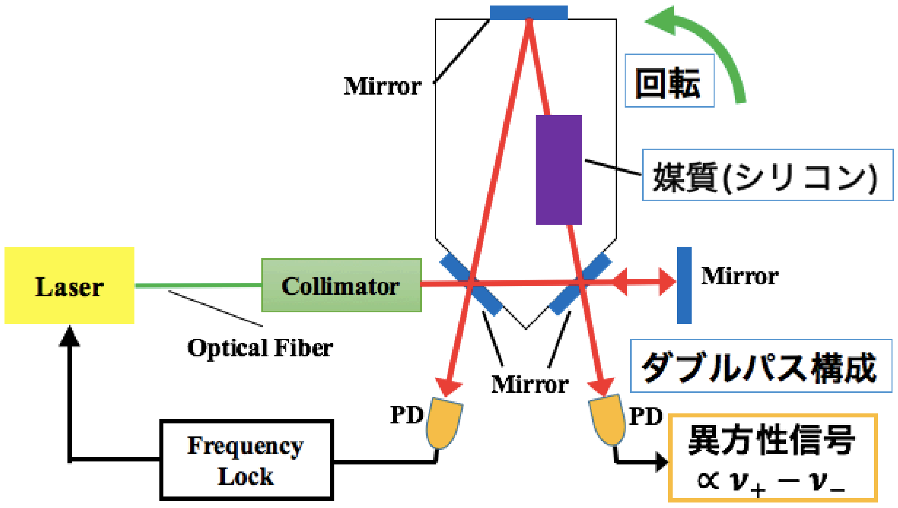

図 3.2　実験概念図

する。すると右側の PD のポートではレーザーの周波数 (左回りにロックされているので左回りの共振周波数と同じ) と光リング共振器の右回りの共振周波数 ν_R の差に比例した信号 $\delta\nu$[*3]を得ることができる。測定原理の節で述べたように光速の奇パリティの異方性として現れる Lorentz 不変性の破れの効果は、非対称化された光リング共振器の左回りと右回りの共振周波数のズレに異符号で現れる。したがってこのようにして左回りの共振周波数と右回りの共振周波数の差を取得することで、異方性信号に比例した信号を null 測定することが出来る。このような光学構成をダブルパス構成といい、重力波検出器のモードクリーナー用に提案された構成である [16]。光リング共振器内の光路は鏡の位置が定まれば一意に決まるので、左回りと右回りの光路は一致する。したがって、共振器長変動は両回りの共振周波数を同相で変化させるため、差動測定によって環境変動による共振周波数変動に対して同相雑音除去が効き、原理的には共振器長変動は信号には現れず高い精度を出すことができる。これがダブルパス構成の大きな利点である。実際に異方性の探査をするときにはモーターなどで光学系全体を回転させる ($\theta = \omega_{\mathrm{rot}} t$) ことによって式 (3.8) に雑音の相対的な影響を減らすための変調をかけて異方性探査を行う。得られた信号の変調成分を取り出すことで奇パリティの光速の異方性を探査し、光子の Lorentz 不変性の検証を行うことができる。

[*3] ここでも本研究ではこのような信号を得るのに偏光解析法を用いている Appendix D。

[*4] 最後に感度と異方性との関係について見る。異方性信号は式 (3.8) より、

$$s(t) := \frac{\delta\nu}{\nu_{\mathrm{res}}} := \frac{\nu_L - \nu_R}{\nu_{\mathrm{res}}} = -\frac{2a(n-1)d}{L+(n-1)d}\cos\theta \tag{3.9}$$

である。地球の自転の効果などを簡単のために無視すると $\theta \simeq \omega_{\mathrm{rot}} t$ であり、$s(t)$ の ω_{rot} 成分の振幅を求めることで a を測定できる。ω_{rot} 成分の振幅 ψ は $s(t)$ の離散 Fourier 変換 $S(\omega)$ を用いて、

$$\psi \sim \sqrt{\left|\frac{2}{N}S(\omega_{\mathrm{rot}})\right|^2} \tag{3.10}$$

と表せる。ここで N はデータ点数である。一方 $s(t)$ のパワースペクトル密度は、[*5] f_s をサンプリング周波数として、

$$\mathcal{P}_s(\omega_{\mathrm{rot}}) = \sqrt{\frac{1}{Nf_s}|S(\omega_{\mathrm{rot}})|^2} \tag{3.11}$$

と表せる。パワースペクトルは感度や雑音レベルを評価するためによく用いられる指標である。上の二式から、

$$\psi \sim \frac{2}{\sqrt{T}}\mathcal{P}_s(\omega_{\mathrm{rot}}) \tag{3.12}$$

が導かれる。ここで T は測定時間であり、ψ の精度は測定時間の平方根に反比例することがわかる。

また、

$$\delta c := c(\theta+\pi) - c(\theta) = 2a\cos\theta \tag{3.13}$$

より、

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{(n-1)d}{L+(n-1)d}\frac{\delta c}{c} \tag{3.14}$$

の関係がある。したがって、異方性信号 $\delta\nu/\nu$ を評価することで a や $\delta c/c$ を評価することができる。

[*4] 本研究ではモノリシック光学系の開発と同相雑音除去比の実測が実験の主題なので光学系をモーターに載せて回転させ、信号に変調をかけるようなことは行なっていない。

[*5] ある時間関数の不規則信号 $x(t)$ が与えられると、それを Laplase 変換、または Fourier 変換することで s 領域、または周波数領域での成分 $X(s), X(f)$ が得られる。この周波数成分 $X(f)$ をもとにパワースペクトル密度が $\mathcal{P}_x(f) := \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|X(f)|^2$ によって得られる。$x(t)$ が定数項を持つような場合でも、超関数を用いれば Fourier 変換可能であり問題はない (そのような DC 成分はデルタ関数として現れるため計算の際には取り除けば良い)。

3.3　周波数制御と信号取得

この節では、前節で説明した実験原理を実現するための周波数制御と信号取得の方法について述べる。本研究の光学系の全体の構成は図 3.3 のようになっている。

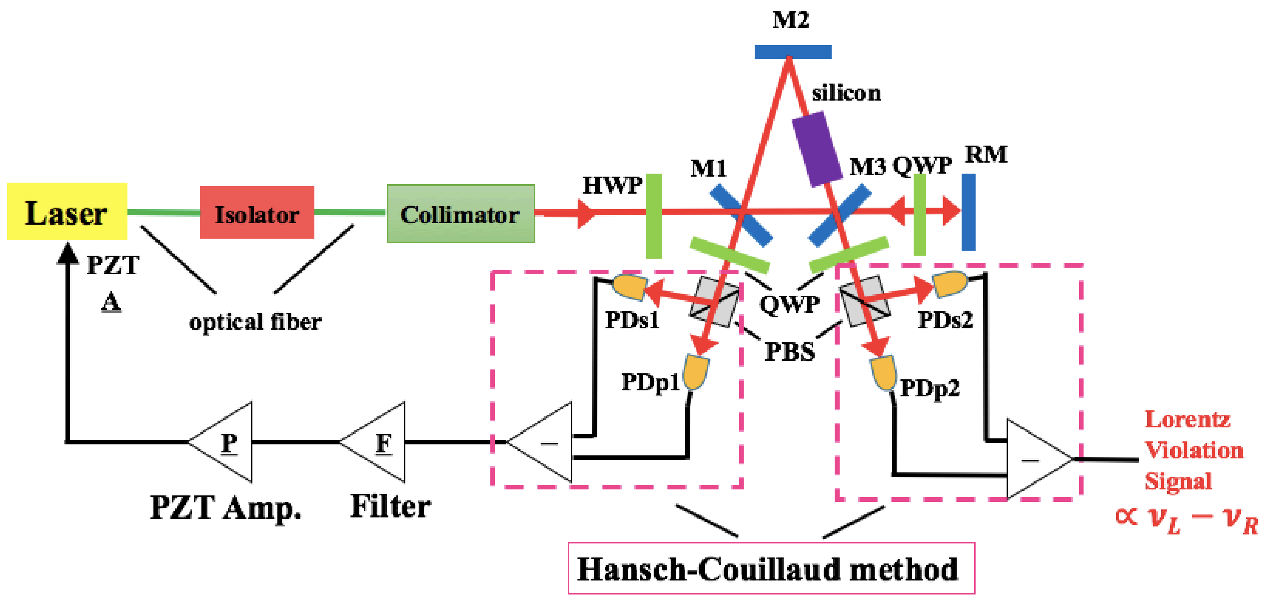

図 3.3　信号取得光学系

まず入射光の周波数と光リング共振器の共振周波数の差に比例する信号を得るのに用いた偏光解析法 (Hansch-Couillaud Method) について述べる。偏光解析法の原理と計算などの詳細は Appendix D にまとめた。図中のピンク色の点線で囲まれた部分と光リング共振器の周りの各所に配置された 1 枚の 1/2 波長板と 3 枚の 1/4 波長板が周波数制御と異方性信号取得のために、偏光解析法を行うのに必要な光学系である。偏光解析法とは、光リング共振器の偏光選択性を利用しエラー信号を取得する方法である。波長板を用いて入射光に非共振な偏光成分を混ぜ、反射光に含まれる p 偏光と s 偏光を 1/4 波長板と PBS を用いて干渉させることで、入射光の周波数と光リング共振器の共振周波数の差である信号を取り出すことができる。PBS によって分けた光を二つの光検出器で検出し、その差動をとることで理想的には強度雑音が効かない構成になっている。PDp1 と PDs1 によって得られたレーザー光の周波数と左回りの共振周波数の差に比例したエラー信号をレーザー内部の PZT による周波数変調機構にフィードバックすることで、左回りの共振周波数にレーザーの周波数をロックする。レーザーの周波数が左回りの共振周波数にロックされると、その透過光が M3 から一部透過し、ダブルパス構成によって打ち返し鏡で反射され再び光リング共振器に右回りに入射される。この反射光に対しても偏光解析法を用いるこ

とで、PDp2 と PDs2 で入射光の周波数[*6]と右回りの共振周波数の差に比例した信号、すなわち異方性信号 (Lorentz Violation Signal) が得られる。ここまでで見てきたように、本実験セットアップでは周波数制御を行うためにエラー信号を取得する部分と、異方性信号を取得する部分の二箇所で偏光解析法が用いられている。　偏光解析法によって入射光の周波数と光リング共振器の共振周波数の差に比例した電圧信号を取得することができる。この比例係数 H を偏光解析の効率、センサー効率、または較正係数という。周波数差を $\delta\nu$、得られた電圧信号を δV とすると。

$$\delta\nu = H\delta V \tag{3.15}$$

となる。[*7]左回りの偏光解析 (PDp1,PDs1 を用いる) についての偏光解析の効率を H_1、右回りの偏光解析 (PDp2,PDs2 を用いる) についての偏光解析の効率を H_2 と表すことにする。

次に周波数制御について述べる。フィルターの伝達関数を F [V/V]、PZT アンプの伝達関数を P [V/V]、レーザー内部のピエゾ素子による周波数変調効率を A [Hz/V] とすると、周波数制御のオープンループ伝達関数 G は、

$$G = H_1FPA \tag{3.16}$$

と表せる (Laplace 変換や伝達関数等については E 章を、フィードバック制御については F 章を参照)。F は作成したフィルター回路の伝達関数なので設計値が存在し、また Servo 解析により測定が可能。P は PZT アンプのゲインなので既知であり、その倍率は 10 である。A は非対称 Michelson 干渉計を用いて測定が可能である。したがって、G を測定することで、H_1 の値を知ることができる。また、PDp2,PDs2 側で同様にレーザー周波数制御を行えば、そのときのオープンループ伝達関数を測ることで同様に H_2 についてもその値を知ることができる。

3.4 Block Diagram

以上の本研究における光学系の実験原理を Block Diagram で表したものが図 3.4 である。本節ではこの Block Diagram について述べる (伝達関数や Block Diagram については Appendix E と Appendix F を参照されたい)。

図 3.4 の下部分はレーザー周波数制御を表すフィードバック制御部分である (式 (3.16))。ま

[*6] RM(打ち返し鏡) で反射された光なので、周波数制御されている場合にはこの光の周波数は左回りの共振周波数にロックされている。

[*7] この式では H は定数なので Fourier 変換によって時間領域でも周波数領域でも同じ形の式が成り立つ。そこで上式では時間領域か周波数領域での式なのかを明示的に書き表していない。したがって偏光解析法による周波数差から出力電圧までの伝達関数はこの比例係数そのものになる。Fourier 変換や伝達関数についての詳細は Appendix E を参照。

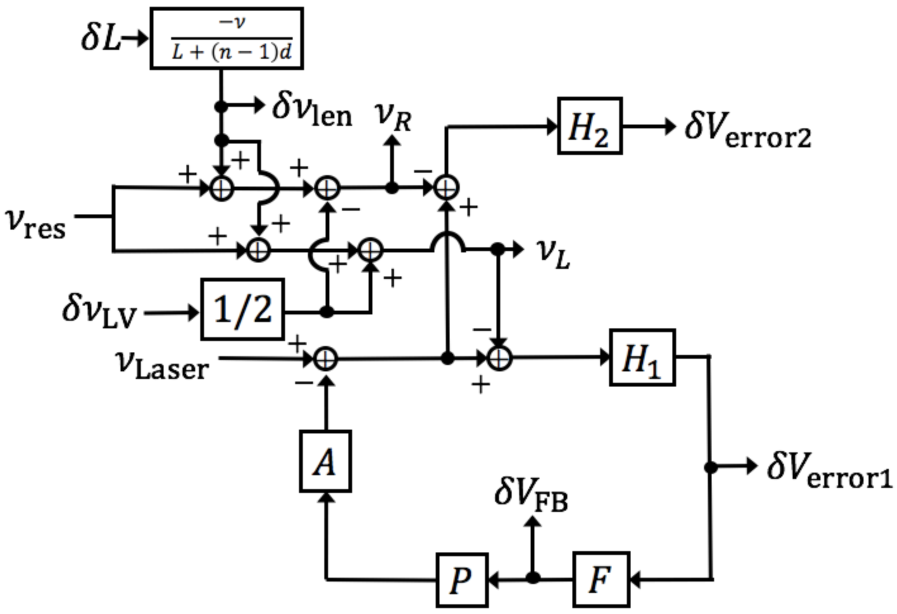

図 3.4　Block Diagram

た、右上部分は偏光解析法による異方性信号取得部分を表している (式 (3.15))。

図 3.4 の左上部分は光リング共振器の共振周波数の各種関係を表す。光リング共振器の左回りの共振周波数 ν_L と右回りの共振周波数 ν_R は本章始めの節で導出した式 (3.6) や式 (3.7) のように次式で表される。

$$\nu_L \simeq \nu_{\rm res} + \frac{1}{2}\delta\nu_{\rm LV} \tag{3.17}$$

$$\nu_R \simeq \nu_{\rm res} - \frac{1}{2}\delta\nu_{\rm LV} \tag{3.18}$$

である。ここで、$\delta\nu_{LV}$ は、

$$\delta\nu_{\rm LV} := -2\nu_{\rm res}\frac{a(n-1)d\cos\theta}{L+(n-1)d} \tag{3.19}$$

で定義される奇パリティの光速の異方性による寄与である。また、$\nu_{\rm res}$ は光速の異方性がないときの共振周波数である。

$$\nu_{\rm res} := \frac{m}{L+(n-1)d} \tag{3.20}$$

温度変動などの環境変動によって $L \to L + \delta L$ の共振器調変動が引き起こされると、

$$\delta\nu_{\rm res} \to \delta\nu_{\rm res} - \frac{\nu_{\rm res}}{L+(n-1)d}\delta L \tag{3.21}$$

のように変化する。したがって、奇パリティの光速の異方性と共振器調変動がある場合の左回り

の共振周波数と右回りの共振周波数は次のように書き表される。

$$\nu_L \simeq \nu_{\mathrm{res}} + \frac{1}{2}\delta\nu_{\mathrm{LV}} + \delta\nu_{\mathrm{len}} \tag{3.22}$$

$$\nu_R \simeq \nu_{\mathrm{res}} - \frac{1}{2}\delta\nu_{\mathrm{LV}} + \delta\nu_{\mathrm{len}} \tag{3.23}$$

ここで、$\delta\nu_{\mathrm{len}}$ は共振器長変動による寄与であり、次式のようになる。

$$\delta\nu_{\mathrm{len}} = -\frac{\nu_{\mathrm{res}}}{L+(n-1)d}\delta L \tag{3.24}$$

レーザーの周波数を変調できる範囲は十分に小さいので、近似的に ν_{res} はレーザーの波長 λ(本実験では 1550 nm) から単純に計算して得られるレーザーの周波数 $\nu = c/\lambda$ と同一視して構わない。[*8] そこで以降での議論と図 3.4 では状況に応じて $\nu_{\mathrm{res}} \simeq \nu$ の関係を用いている。

実際に本研究の実験で取得する主な電圧信号は図 3.4 中の $\delta V_{\mathrm{error1}}, \delta V_{\mathrm{error2}}, \delta V_{\mathrm{FB}}$ の三種類である。$\delta V_{\mathrm{error1}}$ は周波数制御内の信号であり、偏光解析によって得られる入射するレーザー光の周波数と左回りの共振周波数の差に比例する信号である。$\delta V_{\mathrm{error2}}$ は偏光解析法によって得られる左回りの共振周波数と右回りの共振周波数の差に比例した異方性信号である。δV_{FB} はレーザー内部の周波数変調機構である PZT にフィードバックするフィルター回路を通った直後の信号である。図 3.4 から、これらの電圧信号は次のように表される。[*9] $G := H_1FPA$ はオープンループゲインであり、フィードバック制御のために低周波では十分に高いゲインを保ち、高周波では雑音の影響を抑えるために低いゲインになるように設計されている。まず、$\delta V_{\mathrm{error1}}$ に対して、

$$\begin{aligned}\frac{\delta V_{\mathrm{error1}}}{\nu H_1} &= \frac{1}{1+G}\left(\frac{\nu_{\mathrm{laser}}}{\nu} - \frac{\nu_L}{\nu}\right) \\ &= \frac{1}{1+G}\left(\frac{\nu_{\mathrm{laser}}}{\nu} - \frac{\nu_{\mathrm{res}}}{\nu} - \frac{\delta\nu_{\mathrm{LV}}}{2\nu} - \frac{\delta\nu_{\mathrm{len}}}{\nu}\right) \\ &\to 0\end{aligned} \tag{3.25}$$

となる。矢印は $G \to \infty$ の極限であり、この式から $\nu_{\mathrm{laser}} = \nu_L$ となり、レーザーの周波数が左

[*8] ν_{laser} はレーザー内部の周波数変調機構による変調を受けた周波数で、ν は仕様の定数波長から単純に計算された周波数である。周波数変調の影響を考慮する必要がある部分では ν_{laser} を用い、その必要がなく近似しても構わない部分では ν を用いた。

[*9] むしろ以下の関係式は実験原理を数式で表現したものであり、Block Diagram はこれらの実験原理を表す数式を一つの Diagram として表示したものに過ぎない。

回りの共振周波数にロックされていることがわかる。次に、$\delta V_{\mathrm{error2}}$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta V_{\mathrm{error2}}}{\nu H_2} &= \frac{G}{1+G}\frac{\nu_L}{\nu} - \frac{\nu_R}{\nu} \\
&\to \frac{\nu_L}{\nu} - \frac{\nu_R}{\nu} \\
&= \frac{\delta\nu_{\mathrm{LV}}}{\nu} + \frac{\delta\nu_{\mathrm{len}}}{\nu} - \frac{\delta\nu_{\mathrm{len}}}{\nu} \\
&= \delta\nu_{\mathrm{LV}} + \gamma_{\mathrm{CMRR}}\frac{\delta\nu_{\mathrm{len}}}{\nu}
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

が得られる。ダブルパス構成と偏光解析法による差動出力のおかげで理想的には $\gamma_{\mathrm{CMRR}} = 0$ であり、共振器超変動による寄与 $\delta\nu_{\mathrm{len}}$ は現れないが、実際には有限の γ_{CMRR} になってしまい、共振器長変動は完全にはキャンセルされない。この γ_{CMRR} を同相雑音除去比といい、同相雑音除去がどの程度効いているかを表すパラメータとなる。

最後に δV_{FB} に対して、

$$
\begin{aligned}
\frac{PA\delta V_{\mathrm{FB}}}{\nu} &= \frac{G}{1+G}\left(\frac{\nu_{\mathrm{laser}}}{\nu} - \frac{\nu_L}{\nu}\right) \\
&\to \left(\frac{\nu_{\mathrm{laser}}}{\nu} - \frac{\nu_{\mathrm{res}}}{\nu} - \frac{\delta\nu_{\mathrm{LV}}}{2\nu} - \frac{\delta\nu_{\mathrm{len}}}{\nu}\right)
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

が得られる。したがって δV_{FB} に P, A を掛けた信号には $\delta\nu_{\mathrm{len}}$ の寄与が現れることがわかる。本研究の同相雑音除去比測定ではこのことを利用している。すなわち、共振器長変動を外部から誘起し、共振器長変動が理想的には現れない $\delta V_{\mathrm{error2}}$ と共振器調変動が現れる δV_{FB} の信号を比較することで同相雑音除去比の評価を行なったのである (5 章)。

3.5　雑音源

本節では光リング共振器を用いた奇パリティの光速の異方性探査実験における雑音源とその寄与について述べる。本研究の構成は光リング共振器の左右の共振周波数を比較することで、同相雑音除去により環境変動による雑音に強い構成となっているが、同相雑音除去が効かない雑音も存在する。まず、同相雑音除去が効かない共振器長変動に起因しない雑音について述べ、その後に同相雑音除去が効く共振器長変動に関する雑音について同相雑音除去の働いている度合いを表すパラメータである同相雑音除去比 γ_{CMRR} を用いて述べる。

3.5.1　共振器長変動に起因しない雑音

散射雑音

散射雑音 (ショットノイズ) とは光検出器で光の強度を測定する光学測定において光子数が量子的に揺らぐことに起因する雑音である。散射雑音は白色雑音であり、光強度の測定によって光検出器に出力される電流を I_{PD} とする、その雑音電流のパワースペクトルを $\mathcal{P}^{\mathrm{shot}}_{I_{PD}}$ とすると、

$$\mathcal{P}^{\mathrm{shot}}_{I_{PD}} = \sqrt{2eI_{PD}} \tag{3.28}$$

で表される [17]。入射光子一つあたりの出力電子数で定義される量子効率 η

$$\eta := \frac{I_{PD}/e}{P_{PD}/h\nu} \tag{3.29}$$

を用いて、

$$I_{PD} = \frac{e}{h\nu}\eta P_{PD} \tag{3.30}$$

と表される。したがって、散射雑音によって定まる光強度変化を検出する限界は、

$$\mathcal{P}_{P_{PD}} = \sqrt{\frac{2h\nu P_{PD}}{\eta}} \tag{3.31}$$

となる。式 (D.98) のように $P_{\mathrm{diff}} = P'_s - P'_p$ であるから、$\mathcal{P}^{\mathrm{shot}}_{P_{\mathrm{diff}}} = \sqrt{2}\mathcal{P}^{\mathrm{shot}}_{P_{PD}}$ と表される。

本研究では偏光解析法によりエラー信号を取得する (Appendix D)。偏光解析法では共振点で 1 つの光検出器に入射する光強度は式 (D.100) より、

$$P_{PD} = \frac{1}{4}P_0 \tag{3.32}$$

で与えられる。光リング共振器を光が一周することで生じる位相 ϕ に対する、共振点近傍でのエラー信号 P_{diff} の変化は式 (D.101) より、

$$\left.\frac{\partial P_{\mathrm{diff}}}{\partial \phi}\right|_{\phi\sim 2\pi m} = \frac{1}{\pi}P_0\mathcal{F} \tag{3.33}$$

となる。したがって散射雑音によって定まる位相差を検出する限界は、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\delta\phi}^{\mathrm{shot}} &= \mathcal{P}_{P_{\mathrm{diff}}}^{\mathrm{shot}} \left(\frac{\partial P_{\mathrm{diff}}}{\partial \phi}\right)^{-1} \\
&= \frac{\pi}{\mathcal{F}}\sqrt{\frac{h\nu}{\eta P_0}}
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

と表される。

$$
\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\{L + (n-1)d\}
\tag{3.35}
$$

なので、散射雑音によって定まる共振周波数差を検出する限界は、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\delta\nu/\nu}^{\mathrm{shot}} &= \mathcal{P}_{\delta\phi/\phi}^{\mathrm{shot}} \\
&= \mathcal{P}_{\delta\phi}^{\mathrm{shot}}/\phi \\
&= \frac{1}{2\{L+(n-1)d\}\mathcal{F}}\sqrt{\frac{ch\lambda}{\eta P_0}}
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

となる。

レーザー強度雑音

入射光の周波数と光リング共振器の共振周波数の差に比例するエラー信号を光検出器によって光強度の変動として取得する実験では入射光強度の変動が検出したい周波数差と区別できなくなり得る。ところが、本実験では 2 つの光検出器の作動をとる偏光解析法を用いているため、2 つの光検出器に同相で含まれる強度雑音に対して強度に対する同相雑音除去が働く。理想的な状況では完全に同相雑音除去が働くが、現実的な実験系では完全には働かない。強度に対する同相雑音除去の効果の程度を表すパラメータを $\gamma_{\mathrm{CMRR}}^{\mathrm{int}}$ として、次式で定義する。

$$
P_{\mathrm{diff}} = P_s' - P_p' \simeq= \frac{1}{4}P_0 - \frac{1}{4}P_0 =: \gamma_{\mathrm{CMRR}}^{\mathrm{int}}\frac{1}{4}P_0
\tag{3.37}
$$

したがって、エラー信号 P_{diff} における強度雑音の寄与は、

$$
\mathcal{P}_{P_{\mathrm{diff}}^{\mathrm{int}}} = \frac{1}{4}\gamma_{\mathrm{CMRR}}^{\mathrm{int}}\mathcal{P}_{P_0}
\tag{3.38}
$$

となる。したがって、強度雑音によって定まる位相差を検出する限界は、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^{\mathrm{int}}_{\delta\nu/\nu} &= \mathcal{P}^{\mathrm{int}}_{\delta\phi}/\phi \\
&= \mathcal{P}^{\mathrm{int}}_{P_{\mathrm{diff}}}\left(\frac{\partial P_{\mathrm{diff}}}{\partial \phi}\right)^{-1}/\phi \\
&= \frac{\lambda \gamma^{\mathrm{int}}_{\mathrm{CMRR}}}{8\{L+(n-1)d\}\mathcal{F}}\frac{\mathcal{P}_{P_0}}{P_0}
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

となる。

レーザー周波数雑音

本実験では偏光解析法を用いて、レーザー周波数を光リング共振器の左回りの共振周波数にロックし、その周波数の透過光を右回りに入射させて両回りの共振周波数を比較する。しかし、理想的には $\nu_{\mathrm{laser}} = \nu_L$ であるが、実際には $\nu_{\mathrm{laser}} - \nu_L$ に残留周波数変動があり、これが雑音となる。この雑音をレーザー周波数雑音という。

本研究で用いた光リング共振器の共振の半値全幅は

$$
\nu_{\mathrm{FWHM}} = \frac{c}{\{L+(n-1)d\}\mathcal{F}} \sim 10\ \mathrm{MHz} \tag{3.40}
$$

程度であり、これは周波数安定化後の残留変動よりも十分大きいと考えられる。したがって、左回りの透過光の周波数もレーザー周波数と同様に変動することになる。したがってレーザー周波数の安定度がそのまま異方性信号にも寄与してしまう。すなわちレーザー周波数雑音によって定まる共振周波数差を検出する限界は、レーザーの周波数変動を $\mathcal{P}_{\nu_{\mathrm{laser}}}$ として、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^{\mathrm{laser}}_{\delta\nu/\nu} &= \mathcal{P}_{\nu_L-\nu_R}/\nu \\
&= \frac{\mathcal{P}_{\nu_{\mathrm{laser}}}}{\nu}
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

となる。

Sagnac 効果雑音

実際の Lorentz 不変性検証では信号に変調を加えるために光リング共振器を回転台で回転させる。回転する光リング共振器の両回りの共振周波数は、Sagnac 効果 [18] によってずれる。回転角速度が変動することで Sagnac 効果による両回りの共振周波数のずれも変動し雑音となる。この雑音を Sagnac 効果雑音という。

レーザー光が左回り、右回りで一周するときに生じる位相の差は

$$\delta\phi^{\mathrm{Sagnac}} = \frac{4\pi}{c\lambda}\int_l \boldsymbol{v}_l \cdot d\boldsymbol{l} \tag{3.42}$$

で与えられる [19]。光路の屈折率によらず、積分路 l は光路にとってあり、$\boldsymbol{v}_l$ は回転による線素の速度である。したがって、Sagnac 効果によって定まる両周りの共振周波数差を検出する限界は、回転角速度変動を $\mathcal{P}_{\omega_{\mathrm{rot}}}$ として、

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\mathrm{Sagnac}}_{\delta\nu/\nu} &= \mathcal{P}_{\delta\phi^{\mathrm{Sagnac}}/\phi} \\ &= \mathcal{P}_{\delta\phi^{\mathrm{Sagnac}}}/\phi \\ &= \frac{4S}{c\{L+(n-1)d\}}\mathcal{P}_{\omega_{\mathrm{rot}}} \end{aligned} \tag{3.43}$$

となる。ここで S は共振器の光路を囲う面積である。

3.5.2　共振器長変動に関する雑音

式 (3.26), 式 (3.24) より、共振器長変動 δL はエラー信号 P_{diff} に同相雑音除去比 γ_{CMRR} を用いて次のように現れる。

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \gamma_{\mathrm{CMRR}}\frac{\delta\nu_{\mathrm{len}}}{\nu} \tag{3.44}$$

$$\delta\nu_{\mathrm{len}} = -\frac{\nu_{\mathrm{res}}}{L+(n-1)d}\delta L \tag{3.45}$$

したがって、共振器長変動によって定まる両周りの共振周波数差を検出する限界は、

$$\mathcal{P}^{\mathrm{len}}_{\delta\nu/\nu} = \gamma_{\mathrm{CMRR}}\frac{\mathcal{P}_{\delta L}}{L+(n-1)d} \tag{3.46}$$

となる。

振動雑音

地面振動や回転台の振動などによって共振器長が変化しても、両周りの共振周波数で同相に変化するため原理的には雑音にはならない。さらに、光学系の各部分を強固に固定することで光学系全体が同相で移動するようになり、振動の影響を低減することができる。本研究で製作したモノリシック光学系では、共振器を構成する鏡を一つのスペーサーに固定し、さらに全体の光学系もモノリシックにすることで一体化した。

振動による変位を x^{seis} とし、共振器を一枚のスペーサーに固定したことによる同相雑音除去

比 $\gamma_{\mathrm{CMRR}}^{\mathrm{rigid}}$ を次式で定義することで振動によって引き起こされる共振器長変動 δL^{seis} は

$$\delta L^{\mathrm{seis}} = \gamma_{\mathrm{CMRR}}^{\mathrm{rigid}} x^{\mathrm{seis}} \tag{3.47}$$

となる。$\gamma_{\mathrm{CMRR}}^{\mathrm{rigid}}$ は 10^{-6} 程度が経験上期待されるのでこの値を本研究の解析では採用する。

温度変動による共振器長変動

共振器の温度変動によって熱膨張が起きると共振器長変動が引き起こされる。本研究ではその影響を抑えるために、鏡を固定するスペーサーや光学系を固定する土台にスーパーインバーという熱膨張率の小さい合金を使用した。　共振器の温度変動を δT_{cav} とする。共振器スペーサー (スーパーインバー) とシリコンの熱膨張係数をそれぞれ $\alpha_{\mathrm{inv}} \sim 6 \times 10^{-7}$ /K, $\alpha_{Si} \sim 4 \times 10^{-6}$ /K とし [20]、シリコンの熱光学係数を $dn/dT \sim 1.8 \times 10^{-4}$ /K とすると [21]、温度変動によって生じる共振器長変動は、

$$\delta L^{\mathrm{temp}} = \left[\alpha_{\mathrm{inv}} L + \alpha_{Si}(n-1)d + \frac{dn}{dT} d \right] \delta T_{cav} \tag{3.48}$$

となる。

傾き変動による雑音

回転に伴って共振器の傾きが変動すると、重力によって共振器が伸縮する。簡単のためスペーサーの形状を長さ $l \sim L/2$ の直方体とする。水平からの共振器の傾き $\delta\phi$ によって長さ方向に重力加速度 $g \sin\delta\phi \simeq g\delta\phi$ を受けるので、重力による伸縮は、

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{\rho l g}{2E} \delta\phi \tag{3.49}$$

と表せる。ここで、$\rho = 8 \times 10^3$ kg/m^3 はスーパーインバーの密度、$E = 140$ GPa はその Young 率である [20]。したがって、回転台の傾き変動によって生じる共振器長変動は、

$$\delta L^{\mathrm{tilt}} \sim 2\delta l = \frac{\rho (L/2)^2 g}{2E} \delta\phi \tag{3.50}$$

となる。

遠心力変動による雑音

回転速度の変動によって共振器に加わる遠心力が変動することで共振器が伸縮する。この遠心力変動による雑音は、上の傾き変動による雑音において $g \sin\delta\phi \to \delta(r\omega_{\mathrm{rot}}^2)$ とすれば良い。し

たがって、遠心力変動によって生じる共振器長変動は回転半径を $r \sim L/2$ とおいて、

$$\delta L^{\mathrm{cent}} = \frac{\rho(L/2)^3\omega_{\mathrm{rot}}}{E}\delta\omega_{\mathrm{rot}} \tag{3.51}$$

となる。

3.6　本章のまとめ

・媒質を光リング共振器の光路の一部に加えて非対称化することで奇パリティの光速の異方性に感度を持たすことができる (本実験系の光学配置と測定原理は先行研究 [5] と同じ)。

・ダブルパス構成によって共振器長変動は両回りの共振周波数を同相で変化させるため、差動測定によって環境変動による共振周波数変動に対して同相雑音除去が効き、原理的には共振器長変動は信号には現れず高い精度を出すことができる。

・入射光の周波数と光リング共振器の共振周波数の差であるエラー信号を取得するのには偏光解析法を用いた。本実験系では周波数制御と異方性信号取得の二箇所で偏光解析法が用いられている。

・異方性信号には共振器長変動は理想的には現れないが、フィードバック信号には現れる。

・考えられる雑音には共振器長変動に対する同相雑音除去が効くものと効かないものがある。

第 4 章
モノリシック光学系

本章ではモノリシック光学系の製作とアラインメント手法の開発について述べる。本研究では 3 章で述べた奇パリティの光速の異方性に感度を持ち光子の Lorentz 不変性を検証することができる光学系をモノリシック光学系で製作した。先行研究における雑音レベルやセンサー効率などと製作したモノリシック光学系のそれらとを比較することでモノリシック光学系やアラインメント手法の有効性を示す。

4.1　研究背景

定義 **4.1** (モノリシック光学系)
モノリシック光学系とは、光学素子を接着剤等を用いて一枚の土台に固定し、光学素子と土台 (optical bench) が一体化した光学系である。

モノリシック光学系は LIGO の Output Mode Cleaner(OMC) [22] や LISA Pathfinder の変位読み取り光学系で使用されており (図 4.1)、変位を読み取る光学系の光学素子の振動による雑音である変位読み取り雑音を低減する有望な技術である。LISA Pathfinder では、0.1 Hz で $3.5 \times 10^{-14}\ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ という変位感度が宇宙空間で達成されている [23]。

LIGO の OMC では共振器部分をモノリシック光学系に、LISA Pathfinder では入射光学系と干渉計部分をモノリシック光学系にしている。干渉計と異なって共振器では透過光が見える程度にアラインメントが合っていないと光強度をモニターしながらアラインメントを合わせることができないので、一般に干渉計よりも共振器のアラインメントをとる方が難しい。本研究で製作したモノリシック光学系は入射光学系と共振器が一体となった世界初のモノリシック光学系である。

共振器を用いた Lorentz 不変性の検証実験では、一般的に信号に変調を加えるために装置を回転させる必要がある [5, 11]。そのため、一般に Lorentz 不変性検証実験では回転台の回転による

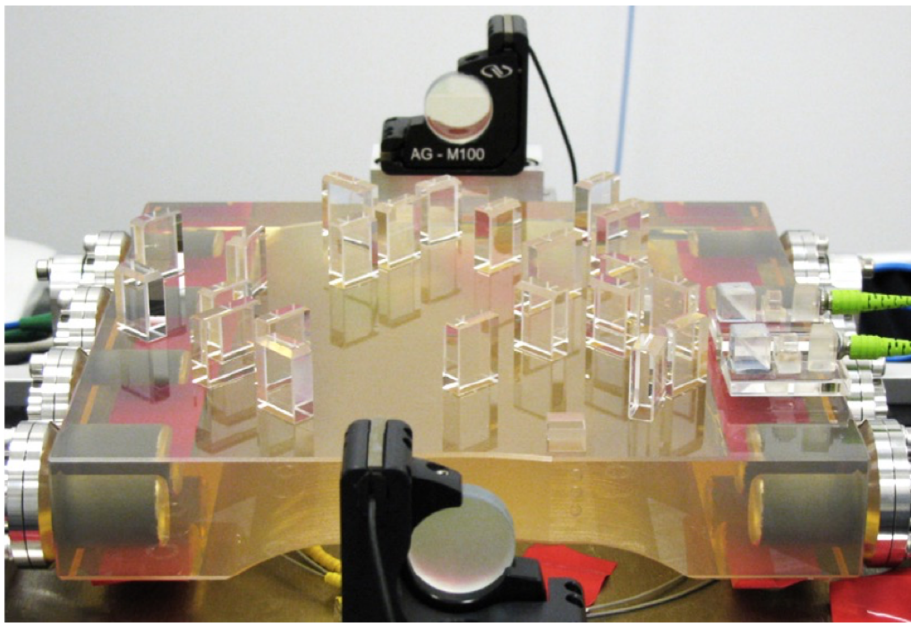

図 4.1　LISA Pathfinder のモノリシック光学系 [24]

振動雑音が主要な雑音となっている。したがって共振器を用いた Lorentz 不変性の検証実験でもモノリシック光学系を使用することで装置の回転による光学素子の振動による雑音を低減することができると考えられる。モノリシック光学系では、光学素子と土台を接着し一体化させる必要がある。モノリシック光学系の接着方法としては Hydroxide Catalsis Bonding(HCB) [25]、optical contact [26, 27], 紫外線硬化樹脂 [28] などが知られている。HCB や optical contact は機械強度や機械安定度が高いことがわかっているが、接着すると基本的に取り外しが効かない。本研究のような共振器を共振させるためにアラインメントをとる必要がある系では、紫外線の照射によって硬化し、アセトンなどの溶剤で取り外し可能な紫外線硬化樹脂が有望であると考えられる。ところが紫外線硬化樹脂を用いたモノリシック光学系の構築や性能評価はあまり行われていないので、実験的検証が必要とされる。本研究では、3 章で述べた Lorentz 不変性の破れによる奇パリティの光速の異方性に感度をもつ光リング共振器を用いた [5, 7–9] の構成をモノリシック光学系で設計、製作した。また、モノリシック光学系は光学素子と土台を一体化させるため振動に強い光学系だが、そのためアラインメントをとるのが通常の光学系と異なって難しく工夫を要する。本研究ではモノリシック光学系のアラインメント手法の開発も行った。製作したモノリシック光学系での雑音やセンサー効率をペデスタル光学系 (通常のミラーホルダー等を用いた光学系) で構成された先行研究 [5] 図 4.2 における感度やセンサー効率と比較することで製作されたモノリシック光学系と開発したアラインメント手法の有効性について評価した。

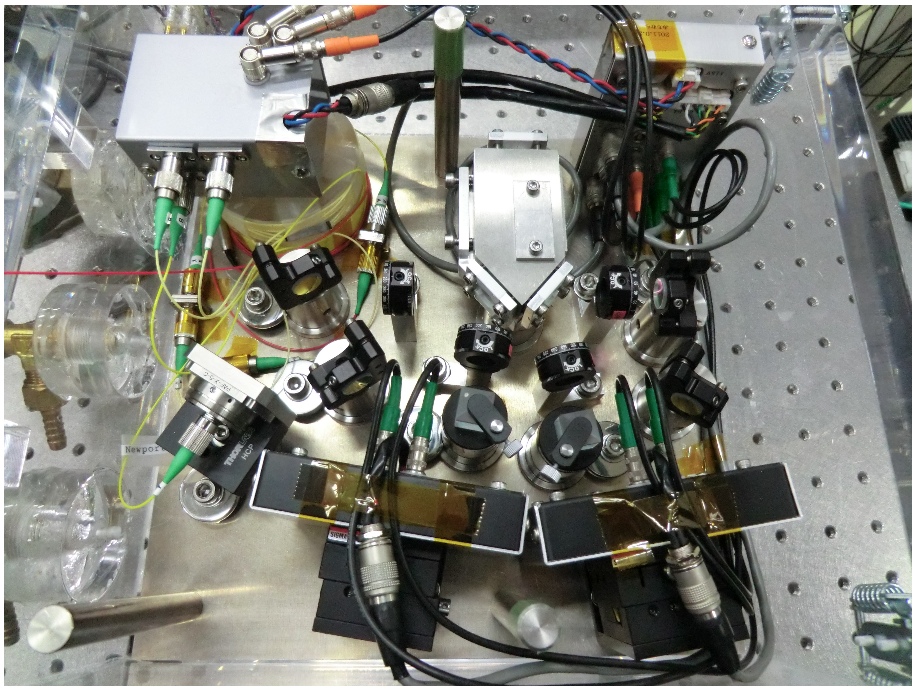

図 4.2　本研究と同じ光学構成をとった先行研究 [5] のペデスタル光学系

4.2　実験装置

4.2.1　モノリシック光学系デザイン

図 4.3、図 4.4 がモノリシック光学系のデザインの全体像である。光学素子は土台である optical bench(図中オレンジ色) の上に紫外線硬化樹脂を用いて接着される。

光学素子の配置などのデザインはアラインメントの取りやすさ、モードマッチを考慮して設計されている。各光学素子間の距離とビーム半径の関係は図 4.5 のようになっている。RM の曲率半径は、RM におけるビームの曲率半径と等しい 200 mm である。モードマッチング率は Input に対して 99.9%、RM による打ち返し光に対して 97% となるように設計されている。

ファイバーコリメーターから出射した光は次第に広がっていってしまう。共振器の固有モードと一致させるためには、レンズを用いてビームを絞る必要がある。そこで焦点距離が 200 mm の凸レンズでビームを絞った。モードマッチング率の計算には使用した光学部品のスペック値を使用したが、ファイバーコリメーターについては、出射光の waist 位置の個体差が一般に大きいため、ビームプロファイラーを用いて使用するコリメータ出射光のビームプロファイルをとり、その結果から waist 位置や、waist 位置でのビーム半径を算出した。スペック値はこの測定値とレンズ位置の誤差の範囲で一致していた。そのときのビームプロファイルの結果は図 4.6 である。

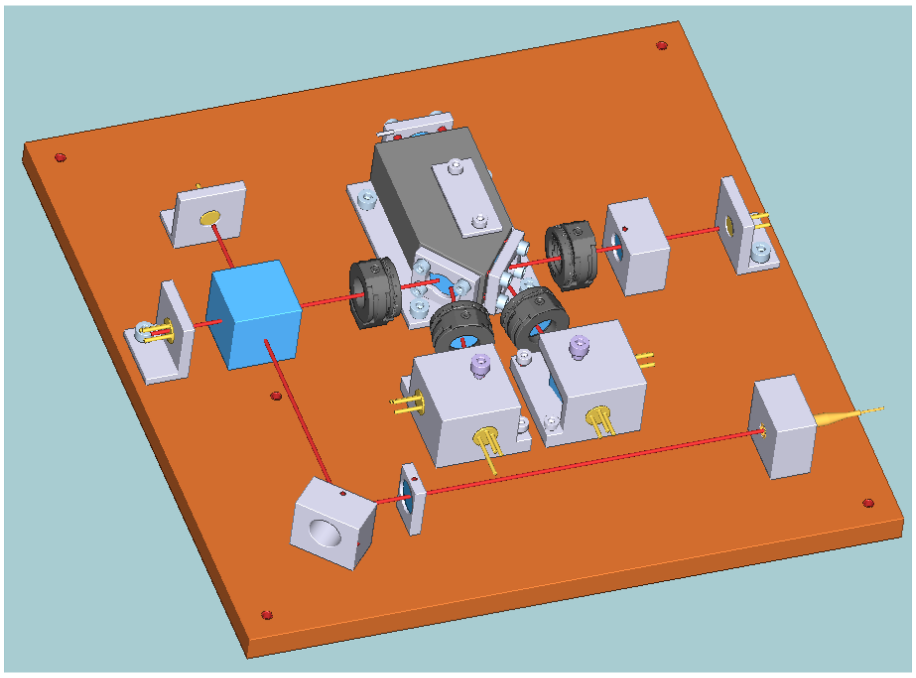

図 4.3　モノリシック光学系デザイン

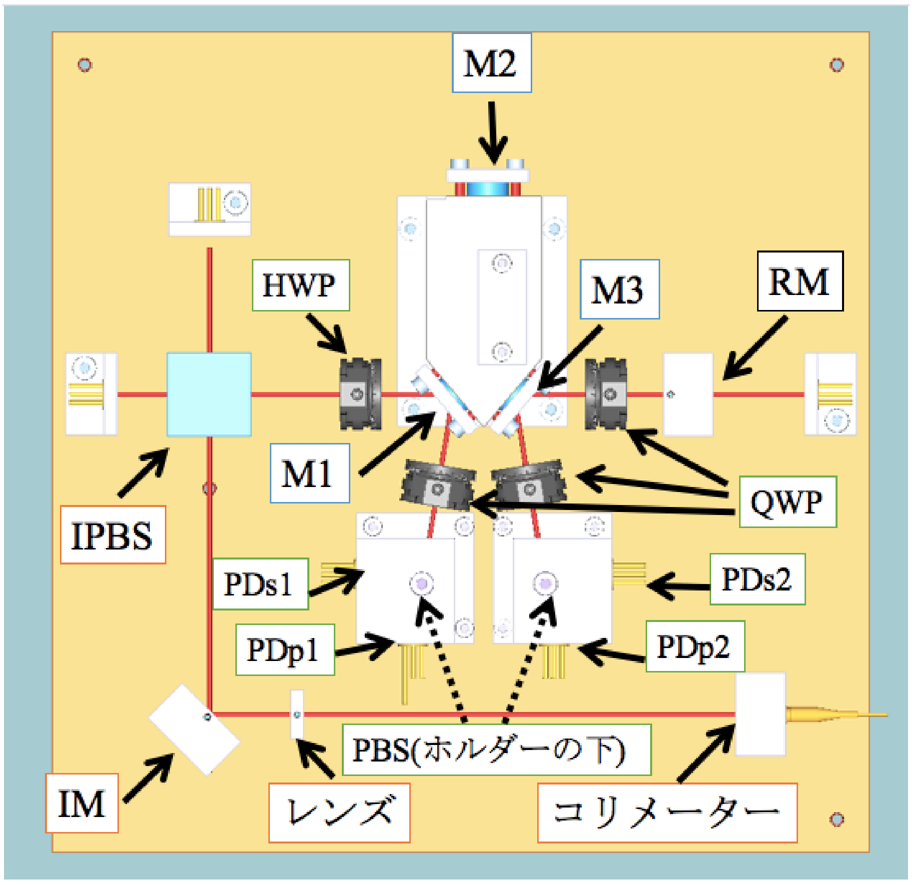

図 4.4　モノリシック光学系デザイン

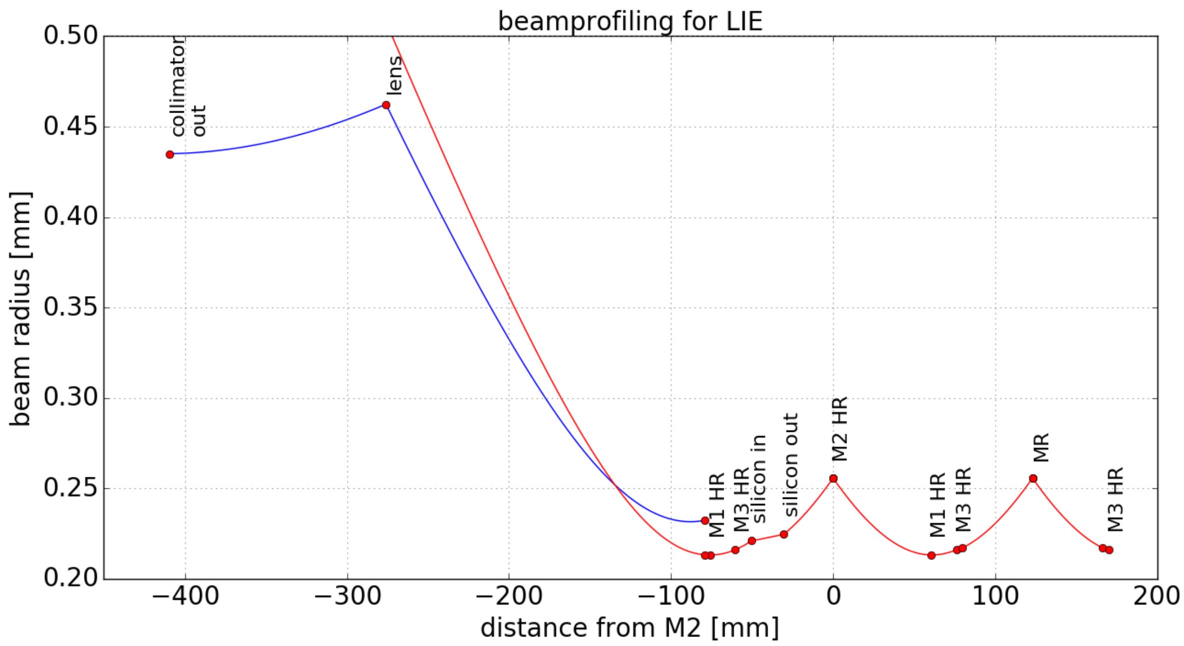

図 4.5　各光学素子間の距離とビーム半径の関係 横軸に M2 の HR 面からの光に沿った距離をとった。赤線は理論線であり、青線はプロファイル結果をもとに算出した実際の入射光のビーム径である。

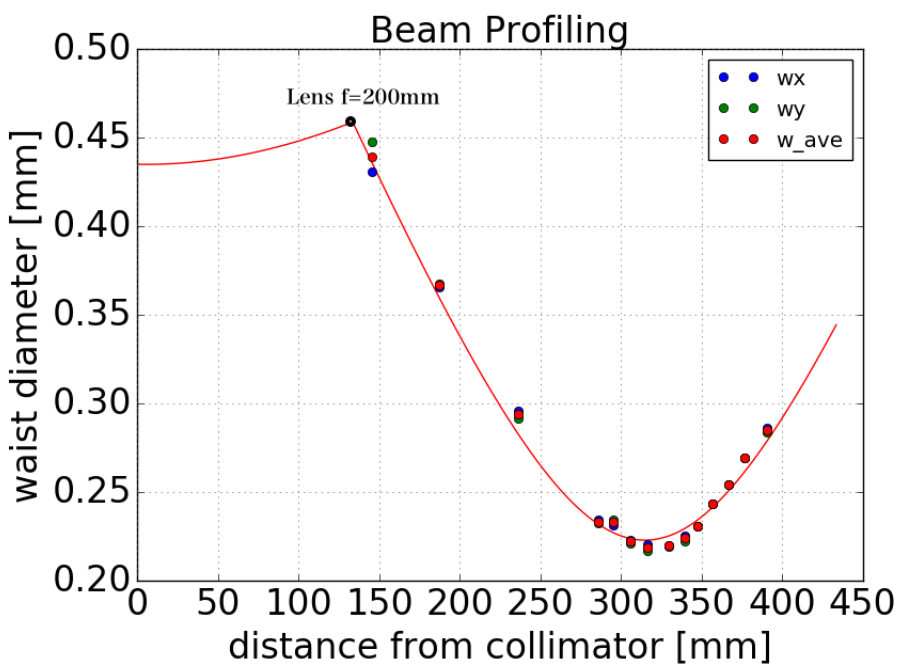

図 4.6　コリメーターから出射したビームのビームプロファイリング結果 waist 位置を知るために焦点距離 200mm の凸レンズを挿入した。w_x は水平方向のビーム半径測定結果、w_y は垂直方向のビーム半径測定結果、w_{ave} はその平均を表す。赤実線はスペック値を使用した理論線である。

4.2.2　Optical Bench

モノリシック光学系を構成する土台である optical bench はスーパーインバー (30 cm × 30 cm × 2 cm) を使用した。スーパーインバーを選択した理由は熱膨張率が通常の金属よりも小さく、温度変動などの環境変動による影響を低減するためである。30 cm × 30 cm の二面を株式会社ツバタに研磨してもらったものを使用した。

4.2.3　紫外線硬化樹脂/紫外線照射器

光学素子と optical bench を固定する接着剤として、本研究では紫外線硬化樹脂を用いた。紫外線硬化樹脂は紫外線を照射することで硬化する接着剤であり、硬化後もアセトンなどで取り外すことが可能である。接着方法としては光学素子側面と optical bench の接触部分をポッティングによって接着させる方法をとった。底面に接着剤を塗らないのは、モノリシック光学系は pitch 方向の精度は光学素子や optical bench の機械精度で決まるべきものであるが、底面に接着剤を塗ってしまうと接着剤の厚みのムラで pitch 方向の精度が悪くなってしまうからである。また、底面に接着剤を塗ると金属と金属を接着させる場合、紫外線が照射出来なくなってしまうからでもある。

使用した紫外線硬化樹脂は Norland 社の Optical Adhesive(NOA) である [29]。NOA にはその特性によってタイプがある。先行研究 [28] では NOA60 のみが使用されていたが、本研究では使用用途によって使い分けた。本研究では主にガラスと金属を接着させるのに NOA60 を、金属と金属を接着させるのに NOA65 と NOA81 を用いた。ガラスと金属を接着させるのに NOA60 を用いたのは、NOA60 は標準的なタイプであり、ガラスを接着させるのに適しているからである。しかし、金属と金属を接着させるのには十分な強度がなく、剥がれてしまうことが多かったため、NOA65 と NOA81 を用いた。NOA65 と NOA81 は NOA60 に比べて粘度が高く、ポッティング接着の際に流れてしまうようなことがなかったので扱いやすかった。ところが NOA65 と NOA81 は強度が強くアセトンをかけても大きな力をかけない限り外すことができず、あまり大きな力をかけずに外すためにはアセトンをかけ続けたり浸したりする必要があることがわかった。

紫外線照射器には Thorlabs 社の高出力 UV 硬化 LED システム CS2010 を用いた [30]。樹脂の量にも依るが、100 mW/cm^2 の光量を 2 秒照射すると、pre cure と呼ばれる軽く固定された状態になる。この状態では少しだけアラインメントをとることが可能である。pre cure の後に

さらに 20 秒照射すると full cure という完全に固定された状態になる。先行研究では pre cure の状態でアラインメントをとっていたが [28]、金属と金属を固定するときには pre cure の状態でアラインメントをとると底面に接着剤が入り込んでしまうので、特に金属を接着ときには pre cure の状態でアラインメントをとることは極力避けた。

4.2.4　光学素子

光学系は入射光学部、共振器部、反射光学部、信号取得部の 4 つに大別される (図 4.4)。以下では部門別に光学系の詳細について述べる。

入射光学部

入射光学部は表 4.1 のような光学素子から構成される。接着剤を用いて土台に固定するものは、コリメータ、レンズ、Input Mirror(IM)、Input PBS(IPBS) である。

表 4.1　入射光学部光学素子一覧

名称	仕様等
コリメータ	ファイバーコリメータ (Thorlabs, CFS5-1550-APC) をスーパーインバーのホルダーにはめ込み接着
レンズ	焦点距離 200mm の平凸レンズ (Lattice Electro Optics, B-PX-12.7-200-1550) をスーパーインバーのホルダーにはめ込み接着
Input Mirror(IM)	1/2 インチ全反射鏡をスーパーインバーのホルダーにはめ込み接着
Input PBS(IPBS)	1 インチ PBS(Lattice Electro Optics, PBS-1550-10)

コリメータはスーパーインーバーのホルダーにはめ込み、NOA81 を用いて接着した (図 4.7)。スーパーインバーに開けられた穴は数 mm だけすり鉢状になっており、その部分に NOA を流し込んで接着した。

レンズは焦点距離 200 mm のハーフインチ平凸レンズでスーパーインバーのホルダーにはめ込み、NOA60 を用いて接着した (図 4.8)。IM もまたスーパーインーバーのホルダーにハーフインチフラットミラーをはめ込み、NOA81 を用いて接着した (図 4.9)。

共振器部

共振器部は表のような光学素子から構成される。接着剤を用いて土台に固定するのは、共振器スペーサーである。

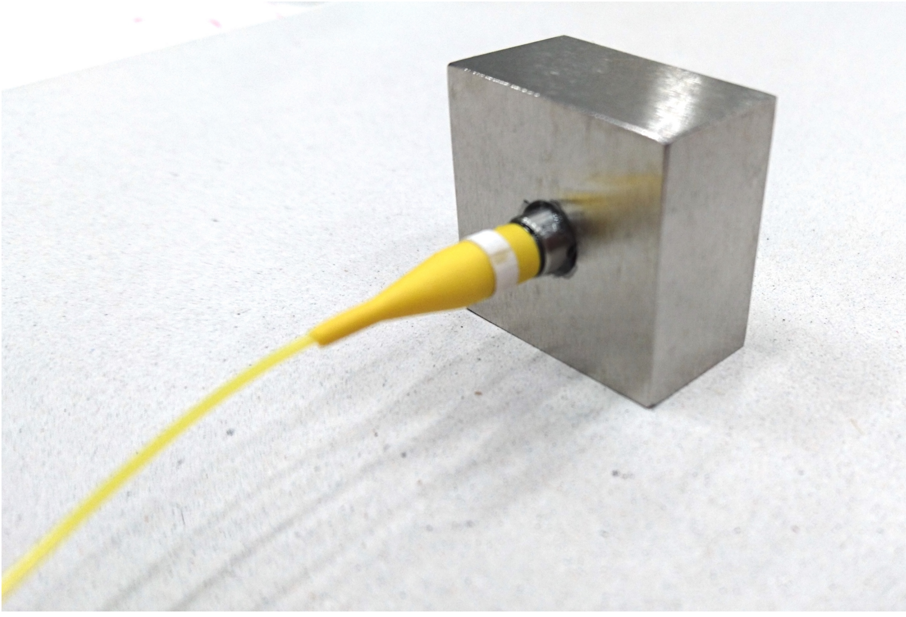

図 4.7　使用したコリメータの写真

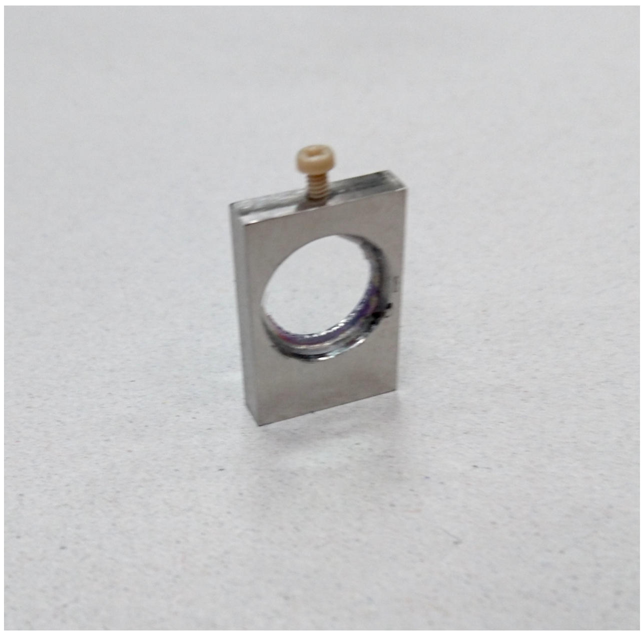

図 4.8　使用したレンズの写真

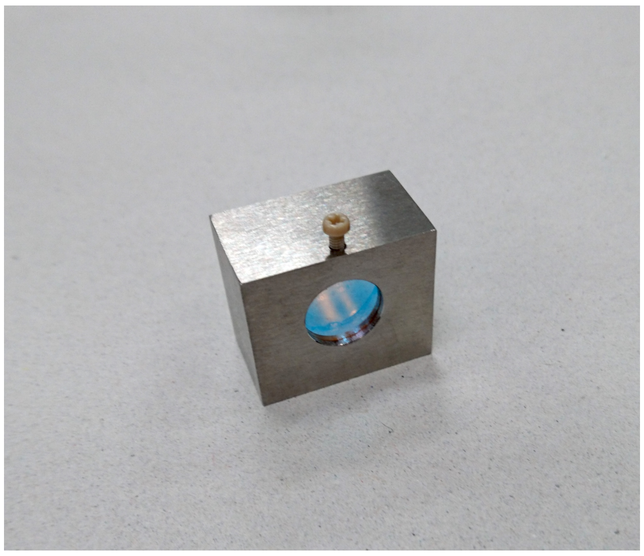

図 4.9　使用した Input Mirror(IM) の写真

表 4.2　共振器部光学素子一覧

名称	仕様等
共振器	3 枚の鏡 (M1,M2,M3) とスーパーインバーの共振器スペーサーからなり、光路の一部にシリコンブロックが入れられている。
Cavity Base	エポキシガラスからなる高さ調節断熱用の共振器土台

使用した光リング共振器 (図 4.3) は、温度変動の影響を抑えるために熱膨張率の小さいスーパーインバーのスペーサーに 3 枚の鏡 (M1,M2,M3) が固定されいる。このようにスペーサーに固定して共振器を構成することで共振器長変動による雑音の影響を小さくできる。光路の一部 (M2,M3 間) には奇パリティの光速の異方性に対して感度を持たせるための媒質であるシリコンブロックが入っている。異方性信号は 3 章で見たように $n-1$ に比例するので、屈折率の大きいシリコンを使用した。シリコンは波長 1550 nm の光に対して透明なので、本実験ではファイバレーザー (NKT Photonics, Koheras AdjustiK C15) を使用した。シリコンブロックは光路に対して面が少し斜めに設置されており、入射角は 9.5° である。これはシリコンブロック面における反射光が逆回りの光とカップリングすることを防ぐためである。表 4.3 に各種パラメータをまとめる。強度反射率における振幅反射率 $r_i(i=1,2,3)$ は p 偏光に対するものであり、s 偏光に対してはこれよりも大きな値となる。シリコンの屈折率 n 以外は設計値である。シリコンの屈折率は波長 1550 nm に対してであり、岡本光学加工所による実測値である。

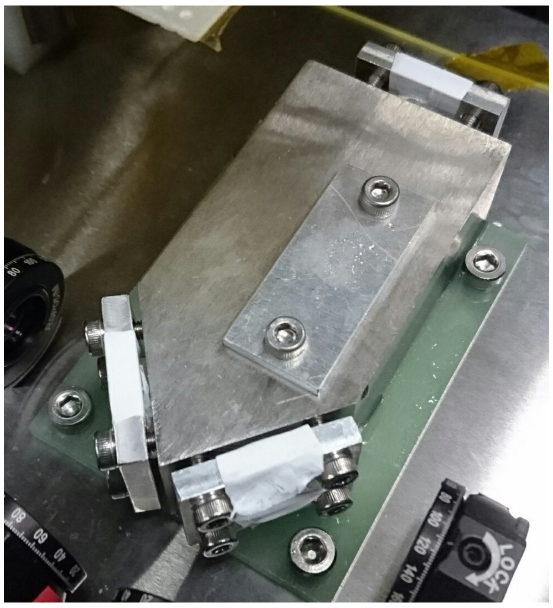

図 4.10　使用した光リング共振器

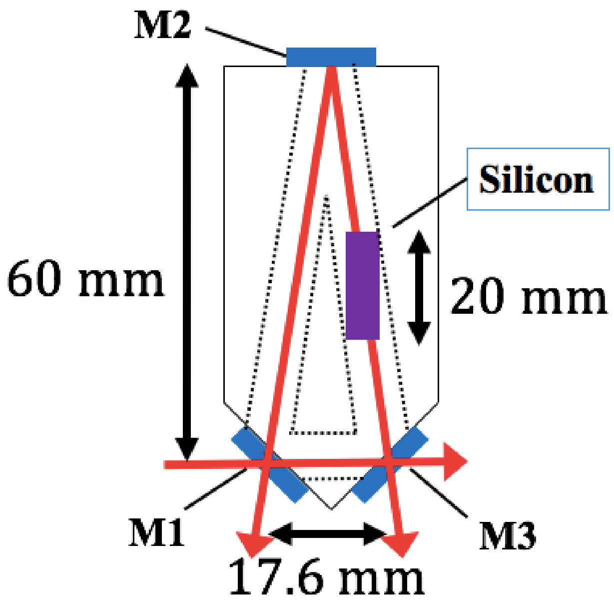

図 4.11　使用した光リング共振器のスケール

表 4.3　光リング共振器のパラメータ ([5] より)

M1 強度反射率	$r_1^2 = 98\%$	M1 曲率半径	$R_1 = \infty$
M2 強度反射率	$r_2^2 > 99\%$	M2 曲率半径	$R_2 = 200$ mm
M3 強度反射率	$r_3^2 = 98\%$	M3 曲率半径	$R_3 = \infty$
共振器長 (一周長)	$L = 140$ mm	FSR	$\nu_{\mathrm{FSR}} = 1.5$ GHz
シリコンの長さ	$d = 20$ mm	共振半値全幅 (FWHM)	$\nu_{\mathrm{FWHM}} = 12$ MHz
シリコン屈折率	$n = 3.69$(測定値)	フィネス	$\mathcal{F} = 125$

反射光学部

反射光学部は表のような光学系から構成される。接着剤を用いて土台に固定するのは、Reflecting Mirror(RM) である。

表 4.4　反射光学部光学素子一覧

名称	仕様等
Reflecting Mirror(RM)	曲率半径 200 mm の打ち返し用鏡をスーパーインバーのホルダーにはめ込み接着

RM は IM と同じ構造になっており (図 4.9)、曲率半径 200 mm のハーフインチミラーをスーパーインバーのホルダーにはめ込み NOA60 を用いて接着した。

信号取得部

信号取得部は表のような光学系から構成される。

表 4.5　信号取得部光学素子一覧

名称	仕様等
PBS(×2)	偏光解析用の PBS(Lattice Electro Optics, PBS-1550-05)
PD(×4)	フォトダイオード (浜松フォトニクス, G10899-02K)
1/2 波長板	偏光解析用の 1/2 波長板 (Newport, 05RP02-40)
1/4 波長板 (×3)	偏光解析用の 1/4 波長板 (Newport, 05RP04-40)

これらは 3 章で述べた偏光解析用の光学素子である。PBS と PD はポリエチレン製のホルダーにはめ込み NOA60 で接着した。その他の波長板については直接感度に影響がないことから optical bench にねじ止めしてある。場合によっては NOA によって接着することも可能である。

4.3　アラインメント手法開発

本節では開発したモノリシック光学系のアラインメント手法について述べる。モノリシック光学系は光学素子と土台を一体化させるため振動に強い光学系だが、そのためアラインメントをとるのが通常の光学系と異なって難しく工夫を要するのでアラインメント手法の確立は重要である。本研究ではモノリシック光学系のアラインメントを Template による光学素子の位置指定 [28]、手動ステージのアラインメントユニットによる微調の二段階で行なった。

4.3.1　Template による光学素子の位置指定

モノリシック光学系の Template による光学素子の位置指定アラインメントのデザイン図が図 4.12 である。

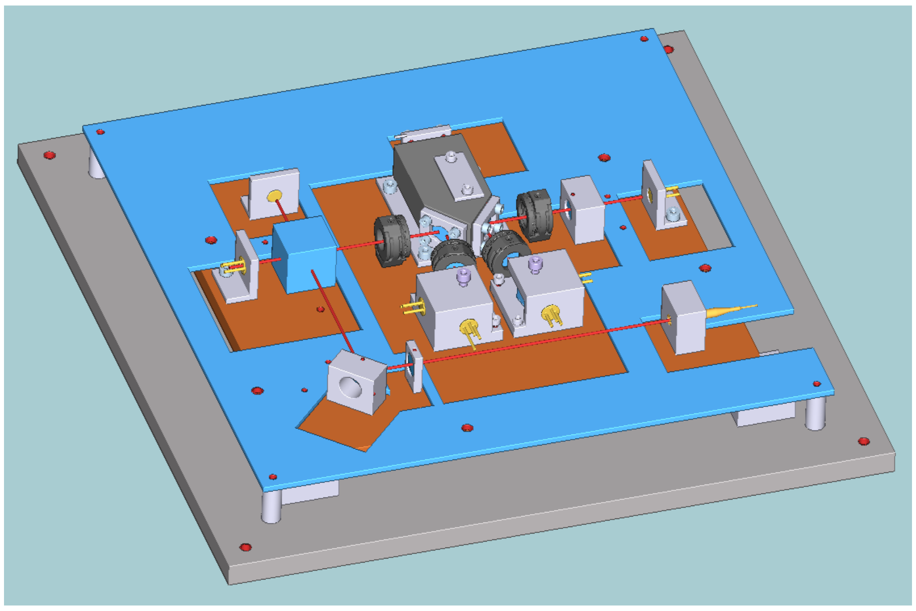

図 4.12　Template によるアラインメントデザイン

図 4.3 を構成する光学素子を Optical Bench(図中オレンジ色) 上の設計された位置に配置するために Template という図中水色の光学素子の位置を指定するためのプレートを用いた。Template と Optical Bench の位置は図中灰色の Optical Bench Base に対して定められており、Optical Bench Base は光学定盤上にねじ止めされ、固定されている。Template は Optical Bench Base にアルミ製の円筒型の脚を介してねじ止めされている。また、Optical Bench は Optical Bench Base にアルミ製の土台を介して固定されている。このアルミ製の土台は Optical

Bench Base にねじ止めで固定されている。Template は自重で歪むことがないように、アルミの中でもジュラルミン系合金で強度が高い YH を使用した。強度が高いので加工の精度が高く出せるのも長所である。Template の加工にはワイヤー放電カットを使用した。使用した Template は図 4.6 である。

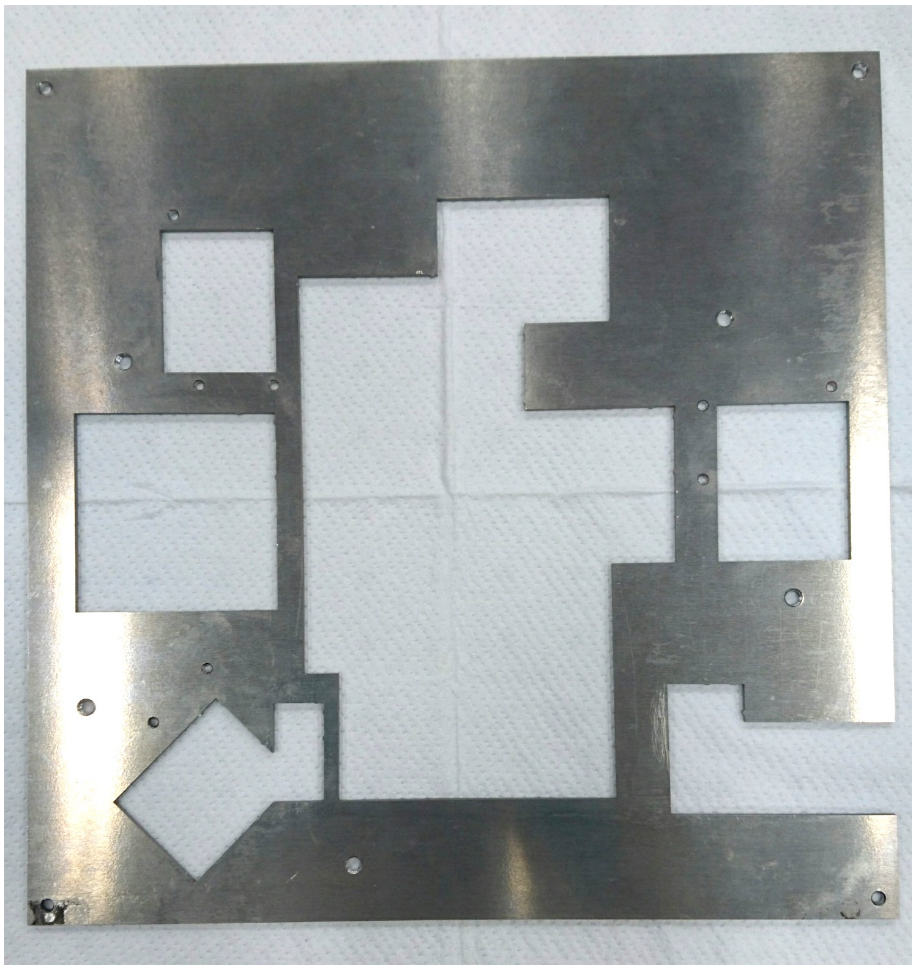

図 4.13　使用した Template

Template には図 4.14 のような光学設計を元にして取り付けられた 3 点の突起があり、この突起に光学素子を合わせることで光学素子の位置が一意に指定される。アラインメントをとる必要がない光学素子 (IM,IPBS,RM 以外の光学素子) については、Template のこの突起に合わせて位置を決定し、NOA によって接着した。アラインメントをとる必要がある光学素子については、この突起によって大体の位置を決め (粗調し)、後述する手動ステージによるアラインメントユニットを用いて微調した。

Template を用いた光学素子の位置指定アラインメントに使用したもののリストが表 4.6 である。

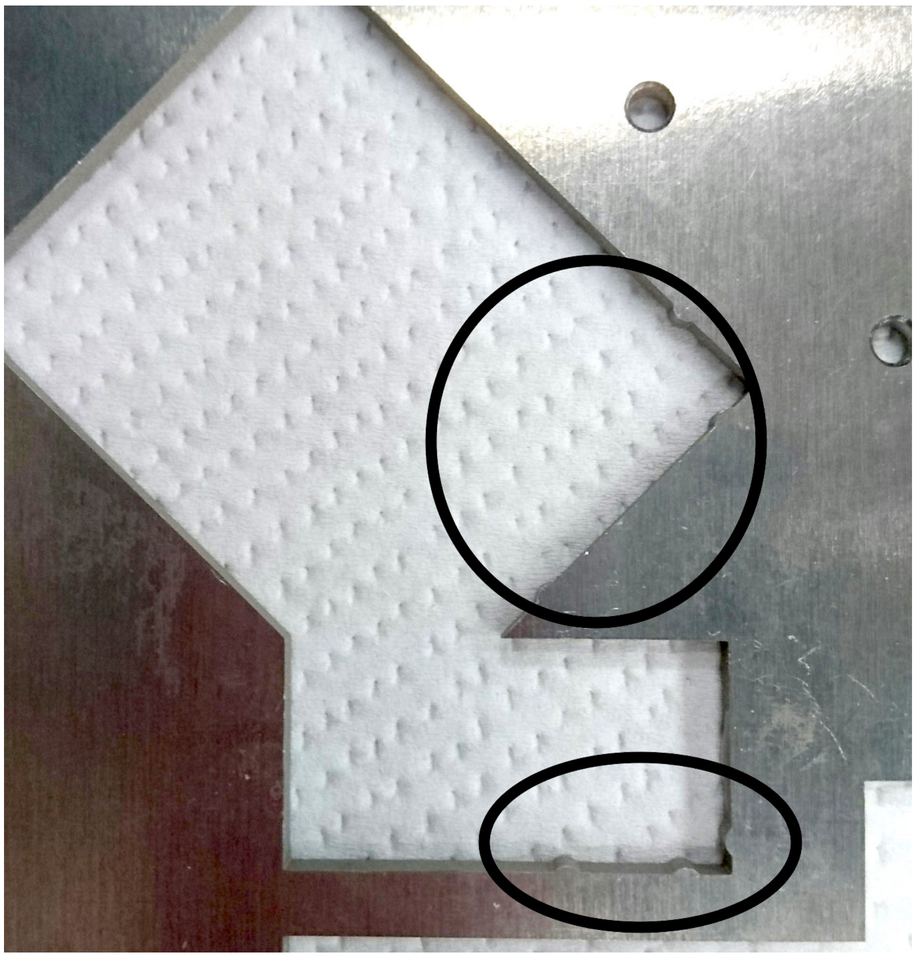

図 4.14　Template の 3 点突起

表 4.6　Template による光学素子の位置指定

名称	仕様等
Template(×2)	z 軸調節用の z 軸フラットスチールステージ (天地逆転)(シグマ光機, TSD-603UD)
Optical Bench Base(×2)	θ 軸透過用微動ステージ (シグマ光機, KSPT-406MRH)
Pitch ステージ (×2)	α 軸ガイド一体型ゴニオステージ (シグマ光機, GOHT-40A60B)
レンズホルダー (×2)	スライド式シリンドリカルレンズホルダー (シグマ光機, CHA-25)

4.3.2　手動ステージユニットによる微調

紫外線硬化樹脂を用いたモノリシック光学系の先行研究 [28] では、図 4.15 のようなマイクロメータを用いて光学素子を横から押すことで光学素子の微調アラインメントをとっていた。しかし、この方法だと光学素子を押すことはできるが、引くことができないので一方通行のアライ

ンメントになってしまう。またこの方法だとピッチ方向のアラインメントは一切調節することができない上に、マイクロメータを設置する場所を逐一考えて光学設計をする必要がある。そこ

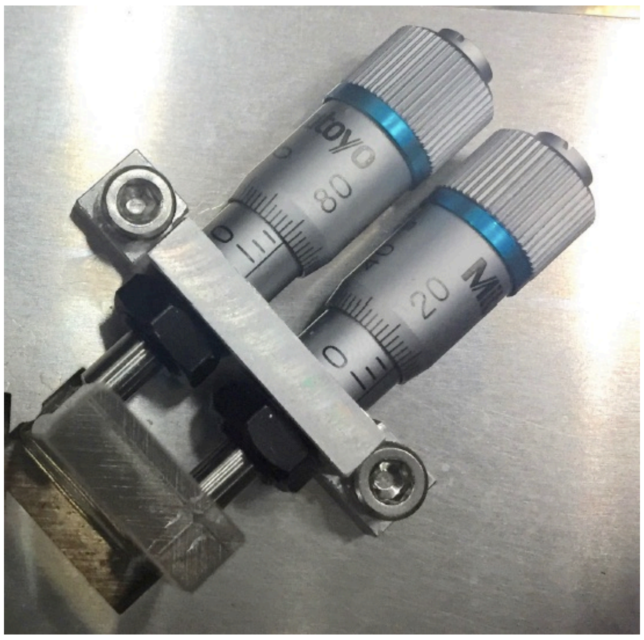

図 4.15　先行研究のマイクロメータによるアラインメント

で、本研究では図 4.16 のように手動ステージを組み合わせて光学素子を上からつまむことでアラインメントをとるという手法を開発した。手動ステージとはマイクロメータなどを回すことに

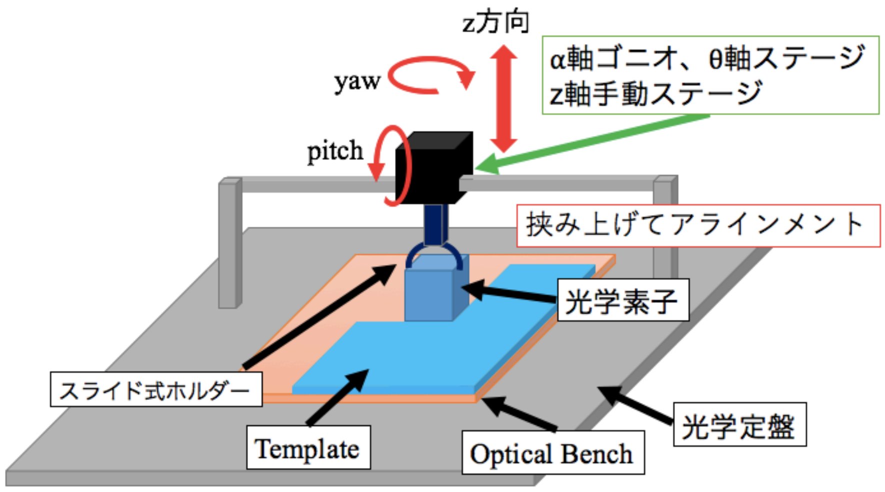

図 4.16　手動ステージを用いたアラインメント手法のスケッチ

よって位置の調節ができるステージである。本来はステージにホルダーに取り付けた光学素子をネジ等を使って固定し、マイクロメータなどによって位置を調節するのに使うことが多い。本研究では光学素子をレンズホルダーで上から挟み、三つの手動ステージを組み合わせてレンズホル

ダーをマイクロメータで移動させることで光学素子のアラインメントをとるという方法をとった。この方法では光学素子を一方に押すだけでなく引くこともでき、より精密な自由度の調節をすることができる。また、種々の手動ステージを適当に組み合わせることでアラインメントをとる自由度の数を調節することもできる。さらに、手動ステージ等のシステムを光学系とは独立に光学定盤に固定することで設置できるので、Template 等の設計とは独立になっている点も自在なアラインメントを可能にするという意味で優れている。

本研究で使用した手動ステージによるアラインメントユニットが図 4.17 であり、使用した手動ステージのリストが表 4.7 である。

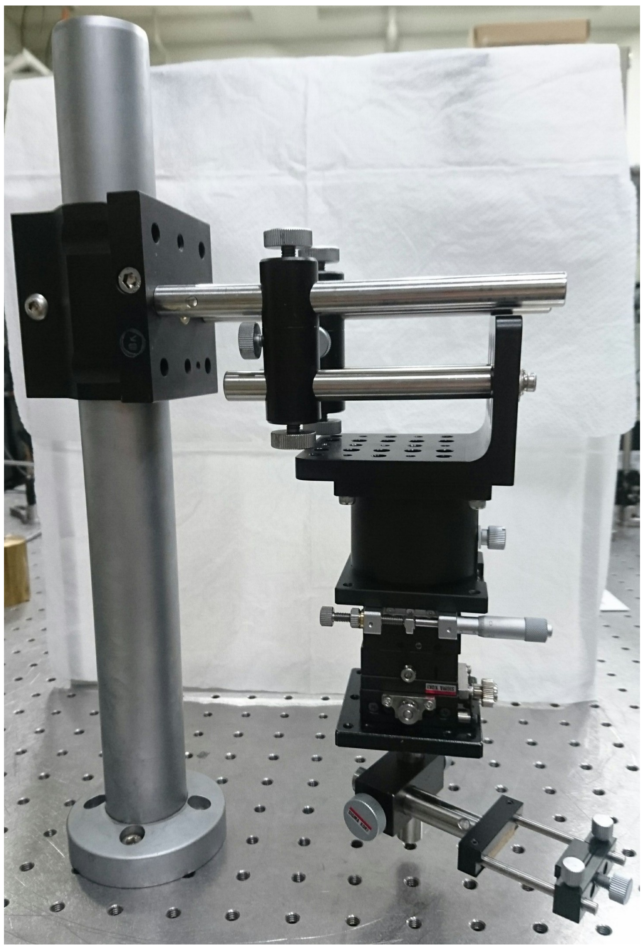

図 4.17　手動ステージによる微調アラインメントユニット

z 軸ステージは光学素子の周りでレンズホルダーを上下させるのに使用した。アラインメントの際には動かすことはなく、主にレンズホルダーを光学素子に装着させるための上下の移動に用いた。クランプを緩めて上下させてしまうのは微妙な位置調節ができず、光学素子の破損を招いてしまうかもしれないのでそれを防ぐためである。Yaw ステージと Pitch ステージは光学素子のモノリシックアラインメントにおいてそれぞれ Yaw 方向と Pitch 方向のアラインメントを

表 4.7　アラインメント用手動ステージ・ホルダー

名称	仕様等
z 軸ステージ (×2)	z 軸調節用の z 軸フラットスチールステージ (天地逆転)(シグマ光機, TSD-603UD)
Yaw ステージ (×2)	θ 軸透過用微動ステージ (シグマ光機, KSPT-406MRH)
Pitch ステージ (×2)	α 軸ガイド一体型ゴニオステージ (シグマ光機, GOHT-40A60B)
レンズホルダー (×2)	スライド式シリンドリカルレンズホルダー (シグマ光機, CHA-25)

とるのに用いた。ガラスの Optical Bench に直方体のガラス光学素子を接着するようなモノリシック光学系では、Pitch 方向の精度は光学素子等の機械精度で決定される。本研究ではアラインメント手法の確立のために高価な直方体のガラス光学素子は用いずミラー等がはめ込まれたインバーホルダーを使用しているので、そのような光学系に比べてはめ込みの精度のために比較的大きく Pitch 方向がずれてしまう。そこで、Pitch 方向のアラインメントもとれるように α 軸ガイド一体型ゴニオステージによって Pitch 方向のアラインメントも可能にした。光学素子を挟み込み姿勢を保つのにはスライド式のレンズホルダーを使用した。本研究で使用した手動ステージの一つである z 軸ステージの写真が図 4.18 である。

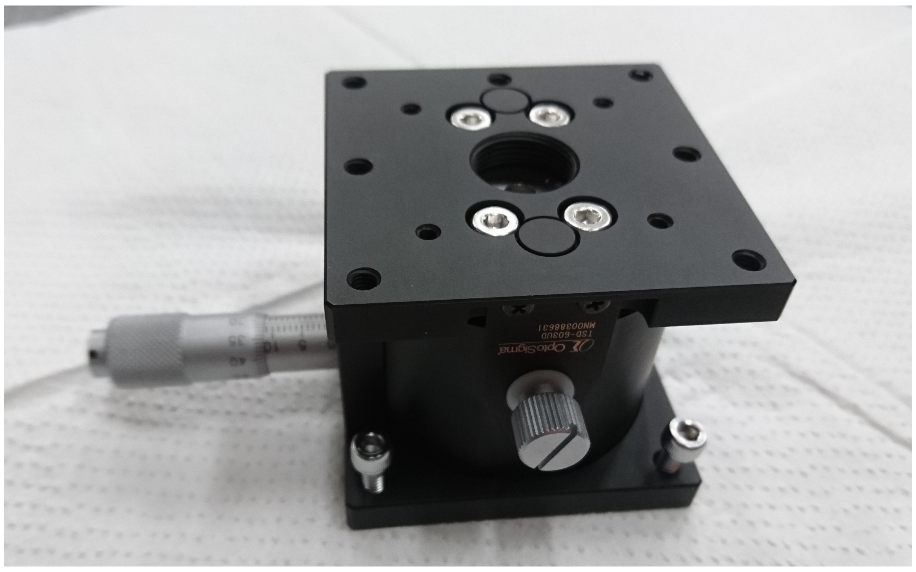

図 4.18　z 軸手動ステージ

4.4　実験結果

4.4.1　モノリシックアラインメント結果

光リング共振器が共振するような光路にレーザー光を入射させるために幾らかの光学素子は手動ステージによるアラインメントユニットを用いて微調する必要がある。その他の光学素子については Template の 3 点突起によって位置を指定し、その地点で NOA による接着を行なった。光リング共振器の左回りの共振に合わせるのには IM と IPBS の微調をする必要があり、右回りの共振を見つけるには RM の微調をする必要がある。Template によって手動ステージアラインメントユニットによる微調が必要ない光学素子を接着した後、レーザーの周波数を内部の周波数変調機構を用いて振り、手動ステージアラインメントユニットによって共振の様子が強くなるように透過光をモニターしながら IM と IPBS のアラインメントを行なった。00 モード、01 モード以外のモードがこれらに対してほとんど見えなくなるほどに、十分に大きな共振が得られたら NOA を用いてその状態で接着した。図 4.19 が実際にアラインメントを行なっている様子である。

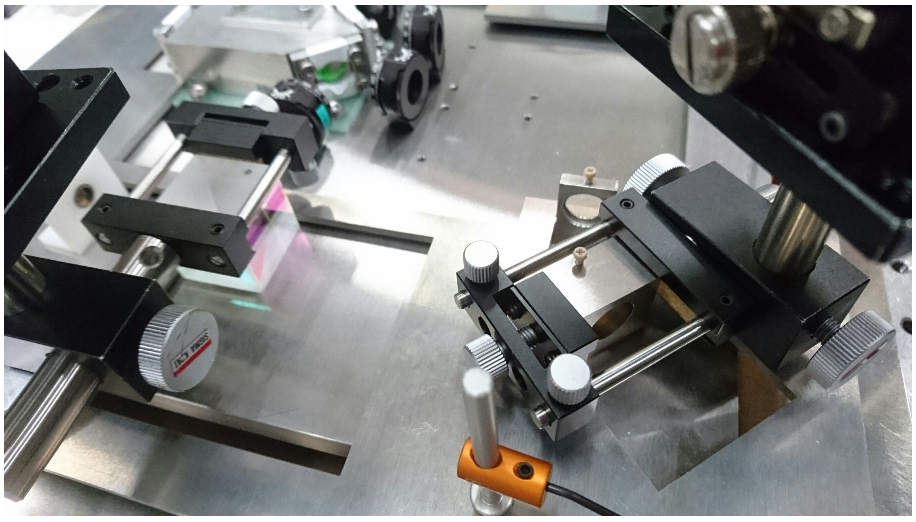

図 4.19　IM と IPBS の手動ステージアラインメントユニットを用いたアラインメントの様子

次に、左回りの場合と同様にレーザーの周波数を内部の周波数変調機構を用いて振り、手動ステージアラインメントユニットによって共振の様子が強くなるように透過光をモニターしながら RM のアラインメントを行なった。こちらも 00 モード、01 モード以外のモードがこれらに対してほとんど見えなくなるほどに、十分に大きな共振が得られたら NOA を用いてその状態で接着した。図 4.20 が実際にアラインメントを行なっている様子である。

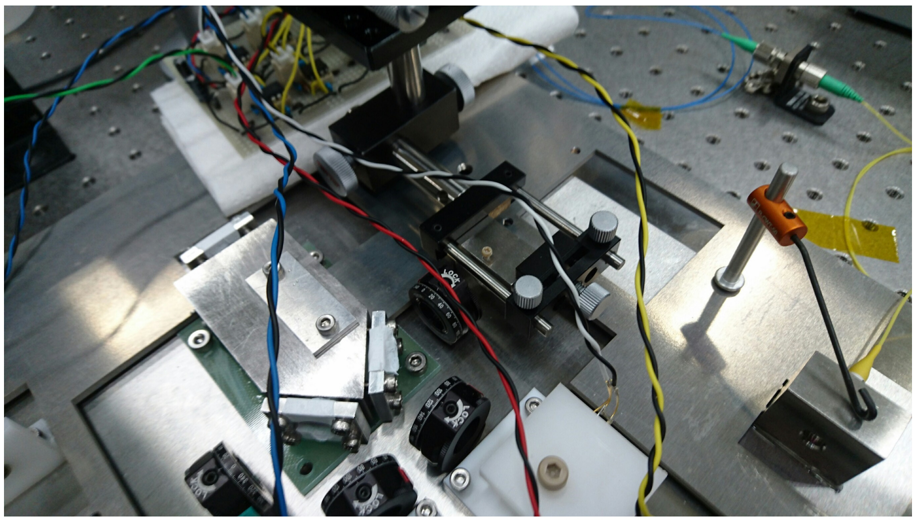

図 4.20　RM の手動ステージアラインメントユニットを用いたアラインメントの様子

実際にこの手法によって製作した紫外線硬化樹脂モノリシック光学系が図 4.21 である。センサー効率の測定や雑音の測定では遮光や防音など環境の雑音の影響を抑えるために、図 4.22 のように真空容器の中に入れて測定を行なった。

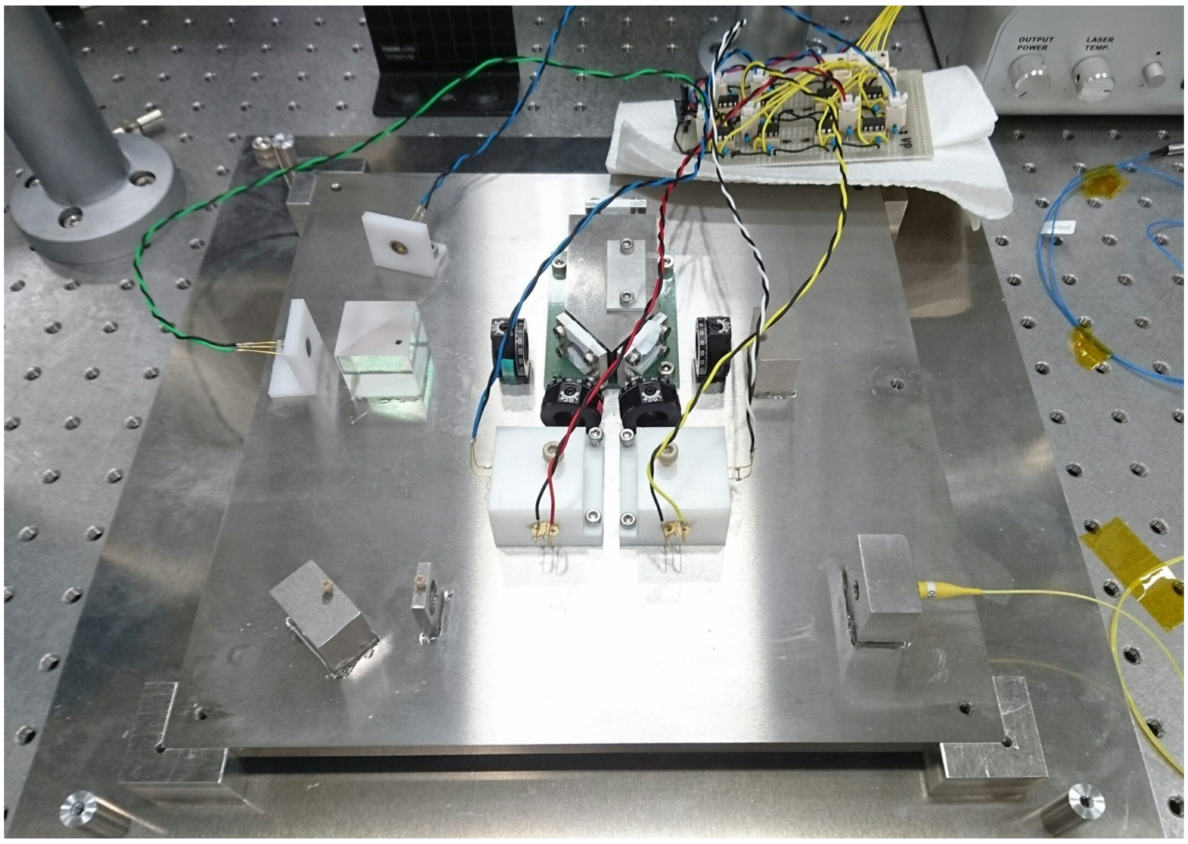

図 4.21　開発したアラインメント手法で製作した紫外線硬化樹脂によるモノリシック光学系

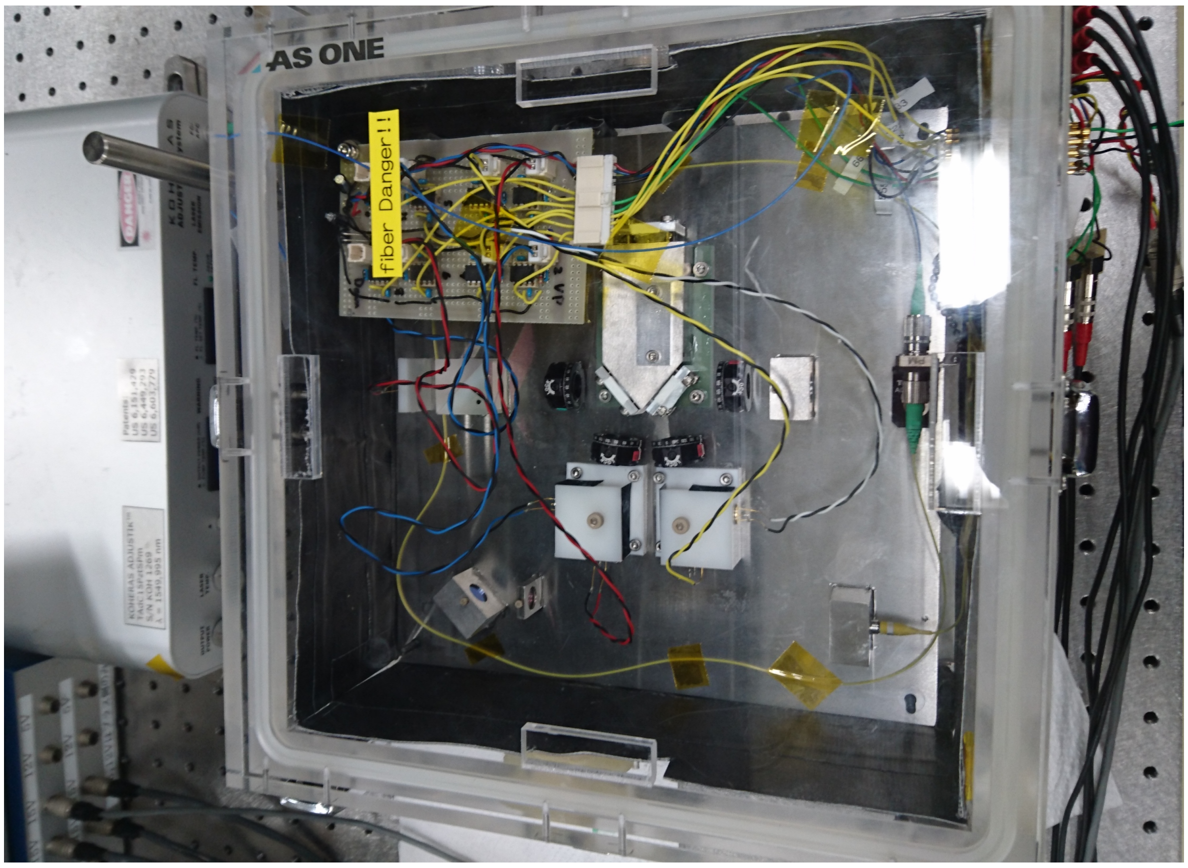

図 4.22　真空容器に入れたモノリシック光学系 (レーザーはファイバーによって真空容器内に導入、信号や電源等はフィードスルーを通して真空容器内外でやりとりできる。)

まずここでは本研究のモノリシック光学系における光学素子の接着方法や Template、手動アラインメントステージによるアラインメント方法などの操作性や問題点について述べる。紫外線硬化樹脂に紫外線を照射するタイミングで接着のタイミングを決定できるのはモノリシック光学系のアラインメントをとる上で融通がきいた。これは紫外線硬化樹脂を用いる一つの大きな利点である。紫外線硬化樹脂は上述したようにガラスと金属を接着させるのに NOA60 を、金属と金属を接着させるのに NOA65 と NOA81 を用いた。ガラス部分を接着するのには NOA60 でも十分な強度が得られるが、金属同士のポッティング接着では水平方向の力が加わると比較的容易に外れてしまった。NOA60 は粘度が低く、ポッティングによる接着だと流れてしまうため、ポッティング接着には多少のやりにくさを感じた。また、試しに NOA60 で接着した PBS を外してみると、PBS と optical bench の間に接着剤が流れ込んでしまっていた。これも粘度が低いことが原因だと考えられる。したがって pitch 方向の高い精度が要求されるアラインメントでは、他の粘土の高いタイプを使用すべきである。本研究では接着剤を用いて光学素子をホルダーにはめ込み、接着するのに NOA60 を使用したが、上述したようにポッティングによって接着し

ても、光学素子とホルダーに接着剤が入り込んでしまい、一度接着するとアセトンなどで剥がすことはできなかった。本研究のように光学素子のホルダーへのはめ込みを用いるモノリシック光学系だと、光軸の方向精度はホルダーの機械精度ではなくはめ込みの精度で決定されてしまうと考えられる。実際本実験でもコリメーターからの出射光は数度傾いてしまっていたため、IM における pitch 調節の必要性が生じてしまった。上のようにはめ込み接着した光学素子の取り外しが効かないことを考えると、全面ガラスの光学素子を使用しないではめ込みの光学素子を使う場合にはこのはめ込みによる精度を十分に考慮しなくてはならない。

Template による位置指定は十分操作性の良いものであったと思われる。Template の突起に軽く光学素子を押し当てるだけで位置を指定できるのは非常にシンプルでアラインメントの最中に特に大きな問題は起きなかった。一つ改善点があるとすれば、紫外線硬化樹脂を用いる場合、突起の半径が小さいと光学素子と optical bench の接着面が Template の影になってしまいその側面の接着が困難になってしまう。特に pitch のアラインメントをとる際には 4 辺とも接着をしないと姿勢が戻ってしまうため、Template の突起の半径は十分に大きくする必要があるということがわかった。

手動ステージアラインメントユニットによるアラインメント操作はマイクロメータによる先行研究 [28] と比較して操作性とモノリシック光学系アラインメントのしやすさの面で優れていた。先行研究のアラインメントの自由度が限られていること、一方通行のアラインメントしかできないことなどの欠点を克服した手法になっている。改善点を考えるとすれば、本研究では市販のレンズホルダーによって光学素子を支持したため、ホルダーの枠が接着剤を塗布する際の邪魔になってしまっていた。また、小型の光学素子に関しては本研究で使用したレンズホルダーでは大きいため支えることができない。レンズホルダーだと込み入った光学系をモノリシックで製作する場合にはレンズホルダーの枠が他の素子に当たってしまうことからも、光学素子を支持する機構または器具の開発は今後の改良点である。

4.4.2　モードマッチング率

ここでは左回りと右回りの透過光の共振の様子を見ることで開発したアラインメント手法の有効性を評価する。レーザー光の空間モードや高次モードについては Appendix D を参照して欲しい。レーザー光の周波数を内部の周波数変調機構を利用して振り cavity scan した結果が図 4.23 である。図 4.23 の縦軸は光リング共振器の左回りの透過光強度を表しており、横軸は時間であるが、時間に比例した周波数変化を与えているのでレーザーの周波数変化と等価である。

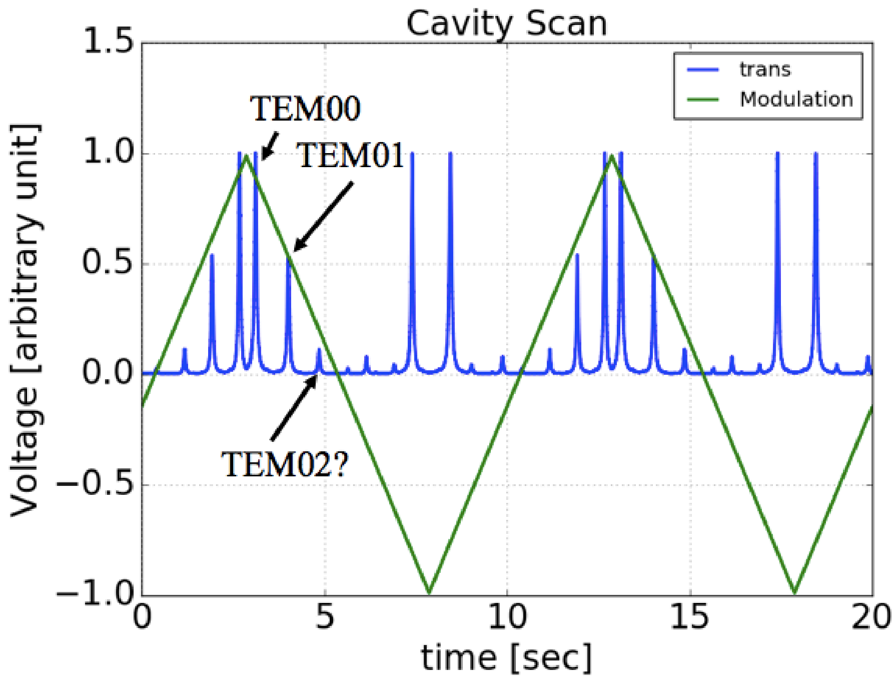

図 4.23　Cavity Scan による透過光

この測定によって、フリースペクトラルレンジ、共振半値全幅、フィネス、モードマッチング率を算出した。この測定結果が表 4.4.2 である。

表 4.8　Cavity Scan による光学系のパラメータ測定値

パラメータ名称	測定値
FSR	$\nu_{\mathrm{FSR}} = 1.5$ GHz
共振半値全幅 (FWHM)	$\nu_{\mathrm{FWHM}} = 18$ MHz
フィネス	$\mathcal{F} = 83$
モードマッチング率	62%

最も高い透過光ピークはガウスビームの TEM00 モードであることを確認した。次に高い透過光ピークはガウスビームの TEM01 モードであることを確認した。このように 01 モードが現れてしまうのは、光学素子のはめ込み接着によって pitch 方向のズレが生じてしまうこと、モノリシック光学系の pitch 方向のポッティング接着によるアラインメントが難しいことによると考えられる。実際左回りのアラインメントを合わせる際、手動ステージアラインメントユニットによって IM の pitch 方向のアラインメントを行なったときと、その後にレンズホルダーを外して光学素子の支持を無くしたときのモードマッチング率は、72% から 62% に低下した。このときレンズホルダーを外す前に比べて 01 モードが大きくなってしまったことから pitch 方向の姿勢

がポッティング接着では保ちきれず、多少戻ってしまうことによると考えられる。求めた FSR と FWHM、フィネスの設計値表 4.3 との相対誤差は、FSR で $\sim 1\%$, FWHM で 50%、フィネスで 35% であった。FSR は設計値とほとんど同じであるが、FWHM が設計値とズレている分、フィネスも設計値より小さくなっていた。これは表 4.3 ではシリコンによるロスを 1% と仮定しているが、実際の系ではロスが想定よりも大きく、FWHM が広がってしまったためだと考えられる。このようにロスによる設計力のズレはあるものの FSR は設計値とほぼ一致しており、開発したアラインメント手法が本研究のモノリシック光学系を製作する上で妥当な方法だったということが示されたことになる。

得られたモードマッチング率は基本モードが支配的になるようなモードマッチング率の要求値 50% を達成した。[*1]01 モードの出現をビーム中心のズレ δx とビーム伝播方向のズレ $\delta\theta$ の影響によると考え、これらのズレの程度をモードマッチング率から算出するとそれぞれ、[*2]

$$\delta x = 0.14 \text{ mm} \tag{4.1}$$

$$\delta\theta = 0.0018 \text{ rad } (0.10^\circ) \tag{4.2}$$

となった。したがって開発したモノリシックアラインメント手法はビーム中心のズレで $\delta x \lesssim 0.14$ mm ビーム伝播方向のズレで $\delta\theta \lesssim 0.0018$ rad (0.10°) の精度でアラインメントが可能であることがわかった。

4.4.3　周波数制御と較正

本研究における周波数制御と較正の結果について述べる。

レーザー光の周波数を内部の周波数変調機構を利用して振り、cavity scan したときの偏光解析法によって得られた左回りのエラー信号の様子が図 4.24 であり、右回りのエラー信号の様子が図 4.25 である。

偏光解析法によって得られたエラー信号を用いて、光リング共振器の左回りの共振周波数でレーザーの周波数をロックしたときに得られたオープンループ伝達関数が図 4.26 である。位相の図では考慮されていないレーザーのピエゾ素子などによる位相遅れが高周波側で生じているが、UGF~ 5 kHz における位相余裕は 30° となっており安定な制御系となっている。

[*1] モードマッチング率の要求値は通常散射雑音や、ミスアラインメントによるレーザー光強度変動から見積もる。ところが本実験では雑音レベルは散射雑音レベルから離れているので、00 モードが支配的になるようなモードマッチング率 50% を要求値とした。

[*2] 実際にはビーム中心のズレとビーム伝播方向のズレの両方の影響がモードマッチング率には現れている。ここでは、片方の影響を無視したときのもう片方のズレの上限値を求めた。

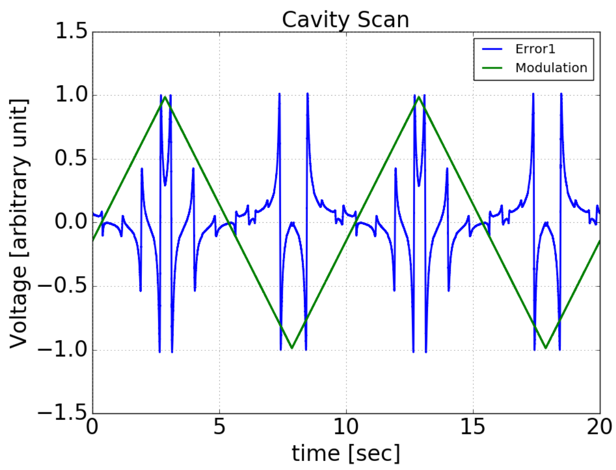

図 4.24　Cavity Scan による偏光解析による左回りのエラー信号の様子

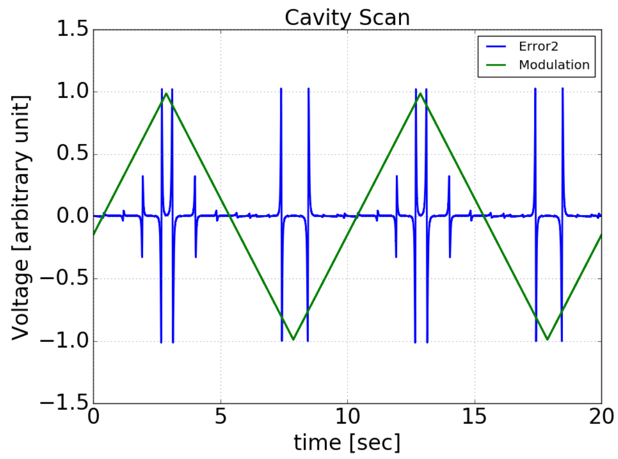

図 4.25　Cavity Scan による偏光解析による右回りのエラー信号の様子

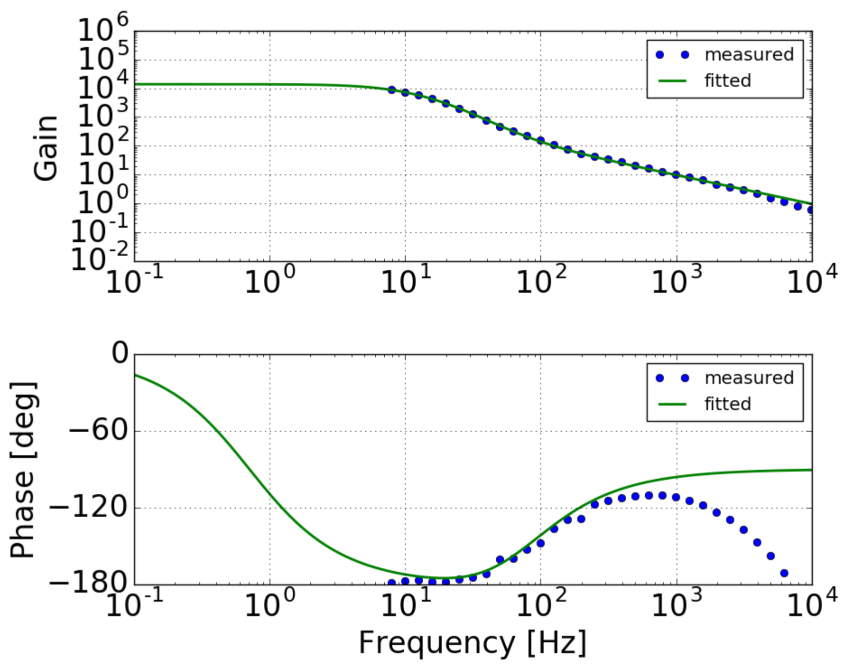

図 4.26　レーザー周波数制御のオープンループ伝達関数

3.3 節で述べたようにこのように測定された周波数制御のオープンループ伝達関数をフィルターの伝達関数 F [V/V]、PZT アンプの伝達関数 $P = 10$ [V/V]、レーザー内部のピエゾ素子による周波数変調効率 A [Hz/V] で割ることで求めた左回りの偏光解析法の効率 H_1, 右回りの偏

光解析の効率 H_2 が、

$$
\begin{aligned}
H_1 &= 1 \times 10^{-7}\ \mathrm{V/Hz} \\
H_2 &= 1 \times 10^{-8}\ \mathrm{V/Hz}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

である。この値は典型的な測定値であり、偏光解析の効率は偏光状態の変化などで変化する。したがって、種々の測定の際にはその都度測定の前後で較正係数 H の測定を行った。これらの値は得られた電圧信号から周波数差への較正係数として用いられる。周波数変調効率の値には同じレーザーを使用した先行研究 [31] より

$$
A = 1.3 \times 10^{7}\ \mathrm{Hz/V} \tag{4.4}
$$

を使用した。製作したモノリシック光学系と同じ光学素子構成をとっていたペデスタル光学系の先行研究 [32] における偏光解析法の効率は、

$$
\begin{aligned}
H_1 &= 8.2 \times 10^{-8}\ \mathrm{V/Hz} \\
H_2 &= 1.5 \times 10^{-8}\ \mathrm{V/Hz}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

であった。これらの偏光解析の効率を表す較正係数は、ミスアラインメントや光の損失の影響を受けるものである。それにも関わらず製作したモノリシック光学系のセンサー効率は、ミラーホルダーやマイクロメータ付きホルダーを用い、本研究と同じ PD などの光学素子を使用した通常のペデスタル光学系の先行研究 [32] のセンサー効率と同程度であることがわかる。これは本研究で製作したモノリシック光学系と開発したアラインメント手法の有効性や妥当性を示す一つの根拠となる。[*3]種々の測定をする合間にセンサー効率の測定を行い続けたが、初めてロックに成功した 2017 年 10 月末から 2017 年 12 月末までの 2 ヶ月間センサー効率の値が大きく変化することはなかった。このことは製作したモノリシック光学系の少なくとも 2 ヶ月ほどの長期の安定度が保たれていることを意味している。[*4]

4.4.4　感度

製作したモノリシック光学系を用いて光学系静止時における感度の測定と各種雑音の測定を行なった。その結果が図 4.27 である。

[*3] 回路の設計で調節できるものでもあるので、アラインメントの精度を定量的に評価できるものではない。あくまで目安である。

[*4] レーザー強度などパラメータが多少異なるので厳密な数値の比較はできないが、アラインメントの有効性を示す指標にはなりうる。

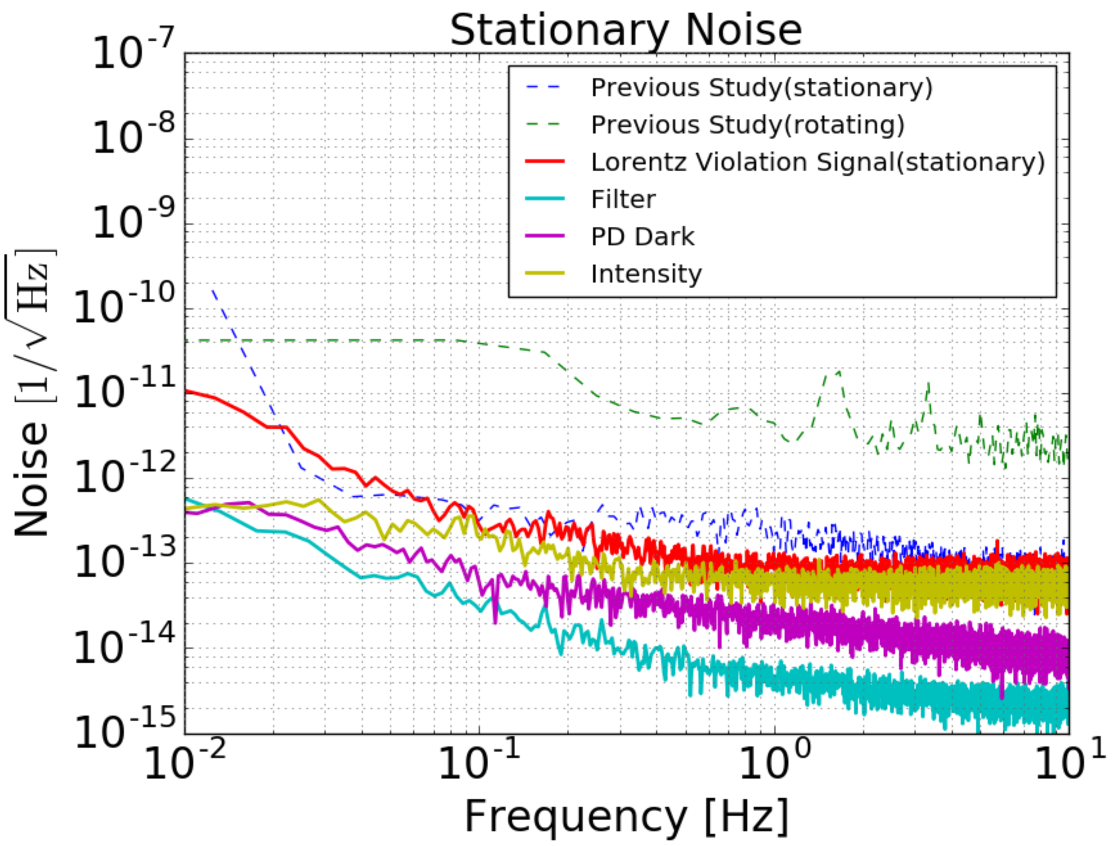

図 4.27　光学系静止時の異方性信号のスペクトルと各種雑音の寄与

横軸は周波数 [Hz] であり、縦軸は異方性信号に換算したノイズレベル $[1/\sqrt{\mathrm{Hz}}]$ を表している。異方性信号[*5]の雑音に対する各種雑音の寄与を換算するのには Block Diagram を用いて計算した。詳細については Appendix 3.4 を参照して欲しい。得られた静止時の雑音レベルは先行研究と回転周波数付近 (~ 1 Hz) で同程度、高周波数帯の一部で先行研究よりも 5 倍ほど良い感度となった。これは製作したモノリシック光学系でもペデスタルやミラーホルダー等を用いた先行研究と同程度の感度が出せることを意味しており、開発したモノリシック光学系アラインメントの有効性が示された。モノリシック光学系の静止時感度はレーザーの強度雑音で制限されている。図 4.27 に示されている強度雑音はレーザーの純粋な強度雑音でなく、光ファイバーを使用して真空容器内に導入した後での強度雑音である。そのため、光ファイバーの形状や位置の変化による偏光の変化による強度の変化の影響も含まれている。0.1 Hz 以下の低周波数帯では光ファイバーの固定の程度を変化させるとスペクトルが変化することから、この偏光の変化による

[*5] Lorentz 不変性検証を実際に行うときには、光学系を回転台で回転させ、そのときの信号を異方性信号と呼ぶが、本研究のような静止時での評価においても異方性信号をいう用語を用いる。

強度変動が感度を制限する要因になっていると考えられる。1 Hz 以上の高周波数帯においてはファイバーの固定によってスペクトルは変化しない。スペクトルの形状からこの周波数帯では散乱光が影響していると考えられる。先行研究 [5] における静止時感度は散乱光雑音や強度雑音などで制限されていると考えられる。本研究でも強度雑音によって制限されていることから、静止時における感度を比較することでモノリシック光学系によって振動感度低減がなされているかどうかを判別することはできない。モノリシック光学系自身の振動感度特性を評価するには、先行研究と同じ回転台に乗せて回転させたときの、振動の影響が出ている周波数帯での感度を比較する方法や、光学定盤等を叩いて振動を引き起こし、異方性信号と地震計の信号の相関を見ることで振動の影響がどれほど現れるかを評価するなどの方法が考えられる。製作したモノリシック光学系の実際の振動感度評価は今後の課題である。

4.4.5　振動感度評価

製作したモノリシック光学系の振動感度を評価した。図 4.28 のように、光学定盤上に製作したモノリシック光学系が封入された真空容器と加速度センサーを設置した。光学定盤に振動を与え、加速度センサーから読み取った変位から、異方性信号への伝達関数を測定した。その結果が図 4.29 である。

図 4.28　振動感度測定図

得られた伝達関数と先行研究で測定された回転台上の振動スペクトルから製作したモノリシック光学系の異方性探査時の回転時の感度を見積もった。その結果が図 4.30 である。

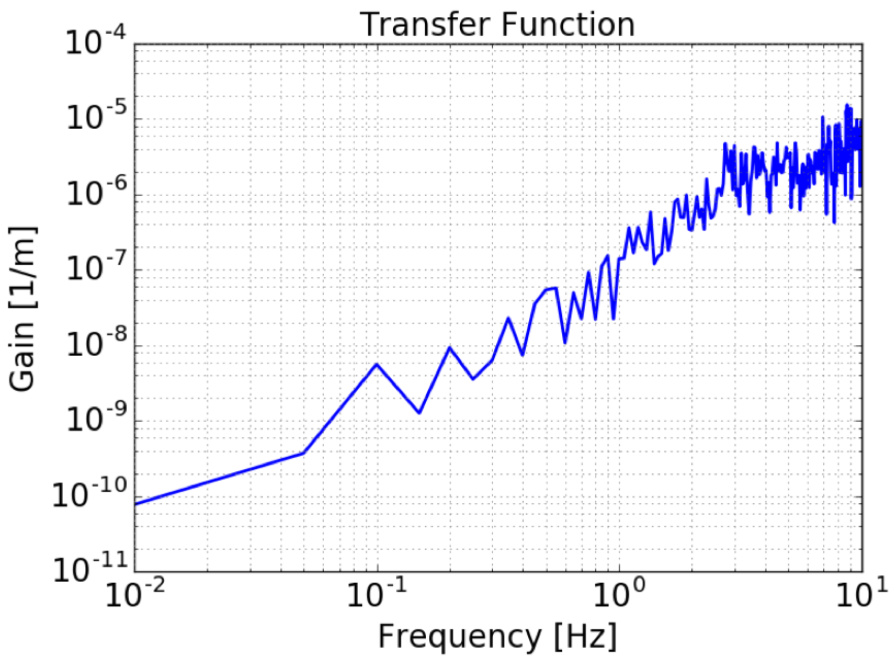

図 4.29　変位から異方性信号への伝達関数

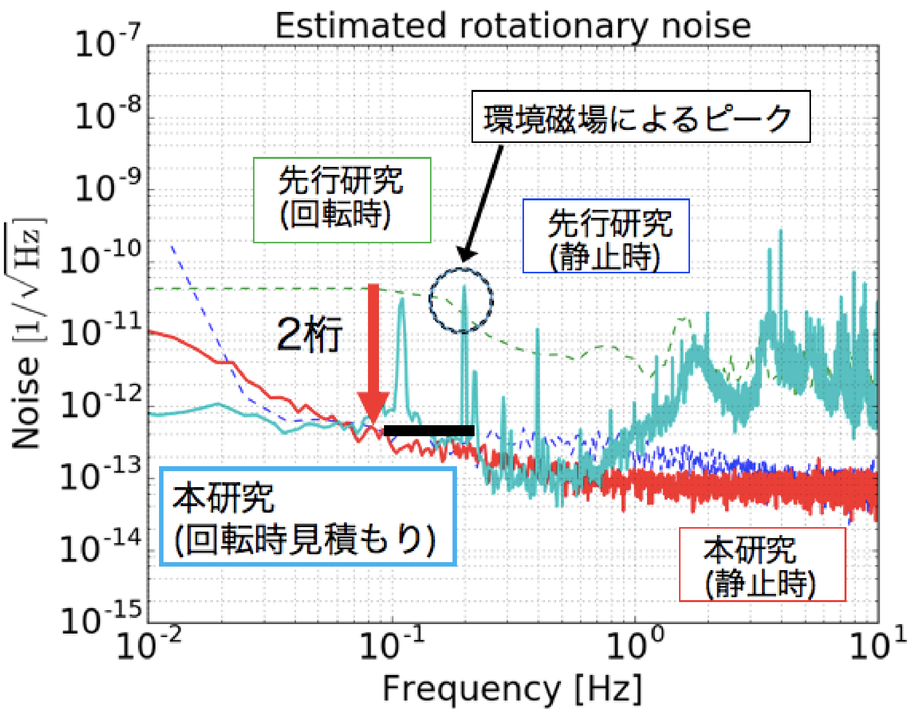

図 4.30　回転時の感度見積もり

回転周波数に現れているピークはコイルを用いている加速度計の回転による環境磁場とのカップリングであるので、実際の回転時見積もり感度はピークの部分を除いたフロアーレベルである。したがって得られた回転時の感度見積もりはほぼ静止時感度レベル $\delta c/c \sim 10^{-17}$ であり先行研究の感度を二桁ほど更新することができるものになっていることがわかる。振動感度評価では光学定盤上に加速度計を置いて変位から異方性信号への伝達を測定した。より正確な振動感度評価には実際にモノリシック光学系を先行研究と同じ回転台の上に乗せて振動感度を評価する必要があると考えられる。また、静止時感度の評価で述べたように現在の感度は偏光の強度変化による強度雑音で制限されている。また、振動を光学定盤に加えると共振器の透過光強度が変動していることから、振動によってファイバーが揺れ、偏光状態が変化することによって強度変動が引き起こされている可能性が高い。したがって上で得られた回転時見積もり感度は上限値で実際のモノリシック光学系の振動感度はより良い可能性がある。

4.5　本章のまとめ

・Template と手動ステージアラインメントユニットによるモノリシックアラインメント手法を開発した。開発したモノリシックアラインメント手法は、ビーム中心のズレに対して $\delta x \lesssim 0.14$ mm、ビーム伝播方向のズレに対して $\delta\theta \lesssim 0.0018$ rad ($0.10°$) の精度でのアラインメントが可能である。この手法によって要求値を上回る精度でのモノリシックアラインメントに成功した。

・紫外線硬化樹脂を用いて、入射光学系と共振器が一体となったモノリシック光学系を世界で初めて製作した。

・静止時の雑音レベル $\delta\nu/\nu \sim 10^{-13}\ /\sqrt{\mathrm{Hz}}$、センサー効率 $H_1 = 1 \times 10^{-7}$ V/Hz, $H_2 = 1 \times 10^{-8}$ V/Hz などでペデスタル光学系を用いた先行研究と同じレベルを実現したことや、FSR などの光学特性が設計値と概ね一致していることから製作したモノリシック光学系と開発したアラインメント手法の有効性・妥当性を示した表 4.9。

・製作したモノリシック光学系の振動感度を評価するために振動から信号への伝達を測定し、回転時の感度レベルを見積もった。得られた回転時の感度レベルはほぼ静止時感度レベル $\delta c/c \sim 10^{-17}$ であり、これは先行研究の回転時感度を二桁更新する精度である。

表 4.9　本研究と設計値、先行研究の比較

本研究で製作したモノリシック光学系		設計値・先行研究	
FSR	1.5 GHz	FSR(設計値)	1.5 GHz
FWHM	18 MHz	FWHM(設計値)	12 MHz
フィネス	83	フィネス (設計値)	125
センサー効率 H_1	1×10^{-7} V/Hz	センサー効率 H_1 [32]	8.2×10^{-8} V/Hz
センサー効率 H_2	1×10^{-8} V/Hz	センサー効率 H_2 [32]	1.5×10^{-8} V/Hz
静止時感度 (0.1 Hz)	$\delta\nu/\nu \sim 10^{-13}$ $/\sqrt{\mathrm{Hz}}$	静止時感度 (0.1 Hz) [5]	$\delta\nu/\nu \sim 10^{-13}$ $/\sqrt{\mathrm{Hz}}$

第 5 章 同相雑音除去比測定

本章では同相雑音除去比 (CMRR) の測定結果について述べる。本研究では同相雑音除去比の温調による測定とそれをもとにした非対称光リング共振器を用いた奇パリティの光速の異方性探査による Lorentz 不変性検証実験における定量的な雑音の評価と感度との関係を議論した。

5.1 研究背景

媒質を加えた非対称光リング共振器とダブルパス構成を用いた奇パリティの光速の異方性探査による Lorentz 不変性の検証実験においては、これまで共振器長変動に対する同相雑音除去比に対して $\gamma_{\mathrm{CMRR}} \sim 1/100$ という値が仮定されてきていた [5, 32]。ところがより精度の高い Lorentz 不変性の検証には雑音の定量的な見積もりが必要であり、その雑音見積もりを踏まえて今後の装置の改良点等が議論されるべきである。3 章で触れたように本実験系には共振器長変動に対する同相雑音除去が効く雑音と効かない雑音が存在する。雑音、特に共振器長変動に対する同相雑音除去が効く雑音を定量的に見積もり、それをもとに今後の実験系の開発や改良の方針を立てるためには同相雑音除去比の測定と評価が必要不可欠である。そこで、本研究では同相雑音除去比を共振器に温度変動を与え共振器長変動を引き起こすことで測定した。そして、その実測した同相雑音除去比をもとに雑音の定量的評価と感度との関係を議論した。

5.2 CMRR 測定原理

本節では CMRR の測定原理について述べる。ダブルパス構成を取っている本実験は、共振器長変動が両回りの共振周波数を同相で変化させるため、偏光解析法による差動測定をすることによって環境変動による共振周波数変動に対して同相雑音除去が効き、原理的には共振器長変動は信号には現れず高い精度を出すことができる。しかし、理想的には同相雑音除去は無限に効くが、実際の実験系では同相雑音除去比は有限の効果でしか効かない。これは共振器長変動による

アラインメントの変化など理論計算の際に行なっている理想化が実際の実験系では成り立たないことによる複合的な要因によって完全には左回りの共振器調変動と右回りの共振器調変動はキャンセルされず、共振器調変動の影響が少なからず異方性信号にも現れてしまう。3 章のところで述べたように、異方性信号と Feedback 信号の共振器長変動との関係は、同相雑音除去の程度を表すパラメーターである同相雑音除去比 (CMRR)γ_{CMRR} を用いて、次のように表される (式 (3.26), 式 (3.27) 参照)。

$$\frac{\delta V_{\mathrm{error2}}}{\nu H_2} = \delta\nu_{\mathrm{LV}} + \gamma_{\mathrm{CMRR}}\frac{\delta\nu_{\mathrm{len}}}{\nu} \tag{5.1}$$

$$\frac{PA\delta V_{\mathrm{FB}}}{\nu} = \left(\frac{\nu_{\mathrm{laser}}}{\nu} - \frac{\nu_{res}}{\nu} - \frac{\delta\nu_{\mathrm{LV}}}{2\nu} - \frac{\delta\nu_{\mathrm{len}}}{\nu}\right) \tag{5.2}$$

$$\delta\nu_{\mathrm{len}} = -\frac{\nu_{\mathrm{res}}}{L+(n-1)d}\delta L \tag{5.3}$$

このように共振器長変動による光リング共振器の共振周波数変動 $\delta\nu_{\mathrm{len}}$ は Error2 信号 (異方性信号) には現れないが FeedBack 信号には現れ、その比が同相雑音除去比を表す。したがって、外部から共振器長変動を誘起し、変調された異方性信号と Feedback 信号を比較することで同相雑音除去比を実測することができる。3.5 節で挙げたように共振器長変動を引き起こす雑音源は複数あるが、その中でも周期的な変調を比較的かけやすそうな、共振器の温度変動による共振器長の変化を利用して CMRR を測定した。[*1]共振器の温度変動を起こすのには Pertier 効果によって冷却、加熱を行うことができる Pertier 素子を用いた。共振器に Pertier 素子を接着し、Function Generator による変調信号を加える、すると Pertier 素子の温度変動が共振器に繋がり、共振器長変動が引き起こされる。このときの変調された Error 信号と、FeedBack 信号の振幅をフィッテングによって求め、その比を用いて CMRR を実測した。

5.3　CMRR 測定方法

以上の実験原理に基づいて実際に CMRR 測定を行なった。実験セットアップは 4 章で作成したモノリシック光学系を用い、図 5.1 のように温調用の Pertier 素子と温度モニター用の Si ダイオードセンサーを光リング共振器に接着した。Periter 素子はシリコンの反対側である M1,M2

[*1] 共振器長変動の仕方によってはアラインメントの変化などが異なり CMRR の値は異なるものになると考えられる。本研究では共振器長変動を介する同相雑音除去に対して同じ CMRR の値を仮定している。

間に接着し、温度センサーは光リング共振器の上部中央に接着した。

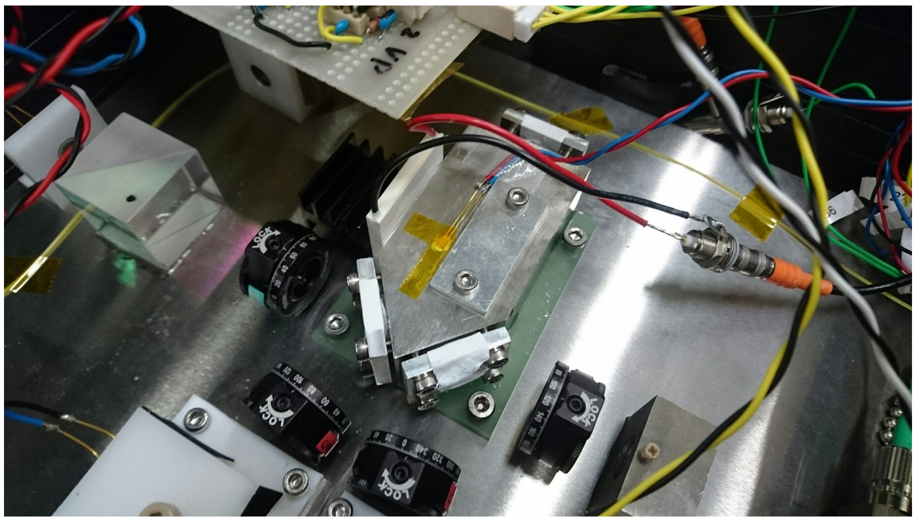

図 5.1　CMRR 測定

温調を用いた CMRR 測定に使用した装置は以下の表の通りである。

表 5.1　CMRR 測定に用いた温調装置一覧

名称	仕様等
Pertier 素子	Pertier 素子 (ジーマックス, FPH1-12704AC)
温度センサー	Si ダイオード温度センサー (Lake Shore Cryotronics Inc., DT-670B-SD)
温度モニター	温度コントローラ (Lake Shore Cryotronics Inc., 4ch 温度コントローラ 336 型)

温度センサーと温度モニタには Lake Shore 社製の Si ダイオードセンサーと温度コントローラーを使用した。Si ダイオードセンサーの電気信号を温度に換算する換算曲線はあらかじめ温度コントローラに内蔵されているのでそれを使用した。また、温度コントローラは温度制御もできる使用であるが、ここでは単に温度モニターとして使用した。共振器に Pertier 素子と温度センサーを接着させるのにはグリスを使用した。温度センサーについては剥がれてしまうことを防ぐために上から軽くテープで押さえつけてある。

Pertier 素子に Function Generator を用いて 20Vpp の電圧を印加した。変調周波数は、異方性探査を行うときの光学系を回転させるときの回転周波数 0.1 Hz の近傍の 4 つの周波数 0.05 Hz, 0.075 Hz, 0.1 Hz, 0.11 Hz に設定し、それぞれの周波数で CMRR を測定した。温調を 0.1 Hz でかけたときの Pertier 素子表面温度と共振器の温度の揺らぎのスペクトルが図 5.2 で

ある。

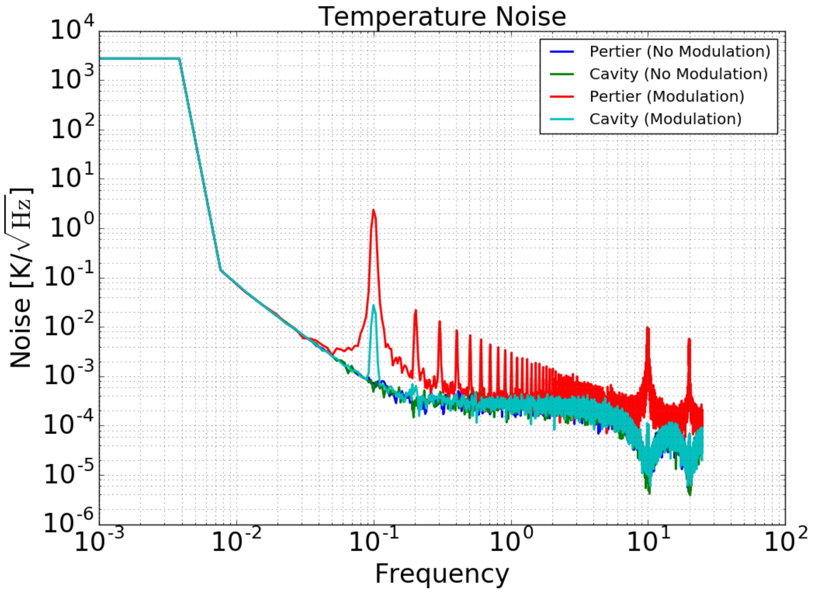

図 5.2　Pertier 素子と共振器温度変動

変調をかけていないときのレベルは温度変動によるものなのか、温度センサーのダークレベルで制限されているのかは不明確だが、Pertier 素子に正弦的な電圧をかけることで温度変調をかけられていることが確認できる。Pertier 素子の変動に比べて共振器の変動が減衰しているのは、物質は温度変動に対してローパスフィルターのように振る舞うことによるものである。固体 (A,B) 間の熱移動による温度変動の伝播について考える。A のある点での温度変動を δT_A、B のある点での温度変動を δT_B とすると、その間の伝達関数は、

$$H_{A\to B} = \frac{1}{1 + i\omega R_{A\to B} C_B} \tag{5.4}$$

で与えられる。ここで $R_{A\to B}$ は A,B 間の熱抵抗、C_B は B の熱容量である。今の場合、A として Pertier 素子、B としてスーパーインバーを考えることになる。今の場合 A を単に熱源として考え、A の温度が B の表面温度に直接伝わるとすると、$R_{A\to B} = R_{\mathrm{inv}}$ となる。ここで R_{inv} はスーパーインバーの表面から温度センサーのある地点までの熱抵抗である。固体の熱抵抗は熱の伝播方向の長さを面積と熱伝導率で割ったものになる。スーパーインバーの熱伝導率は 13 W/(m · K) であるので、今の場合

$$R_{\mathrm{inv}} = \frac{20 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}}{(40 \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{-3})\ \mathrm{m}^2 \times 13\ \mathrm{W/(m \cdot K)}} = 1.92\ \mathrm{K/W} \tag{5.5}$$

となる。$C_{\mathrm{inv}} = 50$ J/K と R_{inv} の値を伝達関数の表式に代入することで、ローパス特性のカットオフ周波数は、0.00166 Hz となる。0.1 Hz でのゲインは 0.0166 となる。これは図 5.2 から読み取ることができるゲイン 0.01 と概ね一致しており理論通り温度変調が加えられていることが確認できる。

5.4　CMRR 測定結果

上述したように温度変調の周波数が 0.05, 0.075, 0.1, 0.11 Hz の 4 つの場合でそれぞれエラー信号と FeedBack 信号に変調を加えて CMRR 測定を行なった。図 5.3 が 0.1 Hz の温度変調 (10 秒で一周期) を 60 分かけたときの DC 成分を取り除いた時系列データである。上が変調された異方性信号 (Blue) と変調された FeedBack 信号 (Red) であり、下はモニターした共振器の温度である。0.04K ほどの温度ドリフトが見て取れる。これは共振器に加えられた熱が逃げていかず温度が徐々に上がっていってしまうめだと考えられる。0.1 Hz の変調が加わっていることはこの図からは時間スケールが大きいので読み取れないが、図 5.3 の 100 sec から 500 sec の部分を拡大したものが図 5.4 でありこの図からは変調が加わっていることが目で見てわかる。異方性信号に比べて FeedBack 信号の方は正弦波が崩れているが、これはレーザーの周波数そのものの揺らぎの影響だと考えられる (図 5.4)。

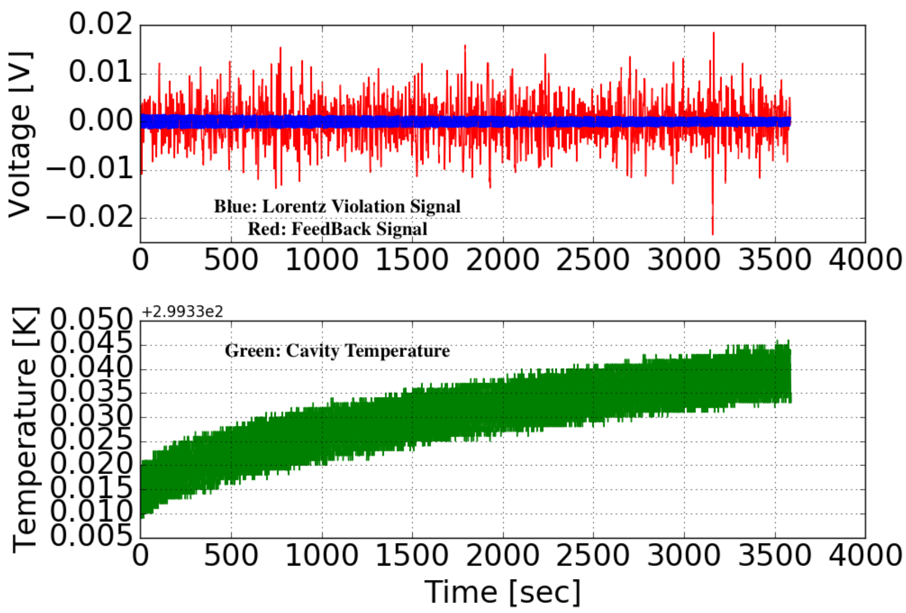

図 5.3　温度変調による共振器調変動によって変調された信号と温度の推移

4 つの周波数の変調による測定それぞれについて、変調周波数での振幅をフィッティングによ

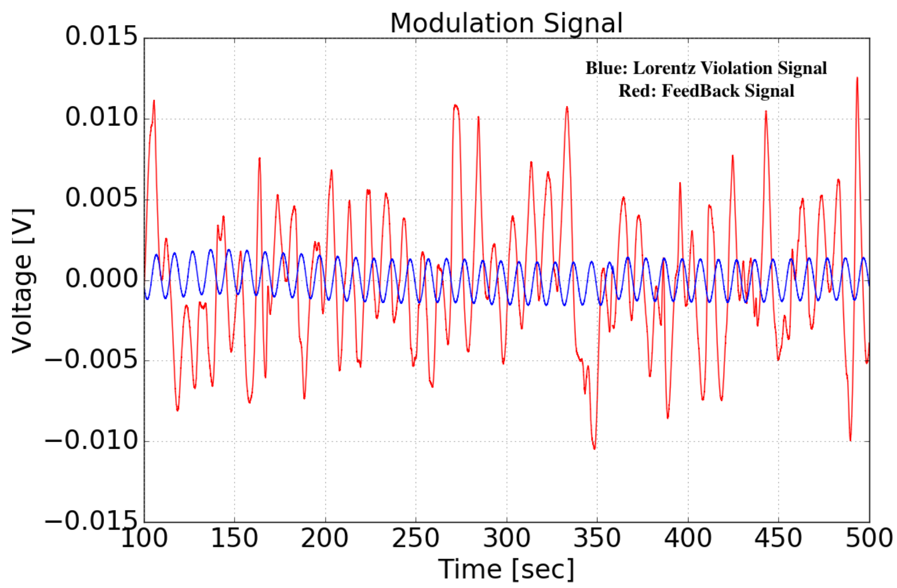

図 5.4　温度変調による共振器調変動によって変調された信号と温度の推移の拡大図

り算出し、その比に式 (5.1) と式 (5.2) の左辺のように適切な伝達関数をかけることで CMRR を算出した。その結果を表す表と図が表 5.5 と図 5.5 である。

表 5.2　CMRR 測定に用いた温調装置一覧

名称	仕様等
0.05 Hz	0.0064 ± 0.0018
0.075 Hz	0.022 ± 0.0026
0.1 Hz	0.023 ± 0.0056
0.11 Hz	0.017 ± 0.0043

誤差にはそれぞれ約 50 回の測定の標準偏差を用いた。0.05 Hz に関しては他の周波数における測定値よりも小さい値が得られている。これは低周波数の変調では温度変化が十分大きく加えられるため、他の雑音の影響が十分小さくなるような変動が加えられているためだと考えられる。したがっておおよそ $\gamma_{\mathrm{CMRR}} \sim 1/100$ という値が温調による CMRR 測定によって得られた。

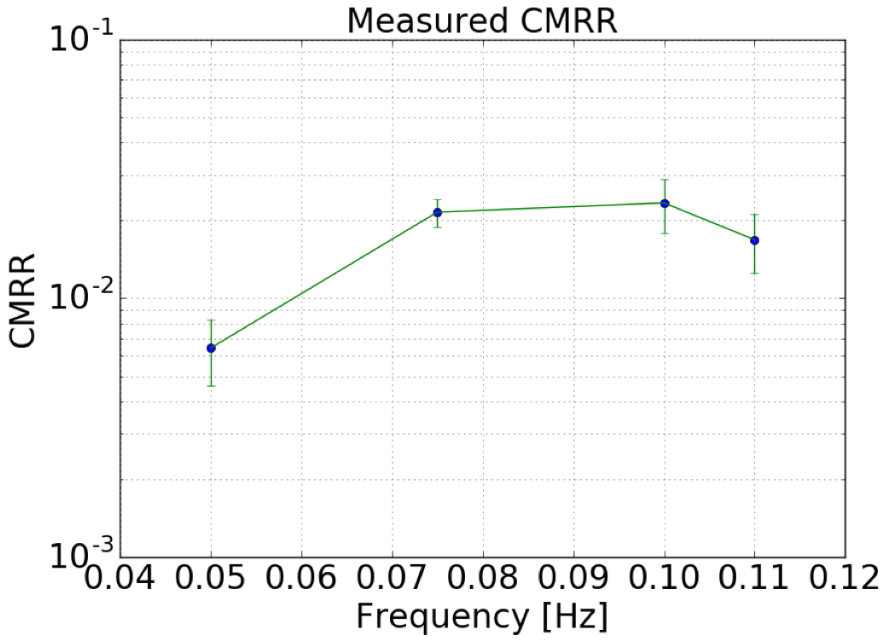

図 5.5　CMRR 測定結果

5.5　CMRR 測定値を用いた雑音見積もり

ここでは、製作したモノリシック光学系が Lorentz 不変性の破れが指摘されているレベル $\delta c/c \sim 10^{-17}$ で Lorentz 不変性の検証が可能なものであることを示す。3.5 節で紹介した主要な雑音源を上述のように温調による共振器長変動を用いて測定した CMRR 図 5.5 の値を使って見積もったものが図 5.6 である。CMRR の実測値は $\gamma_{\mathrm{CMRR}} \sim 1/100$ とした。4 節で得られた結果から、各種のパラメータに実験系、光学系の設計値を使用して雑音評価をしても、実際のパラメータ (フィネス等) を用いた雑音評価とオーダーは変化しないので簡単のためにここでは設計値を使用している。各種の雑音を引き起こす変動には実測したスペクトルのフィッティングを用いている。レーザー周波数雑音は周波数制御によって抑えられるものなので、制御系の設計に依存する。したがってレーザー周波数雑音は図示していない。[*2]また、同じ回転角速度変動に対して遠心力変動による雑音の影響は、Sagnac 効果による雑音に比べて影響が小さいので図示していない。傾き変動雑音に対してはよほど不安定な回転台でない限り特に傾き制御を行う必要はないと考えられるのでこれも図示していない。前章で示した製作したモノリシック光学系の回転時

[*2] 4 章のモノリシック光学系での制御系ではフィードバック信号から見積もったレーザー周波数雑音のレベルよりも周波数制御を行なったときの異方性信号のレベルの方が十分に小さいことから、周波数制御によって低い雑音レベルに抑えられていることがわかる。

見積もり感度を図示してある。また、参考のため図中には先行研究 [5] における静止時、回転時の感度を図示した。

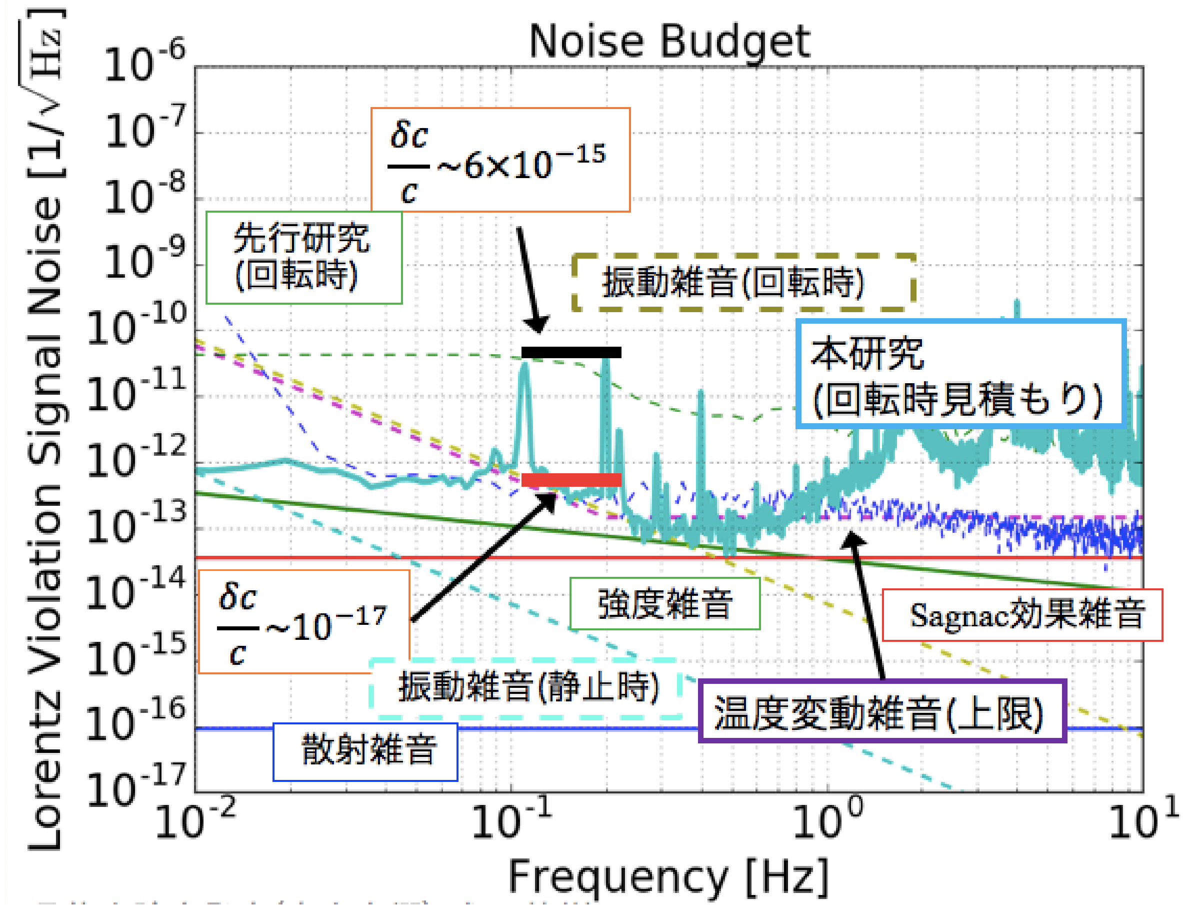

図 5.6　モノリシック光学系の回転時見積もりと測定した CMRR を用いて計算した雑音見積もり (点線が共振器長変動に対する同相雑音除去が働く雑音源、図中青点線、緑点線はそれぞれ先行研究 [5] における静止時、回転時の感度)

散射雑音では式 (3.36) を使用して計算した。$L, n, \mathcal{F}$ などの光学パラメータには表 4.3 を使用し、量子効率は $\eta = 1$ とした。本実験ではレーザーの出力を 10 mW と設定し、PBS で分けた光を左回りの入射光としている。したがって右回りについての入射光はこの左回りの入射光の透過光になる。そのため実際の入射光は設定したレーザーの出力からは減衰したものになっているはずだが、オーダーは変わらないのでここでは簡単に全体の入射光強度を右回りの入射光強度として計算した。

レーザー強度雑音では式 (3.39) を使用して計算した。$\mathcal{F}$ には表 4.3 の設計値を用いた。レーザーの相対強度雑音には同じレーザーを用いた先行研究である [32] の図 4.5 の測定値 (out of loop) を使用した (この値は本研究のモノリシック光学系において周波数制御をかけたときの強度雑音と同レベルである。周波数制御によって強度安定化がされる原因は現在のところ不明であ

る)。また、強度雑音に対する同相雑音除去比は $\gamma_{\rm CMRR}^{\rm int} \sim 1/10$ とした。この値は AOM による強度変調を用いて算出した測定値 $\gamma_{\rm CMRR}^{\rm int} \sim 1/6$ を反映している [33]。

Sagnac 効果雑音では式 (3.43) を使用して計算した。L, n, d, S などのパラメータには表 4.3 を使用した。また、回転角速度変動 $\mathcal{P}_{\omega_{\rm rot}}$ には、先行研究で使用されていた回転台の回転角速度変動 [5] の Figure 4.8 から $\mathcal{P}_{\omega_{\rm rot}} \sim 1 \times 10^{-3}$ rad/sec/$\sqrt{\rm Hz}$ とした。

振動雑音では式 (3.46), 式 (3.47) を使用して計算した。現在の静止時感度から、$\gamma_{\rm CMRR}^{\rm rigid} \lesssim 10^{-8}$ であることがわかるので、その上限値 $\gamma_{\rm CMRR}^{\rm rigid} \sim 10^{-8}$ を採用した。変動 $\mathcal{P}_{x^{\rm seis}}$ は、場所や時間、天候などによるが、大まかに次のようなスペクトルに従うことが知られている [34]。

$$\mathcal{P}_{x^{\rm seis}} = 10^{-7} \left(\frac{1\ {\rm Hz}}{f} \right)^2\ {\rm m}/\sqrt{\rm Hz} \tag{5.6}$$

実験室で実際に測定されたスペクトルは 10 Hz 以下でこれよりも小さい値になっているが、図中ではこれを使用しペシミシティックな見積もりをした。また、実際の異方性探査による Lorentz 不変性検証では光学系を回転台に乗せて回転させる。このときの振動を地震計で測定したときの振動変動スペクトル [33]

$$\mathcal{P}_{x^{\rm seis-rot}} = 10^{-5} \left(\frac{1\ {\rm Hz}}{f} \right)^2\ {\rm m}/\sqrt{\rm Hz} \tag{5.7}$$

を使用した場合の回転時の振動雑音見積もりも行った。

温度変動雑音では式 (3.46), 式 (3.48) を使用して計算した。光学系のパラメータについては表 4.3 の値を用い、熱膨張係数や熱光学系数については式 (3.48) の前で述べた値を使用した。温度変動スペクトルには図 5.2 の変調がない場合の共振器温度のスペクトルを使用した。シリコンの屈折率変化とシリコンの熱膨張を考慮し、シリコンにも共振器と同じ温度変動が加わっているとすると現在の静止時感度を二桁ほど越す雑音見積もりになってしまう。このようにシリコンの温度変化による効果を考慮すると考慮しない場合と比べて温度変動の雑音レベルが熱膨張率が 2 桁近く悪くなるのは、シリコンの熱膨張率がスーパーインバーに比べて大きく、温度変動がスーパーインバーとシリコンで同じ場合にはシリコンの温度変動の影響が大きく出てしまうためである。したがって、実際の実験系ではスーパーインバーからシリコンへの熱伝導は大きくなく、スーパーインバーの温度変動に比べてシリコンの温度変動は十分小さいことが類推される。したがって、以降では式 (3.48) において括弧内第二項と第三項を取り除いたシリコンの温度変化を考慮しないときの温度変動雑音を単に温度変動雑音と呼ぶ。図 5.6 においてもこのときの温度変動雑音のみを図示している。

先行研究 [5] の回転時感度 $\delta\nu/\nu \sim 5 \times 10^{-11}$ は奇パリティの光速の異方性による光の行きと帰りによる光速差に換算すると $\delta c/c \sim 10^{-15}$ であり、また本研究のモノリシック光学系の静止時感度や先行研究 [5] の静止時感度 $\delta\nu/\nu \sim 10^{-13}$ は、$\delta c/c \sim 10^{-17}$ となる。したがって、Lorentz 不変性の破れの可能性が指摘されている 10^{-17} レベルでの探査には静止時感度までの到達が必要になる。散射雑音レベル $\delta\nu/\nu \sim 10^{-16}$ は現在のモノリシック光学系静止時感度から約 4 桁低くなっている。奇パリティの光速の異方性による光の行きと帰りによる光速差に換算するとこれは $\delta c/c \sim 10^{-20}$ レベルに相当する。これは偶パリティの光速の異方性探査における最高精度検証 $\delta c/c \sim 10^{-18}$ [4] を越す感度である。

図 5.6 において最も大きな雑音源は温度変動雑音である。図 5.7 がフィッティングではなく実際の温度変動スペクトルを用いた雑音見積もりである。感度レベルでは $\delta c/c \sim 10^{-17}$ に相当し回転時見積もり感度よりも少し低いレベルになっている。また、Si ダイオードセンサーによる温度スペクトルはそのセンサー雑音によって制限されていることから、この温度変動雑音見積もりは上限値であると考えることができる。したがって、回転時にも温度変動の影響は回転による振動雑音よりも十分低いことが想定される。

次に図 5.6 において温度変動雑音と同程度に大きな雑音源となっているのは、回転時の回転台の振動によって共振器長変動が引き起こされることによる振動雑音である。現在進行している非対称光リング共振器を用いた奇パリティの光速異方性探査による Lorentz 不変性の検証実験においては、光学系の回転機構によるピーク雑音で感度が制限されている [33]。 回転機構の開発によってこのピーク雑音が取り除かれると、そのフロアーレベルの回転台の振動によって雑音が制限されることが予想される。*3 この雑音についても回転周波数付近で $\delta c/c \sim 10^{-17}$ 程度であり、回転時見積もり感度を下回っている。したがって、以上のことから製作したモノリシック光学系によって $\delta c/c \sim 10^{-17}$ での奇パリティの光速の異方性探査が可能であることが結論づけられる。

以上の雑音は共振器調変動に対する同相雑音除去が働く雑音源となっている。上述したことをまとめると、製作したモノリシック光学系によって $\delta\nu/\nu \sim 10^{-13}$ 程度、すなわち Lorentz 不変性の破れの可能性が指摘されているレベルである $\delta c/c \sim 10^{-17}$ の現在の静止時感度レベルまでの異方性探査が可能である。この付近では温度変動や回転機構、回転による振動雑音によって感

*3 ところが、[33] におけるセミモノリシック光学系を用いた系ではピーク雑音を除いたフロアーレベルが静止時の雑音レベルと同程度になっており、ダブルパス構成による CMRRγ_{CMRR} と共振器に鏡を固定したことによる CMRR$\gamma_{\mathrm{CMRR}}^{\mathrm{rigid}}$ との積が $\sim 10^{-10}$ 程度であると評価できる。本研究で測定した CMRR の実測値 $\gamma_{\mathrm{CMRR}} \sim 1/100$ が振動雑音に対しても同程度だと仮定すると、$\gamma_{\mathrm{CMRR}}^{\mathrm{rigid}} \sim 10^{-8}$ であると評価できる。実際には温調による共振器調変動が、振動による共振器調変動と同じとは限らず、したがって同程度であることは期待されるが一概には CMRR の値が同じとは言い切れない。

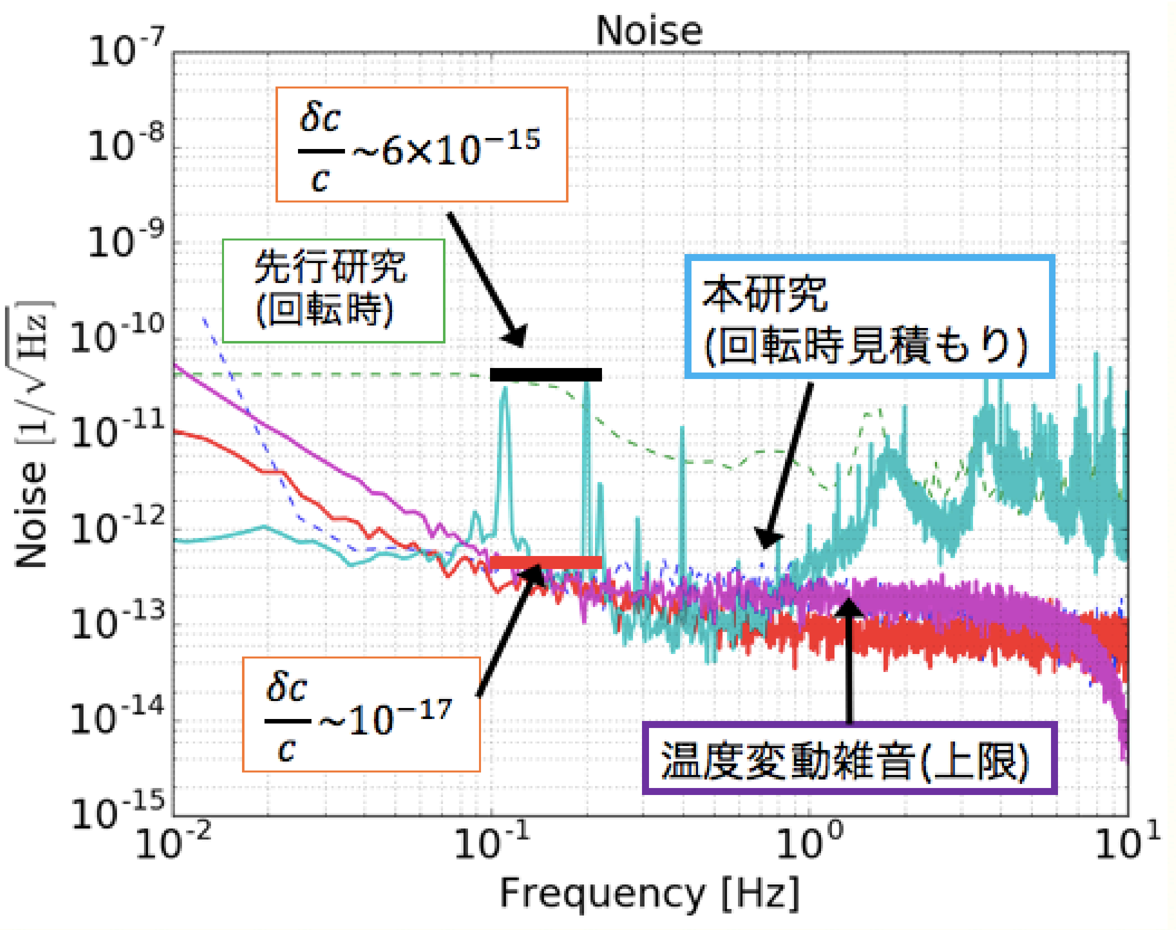

図 5.7　温度変動見積もり

度が制限されることが予想される。したがって、回転による回転周波数におけるピーク雑音を減らし、回転台の振動が十分小さくなるような回転機構の開発が必須になる。例えば、より安定した大きな回転台を使用したり、回転台によって下から支えるのではなく上から土台を吊るして回転させたりするような方法をとることが考えられる。後者の場合は図中では考慮していない傾き変動を十分に考慮する必要があり、姿勢を保つような機構を開発しなければならない。これらの開発で $\delta\nu/\nu \sim 10^{-13}$ 程度の現在の静止時感度レベルを達成し、さらにそれを越すレベルでの異方性探査を目指すには、振動雑音だけでなく温度変動が大きな雑音源となる可能性が考えられる。温度変動に関してはセンサーの検出限界としっかりと区別して温度変動を測定することが今後の課題である。もちろんこれらの雑音源には同相雑音除去が働くので、M1,M2,M3 の鏡も共振器のスペーサーに接着剤を用いて接着固定するなどの方法で CMRR を向上させれば、その分だけ雑音のレベルを下げることができる。またより積極的に真空引きによる温度変動の低減、温度安定化なども温度変動雑音対策として考えることができる。

散射雑音で制限されている $\delta\nu/\nu \sim 10^{-16}$ の雑音レベルでは $\delta c/c \sim 10^{-20}$ のレベルで異方性探査が可能である。この感度レベルに到達するための雑音見積もりも行った。このレベルに到達するためには上述したような同相雑音除去が効く雑音だけでなく、同相雑音除去が効かない雑音の影響も無視できなくなる。

同相雑音除去が効かない雑音でまず問題になるのは強度雑音である。実際 4 章でも述べたようにモノリシック光学系においてもその感度は強度雑音によって制限されている。純粋なレーザーの強度雑音だけでなく、偏光が変化することによる入射強度の変動も問題となることが予測される。純粋なレーザーの強度雑音の低減については、より強度が安定なレーザー光源を使用することや強度安定化を行うなどの対策が考えられる。強度安定化を行うと入射光量が減少してしまうため、偏光解析の効率が落ちてしまうなどの問題が起こる。したがって強度安定化を行う場合は、入射光量を十分に増やすことが必要になる。偏光が変動してしまうのは、レーザー光を光学系に導入するファイバーが空気の流れなどで揺れてしまうのが大きな原因となっている。したがって、光ファイバーも紫外線硬化樹脂などの適当な接着剤を用いて固定してしまうなどの対策が必要になってくると考えられる。

Sagnac 効果による雑音もまた回転機構の開発によって安定な角速度が実現されればより低い雑音レベルとなるが、Sagnac 効果による雑音には同相雑音除去が効かないので CMRR の向上では低減することができない。式 (3.43) によると、本実験セットアップの範疇で改良を考えるならば、共振器が囲う面積 S を小さくするなどの系の小型化などが考えられるが、このような変更を加えると他のパラメータも考慮する必要が出てくるので拘束条件がある場合にはより慎重な議論が必要となる。

$\delta c/c \sim 10^{-20}$ のレベルで異方性探査のための雑音見積もりが図 5.8 であり、各種の要求値をまとめたものが図 5.9 である。散射雑音で制限されている $\delta\nu/\nu \sim 10^{-16}$ の雑音レベルでは $\delta c/c \sim 10^{-20}$ のレベルで異方性探査が可能であり、原理的にはこのレベルでの探査も可能である。しかしこの雑音レベルに到達するには上記の同相雑音除去が効く雑音低減の他にファイバーの固定や強度安定化による強度雑音低減のほか、回転角速度の安定化や系の設計変更などによって Sagnac 効果雑音を低減することが必要となることがわかった。また、ここでは傾き雑音の寄与も図示している。傾き変動には回転台上の加速度センサーによる変位から換算した実測値のフィッティングを使用した。

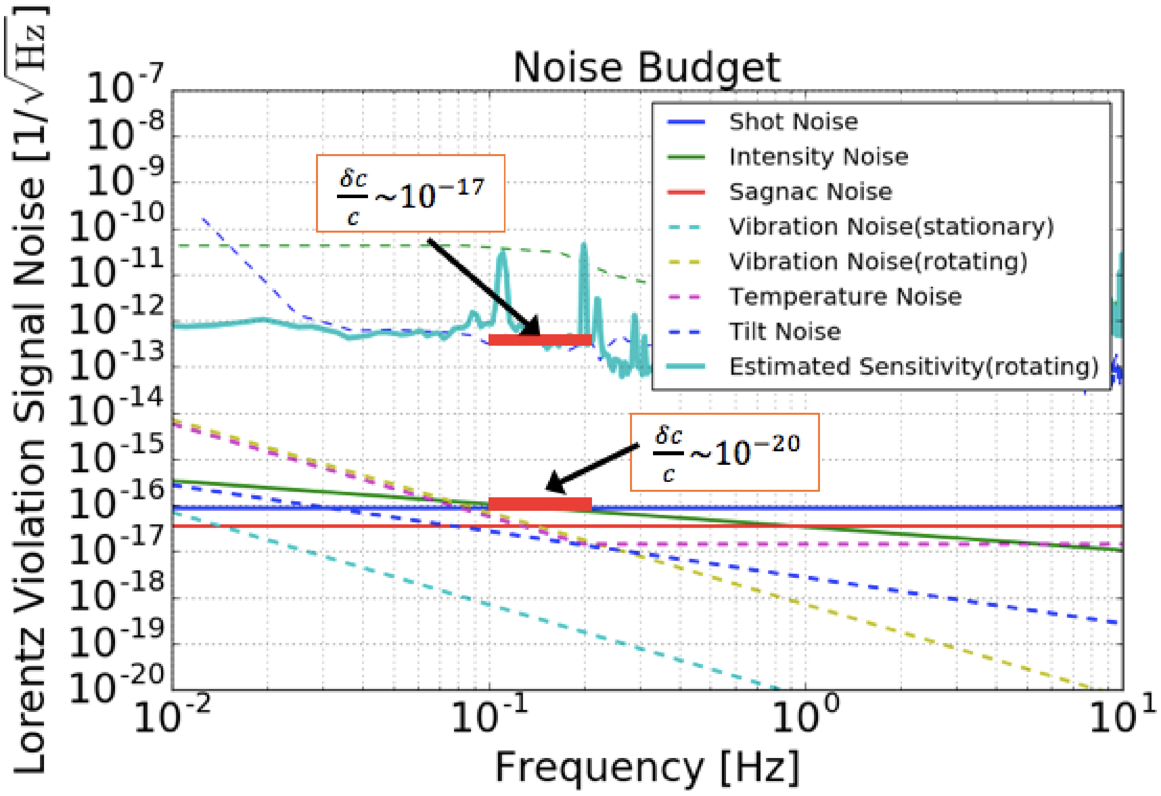

図 5.8　$\delta c/c \sim 10^{-20}$ での異方性探査のための雑音見積もり

雑音名	要求値(@0.1Hz)	現在(@0.1Hz)	手段
散射雑音	-	$\delta\nu/\nu \sim 1 \times 10^{-16}\ 1/\sqrt{\mathrm{Hz}}$	-
強度雑音	$\delta P/P \sim 1 \times 10^{-7}\ 1/\sqrt{\mathrm{Hz}}$	$\delta P/P \sim 1 \times 10^{-4}\ 1/\sqrt{\mathrm{Hz}}$	強度安定化/CMRR向上 ファイバーの固定
振動雑音	$\delta x \sim 1 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$	$\delta x \sim 1 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$	モノリシック光学系 回転機構の改良/CMRR向上
温度変動雑音	$\delta T \sim 8 \times 10^{-8}\ \mathrm{K}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$	$\delta T \sim 8 \times 10^{-4}\ \mathrm{K}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$	真空引き/温度安定化 CMRR向上
Sagnac効果雑音	$\delta\omega \sim 1 \times 10^{-6}\ \mathrm{rad/sec}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$	$\delta\omega \sim 1 \times 10^{-3}\ \mathrm{rad/sec}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$	回転機構の改良
傾き変動雑音	$\delta t \sim 2 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$	$\delta t \sim 2 \times 10^{-3}\ \mathrm{rad}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$	回転機構の改良 傾き制御

図 5.9　$\delta c/c \sim 10^{-20}$ での異方性探査のための各種変動要求値

5.6　本章のまとめ

・温調によって共振器に温度変動を与え、共振器長変動を起こすことで共振器長変動に対する同相雑音除去の程度を表すパラメータである同相雑音除去比を測定し、$\gamma_{\mathrm{CMRR}} \sim 1/100$ という結果を得た。

・得られた同相雑音除去比の値を用いて非対称光リング共振器による奇パリティの光速の異方性の高精度探査のための雑音見積もりを行い雑音源に対する定量的な評価と理解を得た。

・製作したモノリシック光学系によって Lorentz 不変性の破れの可能性が指摘されている $\delta c/c \sim 10^{-17}$ レベルでの奇パリティの異方性探査が可能である。

・種々の変動を抑えることによって将来的には散射雑音レベルである $\delta c/c \sim 10^{-20}$ のレベルで異方性探査が可能である。

第 6 章
結論

本章では本研究の結論をまとめる。

6.1 本研究の結果

本研究で得られた結果は以下の通りである。

・光路の一部に媒質を加えた非対称光リング共振器とダブルパス構成によって、奇パリティの光速の異方性探査に感度を持ち Lorentz 不変性を検証できる紫外線硬化樹脂モノリシック光学系を製作した。

・紫外線硬化樹脂を用いて、入射光学系と共振器が一体となったモノリシック光学系を世界で初めて製作した。

・Template と手動ステージアラインメントユニットによるモノリシックアラインメント手法を開発した。開発したモノリシックアラインメント手法は、ビーム中心のズレに対して $\delta x \lesssim 0.14$ mm、ビーム伝播方向のズレに対して $\delta\theta \lesssim 0.0018$ rad (0.10°) の精度でのアラインメントが可能である。この手法によって要求値を上回る精度でのモノリシックアラインメントに成功した。

・製作したモノリシック光学系の静止時の感度と光学特性評価を行い、静止時の雑音レベル: $\delta\nu/\nu$ 10^{-13} $1/\sqrt{\mathrm{Hz}}$、センサー効率: $H_1 = 1 \times 10^{-7}$ V/Hz, $H_2 = 1 \times 10^{-8}$ V/Hz、FSR: $\nu_{\mathrm{FSR}} = 1.5$ GHz、共振半値全幅 (FWHM): $\nu_{\mathrm{FWHM}} = 18$ MHz、フィネス: $\mathcal{F} = 83$、 モードマッチング率: 62% という結果を得た。これらは先行研究や設計値と概ね同程度の値であり、開

発したアラインメント手法が本研究のモノリシック光学系を製作する上で妥当な方法だったという開発したアラインメント手法の有用性が示されたことになる。

・製作したモノリシック光学系の振動感度を評価するために振動から信号への伝達を測定し、回転時の感度レベルを見積もった。得られた回転時の感度レベルはほぼ静止時感度レベル $\delta c/c \sim 10^{-17}$ であり、これは先行研究の回転時感度を二桁更新する精度である。

・温調によって共振器に温度変動を与えて共振器長変動を引き起こすことで、共振器長変動に対する同相雑音除去の程度を表すパラメータである同相雑音除去比を測定し、$\gamma_{\mathrm{CMRR}} \sim 1/100$ という結果を得た。

・得られた同相雑音除去比の値を用いて非対称光リング共振器による奇パリティの光速の異方性の高精度探査のための雑音見積もりを行い雑音源に対する定量的な評価と理解を得た。Lorentz 不変性の破れが示唆されている片道光速の異方性 $\delta c/c$ のレベル $\sim 10^{-17}$ 付近では、回転台の回転よる振動雑音と温度変動雑音が主要な雑音源になると考えられる。散射雑音レベル $\delta c/c \sim 10^{-20}$ に到達するには振動雑音、温度変動雑音の他にレーザー強度雑音と Sagnac 効果雑音といった同相雑音除去が働かない雑音源を考慮する必要が出てくることがわかった。

・製作したモノリシック光学系によって Lorentz 不変性の破れの可能性が指摘されている $\delta c/c \sim 10^{-17}$ レベルでの奇パリティの異方性探査が可能である。

・種々の変動を抑えることによって将来的には散射雑音レベルである $\delta c/c \sim 10^{-20}$ のレベルで異方性探査が可能である。

6.2　今後の研究課題

本研究の考えられる今後の研究課題以下の通りである。

・モノリシック光学系の手動ステージアラインメントにおいて光学素子を挟み込む機構や pitch 方向のアラインメントのずれを精密に調節できる手法の改良開発。

・製作したモノリシック光学系の振動感度をより直接的に評価するために先行研究と同じ回転台に乗せて回転時の雑音評価を行い、振動の影響が現れている周波数帯の雑音の構造を比較す

る。

・振動などの温調以外の手法による同相雑音除去比測定によって、同相雑音除去比の雑音源依存性を調査する。

・より正確な雑音見積もりには上記の他に共振器温度変動の測定やシリコンの温度変動の測定などより正確な雑音源となりうる物理量変動の測定が必要である。

Appendix A 作用

A.1　変分

ここでは変分について述べる。ここでの内容は [35,36] に詳しい。

定義 A.1 (作用)
多様体 $\mathscr{M}$ 上のテンソル場を考える。Ψ によってこれらのテンソル場を代表させて表記する。Ψ を単に場 (field) という。Ψ の関数 $S[\Psi]$ を考える。これは $\mathscr{M}$ 上の場から実数への写像であり、作用と呼ばれる。

本来 Ψ は $\Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}(i=1,2,\cdots,n)$ のように表記されるものである。複数のテンソル場のそれぞれを示すためのパラメータ i とテンソル場の添字を省略したものである。テンソル場 $\Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}(i=1,2,\cdots,n)$ の $x\in\mathscr{M}$ におけるテンソルを $\Psi_{(i)}|_x{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}(i=1,2,\cdots,n)$ と書く。同様にテンソル場 Ψ の $x\in\mathscr{M}$ におけるテンソルを $\Psi|_x$ と表記する。

定義 A.2 (変分)
$\mathfrak{D}\subset\mathscr{M}$ を考え、$\Psi|_x(u)$, $u\in(-\epsilon,\epsilon)$, $x\in\mathscr{M}$ を以下の 2 つの境界条件を満たすテンソル場の 1-パラメータ族 $\Psi(u)$, $u\in(-\epsilon,\epsilon)$ の $x\in\mathscr{M}$ におけるテンソルとする。

$$(1)\ \Psi|_x(0)=\Psi \text{ in } \mathscr{M} \tag{A.1}$$

$$(2)\ \Psi|_x(u)=\Psi \text{ in } \mathscr{M}-\mathfrak{D} \tag{A.2}$$

このとき、

$$\delta\Psi := \left.\frac{d\Psi(u)}{du}\right|_{u=0} \tag{A.3}$$

を場の変分という。

$dS/d\lambda|_{u=0}$ の全ての 1-パラメータ族に対する存在を仮定する。

定義 A.3 (汎関数微分)

Ψ に対して双対で (Ψ が (k,l) のテンソル場ならば χ は (l,k) のテンソル場)smooth なテンソル場 χ で次式を満たすものが、全ての 1-パラメータ族に対して存在するとする。

$$\left.\frac{dS}{du}\right|_{u=0} = \int_{\mathfrak{D}} \chi \delta\Psi \tag{A.4}$$

このとき、S は Ψ_0 で汎関数微分可能 (functionally differentiable) といい、χ を S の汎関数微分 (functional derivative) といい、次式で表記する。[*1]

$$\left.\frac{\delta S}{\delta \Psi}\right|_{\Psi_0} := \chi \tag{A.5}$$

定義 A.4 (Lagrangian)

$$S[\Psi] = \int_{\mathfrak{D}} L[\Psi] \tag{A.6}$$

の関数形を考える。ここで L は Lagrangian(Lagrangian density) と言われ、Ψ と有限個の Ψ の微分の関数である。

$$L|_x = L(\Psi(x), \nabla\Psi(x), \cdots, \nabla^k\Psi(x)) \tag{A.7}$$

定義 A.5 (変分原理)

汎関数微分可能な S に関して、S が極値をとること、つまり次式を要求する。

$$\left.\frac{dS}{du}\right|_{u=0} = 0 \tag{A.8}$$

これを変分原理という。したがって変分学の基本原理により次式が成立する。

$$\left.\frac{\delta S}{\delta \Psi}\right|_{\Psi_0} = 0 \tag{A.9}$$

これが (テンソル) 場の方程式である。

Lagrangian 形式ではこの変分原理によって理論の運動方程式、基礎方程式が得られる。

---

*1 より一般には、$\left.\frac{dS}{du}\right|_{u=0} = \chi[\delta\Psi]$ を満たす tensor distribution χ が存在するとき、S は汎関数微分可能といい、χ を $\Psi(0)$ における S の汎関数微分という。[35] の記述を引用すると、"More generally, if there exists a tensor distribution χ such that $dS/du|_{u=0} = \chi[\delta\Psi]$, we also say that S is functionally differentiable and refer to χ as the functional derivative of S at Ψ_0." tensor distribution はテンソル型の超関数を意味していると考えられる。distribution は (シュワルツ) 超関数の英語。右辺の意味は、超関数論でよく用いられるところのスカラー積 (汎関数) で、$\chi[\delta\Psi] =< \chi, \delta\Psi >= \int_{\mathfrak{D}} \chi\delta\Psi$ という意味だと考えられる。これは本文で述べた汎関数微分可能の定義と一致している。

補題 **A.1** (変分学の基本補題)

$\mathfrak{D} \subset \mathscr{M}$、適当な境界条件を満たす任意の 1-パラメータ族 $\Psi|_x(u)$, $u \in (-\epsilon, \epsilon)$, $x \in \mathscr{M}$ に対して、

$$\left.\frac{dS}{du}\right|_{u=0} = \int_{\mathfrak{D}} \chi \delta \Psi = 0 \to \chi = 0 \tag{A.10}$$

が成立する。これを変分学の基本補題という。

Appendix B
一般相対性理論

B.1　相対性理論

ここでは相対性理論についてまとめる。ここでの内容も [35,36] に詳しい。　一般相対性理論 (GR) は Albert Einstein が 1915 年から 1916 年にかけて発表した、重力を記述する時空の理論である [37]。GR において時空とは次のように定義される。

定義 B.1 (時空)
時空は事象の集合である。GR では時空のモデルを $(\mathscr{M}, g)$ とする。ここで $\mathscr{M}$ は連結、四次元、Hausdorff, C^∞ 級多様体であり、計量 g は符号数 +2 の $\mathscr{M}$ 上の Lorentz 計量である。

また、GR は主に次の 2 つの原理を採用している。

定義 B.2 (GR の原理)
一般相対性原理・・・物理法則は任意の座標変換に対して共変である。
等価原理・・・重力の効果は局所的には消し去ることができる。

これらの原理を数学的に扱うために、GR は擬 Riemann 幾何学を用いて記述されている。その中で一般相対性原理は多様体論を用い物理法則をテンソル方程式で表すことで、等価原理は Torsion free な接続を用いることで導入されている。

GR は重力場による光の湾曲や重力レンズ効果、重力赤方偏移、水星の近日点移動、太陽系内の電波伝播の遅れ (シャピロ delay)、慣性系引きずり効果の鑑賞事件など様々な実験的、観測的検証をクリアしてきた理論である。また 2016 年には GR において存在が予言されていた重力波がアメリカの LIGO グループによって初検出された [38]。その後も次々と連星ブラックホールの合体による重力波が検出され、重力波天文学の幕が開けた。GR が重力場を良く記述するのはこのような実験的検証から見てとれる。

GR の原理の一つである等価原理は重力の効果を局所的に打ち消す座標系の存在、つまり局所

的には接続係数をゼロにするような座標系の存在を意味し、そのような座標系では特殊相対性理論 (SR) が成り立つとしている。SR は Albert Einstein が 1905 年に発表した、慣性系に対する時空の理論である。SR では主に次の二つを原理として採用している。

定義 B.3 (SR の原理)
特殊相対性原理・・・物理法則は任意の慣性系に対して共変である。
光速不変の原理・・・任意の慣性系で光速は不変である。

SR の原理の一つである特殊相対性原理は、慣性系間の Lorentz 変換による物理法則の不変性を表している。1905 年の Albert Einstein による SR の発表 [39] から、様々な種類の Lorentz 不変性に対する検証が行われてきたが、現在までのところその破れは見つかっていない。このように GR や SR では、Lorentz 不変性は重要な対称性としてその理論の中に取り入れられていることがわかる。

Appendix C
標準模型

C.1 標準模型

標準模型は強い相互作用、弱い相互作用、電磁相互作用の 3 つの基本的な相互作用を記述する素粒子物理学の理論である。標準模型は $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ理論によって記述される。強い相互作用を記述する $SU(3)$ ゲージ理論は量子色力学と呼ばれ、弱い相互作用と電磁相互作用を記述する $SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ理論は電弱理論と呼ばれている。標準模型における Lagrangian は次のように与えられる。

$$L_{\mathrm{lepton}} = \frac{1}{2} i \overline{L}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu L_A + \frac{1}{2} i \overline{R}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu R_A, \tag{C.1}$$

$$L_{\mathrm{quark}} = \frac{1}{2} i \overline{Q}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu Q_A + \frac{1}{2} i \overline{U}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu U_A + \frac{1}{2} i \overline{D}_A \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu D_A, \tag{C.2}$$

$$L_{\mathrm{Yukawa}} = -[(G_L)_{AB} \overline{L}_A \phi R_B + (G_U)_{AB} \overline{Q}_A \phi^c U_B + (G_D)_{AB} \overline{Q}_A \phi D_B] + \mathrm{h.c.}, \tag{C.3}$$

$$L_{\mathrm{Higgs}} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{3!} (\phi^\dagger \phi)^2, \tag{C.4}$$

$$L_{\mathrm{gauge}} = -\frac{1}{2} \mathrm{Tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \tag{C.5}$$

ここで、左巻き、右巻きのレプトンとクォークの多重項を、

$$L_A = \begin{pmatrix} \nu_A \\ l_A \end{pmatrix}_L, R_A = (l_A)_R, Q_A = \begin{pmatrix} u_A \\ d_A \end{pmatrix}_L, U_A = (u_A)_R, D_A = (d_A)_R \tag{C.6}$$

と定義している。また、

$$\psi_L := \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi, \quad \psi_R := \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \tag{C.7}$$

であり、$A = 1, 2, 3$ は flavor のラベルである。すなわち、$l_A := (e, \mu, \tau)$, $\nu_A := (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$, $u_A := (u, c, t)$, $d_A := (d, s, b)$ である。Higgs 二重項を ϕ を用いて、またその共役を ϕ^C で表している。SU(3), SU(2), U(1) ゲージ場をそれぞれ G_μ, W_μ, B_μ を用いて表し、対応する場の強さをそれぞれ $G_{\mu\nu}, W_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$ で表している。共変微分を D_μ で表し、微分記号の上の両矢印については $A\overleftrightarrow{\partial}_\mu B := A\partial_\mu B - (\partial_\mu A)B$ で定義される。[*1] G_L, G_U, G_D は湯川結合定数である。

これらの標準模型のラグランジアンを決定する上でも Lorentz 不変の要請が課せられており、素粒子物理学においても Lorentz 不変性は重要な役割を演じていることがわかる。

[*1] レプトンやクォークなどディラックスピノル場のラグランジアンにおいて共変微分の両矢印を用いて対称的に表示した。共変微分の左作用はその項が右作用の項の h.c. になるように定義されている。この表示が一般的な表式と一致することを確認しておく。$L = \frac{1}{2}i\overline{\psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu \psi = \frac{1}{2}i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{1}{2}i\overline{\psi}\gamma^\mu \overleftarrow{D}_\mu \psi = \frac{1}{2}i\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu)\psi - \frac{1}{2}i\overline{\psi}\gamma^\mu(\overleftarrow{\partial}_\mu + (\overleftarrow{igA_\mu}))\psi = \frac{1}{2}i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}i\overline{\psi}\gamma^\mu(igA_\mu)\psi - \frac{1}{2}i\overline{\psi}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu\psi - \frac{1}{2}i\overline{\psi}\gamma^\mu(-ig\overleftarrow{A}_\mu)\psi = \frac{1}{2}i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}i\overline{\psi}\gamma^\mu(igA_\mu)\psi - \frac{1}{2}i(\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi - \frac{1}{2}i(-ig)(\overline{\psi}A_\mu)\gamma^\mu\psi = \frac{1}{2}i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}i\overline{\psi}\gamma^\mu(igA_\mu)\psi + \frac{1}{2}i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}i\partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi) + \frac{1}{2}i\overline{\psi}\gamma^\mu(igA_\mu)\psi = i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\overline{\psi}\gamma^\mu(igA_\mu)\psi$. ここで表面項の全微分項を落とした。

Appendix D
光学

ここでは基礎的な光学事項と本研究で使用した光学手法についてまとめる。ここでの内容は [40, 41] に詳しい。レーザー光の基本的な取り扱いについては [42] がわかりやすい。空間モードや高次モードについては [43] を参照した。

D.1 電磁波とレーザー光

電磁波とは Maxwell 方程式を満たす電磁場の波動解である。レーザーとは Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation(放射の誘導放出による光増幅) の略で、電磁波を増幅して放射することができる装置である。レーザーによって発生したレーザー光は波長が一定に保たれた単色光として表すことができる。ここではまず、電磁波の一般解を導出し、レーザー光の平面波としての数学的表式を与える。最後により厳密なレーザー光の数学的表現としてレーザー光の空間モードについて述べる。特にアラインメントのズレによる空間モードの重ね合わせについて紹介する。

source-free な Maxwell 方程式は 2.1 節で述べたように次式で表される。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{D.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = 0 \tag{D.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{D.3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{D.4}$$

これらの方程式から $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ の各成分 u は波動方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = 0 \tag{D.5}$$

を満たすことが示される。

一様な等方線形媒質を仮定し、誘電率 ϵ、透磁率 μ を導入し、波動方程式の解の関数形を時間依存性 $e^{-i\omega t}$ を持つと仮定して上の方程式に代入すると、

$$(\nabla^2 + \mu\epsilon\omega^2)u = 0 \tag{D.6}$$

となり、helmholtz の波動方程式が得られる。さらに、解の関数形を x 方向に進行する平面波解 $e^{ikx-i\omega t}$ の形に仮定することで、[*1] この関数が波動方程式を満たすためには、波数 k と各振動数 ω の間に次式の条件が与えられる。

$$k = \sqrt{\epsilon\mu}\omega \tag{D.7}$$

波の位相速度 v は、

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} \tag{D.8}$$

となる。ここで屈折率 n は、真空の誘電率 ϵ_0 と真空の透磁率 μ_0 を用いて、

$$n := \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\frac{\mu}{\mu_0}} \tag{D.9}$$

と定義される。したがって、1 次元波動方程式の基本解が

$$\begin{aligned} u(x,t) &= ae^{ikx-i\omega t} + b^e ikx + i\omega t \\ &= ae^{ik(x-vt)} + be^{ik(x+vt)} \end{aligned} \tag{D.10}$$

と求まった。$\mu\epsilon$ が各振動数に依存しない非分散性の媒質を考えれば、Fourier の積分定理により上の基本解を積分によって重ね合わせて、1 次元波動方程式の一般解

$$u(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt) \tag{D.11}$$

が得られる。ここで f, g は任意関数である。上式は位相速度 v と等しい速度で x 軸正方向と負方向に進行する波動を表す。

以上の結果を受けて、角振動数 ω と波数 (波動) ベクトル $\boldsymbol{k}$ の平面電磁波を考える。これまでは、Maxwell 方程式によって導かれた波動方程式の一成分を取り出してその解を求めたが、ここからは Maxwell 方程式の全てを満たすような電磁場の解を求める。これは電磁波のベクトル的解の性質を考えることに相当する。物理的に意味のある電磁場は以下ではその実部をとることとし、

[*1] 座標系を適当に取り直せばいいのでこの仮定は一般性を失わない。

平面電磁波を以下の形に仮定する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{E_0}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{B_0}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t} \end{aligned} \tag{D.12}$$

ここで、$\boldsymbol{E_0}, \boldsymbol{B_0}, \boldsymbol{k}$ は定ベクトルである。この電磁波は $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{n}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を導入すれば k が式 (D.7) を満たすことで、波動方程式式 (D.5) の解になることが確認できる。Maxwell 方程式の発散の方程式から、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E_0} &= 0 \\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B_0} &= 0 \end{aligned} \tag{D.13}$$

を満たす必要がある。このようにして、電磁波は $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ が伝播方向 $\boldsymbol{n}$ に垂直である横波であることがわかる。Maxwell 方程式の回転の方程式からは、

$$\boldsymbol{B_0} = \sqrt{\epsilon\mu}\times\boldsymbol{E_0} \tag{D.14}$$

が得られる。したがって三次元直交基底 $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{n})$ を導入すると、最終的に source-frree な Maxwell 方程式の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ と角振動数 ω を持つ最も一般的な単色平面波の波動解

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) &= (E_1\boldsymbol{e_1} + E_2\boldsymbol{e_2})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t}, \quad (E_1, E_2 \in \mathbb{C}) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) &= \sqrt{\epsilon\mu}\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}}{k} \end{aligned} \tag{D.15}$$

が得られる。

E_1, E_2 が同じ位相を持つとき式 (D.15) は直線偏光の電磁波を表し、E_1, E_2 が異なる位相を持つとき式 (D.15) は楕円偏光の電磁波を表す。特に E_1, E_2 の絶対値が等しく、位相差が $\pi/2$ であるとき式 (D.15) は円偏光の電磁波を表す。

上述したようにレーザーによって放射される光は単色光なので一般的にレーザー光の電磁場は式 (D.15) で表される。

最後に電磁波のエネルギーとエネルギー流速密度について考える。[*2] $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 等が実数で表現されているときには Poynting ベクトル $\boldsymbol{S}$ を

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{D.16}$$

[*2] エネルギー流束の単位は [W] であり、エネルギー流束密度の単位は [W/m^2] である。すなわち、エネルギー流束は単位時間に運ばれるエネルギーを、エネルギー流束密度は単位時間、単位面積に運ばれるエネルギーを表す。

で定義し、この発散を計算することで電磁場の連続の方程式、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} \tag{D.17}$$

が得られる。ここで

$$u = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{D.18}$$

は電磁場のエネルギー密度である。連続の方程式から Poynting ベクトル $\boldsymbol{S}$ はエネルギー流速密度の次元を持ち、単位時間、単位面積あたりに電磁波として運ばれるエネルギーを表す。
ここまでの議論でのように $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ 等が虚数で表さているときには、複素 Poynting ベクトル $\boldsymbol{S}$ を

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \tag{D.19}$$

で再定義する。複素 Poynting ベクトルの実部は上記の実数で表されている Poynting ベクトルの時間平均と対応し、時間平均された電磁波のエネルギー流束密度を与える。
Photo Diode(PD) は電磁場のエネルギー流速に比例した電流を出力する装置で、電磁波のエネルギー流速を測定することができる。複素 Poyinting ベクトルの実部を具体的に計算することにより、時間平均された電磁波のエネルギー流束が単色平面波 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t)}$ の場合にはその振幅の絶対値の二乗 $|\boldsymbol{E_0}|^2$ に比例することが導かれる。この比例係数は角振動数等に依らず一定なので、PD の出力は電磁波の振幅の絶対値の二乗と同一視できる。

平面波は空間的に無限の広がりを持つ。実際のレーザー光は空間的に有限の分布を持つ。このようなレーザー光の空間的分布を表すのが空間モードである。電磁場の各ベクトル成分は波動方程式式 (2.9) に従う。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = 0 \tag{D.20}$$

ここで u は $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ の各成分である。z 方向に進む光に対して、

$$u = \psi(x, y, z)exp(-ikz) \tag{D.21}$$

という解を考える。ψ は平面波とレーザー光の違いを表す空間的にゆっくりと変化する複素関数である。よって ψ は強度分布の不均一さ、進行距離に対するビームの広がり、同位相面の曲率などを表す。この解を上記の波動方程式に代入し、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2ik\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \tag{D.22}$$

を得る。ここで ψ の z 方向の変化が十分にゆっくりであること、

$$\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right| << \frac{\omega}{c}\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right| \tag{D.23}$$

を用いた。このような波動方程式の近似を近軸近似という。近軸近似された波動方程式の解の一つの組み $\{\psi_{lm}\}$ として、Hermite-Gaussian(HG) モード

$$\begin{aligned}\psi_{lm}(x,y,z,\omega) =& \frac{1}{\sqrt{2^l l! 2^m m!}}\sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}}H_{lm}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)},\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \\ &\times \exp\left[\left(-\frac{1}{w^2(z)} - i\frac{k}{2R(z)}\right)(x^2+y^2) + i(l+m+1)\zeta(z)\right]\end{aligned} \tag{D.24}$$

がある。

$$H_{lm}(x,y) := H_l(x)H_m(y) \tag{D.25}$$

であり、

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \tag{D.26}$$

は Hermite 多項式である。したがって、HG モードは xy 平面での電場分布が Hermite 多項式と Gaussian の積の形になっている。ψ_{lm} を lm モード、TEMlm モードという。特に 00 モードを基本モードという。通常のレーザー光は基本モードとして表される。また、このような空間モードだけでなく式 (D.21) の形に元の時間的変化 $e^{i\omega t}$ をかけた

$$U_{lm}(x,y,z,t) := \psi_{lm}(x,y,z,\omega)e^{i(\omega t - kz)} \tag{D.27}$$

を HG モードと呼ぶことも多い。

ここで、波数 k と角振動数 ω は

$$k = \omega/c \tag{D.28}$$

の関係にある。また、

$$w(z) = w_0\sqrt{1+z^2/{z_0}^2}, \quad w_0 \in \mathbb{R} \tag{D.29}$$

は電場振幅の分布の Gaussian の広がりを表すビーム径である。w_0 は実パラメータであり、$z=0$(ビームウエスト) でのビーム径である。ここで、

$$z_0 = k{w_0}^2/2 \tag{D.30}$$

は Rayleigh 長と呼ばれ、$|z| << z_0$ ではビームを平行光線として扱うことができ、$|z| >> z_0$ で

は、ビームを球面波として扱うことができる。すなわちビームの平行度を表している。

$$R(z) = z + {z_0}^2/z^2 \tag{D.31}$$

は波面の曲率半径を表す。

$$\zeta(z) = \arctan(z/z_0) \tag{D.32}$$

は Gouy 位相であり、基本モードと高次モードの伝播による位相差を表す。

HG モードは正規直交性と完全性を持つ。

$$\int dxdy\psi^*_{lm}(x,y,z,\omega)\psi_{l'm'}(x,y,z,\omega) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{D.33}$$

$$\sum_{l,m=0}^{\infty}\psi^*_{lm}(x,y,z,\omega)\psi_{lm}(x',y',z',\omega) = \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) \tag{D.34}$$

したがって、共振器の入射光の電場を HG モード (共振器の固有モード)$U_{lm}(x,y,z,t)$ で展開することができる。[*3]

$$E_{in}(x,y,z,t) = \sum_{l,m=0}^{\infty} A_{lm}U_{lm}(x,y,z,t) \tag{D.35}$$

入射光のパワー全体のうち、共振器の固有基本モードのパワーがどれだけ含まれているのかを表すのにモードマッチング率 η がある。

$$\eta := \frac{|A_{00}|^2}{\sum_{l,m=0}^{\infty}|A_{lm}|^2} \tag{D.36}$$

入射光の電波の軸やウエスト位置、Raylegh 長を共振器の固有モードと一致させることで高いモードマッチ率を得ることができる。共振器のアラインメントをとるときにはこのように高いモードマッチング率を得るようにアラインメントをとる。

次に、アラインメントのミスアラインメントによるモードマッチング率への影響を見る。図 D.1 のように、ビームウエストでビームの中心が δx、伝播方向が $\delta\theta$ だけズレているような基本モードを考える。

この電磁場は x,y,z 座標を x,z 平面で $\delta\theta$ だけ回転し、δx だけ平行移動した座標系では 00 モード $U_{00}(x',y,z',t)$ になっている。これを 1 次までで展開し $w_0 >> \lambda$ を用いると、

$$U_{00}(x',y,z',t) \simeq U_{00}(x,y,z,t) + (\frac{\delta x}{w_0} + i\delta\theta\frac{kw_0}{2})U_{10}(x,y,z,t) \tag{D.37}$$

*3 共振器の詳細は後述する。共振器のレーザー光の共振を考えるときにはレーザー光の位相だけでなく空間モードも考える必要がある。共振することができる光のモードを共振器の固有モードという。

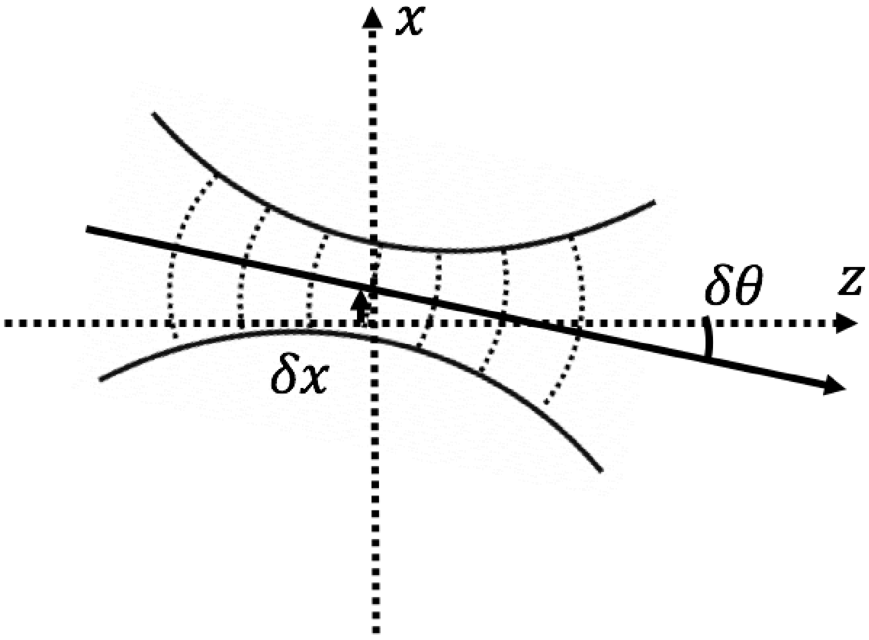

図 D.1　ミスアラインメントによるズレ

となる。すなわち、ミスアラインメントによるジッターの効果は 10 モードの重ね合わせとして現れる。同様に y 方向のジッターの効果は 01 モードの重ね合わせとして現れる。

同様に Rayleigh 長が $z_0 + \delta z_0$ であり、ウエスト位置が δz である基本モード $U_{00}(x, y, z - \delta z, t)_{(z_0+\delta z_0)}$ は、

$$U_{00}(x, y, z - \delta z, t)_{(z_0+\delta z_0)} \simeq \left[U_{00}(x, y, z, t) + \left(\frac{\delta z_0}{2z_0} + i\frac{\delta z}{2z_0}\right) \frac{U_{20}(x, y, z, t) + U_{02}(x, y, z, t)}{\sqrt{2}}\right] \times \exp i(k\delta z - \delta z/2z_0) \tag{D.38}$$

と表される。すなわち、Rayleigh 長やウエスト位置のズレが 20 モードと 02 モードの重ね合わせとして現れる。

D.2　透過と反射

ここでは光学における鏡による反射・透過の扱いについて述べる。まず補足として媒質境界での反射と透過について一般的な議論を行い、Fresnel の方程式を導出しておく。次に鏡などの光学素子の系統的な取り扱いについてまとめる。

異なる性質を持つ誘電体間の境界平面における光の反射と屈折を考え、Fresnel equation を導

く。電磁波の波動性と、満たすべき境界条件が存在するということから直ちに運動学的な性質である反射角が入射角に等しいということと、Snell の法則の二つが導かれる。反射波と透過波の強度比や位相の変化などの動力学的な性質は、電磁場の性質と境界条件に依存する。図 D.2 のような状況を考える。

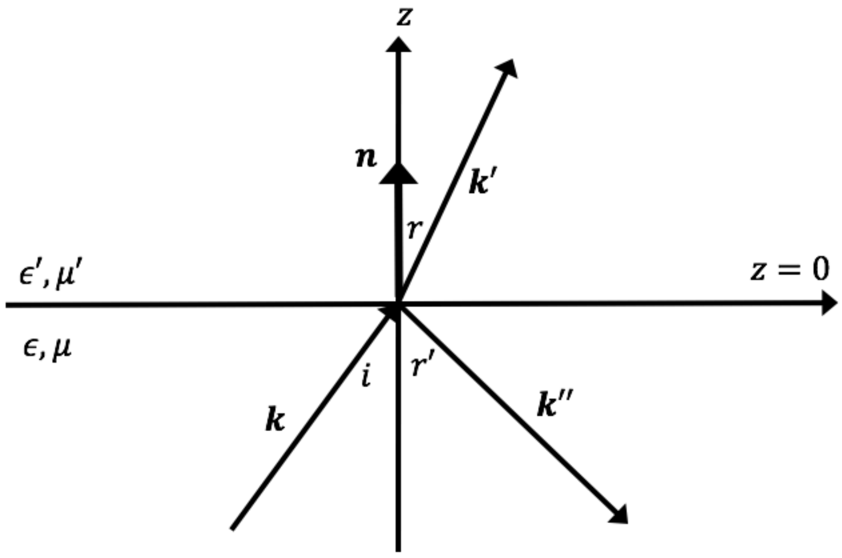

図 D.2　Fresnel Equation

$z = 0$ を二つの媒質の境界面とし、$z < 0$ の媒質の誘電率と透磁率をそれぞれ ϵ, μ、$z > 0$ の媒質の誘電率と透磁率をそれぞれ ϵ', μ' とする。したがって真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ϵ_0, μ_0 として、$z < 0$ の媒質の屈折率は $n = \sqrt{\epsilon\mu/\epsilon_0\mu_0}$、$z < 0$ の媒質の屈折率は $n = \sqrt{\epsilon'\mu'/\epsilon_0\mu_0}$ と表される。波数ベクトル $\boldsymbol{k}$、角振動数 ω の平面波が $z < 0$ から入射するとし、透過波の波数ベクトルと角周波数それぞれ $\boldsymbol{k'}, \omega'$ と反射波の波数ベクトルと角周波数それぞれ $\boldsymbol{k''}, \omega''$ とする。また、$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k'}, \boldsymbol{k''}$ が z 軸となす角をそれぞれ i, r, r' とする (i, r については z 軸負の方向となす角を正とする)。さらに、$\boldsymbol{n}$ を $z < 0$ の媒質から $z > 0$ の媒質に向かう単位法線ベクトルとする。このとき入射波、透過波、反射波はそれぞれ以下のように表される。入射波:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) &= \boldsymbol{E_0} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t} \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) &= \sqrt{\epsilon\mu}\frac{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}}{k} \end{aligned} \tag{D.39}$$

透過波:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E'}(\boldsymbol{x}, t) &= \boldsymbol{E'_0} e^{i\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega' t} \\ \boldsymbol{B'}(\boldsymbol{x}, t) &= \sqrt{\epsilon'\mu'}\frac{\boldsymbol{k'} \times \boldsymbol{E}}{k'} \end{aligned} \tag{D.40}$$

反射波:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E''}(\boldsymbol{x},t) &= \boldsymbol{E_0''}e^{i\boldsymbol{k''}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega'' t} \\
\boldsymbol{B''}(\boldsymbol{x},t) &= \sqrt{\epsilon''\mu''}\frac{\boldsymbol{k''}\times\boldsymbol{E}}{k''}
\end{aligned}
\tag{D.41}
$$

波数ベクトルの大きさは、 Maxwell 方程式の波動方程式より次式のようになる。

$$
|\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k''}| = k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \tag{D.42}
$$

$$
|\boldsymbol{k'}| = k' = \omega\epsilon'\mu' \tag{D.43}
$$

$z=0$ で境界条件が存在し、その条件は任意の t、任意の x,y で満たされなければならない。したがって、入射波、透過波、反射波の exp の肩は $z=0$ で任意の t,x,y について同じ値をとらなければならない。

$$
\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t|_{z=0} = \boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{x}-\omega' t|_{z=0} = \boldsymbol{k''}\cdot\boldsymbol{x}-\omega'' t|_{z=0}, \quad \forall t,x,y \tag{D.44}
$$

これから 3 個の波数ベクトルが同一平面にあること、

$$
\omega = \omega' = \omega'' \tag{D.45}
$$

であること、

$$
k\sin i = k'\sin r = k''\sin r' \tag{D.46}
$$

が得られる。$k''=k'$ より $i=r'$ すなわち反射の法則が得られる。また、書き換えると

$$
\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{k'}{k} = \frac{n'}{n} \tag{D.47}
$$

Snell の法則が得られる。

Maxwell 方程式から得られる境界条件である、$\boldsymbol{D},\boldsymbol{B}$ の法線成分の連続性と $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ の接線方向の連続性から動力学的な性質が導かれる。これらの境界条件を書き下すと、

$$
\begin{aligned}
&[\epsilon(\boldsymbol{E_0}+\boldsymbol{E_0''})-\epsilon'\boldsymbol{E_0'}]\cdot\boldsymbol{n} = 0 \\
&[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E_0}+\boldsymbol{k''}\times\boldsymbol{E_0''}-\boldsymbol{k'}\times\boldsymbol{E_0'}]\cdot\boldsymbol{n} = 0 \\
&\boldsymbol{E_0}+\boldsymbol{E_0''}-\boldsymbol{E_0'}]\times\boldsymbol{n} = 0 \\
&[\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E_0}+\boldsymbol{k''}\times\boldsymbol{E_0''})-\frac{1}{\mu'}(\boldsymbol{k'}\times\boldsymbol{E_0'})]\times\boldsymbol{n} = 0
\end{aligned}
\tag{D.48}
$$

となる。ここまでは一般的な単色平面楕円偏光電磁波を考えてきたが、これらの境界条件を計

算するには入射波を直線偏光であるとし、その偏りベクトル (電場方向の単位ベクトル) が入射面 ($\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}$ を含む平面) に平行な場合と垂直の場合で分けて計算すれば良い。任意の楕円偏光の場合を考えるときには、これらの結果の適当な一次結合をとれば良い。偏りベクトルが入射面に平行な場合 (p 偏光) の入射、透過、反射波にそれぞれ固定された電場と磁場の座標 (正方向) を図 D.3 のように定義する。また、偏りベクトルが入射面に垂直な場合 (s 偏光) の入射、透過、反射波にそれぞれ固定された電場と磁場の座標 (正方向) を図 D.4 のように定義する。

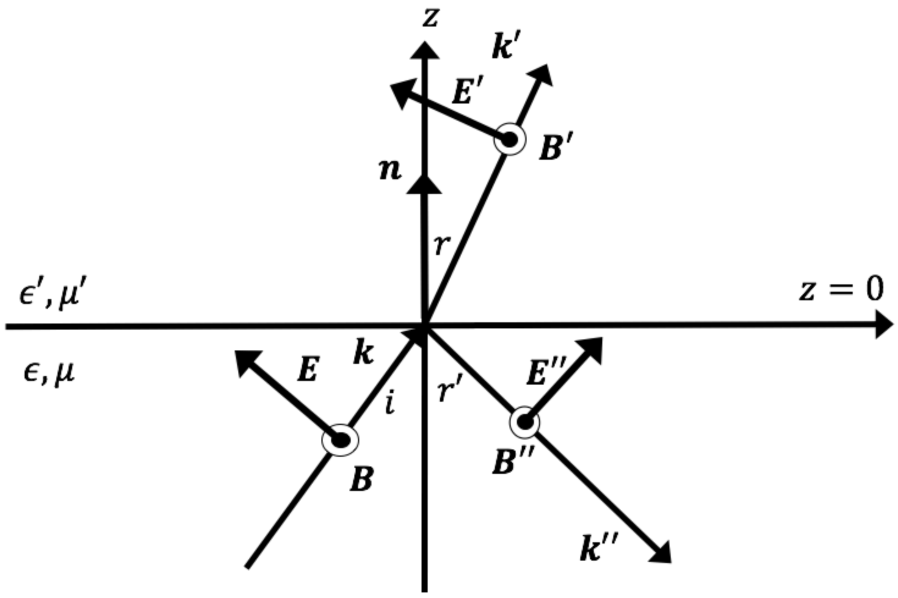

図 D.3　Fresnel Equation for p-polarization

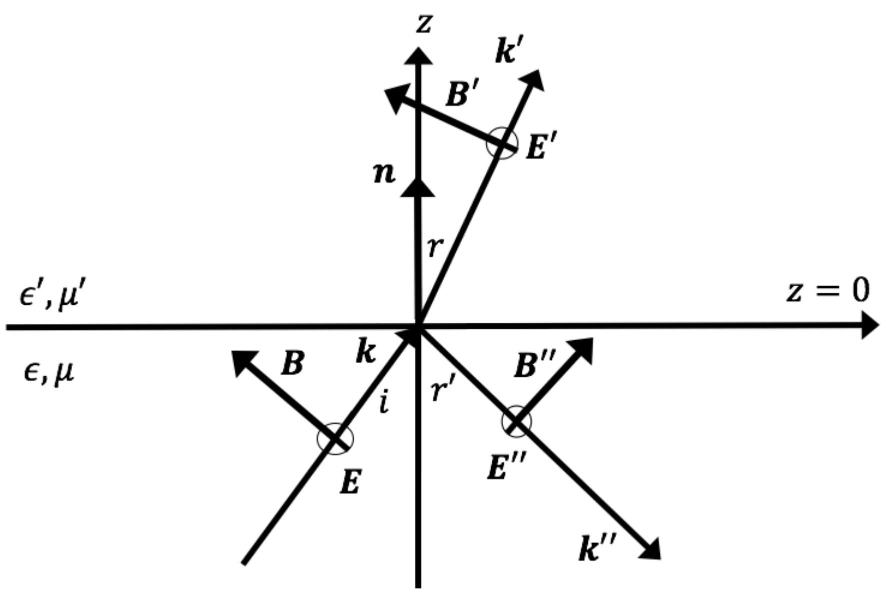

図 D.4　Fresnel Equation for s-polarization

これら二つの場合について、上記の境界条件を計算すると、最終的に次の Fresnel の方程式が得られる。t_p, r_p はそれぞれ p 偏光の振幅透過率と振幅反射率、t_s, r_s はそれぞれ s 偏光の振幅透過過率と振幅反射率である。p 偏光の場合は

$$t_p := \frac{E_0'}{E_0} = \frac{2nn'\cos i}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos i + n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2 i}} \tag{D.49}$$

$$r_p := \frac{E_0''}{E_0} = \frac{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos i - n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2 i}}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos i + n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2 i}} \tag{D.50}$$

となり、s 偏光の場合は

$$t_s := \frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n\cos i}{n\cos i + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2 i}} \tag{D.51}$$

$$r_s := \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n\cos i - \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2 i}}{n\cos i + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2 i}} \tag{D.52}$$

となる。このように境界条件を解いて得られた振幅透過率と振幅反射率は入射角や媒質の性質に依存して変化する。透過光に対しては s, p によらず位相は保たれる。しかし、r_s は n, n' の大小によって符号が常に正か負の場合に分かれる。以下で見るように鏡のような $n' > n$ の場合に負になり常に位相が図 D.4 の座標系で反転されることがわかる。また、r_p については i が小さい領域では r_s と物理的な位相の解釈は一致するが、[*4]Brewster 角で符号の反転が生じる。

ここで例として直入射 $i \to 0$ の場合を考える。振幅透過率はこのとき完全に一致するが、振幅反射率は、

$$r_p \to \frac{n' - n}{n' + n} \tag{D.53}$$

$$r_s \to \frac{n - n'}{n' + n} \tag{D.54}$$

となる。またここで多くの物理的状況で成立する $\mu' = \mu$ を用いた。n', n の大小によって符号

[*4] 位相の反転の概念はもちろん電磁波に固定された座標系 (reference frame) の取り方による。慣習的に s 偏光については 図 *D.4* のように座標系をとることが多いが、p 偏光については二種類のよく使われる座標系があり、図 D.3 は Verdet convention であり、電場と磁場の方向を反転させたものが Fresnel convention である。本研究では三角共振器を取り扱うため、Fresnel convension を採用すると光が一周したときの座標が変化してしまう。したがって本論文では Verdet convention を採用する。この座標の取り方によって、本論文の notation では Brewster 角以下で r_s, r_p の符号が反転している。したがって、例えば r_p が負だとすると、$r_p' := -r_p$ と再定義することで r_p を実にすることができる。このため、p, s 偏光に対して反射率の負号が異なり、p に対しては $-r_p(r_p > 0)$,s に対しては $r_s(> 0)$ となる。この相対的な位相の違いが光リング共振器の偏光解析法を行う上で本質的である。

が異なってしまっているのは座標系の取り方によるもので、具合的には図 D.3 が $i=0$ のときに電場の座標の向きが反転していることによる。これを考慮し p 偏光の場合について反射波の reference frame を図 D.3 から電場と磁場を反転させたものに偏光すれば、鏡の場合 $n'>n$ なので、$i=0$ の場合には s,p 偏光ともに位相が反転する。

媒質境界での電磁波の反射と透過は Fresnel 方程式によって記述され、入射角や媒質の性質に依存する。しかし実用上は鏡のような光学素子に対して次のようなシステム化を行って扱うことが多い。鏡やビームスプリッターのような光学素子については、Fresnel 方程式のような透過率、反射率に対する具体系を与えるのではなく、それぞれの係数の関係を物理的要請から与えることで、取り扱いを理想化する。図 D.5 のような状況を考える。

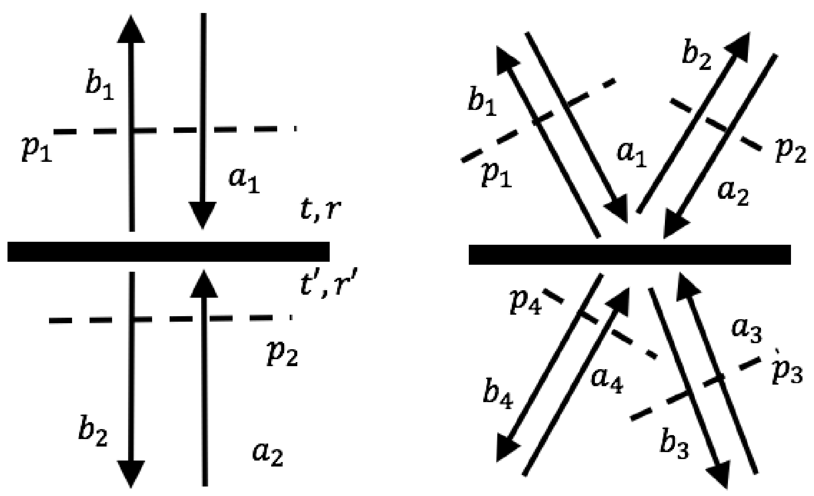

図 D.5　S 行列を用いた光学素子の取り扱い

一つのポートに対して入射 a_i と出射 b_i があり、一般に $i=1,\ldots,n$ の n ポートの系を考える。それぞれのポートには基準面 p_i がある。システムへの入射出射で偏光状態が保たれるような系を取り扱う。したがって a_i,b_i は一つの偏光成分の複素振幅にとることとする。すなわち、一般の単色平面波は式 (D.15) から、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=(E_1\boldsymbol{e_1}+E_2\boldsymbol{e_2})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega t},\quad (E_1,E_2\in\mathbb{C}) \tag{D.55}$$

の形に表すことができ ($\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2}$ は基底をなすならば二つの直線偏光成分だけでなく、二つの円偏光成分をとってきても良い)、E_1e^{ikx},E_2e^{ikx} を複素振幅と呼ぶが[*5]、ここでは一つの偏光成

[*5] x 部分を含まず単に E_1,E_2 を複素振幅と呼ぶこともある

分のみ (例えば E_1) を考えるということである。一般の場合には以下の議論を E_2 の偏光成分にも適用し、最終結果はそれらの適当な線形結合として与えられる。それぞれのポートでは $e^{i\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{x}\mp i\omega t}$($-$ に対応する複素振幅は a_i,$+$ に対応する複素振幅は b_i) のような時間的、空間的変化をする。線形な応答を考えると、入出射の複素振幅の間の関係は、$a_i(i=1,\ldots,n)$ からなる n 成分複素列ベクトルを $\boldsymbol{a}$、$b_i(i=1,\ldots,n)$ からなる n 成分複素列ベクトルを $\boldsymbol{b}$、S を $n\times n$ 行列として (二つの偏光成分を同時に考慮する場合には $n\to 2n$ とすれば良い)、

$$\boldsymbol{b}=S\boldsymbol{a} \tag{D.56}$$

と表すことができる。この S を S 行列という。S 行列は複素振幅を比較する位置を示す基準となる面である基準面間に対して定義される。[*6]入射のエネルギー流束は $\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}$、出射のエネルギー流束は $\boldsymbol{b}^\dagger\boldsymbol{b}$ で与えれられる。したがってエネルギー保存則、

$$\boldsymbol{b}^\dagger\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^\dagger S^\dagger S\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a} \tag{D.57}$$

が成り立つような系では、

$$\Rightarrow S^\dagger S=I \tag{D.58}$$

となり、S のユニタリー性を要請する。また時間反転対称性、

$$\boldsymbol{b}=S\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}^*=S\boldsymbol{b}^* \tag{D.59}$$

が成り立つような系では、[*7]

$$S^{-1}=S^* \tag{D.60}$$

が S の性質として要請される。式 (D.58) と合わせると、

$$S=S^T \tag{D.61}$$

[*6] 複素振幅の二つの定義に対する S 行列の二つの解釈を与える。一つのポートで $Ae^{ikx-i\omega t}$ の入射波と $Be^{-ikx-i\omega t}$ の出射波を考える。$a=Ae^{ikx},b=Be^{-ikx}$ を複素振幅と定義すると、その比 b/a が a から b への S 行列成分 (振幅反射率) として定義される。この比は空間の比を考える面 (基準面) の位置 x で異なる値をとる。当然だが、基準面をシフトさせると S 行列の要素はそのシフトに応じた位相差の分だけ位相変化する。しかし、座標変換 (原点の位置の移動) では同じ点 x での比を考えるため不変である。$a=A,b=B$ を複素振幅と定義すると、その比 b/a は x に依存しない。ところがこの定義では比較する位置を指定する影響がこの比には現れないので、S 行列というある地点からある地点への波動の伝達を考えるという意味ではこのように $a=A,b=B$ で複素振幅を定義するのは不都合である。しかし、両者の定義を行き来することは容易にできるため、本書では複素振幅という用語を上の二つの定義の間で特に区別しない。

[*7] $\boldsymbol{a}$ などが複素共役をとっているのは、Maxwell 方程式の波動解の複素共役をとり、時間反転 $t\to -t$ を行なった位相共役波が再び Maxwell 方程式を満たす電波方向が元の波動と反対で、時間を逆行するような波動解になるからである。

となる。

具体的に鏡の S 行列を表現することを考える。鏡は 2 ポートなので、図 D.5 の左のような状況を考え、それぞれの面での透過率、反射率を図のように定義すると次式のように表現される。

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{D.62}$$

式 (D.58) のユニタリー性より、

$$\begin{aligned} &|t|^2 + |r|^2 = |t'|^2 + |r'|^2 = 1 \\ &r^* t + t^* r' = 0 \end{aligned} \tag{D.63}$$

が要請される。また式 (D.60) の時間反転対称性より、

$$t = t' \tag{D.64}$$

したがって、以上をまとめると、ロスがなく時間反転対称性を満たすようなミラーの場合、

$$S = \begin{pmatrix} r & t \\ t & -r^* \end{pmatrix} \tag{D.65}$$

という S 行列が得られる。

ここで、基準面の移動について考える。基準面はそれぞれのポートに対して定義されるが、複素振幅を比較する位置を定義し、それに対して S 行列が定義される。したがって、それぞれのポートで適当に基準面を移動させることで、S 行列の形を簡単化したり成分の位相を調節したりすることができる。簡単な例として図 D.5 左図の上半分のみを考え、図中下向きに z 座標をとるとする。入射波は $a_1 e^{ikz-i\omega t}$ であり、反射波は $b_1 e^{-ikz-i\omega t}$ でありと表せる。ある基準面 $z = z'$ において、そのときの反射率は $r' = b_1/a_1$ となるが、基準面が l 移動された $z'' = z' + l$ での反射率 r'' は $r'' = b_1 e^{-ikl}/a_1 e^{ikl} = r' e^{-2ikl}$ と変換される。一般に基準面の変更後の複素振幅を $\boldsymbol{b}', \boldsymbol{a}'$ とし、この基準面での S 行列を S' とすると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}' &= \begin{pmatrix} e^{+i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{+i\theta_n} \end{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}' &= \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-i\theta_n} \end{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b}' &= S' \boldsymbol{a}' \end{aligned} \tag{D.66}$$

が成り立つので、一般に基準面の移動によって、

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-i\theta_n} \end{pmatrix} S' \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-i\theta_n} \end{pmatrix} \boldsymbol{a} \tag{D.67}$$

が成り立つ。したがって

$$S' = \begin{pmatrix} e^{+i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{+i\theta_n} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} e^{+i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{+i\theta_n} \end{pmatrix} \tag{D.68}$$

と変換される。この基準面の移動を利用して透過率や反射率などの位相を適当に調節することができる。例えば基準面の移動によって式 (D.65) は次のような形をとることができる。

$$\begin{pmatrix} r & t \\ t & -r \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r & it \\ it & r \end{pmatrix} (t, r \in \mathbb{R}) \tag{D.69}$$

S 行列の成分 (透過率や反射率) の変換は単独でなされるものではなく、基準面の移動を必ず伴うので物理的な現象はこのような S 行列の変換、基準面の変換に対して同一の現象を扱っているので不変である。したがって、適当なものを採用することができる。[*8]

D.3　光リング共振器

共振とはある物理量があるパラメータに対して系固有の特徴的な振る舞いを示す現象である。

光共振器はレーザー光などの光を複数の鏡を用いて共振させることができる装置である。特に平行な 2 枚の鏡から構成される光共振器を Fabry-Perot 共振器といい、三枚以上の鏡から構成される共振器を光リング共振器という。鏡の枚数が 3 枚のときには三角共振器ということもある。

光共振器には共振周波数と呼ばれる系固有の周波数があり、その周波数の光を最も透過させ、共振器内部の光強度が最大になるという性質がある。この現象、または状態を共振という。本節ではこの光共振器の共振について、本実験で用いる 3 枚の鏡からなる光リング共振器である三角共振器 (図 D.6) を考えることで述べていく。

[*8] 例えば Fabry-Perot 共振器ではこのようにして基準面の移動を用いて r, t を実に上のような形で定めたら、二つの鏡の間隔 L で単純に一周した時の位相差を e^{2ikL} で評価するのは厳密には正しくないということになる。内側の基準面間の距離 L' を使うべきだが、基準面の移動は波長程度のオーダーなので $L \simeq L'$ として計算することができる。

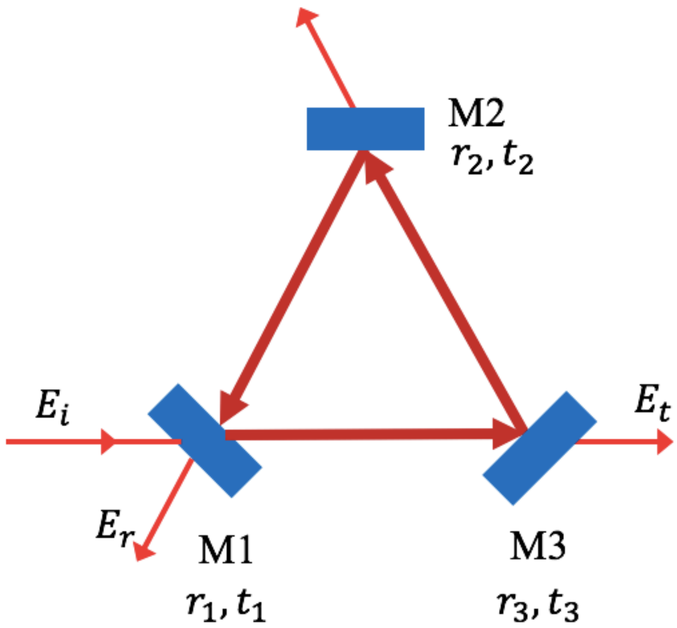

図 D.6　光リング共振器

図 D.6 のような M1,M2,M3 の鏡からなる共振器の一周長 (共振器長)L の光リング共振器を考える。M$i(i=1,2,3)$ の鏡の振幅反射率、振幅透過率をそれぞれ $r_i, t_i(i=1,2,3)$ とする。強度反射率、強度透過率はそれぞれ振幅反射率、振幅透過率の二乗になる。M1 に入射するレーザー光の電場振幅を E_i とする。このとき反射光の振幅は、

$$\begin{aligned} E_r &= E_i(-r_1) + E_i{t_1}^2 r_3 r_2 e^{-i\phi} + E_i{t_1}^2{r_3}^2{r_2}^2 e^{-2i\phi} + E_i{t_1}^2{r_3}^3{r_2}^3{r_1}^2 e^{-3i\phi} + \cdots \\ &= E_i(-r_1) + E_i{t_1}^2 r_3 r_2 e^{-i\phi}\sum_{n=0}^{\infty}(r_3 r_2 r_1 e^{-i\phi})^n \\ &= E_i(-r_1 + \frac{{t_1}^2 r_2 r_3 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i\phi}}) \end{aligned} \tag{D.70}$$

となる。ここで ϕ は、

$$\phi := \frac{L\omega}{c} \tag{D.71}$$

で定義される、光が共振器を一周するときの位相変化である。

同様に M3 からの透過光の振幅は、

$$
\begin{aligned}
E_t &= E_i t_1 t_3 e^{-i\phi'} + E_i t_1 r_3 r_2 r_1 t_3 e^{-i(\phi+\phi')} + E_i t_1 (r_3 r_2 r_1)^2 t_3 e^{-i(\phi+\phi')} e^{-i\phi} \\
&= E_i t_1 t_3 e^{-i\phi'} \sum_{n=0}^{\infty} (r_3 r_2 r_1 e^{-i\phi})^n \\
&= E_i \frac{t_1 t_3 e^{-i\phi'}}{1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i\phi}}
\end{aligned}
\tag{D.72}
$$

となる。ここで、M1、M3 間の距離を l_2 として

$$
\phi' = \frac{l_2 \omega}{c} \tag{D.73}
$$

は、光が M1 から M3 まで光が進むときの位相変化である。

したがって光リング共振器の反射率 r_{cav}、透過率 t_{cav} が次式で定義される。

$$
r_{cav} := \frac{E_r}{E_i} = -r_1 + \frac{{t_1}^2 r_2 r_3 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i\phi}} \tag{D.74}
$$

$$
t_{cav} := \frac{E_t}{E_i} = \frac{t_1 t_3 e^{-i\phi'}}{1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i\phi}} \tag{D.75}
$$

さらに、反射光強度と透過光強度はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
P_r &= |E_r|^2 \\
&= \frac{(r_2 r_3 - r_1)^2 + 4 r_1 r_2 r_3 \sin^2(\phi/2)}{(1 - r_1 r_2 r_3)^2 + 4 r_1 r_2 r_3 \sin^2(\phi/2)} |E_i|^2
\end{aligned}
\tag{D.76}
$$

$$
\begin{aligned}
P_t &= |E_t|^2 \\
&= \frac{(t_1 t_3)^2}{(1 - r_1 r_2 r_3)^2 + 4 r_1 r_2 r_3 \sin^2(\phi/2)} |E_i|^2
\end{aligned}
\tag{D.77}
$$

となる。ここで ${r_1}^2 + {t_1}^2 = 1$ を用いた。

透過光強度が最大となるとき、共振器内部の光強度も最大となり、この状態を光リング共振器の共振という。共振器内部の光強度が最大となることは、例えば、M1,M3 の中点での振幅は

$$
\begin{aligned}
E_{cav} &= E_i t_1 e^{-i\phi'/2} + E_i t_1 r_3 r_2 r_1 e^{-i(\phi+\phi'/2)} + E_i t_1 (r_3 r_2 r_1)^2 e^{-i(\phi+\phi'/2)} e^{-i\phi} \\
&= E_i t_1 e^{-i\phi'/2} \sum_{n=0}^{\infty} (r_3 r_2 r_1 e^{-i\phi})^n \\
&= E_i \frac{t_1 e^{-i\phi'/2}}{1 - r_1 r_2 r_3 e^{-i\phi}}
\end{aligned}
\tag{D.78}
$$

となり、またその強度は、

$$\begin{aligned} P_{cav} &= |E_{cav}|^2 \\ &= \frac{{t_1}^2}{(1-r_1r_2r_3)^2 + 4r_1r_2r_3\sin^2(\phi/2)}|E_i|^2 \end{aligned} \tag{D.79}$$

となり、関数形が透過光強度と同じになることからわかる。

共振条件は、

$$\phi = 2\pi m \quad (m \in \mathbb{N}) \tag{D.80}$$

であり、共振周波数は、(D.71) より、

$$\nu = \frac{mc}{L} \quad (m \in \mathbb{N}) \tag{D.81}$$

となる。

(D.77) より、レーザー周波数の関数としての透過光強度が次図である。共振器長 L が一定ならば、レーザーの周波数に対して透過光強度は周期的に変化する。この周期をフリースペクトラルレンジ (FSR)ν_{FSR} といい、(D.81) より

$$\nu_{\mathrm{FSR}} = \frac{c}{L} \tag{D.82}$$

と表される (図 D.7)。また透過光強度の半値全幅 ν_{FWHM} は、(D.77) より、

$$\frac{1}{1+\frac{4r_1r_2r_3}{(1-r_1r_2r_3)^2}\sin^2(\frac{\pi L\nu_{\mathrm{FWHM}}}{2c})} = \frac{1}{2} \tag{D.83}$$

で与えられる (図 D.7)。特に $\frac{\pi L\nu_{\mathrm{FWHM}}}{2c} << 1$ のときは、

$$\nu_{\mathrm{FWHM}} := \frac{c(1-r_1r_2r_3)}{\pi L\sqrt{r_1r_2r_3}} \tag{D.84}$$

となる。

共振器のフィネス $\mathcal{F}$ は、ν_{FSR} と ν_{FWHM} の比として定義され、共振の鋭さを表し、光学素子の特性によって定まる。

$$\mathcal{F} := \frac{\nu_{\mathrm{FSR}}}{\nu_{\mathrm{FWHM}}} \tag{D.85}$$

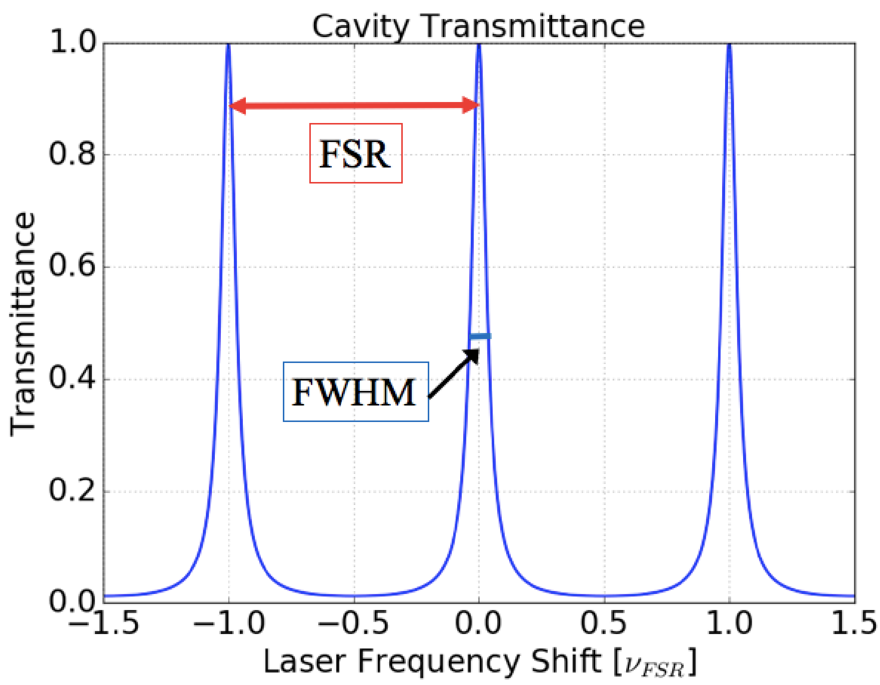

図 D.7　透過率の周期的変化と FSR,FWHM

D.4　偏光解析法

ここでは本実験においてレーザー周波数を制御するのに用いた制御法である偏光解析法について述べる。

D.4.1　波長板

波長板とは複屈折結晶を利用し、2 つの直交する光学軸の間に位相差をつけることで偏光状態を変化させる光学素子である。1/2 波長板は 1/2 波長に対応する π、1/4 波長板は 1/4 波長に相当する $\pi/2$ だけ位相差をつける。この 2 つの光軸を fast 軸、slow 軸といい、fast 軸に対して slow 軸が対応する位相だけ遅れることになる。

波長板に入射する一般の入射光の電場振幅の s 偏光成分と p 偏光成分をそれぞれ、E^s, E^p とし、ベクトル表記で

$$\boldsymbol{E}_{in} = \begin{pmatrix} E^s \\ E^p \end{pmatrix} \tag{D.86}$$

と表す。ここで、座標 s,p はそれぞれ電磁波の入射面に対して垂直、平行な方向の直交座標である。[*9] 波長板の slow 軸と s 軸が θ の角をなしているとすると、s,p 座標から slow,fast 座標への変換は、

$$\boldsymbol{E}_{in} = \begin{pmatrix} E^{fast} \\ E^{slow} \end{pmatrix} := R(\theta) \begin{pmatrix} E^{s} \\ E^{p} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{s} \\ E^{p} \end{pmatrix} \tag{D.87}$$

と表せる。

1/2 波長板は slow,fast 軸間に $\theta = \pi$ だけの位相差を生じさせるので、1/2 波長板の作用を表す変換行列は、s,p 座標基底で、

$$W_H(\theta_H) = R^{-1}(\theta_H) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} R(\theta_H) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta_H & \sin 2\theta_H \\ \sin 2\theta_H & -\cos 2\theta_H \end{pmatrix} \tag{D.88}$$

となる。

1/4 波長板は slow,fast 軸間に $\theta = \pi/2$ だけの位相差を生じさせるので、1/4 波長板の作用を表す変換行列は、s,p 座標基底で、

$$W_H(\theta_Q) = R^{-1}(\theta_Q) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/2} \end{pmatrix} R(\theta_Q) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta_Q - i\sin^2\theta_Q & \sin\theta_Q\cos\theta_Q(1+i) \\ \sin\theta_Q\cos\theta_Q(1+i) & \sin^2\theta_Q - i\cos^2\theta_Q \end{pmatrix} \tag{D.89}$$

となる。

以上をまとめると 1/2 波長板は直線偏光を fast 軸に対して対象に折り返した偏光に変換し、1/4 波長板は入射した直線偏光の fast 軸成分と slow 軸成分を楕円の長短軸とする楕円偏光に変換されることがわかる (図 D.8)。

D.4.2　原理

ここでは偏光解析法の原理について述べる。レーザーの周波数を共振器の共振周波数にフィードバック制御するためには、レーザーの周波数と共振周波数の差がレーザーの周波数に対

[*9] 直線偏光の電磁波 (の電場) は一般には $\boldsymbol{E} = E_0 \boldsymbol{e} exp(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega\cdot t)$ のように表せる。ここで $E_0 \in \mathbb{C}$ は電磁場の振幅で、一般性を保つために位相の因子も含めてある。しかし時間の原点を適当にずらせばこの因子は 1 にできるので、一般性を失うことなく $E_0 \in \mathbb{R}$ としてもよい。$\boldsymbol{e}$ は直線偏光の方向を表す定単位ベクトル、$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトルであり、この二つは直交する。ω は角周波数を表す。
一般の偏光状態 (楕円偏光) の自由空間の単色電磁波は、$\boldsymbol{E} = (E_x(t), E_y(t), 0) = (E_{x0}e^{i(kz-\omega t+\phi_x)}, E_{y0}e^{i(kz-\omega t+\phi_y)}, 0)$ のように表される。ここで簡単のために電磁波の進行方向を z 軸にとった。$\boldsymbol{k} = (0,0,k)$ は波数ベクトル、$\omega = ck$ は角周波数を表す。本文の表記法は $\boldsymbol{E} = (E_x(t), E_y(t), 0) = (E_{x0}e^{i\phi_x}, E_{y0}e^{i\phi_y}, 0)e^{i(kz-\omega t)}$ として、$e^{i(kz-\omega t)}$ を省略し、$E_{x0} := E_{x0}e^{i\phi_x}, E_{y0} := E_{y0}e^{i\phi_y}$ と再定義したもので、Jones vector という。このような計算法を Jones calculus という。

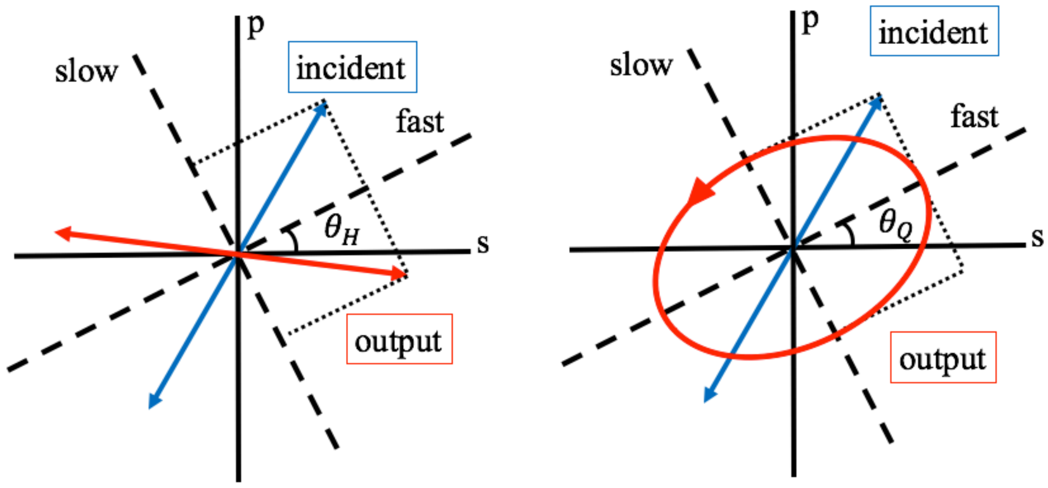

図 D.8　波長板による偏光の変換 (左:1/2 波長板、右:1/4 波長板)

して比例するようなエラー信号が必要になる。偏光解析法は入射光に共振器に共振しない偏光を混ぜ、この共振しない偏光と共振する偏光の反射光を干渉させることでエラー信号を取得する方法である。この方法は本実験で用いたような奇数枚の鏡を使用するリング共振器などの偏光選択性のある系で使用することができる。

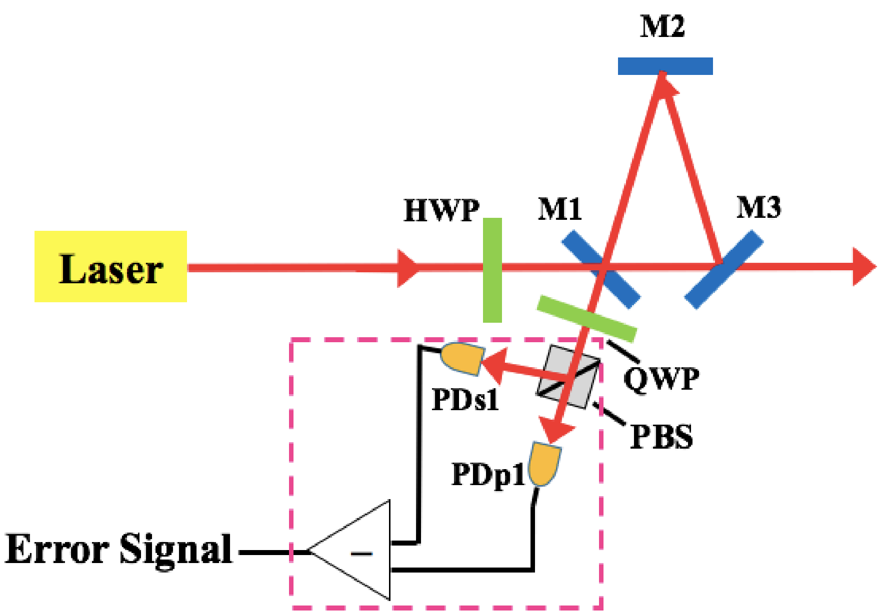

図 D.9　偏光解析法の原理

具体的な例として、本実験の系と同じ図 D.9 のような光学素子配置を考える。光リング共振器

に入射する直線偏光が 1/2 波長板によって、

$$\boldsymbol{E}_i = \begin{pmatrix} E_i^s \\ E_i^p \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{D.90}$$

のように調節されているとする (全体の強度を E_0 として三角関数で媒介変数表示)。

3 枚の鏡 M1,M2,M3 の s,p 偏光に対する透過率、反射率を $t_i^\sigma, r_i^\sigma (i = 1, 2, 3; \sigma = s, p)$ とすると、それぞれの偏光に対する光リング共振器の反射率は、式 (D.74) より、

$$r_{\rm cav}^s := -r_1^s + \frac{t_1^{s\,2} r_2^s r_3^s e^{-i\phi}}{1 - r_1^s r_2^s r_3^s e^{-i\phi}} \tag{D.91}$$

$$r_{\rm cav}^p := r_1^p + \frac{t_1^{p\,2} r_2^p r_3^p e^{-i\phi}}{1 + r_1^p r_2^p r_3^p e^{-i\phi}} \tag{D.92}$$

となる。ここで ϕ は共振器を一周するときの位相変化であり、各反射率は ϕ の関数である。p と s で反射率の奇数個の積の部分の符号が変化しているのは、D.2 節で述べたように、Verdet convention では Brewster 角未満で p,s の反射率の符号が異なるからである。このため、例えば s 偏光が共振状態にあるとき ($e^{-i\phi} \simeq 1$)、p 偏光は $r_{\rm cav}^p \simeq 1$ であり非共振状態になる。これが偏光選択性である。この偏光選択性によって共振器の反射光は s 偏光に対する上のような共振状態を考えると、

$$\boldsymbol{E}_r = \begin{pmatrix} E_r^s \\ E_r^p \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} r_{cav}^s \cos\theta \\ r_{cav}^p \sin\theta \end{pmatrix} \simeq E_0 \begin{pmatrix} r_{cav}^s \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{D.93}$$

となる。次にこの反射光を 1/4 波長板に通す。1/4 は超版の slow 軸が s 軸から θ_Q だけ回っているとして、

$$\boldsymbol{E}_r' = W_Q(\theta_Q) \begin{pmatrix} E_r^s \\ E_r^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta_Q - i\sin^2\theta_Q & \sin\theta_Q\cos\theta_Q(1+i) \\ \sin\theta_Q\cos\theta_Q(1+i) & \sin^2\theta_Q - i\cos^2\theta_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r^s \\ E_r^p \end{pmatrix} \tag{D.94}$$

となる。

以降は簡単のため、$\theta_Q = 45^\circ$ という最適な角度に対して計算する。1/4 波長板を通過して s,p が干渉させせられた光は PBS によって分離され、それぞれが異なる PD に入射しその強度が出力される。s 偏光、p 偏光のそれぞれの強度 P_s', P_p' は上式から、

$$P_s' = |E_r'|^2 = P_{DC} + \mathrm{Re}(\mathrm{E_r^s}(\mathrm{iE_r^p})^*) \tag{D.95}$$

$$P_p' = |E_r'|^2 = P_{DC} - \mathrm{Re}(\mathrm{E_r^s}(\mathrm{iE_r^p})^*) \tag{D.96}$$

と表される。ここで P_d は共通な項であり、$|E_0|^2 = P_0$ として、

$$
\begin{aligned}
P_d &= \frac{1}{2}(|E_r^s|^2| + E_r^p|^2) \\
&= \frac{1}{2}P_0\left(\frac{(r_1^s - r_2^s r_3^s)^2 + 4r_1^s r_2^s r_3^s \sin^2(\phi/2))}{(1 - r_1^s r_2^s r_3^s)^2 + 4r_1^s r_2^s r_3^s \sin^2(\phi/2))}\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)
\end{aligned}
\tag{D.97}
$$

である。この二つの偏光の強度出力の差をとると、

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{diff}} &:= P'_s - P'_p \\
&= 2\mathrm{Re}(\mathrm{E_r^s}(\mathrm{iE_r^p})^*) \\
&= -2P_0\cos\theta\sin\theta\frac{(t_1^s)^2 r_2^s r_3^s \sin\phi}{1 + (r_1^s r_2^s r_3^s)^2 - 2r_1^s r_2^s r_3^s\cos\phi}
\end{aligned}
\tag{D.98}
$$

となる。この信号は共振点でゼロになる $P_{diff} = 0$。また、共振点付近での傾きは

$$
\left.\frac{\partial P_{\mathrm{diff}}}{\partial\phi}\right|_{\phi=2\pi m} = -2P_0\cos\theta\sin\theta\frac{(t_1^s)^2 r_2^s r_3^s}{(1 - r_1^s r_2^s r_3^s)^2}
\tag{D.99}
$$

となり共振器の一周の位相差 ϕ になる。透過率と偏光解析によるエラー信号を図示したものが図 D.10 である。

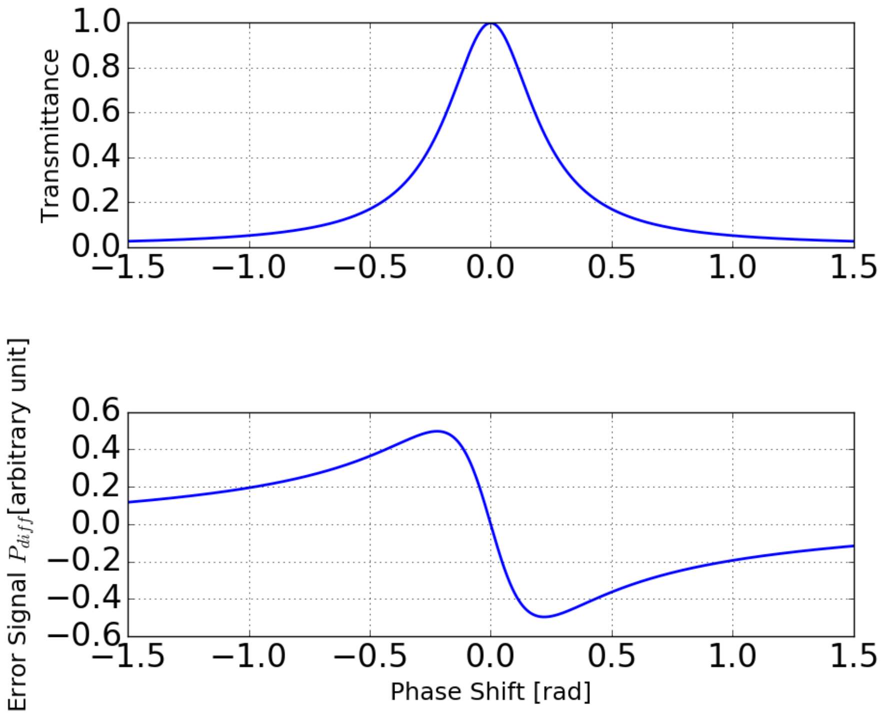

図 D.10　透過率とエラー信号

こうして共振する位相差に対してゼロになり、その前後で比例するような目的のエラー信号が

得られた。これが偏光解析の原理である。[*10]また、1/2 波長板によって入射波の偏光方向 θ を調節することでエラー信号の大きさを変えることができるが、ここでも $\theta = 45°$ が最大であることがわかる。ところが、透過光強度を十分に保つために左回りの偏光解析については、$\theta = 0$ に近づけた。

ここまでは簡単のために $\theta_Q = 45°$ といたことを除いて一般的な議論を行なってきた。本研究で使用したパラメータ $r_1^s = r_3^s \simeq 1, r_2^s = 1$ を用い、$\theta = 45°$ に 1/2 波長板を調節したとして上の表式を書き換えると、

$$P'_s\big|_{\phi=2\pi m} = P'_p\big|_{\phi=2\pi m} = \frac{1}{4}P_0 \tag{D.100}$$

$$\left.\frac{\partial P_{\mathrm{diff}}}{\partial \phi}\right|_{\phi=2\pi m} = \frac{1}{\pi}P_0\mathscr{F}_s \tag{D.101}$$

ここで $\mathscr{F}_s$ は s 偏光に対するフィネスである。

$$\mathscr{F}_s := \frac{\pi\sqrt{r_1^s r_2^s r_3^s}}{1 - r_1^s r_2^s r_3^s} \simeq \frac{\pi r_1^s}{(t_1^s)^2} \tag{D.102}$$

D.4.3　ダブルパス構成における偏光解析法

1/4 波長板を二度通過したときの効果は式 (D.89) を見るとわかるように 1/2 波長板を通過したときの効果と等価である。したがって本実験の構成であるダブルパス構成において、光リング共振器を透過した光に対して図 D.11 のように 1/4 波長板を配置すれば RM によって打ち返された光に対しても偏光解析法を用いることができる。

[*10] ここでの光学の議論は異方性の存在の有無に依らずに成り立つ議論である。異方性の効果は共振器を一周したときの位相差 ϕ に現れる。得られたエラー信号が入射波の周波数と共振器の共振周波数の差に比例していることは次のようにして確認することができる。共振器の一周したときの位相差 ϕ が共振点 $\phi = 2\pi m (m \in \mathbb{N})$ の付近にある場合を考える。つまり $\phi = 2\pi m + \delta\phi$ である。このとき、$P_{\mathrm{diff}} \propto \sin\phi \simeq \delta\phi = \phi - 2\pi m$ となる。ここで有効共振器長を L_{eff} とすると $\phi = (L_{\mathrm{eff}}/c)\omega = 2\pi\nu t' (t' := L_{\mathrm{eff}}/c)$ であり、共振周波数 ν_{res} はこの位相差が $2\pi m (m \in \mathbb{N})$ のときの周波数なので、$2\pi\nu_{\mathrm{res}}t' = 2\pi m$ で定まる。したがって、$P_{\mathrm{diff}} \propto \phi - 2\pi m = 2\pi t'(\nu - \nu_{\mathrm{res}})$ となりエラー信号が入射波の周波数と共振器の共振周波数の差に比例していることが確認される。また、$\delta\nu := \nu - \nu_{\mathrm{res}}$ と定義すると、$\delta\phi/\phi = \delta\nu/\nu$ が成り立つことも確認できる。

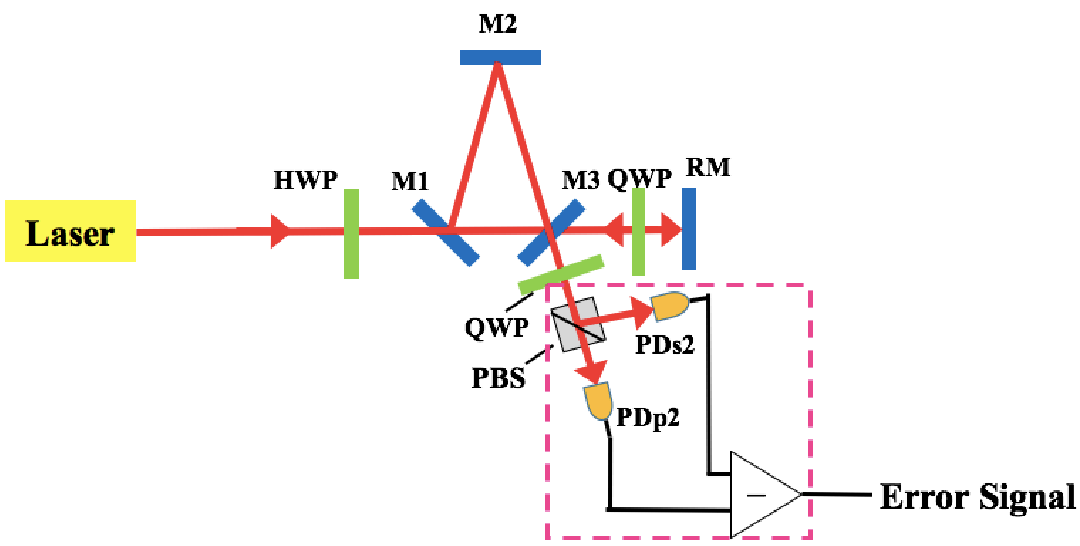

図 D.11　ダブルパス構成における偏光解析法

Appendix E
信号理論

本章では Laplace 変換、Fourier 変換とパワースペクトル密度について述べる。ここでの内容は [44,45] に詳しい。

定義 E.1 (片側 Laplace 変換)

$[0,\infty)$ で定義された区分的に連続な時間関数 $f(t)$ に対して、積分

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T f(t)e^{-st}dt \tag{E.1}$$

が、ある $s\in\mathbb{C}$ に対して収束するとき、[*1]

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{E.2}$$

を $f(t)$ の (片側)Laplace 変換という。

Laplace 変換を $F(s)=\mathfrak{L}[f(t)],\ F(s)=\mathfrak{L}[f(t)](s)$ と略記したり、$x(t)$ の Laplace 変換を単に $X(s),x(s)$ と表記したりする。

Laplace 変換にはその定義からいくつかの性質が成り立つ。それらを列挙する。

定理 E.1 (線型性)

$F_i(s)=\mathfrak{L}[f_i(t)](s),\mathrm{Re}[s]>\sigma_i(i=1,2)$ が存在すれば、$\forall c_1,c_2\in\mathbb{C}$ に対して、

$$\mathfrak{L}[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)](s)=c_1F_1(s)+c_2F_2(s) \tag{E.3}$$

[*1] 実変数複素関数の広義積分の収束性は複素数の絶対値を用いて実変数実関数の広義積分と同様に定義される。また、Cauchy の収束条件を用いると、ある実関数複素関数が絶対可積分ならば可積分であることが示される。したがって、実用的な計算の際には Laplace 変換の収束性はその絶対収束性を調べることでわかる。

定理 E.2 (t 空間移動)

$f(t) = 0, t < 0$ と仮定すると、

$$\mathfrak{L}[f(t-a)1(t)](s) = e^{-as}F(s), \quad a > 0 \tag{E.4}$$

$$\mathfrak{L}[f(t+a)1(t)](s) = e^{as}F(s) - e^{as}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad a > 0 \tag{E.5}$$

が成り立つ (収束域は元の関数の収束域と一緒)。

定理 E.3 (s 空間移動)

$$\mathfrak{L}[e^{\alpha t}f(t)](s) = F(s-\alpha), \quad \mathrm{Re}[s] > \sigma_f + \mathrm{Re}[\alpha] \tag{E.6}$$

ここで、σ_f は $F(s)$ の収束座標である。

定理 E.4 (導関数)

$f(t)$ を位数 a の指数型関数であり、$f'(t)$ が $t \geq 0$ で区分的に連続な関数であるとする。このとき、

$$\mathfrak{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right](s) = sF(s) - f(0-), \quad \mathrm{Re}(s) > a \tag{E.7}$$

が成り立つ。

定理 E.5 (高階導関数)

$f(t)$ が n 階微分可能であり、$f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ が Laplace 変換可能であれば、

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right](s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0-) - \cdots - sf^{(n-2)}(0-) - f^{(n-1)}(0-) \tag{E.8}$$

が成り立つ。

定理 E.6 (時間積分)

$f(t)$ を位数 a の指数型関数で区分的に連続な関数とする。このとき、

$$\mathfrak{L}\left[\int_{0-}^t f(\tau)d\tau\right](s) = \frac{1}{s}F(s) \tag{E.9}$$

が成り立つ。ここで、収束域は $\mathrm{Re}[s] > \max(0, a)$ である。

定理 E.7 (合成積)

$f(t), g(t)$ の合成積 (convolution) を、

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau =: (f * g)(t) \tag{E.10}$$

と表す。$F(s), G(s)$ が $\mathrm{Re}[s] \geq \sigma_a$ で絶対収束すれば、$H(s)$ は $\mathrm{Re} \geq \sigma_a$ で絶対収束し、

$$H(s) = \mathfrak{L}[h(t)](s) = F(s)G(s) \tag{E.11}$$

が成り立つ。

これらの定理、性質によって t 領域における各種の演算が、s 領域では代数的四則演算に置き換わる。

定理 E.8 (初期値定理)

$f(t)$ を指数型関数とする。このとき $\lim_{t\to 0+} f(t)$ が存在すれば、

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0+), \quad s \in \mathbb{R} \tag{E.12}$$

が成り立つ。

定理 E.9 (最終値定理)

$f(t)$ が任意の区間 $[0, T], T > 0$ で積分可能で、かつ $f(\infty)$ が存在すれば、

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = f(\infty), \quad s \in \mathbb{R} \tag{E.13}$$

が成り立つ。

ここからは逆 Laplace 変換について述べる。

定理 E.10

$[0, \infty)$ 上の区分的に連続か関数 $f_1(t), f_2(t)$ に対して、

$$\mathfrak{L}[f_1(t)] = \mathfrak{L}[f_2(t)], \mathrm{Re}[s] > \sigma_0 \tag{E.14}$$

が成り立つならば、$f_1(t), f_2(t)$ は不連続点を除いて一致する。

定理 E.11 (逆 Laplace 変換)

$f(t)$ の Laplace 変換 $F(s)$ が $\mathrm{Re}[s] > \sigma_a$ において絶対収束すれば、$c > \sigma_a$ に対して、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{-st}ds = \begin{cases} \frac{1}{2}\{f(t+0)+f(t-0)\}, & t > 0 \\ \frac{1}{2}f(0+), & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{E.15}$$

が成り立つ。この左辺を逆 Laplace 変換という。

上述した (片側)Laplace 変換の議論は因果的 ($f(t) = 0, t < 0$) な関数に対する両側 Laplace 変換 (片側 Laplace 変換の定義において積分区間を $-\infty$ から ∞ にしたもの) に対する議論と同等である。区間 $(-\infty, \infty)$ で定義された区分的に連続な関数 $f(t)$ に対して、両側 Laplace 変換において $s = i\omega$ とした場合、Fourier 変換が得られる。

定義 E.2 (Fourie 変換)

$f(t)$ は $(-\infty, \infty)$ で絶対可積分、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \tag{E.16}$$

であるとする。積分

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R} \tag{E.17}$$

を Fourier 変換という。

$F(i\omega)$ を $F(\omega)$ や $F(f), (2\pi f = \omega)$ と表記することもある。

定義 E.3 (逆 Fourier 変換)

$f(t), (-\infty < t < \infty)$ が有界、連続、かつ絶対か積分であるとする。このとき $F(i\omega)$ が絶対可積分であれば、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{E.18}$$

が成立し、これを逆 Laplace 変換という。

Laplace 変換と逆 Laplace 変換によって時間 t 領域と s 領域の間で関数を変換することができる。Fourier 変換と逆 Fourier 変換によって時間 t 領域と周波数 $\omega(f)$ 領域の間で関数を変換することができる。s 領域や周波数領域では関数の各種の演算が上述した Laplace 変換の性質によって四則演算に置き換わるので便利である。

ここまでの議論は $\forall t$ に対して定まった値をもつ確定信号を扱ってきたが、最後にある時刻での値が確率的に決定される不規則信号について考える。特に雑音のレベルを評価する上でよく使用されるパワースペクトル密度についてまとめる。

不規則信号の一つの標本関数 $x(t)$ を考える。$x(t)$ は無限に続くので一般に絶対可積分でなく Fourier 変換は存在しない。そこで、原点を挟んだ区間 $-T/2 < t < T/2$ で $x(t)$ と一致し、その他の領域で 0 となる時間関数を $x_T(t)$ とする。この関数については Fourier 変換が存在するので、

$$\lim_{T \to \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} \tag{E.19}$$

を考えることができる。この極限がそれぞれの標本関数に対して存在し、かつ同一であると仮定する。式 (E.19)、またはその平方根をパワースペクトル密度 (PSD) という。[*2]パワースペクトル密度に対して、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|X_T(\omega)|^2}{T}d\omega = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2(t)dt \tag{E.20}$$

が成り立つ。右辺は単位当たりのエネルギーを表しており、パワースペクトル密度は不規則信号の角周波数成分におけるパワーの分布を表していることがわかる。

[*2] 実際の時系列信号の解析では、時系列データを適当な区間ごとに分割し、分割の影響を抑えるための窓関数をかけてそれぞれに対して式 (E.19) を計算する (このそれぞれを periodgram 関数という)。これらの平均を出すことでパワースペクトル密度を求めている。

Appendix F
フィードバック制御理論

本章ではシステムと伝達関数、フィードバック制御についてまとめる。ここでの内容は [45] に詳しい。

F.1　システムと伝達関数

定義 F.1 (システム)
システム (系) とは、物理量の入力と出力をもつ、いくつかの要素からなる集合体である。

システムの入力と出力の関係は、そのシステムの基礎方程式である法則に基づいて与えられる。ここでは古典制御理論と呼ばれる 1 入力 1 出力線形フィードバック制御系で扱われる 1 入力 1 出力動的線形システムを考えることとする。

定義 F.2 (1 入力 1 出力動的線形システム)
1 入力 1 出力動的線形システムとは、一つの物理量の入力 $x(t)$ と一つの物理量の出力 $y(t)$ を持ち、ある時間の出力がそれより以前の入力の値によって決定され、入力と出力の間に線形性を持つシステムのことである。したがって一般に 1 入力 1 出力動的線形システムの入力と出力の間の関係は次のような微分方程式

$$\begin{aligned}&\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)\\&= b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m} + \cdots + b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t), \quad n \geq m\end{aligned} \tag{F.1}$$

と初期条件

$$\left.\frac{d^i y(t)}{dt^i}\right|_{t=0-} = y_0^i \in \mathbb{R}, \quad \left.\frac{d^j x(t)}{dt^j}\right|_{t=0-} = x_0^j \in \mathbb{R}, \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1; j = 0, 1, \cdots, m-1) \tag{F.2}$$

で与えられる。$a_i \in \mathbb{R}, b_j \in \mathbb{R} (i = 0, \cdots, n-1; j = 0, \cdots, m)$ はシステムパラメーターである。

定義 F.3 (ゼロ入力応答、ゼロ状態応答)

一般に線形システムの出力 (=応答) は、初期値に依存する項であるゼロ入力応答と、入力に依存する項であるゼロ状態応答の和で表される。

定義 F.4 (インパルス応答)

入力をデルタ関数 $x(t) = \delta(t)$ とし、初期値をゼロとしたときの応答、すなわちゼロ状態応答をインパルス応答 (impulse response)$h(t)$ という。

インパルス応答はその定義から $h(t) = 0, t < 0$ であり、このようなインパルス応答の条件を満たすシステムを因果的という。

定理 F.1

式 (F.1) のシステムのインパルス応答を $h(t)$ とする。このときシステムの連続性と線形性から任意の入力 $x(t), t \geq 0$ に対するゼロ状態応答 $y(t), t \geq 0$ が次の合成積で与えられる。

$$y(t) = \int_{0-}^{t} h(t-\tau)x(\tau)d\tau, \quad t > 0 \tag{F.3}$$

定義 F.5 (伝達関数)

インパルス応答 $h(t)$ が Laplace 変換可能なとき、式 (F.3) の両辺を Laplace 変換することで、

$$Y(s) = H(s)X(s) \tag{F.4}$$

が得られる。ここで $Y(s), X(s)$ はそれぞれ出力 $y(t)$ と入力 $x(t)$ の Laplace 変換で、$H(s)$ はインパルス応答 $h(t)$ の Laplace 変換でシステムの伝達関数と呼ばれる。

一般にシステムや制御系はいくつかの要素からなる。次にこのようなシステムや制御系の信号の流れを s 領域で図式的に表現する。Block Diagram について述べる。

定義 F.6 (Block Diagram(ブロック線図))

Block Diagram はシステムや制御要素の伝達関数をブロックの中に書き込み、入力や出力の信号の流れを矢印で表して各ブロックを結んだ図式である。Block Diagram は図 F.1 の 3 つの基本結合で構成される。図中の四角内の数式が基本結合の代数的定義である。

ここまでで述べてきた議論は $s = i\omega$ とすれば Laplace 変換は Fourier 変換へと移り、各関係式は角周波数 ω の Fourier 成分の関係式になる。また、以上の各関係式や Diagram で $X(s)$ を $x(s)$ と表記したり、時間関数 $x(t)$ と区別せず単に x と表記することもある。

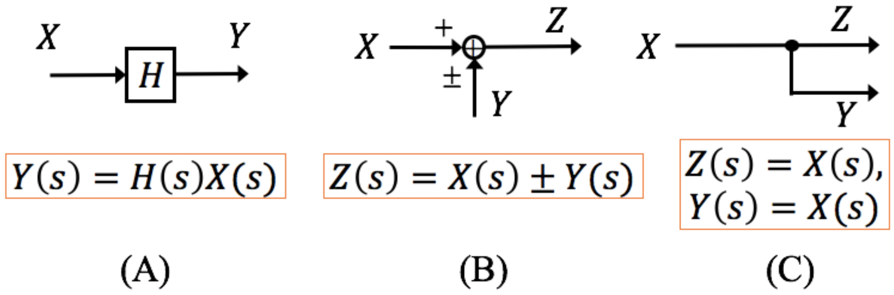

図 F.1　Block Diagram の基本結合

F.2　フィードバック制御系

以降では $s = i\omega(\omega = 2\pi f)$ という場合を考え、周波数空間で議論する。フィードバック制御系とは制御対象の変動を検出し、その変動と逆の方向に作用を及ぼすことで変動を抑える制御系である。本節では図 F.2 のような典型的なフィードバック制御系の一例について議論する。ある物理量の外乱 x_0 がセンサーの伝達関数 H によってエラー信号 V_{error} に変換される。このエラー信号を制御フィルターの伝達関数 F に通すことでフィードバック量 V_{fb} が決定され、アクチュエータの伝達関数 A を通してセンサーの入力部にフィードバックされる。このフィードバック制御系によって元々の変動する物理量 x_0 が x に抑えられる。これは Block Diagram を計算し、

$$x = \frac{1}{1+G}x_0 \tag{F.5}$$

を得ることで理解される。すなわち、オープンループ伝達関数 $G := AFH$ のゲイン $|G|$ が大きいと $x \sim 0$ となる。

しかし、オープンループ伝達関数はどの周波数領域でも $|G| >> 1$ とすることはできず、一般に高周波数帯で $G \to 0$ となる。$|G| >> 1$ となる周波数領域では残留変動 x を元の変動 x_0 よりも抑えることができ、このような周波数領域を制御帯域という。また、上式を見るとわかるように $|G| = 1$ となるときの周波数における G の位相が制御系の安定性を判定する上で重要になる。このときの周波数を UGF(Unity Gain Frequency) という。ここで、システムの安定性を次のように定義した。

定義 F.7 (システムの安定性)
伝達関数が $F(s)$ であるシステムが安定であるとは、任意の有界な入力 $x(t)$ に対して、ゼロ状態応答 $y(t)$ が常に有界であることと定義する。また、システムが安定でないことを不安定であるという。

フィードバック制御系が安定であるかを判定する一つの方法として Nyquist の判定法がよく用いられる。Nyquist の判定法は Nyquist の安定定理をもとにしている。Nyquist の判定法は UGF における位相余裕、すなわち $\arg(G)+180°$ が $30°$ 程度以上大きければそのフィードバック制御系は安定と判定できるというものである。

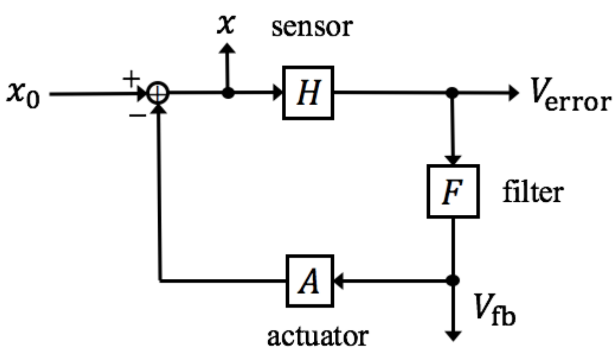

図 F.2　典型的なフィードバック制御系の一例

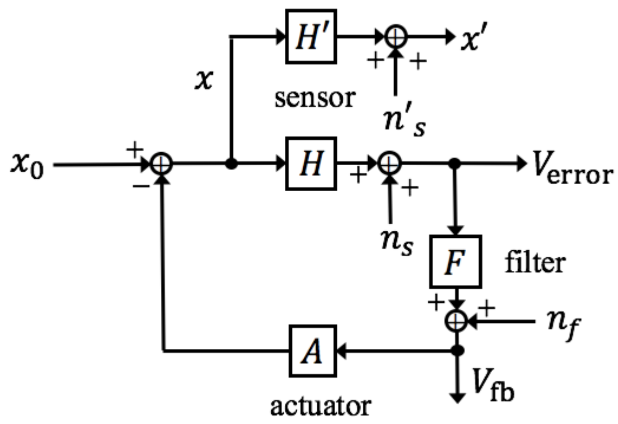

図 F.3　フィードバック制御系における雑音の混入と信号取得系

F.3　制御における雑音

実際のフィードバック制御系では制御ループに雑音が混入し、実現できる残留変動には限界がある。本節では図 F.3 のようにセンサーの雑音 n_s とフィルター回路の雑音 n_f を考えたフィードバック制御系を考察する。また、このような状況で残留変動をどのように評価するか、また外乱による変動をどのように見積もるかを考える。　フィードバック制御ではエラー信号が 0 になるように制御が行われるが、雑音の影響を考慮すると単に制御ループ内のエラー信号によって実際の残留変動を正しく評価できない。すなわち

$$V_{\mathrm{error}} = \frac{H}{1+G}x_0 + \frac{1}{1+G}n_s - \frac{AH}{1+G}n_f \tag{F.6}$$

より、エラー信号から見積もった残留変動 $x^{(\mathrm{error})}$ は、

$$x^{(\mathrm{error})} := \frac{V_{\mathrm{error}}}{H} = \frac{1}{1+G}x_0 + \frac{1}{1+G}\frac{1}{H}n_s - \frac{A}{1+G}n_f \tag{F.7}$$

であり、$|G| >> 1$ では $x^{(\mathrm{error})} \sim 0$ であるが、実際には

$$x = \frac{V_{\mathrm{error}} - n_s}{H} = \frac{1}{1+G}x_0 + \frac{G}{1+G}\frac{1}{H}n_s - \frac{A}{1+G}n_f \tag{F.8}$$

であり、$|G| >> 1$ では $x \sim n_s/H$ となる。したがって制御ループのエラー信号で評価すると残留変動を小さく見積もってしまう。そこで、実際の残留変動をより正確に評価するには図 F.3 のように制御ループ外のモニター用信号 V_m を使用する必要がある。モニター信号から見積もった残留変動は、

$$x^{(m)} := \frac{V_m}{H'} = \frac{1}{1+G}x_0 + \frac{G}{1+G}\frac{1}{H}n_s - \frac{A}{1+G}n_f + \frac{1}{H'}n'_s \tag{F.9}$$

であり、$|G| >> 1$ では $x^{(m)} \sim n_s/H$ となるのでより良い残留変動評価ができる。

次に外乱の見積もりについて考える。図 F.3 においてフィードバック信号 V_{fb} は、

$$V_{\mathrm{fb}} = \frac{FH}{1+G}x_0 + \frac{F}{1+G}n_s + \frac{1}{1+G}n_f \tag{F.10}$$

であり、フィードバック信号から見積もった外乱は、

$$x_0^{(\mathrm{fb})} := \frac{1+G}{FH}V_{\mathrm{fb}} = x_0 + \frac{1}{H}n_s + \frac{A}{G}n_f \tag{F.11}$$

となる。一方式 (F.6) よりエラー信号から見積もった外乱は、

$$x_0^{(\mathrm{error})} := \frac{1+G}{H}V_{\mathrm{error}} = x_0 + \frac{1}{H}n_s + An_f \tag{F.12}$$

となる。この 2 式を比べると $|G| > 1$ となる制御帯域ではフィードバック信号から見積もった外乱が、制御帯域外ではエラー信号から見積もった外乱がより正確に外乱を見積もれていることがわかる。

Appendix G

回路

本章では本研究で使用した主な回路について、その回路図を示す。

G.1　回路

PD 用電流電圧変換回路

本実験で使用した PD 用電流電圧変換回路が図 G.1 である。この回路によって光の強度に比例した PD の電流信号を電圧信号に変換し、光の強度に比例した電圧信号を取得した。PD は偏光解析用の 4 つと、各種の透過光モニター用の 3 つの計 7 つが真空容器内にあり、この電流電圧変換回路も真空容器内に設置した。出力信号は真空容器のフィードスルーを通して容器の外部へと取り出せるようにした。PD には浜松フォトニクスの G10899-02K を使用した。

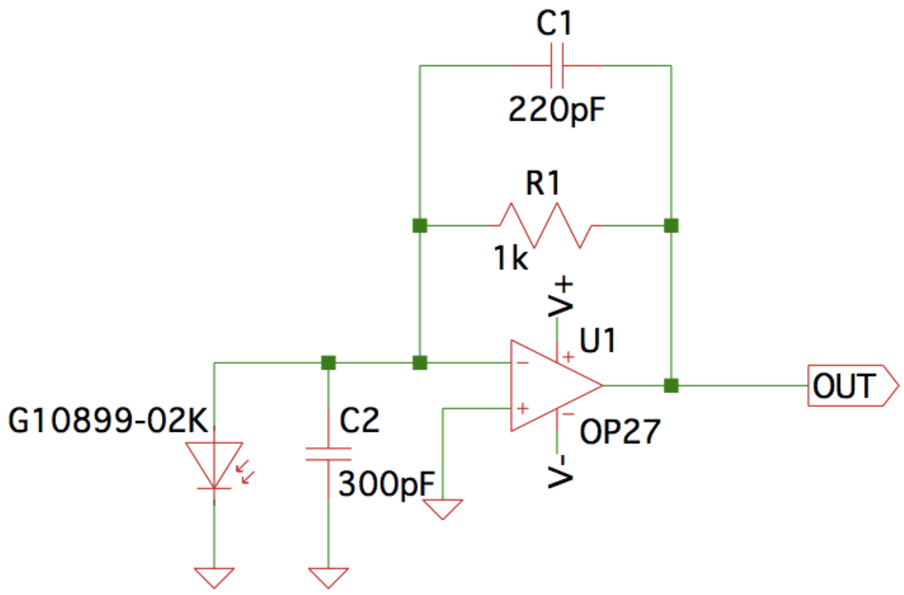

図 G.1　PD 用電流電圧変換回路

3 次ローパスフィルター

本研究で使用したアンチエイリアシング用の 3 次ローパスフィルターが図 G.2 である。カットオフ周波数は 16 Hz に設計されている。

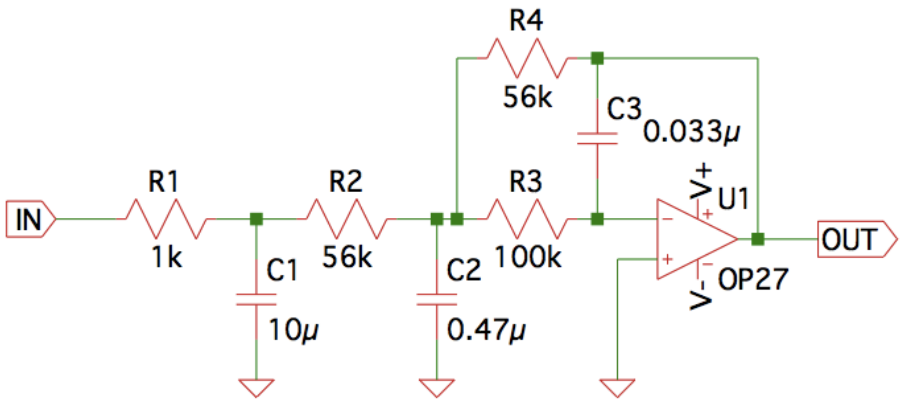

図 G.2　3 次ローパスフィルター

フィルター回路

本実験で使用した制御用フィルター回路が図 G.3 である。制御用フィルター回路は一つの回路ボックスの中に収まるように一体化され、小型化されている。これは実際に異方性探査を行う際には光学系を回転させるためにフィルター回路も回転台に載せる必要があるためである。フィルター制御回路には図 G.4 のオフセット調節用回路も含まれており、フィルター回路上でオフセット調節が必要な部分のオフセットを調節できるようになっている。

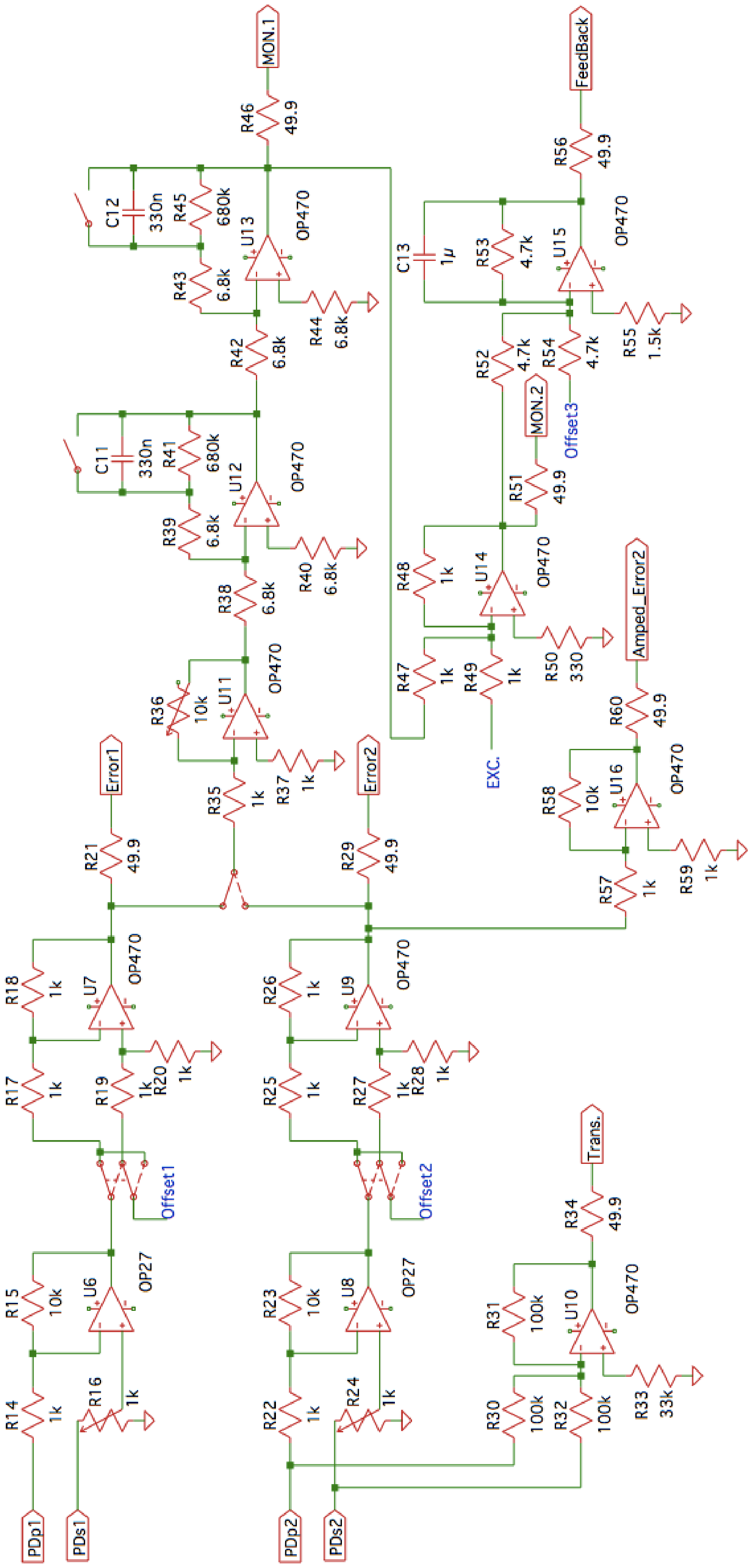

図 G.3　Filter 回路

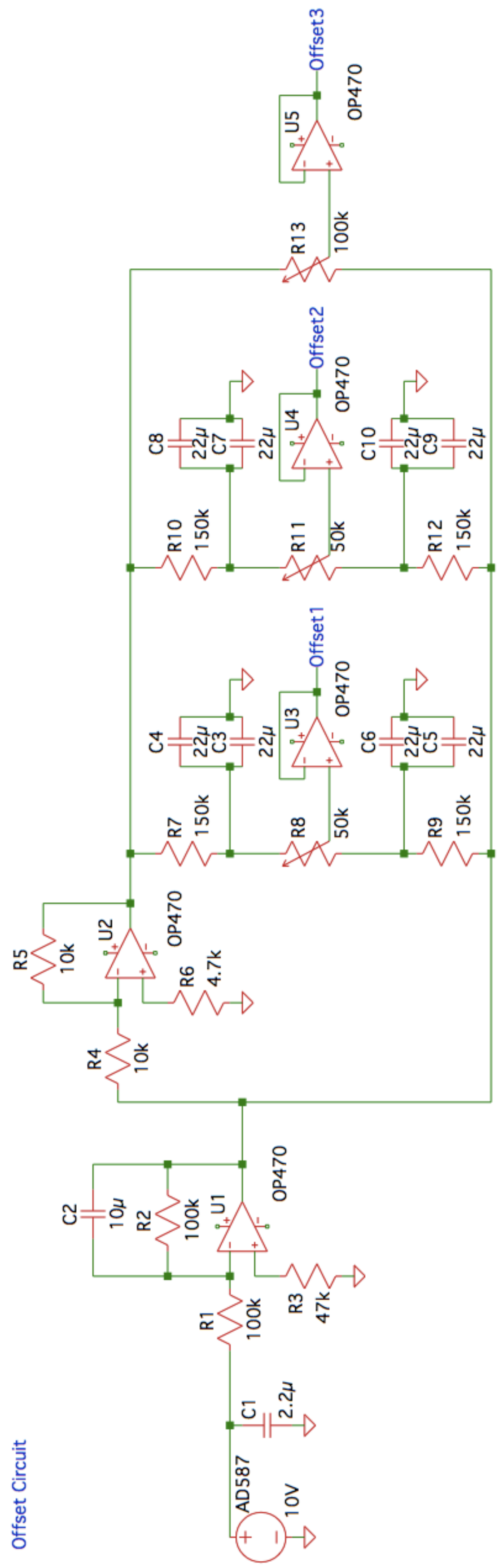

図 G.4　Filter 回路 (Offset 調節回路部分)

謝辞

本研究を進め完成させるにあたり、多くの方々のお世話になりました。ありがとうございました。

指導教員である東京大学理学系研究科物理学専攻の安東正樹准教授には研究の進め方から実験計画のたて方まで、研究に対する姿勢を学ばせていただきました。また、本研究の相談や議論にも熱心に付き合って頂き、そこで得られた幅広い知識とアイディアは本研究のモノリシック光学系の設計同相雑音除去比の測定などの随所で活かすことができました。実験分野に疎かった私を重力波実験分野という魅力的な分野に迎え入れて下さったことにもこの場をお借りしてお礼申し上げます。

東京大学理学系研究科物理学専攻の道村唯太助教には光リング共振器を用いた片道光速の異方性探査実験の先行研究者として多くのアドバイスを頂きました。中でもモノリシック光学系のアラインメントで上から挟み上げてアラインメントをとるという氏のアイディアのおかげで本研究のアラインメントの開発を行うことができました。氏には本研究に限らず、重力波望遠鏡 KAGRA での作業においても親身に指導して頂き大変お世話になりました。気さくでふわふわした雰囲気なので困ったことやわからないことも聞きやすく多くの実験に対する知識を与えてくれたことや、物理学の分野に各分野に依らず幅広いことに興味を持って真剣に楽しく議論する姿のおかげで私自身非常に楽しく当研究室での修士課程 2 年間の研究生活を送ることができました。大変ありがとうございました。

東京大学理学系研究科物理学専攻安東研究室修士課程の酒井譲氏には同じく Lorentz 不変性の検証を研究テーマとする同期として日々の議論などで大変お世話になりました。わからないことや疑問をすぐに議論しあえる同期がいることは大変心強く、また氏の回路に対する豊富な知識は本研究で使用した回路を製作する上で大変参考になりました。実験や研究等を計画的に進め、真剣に取り組むストイックさは研究を進める上で非常に良い刺激になりました。

東京大学大学院理学系研究科の大塚茂巳氏をはじめとする試作室の方々には、実験に必要な部品を製作して頂きました。モノリシック光学系の製作では、設計の相談や材料の相談にも親切に

乗って頂いた上に細かい注文等にも迅速に大変して頂き、実験を計画通りに進める上で非常に助かりました。感謝の気持ちしかありません。

株式会社ツバタの津幡英夫氏にはモノリシック光学系の Template 製作とスーパーインバーの調達、optical bench の研磨をして頂きました。わざわざ東京大学に足を運んでまで懇切丁寧に設計のお話や注意などをして頂きました。実験系を設計するという面で大変お世話になりました。

東京大学理学系研究科物理学専攻安東研究室の小森健太郎氏には、同相雑音除去比の測定に関連して温度による変調の効果などを議論して頂きました。また私の些細な疑問にも対応してくださり、本研究の中に止まらない様々な議論を通して幅広い知見を得ることができました。

安東研究室博士課程の有冨尚紀氏には紫外線硬化樹脂を用いたモノリシック光学系の開発の先行研究者として特に本研究のモノリシック光学系の初期設計の段階で相談に乗って頂き、大変参考になりました。

同じく博士課程の下田智文氏には光学実験の基本的な事柄や実験器具の使い方など、大学院に入学したてで右も左も分からない私に様々な実験の基礎を教えて頂きました。以降も事あるごとに本研究や、本研究と直接関連しない事柄についても議論して頂きその都度大変勉強になりました。

同じく博士課程の榎本雄太郎氏には実験結果の解釈や雑音源の議論の他、本研究外の光学実験や重力波物理学についても多岐にわたって議論して頂きました。氏の順を追って理論だった解釈を行う物理学に対する姿勢は非常に参考になりました。

同じく博士課程の長野晃士氏には本実験のモノリシック光学系のアラインメント作業などについて実験室で多くのアドバイスを頂きました。その他にも実験に関することだけでなく細かいことについても私の議論に乗って下さり、氏の重力波実験に対する幅広い知識にはただただ感心しました。

同じく修士課程の和田祥太郎氏には同期として実験外でも大変お世話になりました。実験がうまくいかないときにも氏のマイペースさを感じることでリラックスすることができました。

同じく修士課程の黄靖斌氏、川﨑拓也氏、高野哲氏には私のどうでも良さそうな議論にも笑顔で付き合って頂き大変ありがとうございました。

そして、ここまで私を育てて頂いた両親に多大なる感謝の意を表します。ありがとうございました。これからもよろしくお願いします。

ここに挙げた方々以外にも、物理第一分室の庭田まゆ子さん、各企業の方々、本当に多くの方々のお世話になりました。最後になりましたがすべての皆様に心から感謝申し上げます。ありがとうございました！ 今後ともよろしくお願いします！

参考文献

[1] V. Alan Kostelecký and Stuart Samuel. Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory. *Physical Review D*, Vol. 39, No. 2, pp. 683–685, 1989.

[2] C H Lineweaver, L Tenorio, G F Smoot, P Keegstra, A J Banday, and P Lubin. The Dipole Observed in the COBE DMR 4 Year Data. *The Astrophysical Journal*, Vol. 470, p. 38, 1996.

[3] A. A. Michelson and E. W. Morley. On the relative motion of the Earth and the luminiferous ether. *American Journal of Science*, Vol. s3-34, No. 203, pp. 333–345, nov 1887.

[4] Moritz Nagel, Stephen R. Parker, Evgeny V. Kovalchuk, Paul L. Stanwix, John G. Hartnett, Eugene N. Ivanov, Achim Peters, and Michael E. Tobar. Direct terrestrial test of Lorentz symmetry in electrodynamics to $10-18$. *Nature Communications*, Vol. 6, p. 8174, sep 2015.

[5] Yuta Michimura. *Tests of Lorentz Invariance with an Optical Ring Cavity*. doctoral thesis, University of Tokyo, 2014.

[6] Don Colladay and Alan Kostelecky. Lorentz-Violating Extension of the Standard Model. Vol. 359, , 1998.

[7] Yuta Michimura, Nobuyuki Matsumoto, Noriaki Ohmae, Wataru Kokuyama, Yoichi Aso, Masaki Ando, and Kimio Tsubono. New Limit on Lorentz Violation Using a Double-Pass Optical Ring Cavity. mar 2013.

[8] Yuta Michimura, Nobuyuki Matsumoto, Noriaki Ohmae, Wataru Kokuyama, Yoichi Aso, Masaki Ando, and Kimio Tsubono. New Limit on Lorentz Violation Using a Double-Pass Optical Ring Cavity. mar 2013.

[9] Yuta Michimura, Matthew Mewes, Nobuyuki Matsumoto, Yoichi Aso, and Masaki Ando. Optical-Cavity Limits on Higher-Order Lorentz Violation. oct 2013.

[10] Ch. Eisele, A. Yu. Nevsky, and S. Schiller. Laboratory Test of the Isotropy of Light Propagation at the 10ˆ{-17} Level. *Physical Review Letters*, Vol. 103, No. 9, p. 090401, aug 2009.

[11] S. Herrmann, A. Senger, K. Möhle, M. Nagel, E. Kovalchuk, and A. Peters. Rotating optical cavity experiment testing Lorentz invariance at the 10ˆ{-17} level. feb 2010.

[12] V. Alan Kostelecký and Matthew Mewes. Electrodynamics with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. *Physical Review D*, Vol. 80, No. 1, p. 015020, jul 2009.

[13] Alan Kostelecky and Matthew Mewes. Signals for Lorentz Violation in Electrodynamics. *Physical Review D*, Vol. 66, No. 5, may 2002.

[14] William S N Trimmer, Ralph F. Baierlein, James E. Faller, and Henry A. Hill. Experimental search for anisotropy in the speed of light. *Physical Review D*, Vol. 8, No. 10, pp. 3321–3326, 1973.

[15] Fred Baynes, Andre Luiten, and Michael Tobar. Testing Lorentz Invariance Using an Odd-Parity Asymmetric Optical Resonator. aug 2011.

[16] Benedict J Cusack, Daniel A Shaddock, Bram J J Slagmolen, Glenn de Vine, Malcolm B Gray, and David E McClelland. Double pass locking and spatial mode locking for gravitational wave detectors. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 19, No. 7, pp. 1819–1824, apr 2002.

[17] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健. 重力波をとらえる. 京都大学学術出版会, 1998.

[18] G Sagnac. The demonstraton of the luminiferous aether by an interferometer in uniform rotation. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 157, p. 708, 1913.

[19] Ruyong Wang, Yi Zheng, and Aiping Yao. Generalized Sagnac Effect. *Society*, Vol. 93, No. September, pp. 91–93, sep 2006.

[20] MatWeb. MatWeb. http://www.matweb.com.

[21] J. Komma, C. Schwarz, G. Hofmann, D. Heinert, and R. Nawrodt. Thermo-optic coefficient of silicon at 1550 nm and cryogenic temperatures. *Applied Physics Letters*, Vol. 101, No. 4, p. 041905, jul 2012.

[22] Koji Arai, Sam Barnum, Peter Fritschel, Jeff Lewis, and Sam Waldman. Output Mode Cleaner Design. Technical report, 2013. https://dcc.ligo.org/public/0012/T1000276/005/OMC_FinalDesign.pdf.

[23] M. Armano, H. Audley, G. Auger, J. T. Baird, M. Bassan, P. Binetruy, M. Born, D. Bor-

toluzzi, N. Brandt, M. Caleno, L. Carbone, A. Cavalleri, A. Cesarini, G. Ciani, G. Congedo, A. M. Cruise, K. Danzmann, M. de Deus Silva, R. De Rosa, M. Diaz-Aguiló, L. Di Fiore, I. Diepholz, G. Dixon, R. Dolesi, N. Dunbar, L. Ferraioli, V. Ferroni, W. Fichter, E. D. Fitzsimons, R. Flatscher, M. Freschi, A. F. García Marín, C. García Marirrodriga, R. Gerndt, L. Gesa, F. Gibert, D. Giardini, R. Giusteri, F. Guzmán, A. Grado, C. Grimani, A. Grynagier, J. Grzymisch, I. Harrison, G. Heinzel, M. Hewitson, D. Hollington, D. Hoyland, M. Hueller, H. Inchauspé, O. Jennrich, P. Jetzer, U. Johann, B. Johlander, N. Karnesis, B. Kaune, N. Korsakova, C. J. Killow, J. A. Lobo, I. Lloro, L. Liu, J. P. López-Zaragoza, R. Maarschalkerweerd, D. Mance, V. Martín, L. Martin-Polo, J. Martino, F. Martin-Porqueras, S. Madden, I. Mateos, P. W. McNamara, J. Mendes, L. Mendes, A. Monsky, D. Nicolodi, M. Nofrarias, S. Paczkowski, M. Perreur-Lloyd, A. Petiteau, P. Pivato, E. Plagnol, P. Prat, U. Ragnit, B. Raïs, J. Ramos-Castro, J. Reiche, D. I. Robertson, H. Rozemeijer, F. Rivas, G. Russano, J. Sanjuán, P. Sarra, A. Schleicher, D. Shaul, J. Slutsky, C. F. Sopuerta, R. Stanga, F. Steier, T. Sumner, D. Texier, J. I. Thorpe, C. Trenkel, M. Tröbs, H. B. Tu, D. Vetrugno, S. Vitale, V. Wand, G. Wanner, H. Ward, C. Warren, P. J. Wass, D. Wealthy, W. J. Weber, L. Wissel, A. Wittchen, A. Zambotti, C. Zanoni, T. Ziegler, and P. Zweifel. Sub-Femto- g Free Fall for Space-Based Gravitational Wave Observatories: LISA Pathfinder Results. *Physical Review Letters*, Vol. 116, No. 23, p. 231101, jun 2016.

[24] D I Robertson, E D Fitzsimons, C J Killow, M Perreur-Lloyd, H Ward, J Bryant, A M Cruise, G Dixon, D Hoyland, D Smith, and J Bogenstahl. Construction and testing of the optical bench for LISA Pathfinder. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 30, No. 8, p. 085006, apr 2013.

[25] Anna-Maria A. van Veggel and Christian J. Killow. Hydroxide catalysis bonding for astronomical instruments. *Advanced Optical Technologies*, Vol. 3, No. 3, jan 2014.

[26] V. Greco, F. Marchesini, and G. Molesini. Optical contact and van der Waals interactions: The role of the surface topography in determining the bonding strength of thick glass plates. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, Vol. 3, No. 1, pp. 85–88, 2001.

[27] Jan Haisma and G.A.C.M. Spierings. Contact bonding, including direct-bonding in a historical and recent context of materials science and technology, physics and chemistry.

Materials Science and Engineering: R: Reports, Vol. 37, No. 1-2, pp. 1–60, apr 2002.

[28] 有冨尚紀. ねじれ型重力波望遠鏡 TOBA のためのモノリシック干渉計の開発. 修士論文, 東京大学, 2017. http://t-munu.phys.s.u-tokyo.ac.jp/theses/aritomi_m.pdf.

[29] Thorlabs. Thorlabs,UV 硬化光学素子用接着剤. https://www.thorlabs.co.jp/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=196.

[30] Thorlabs. Thorlabs, 高出力 UV 硬化 LED システム. https://www.thorlabs.co.jp/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=4424.

[31] Yuta Michimura, Matthew Mewes, Nobuyuki Matsumoto, Yoichi Aso, and Masaki Ando. Optical-Cavity Limits on Higher-Order Lorentz Violation. oct 2013.

[32] Yuta Michimura. 光リング共振器を用いた片道光速の異方性探査. 修士論文, 東京大学, 2012. http://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/michimura/document/michimura_masterthesis.pdf.

[33] Yuzuru Sakai. 光リング共振器の連続回転による片道光速の異方性探査. 修士論文, 東京大学, 2018.

[34] P.R. Saulson. *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*. World Scientic, Singapore, 1994.

[35] Robert Wald. *General Relativity*. 1984.

[36] Steven Hawking and G Ellis. *he Large Scale Structure of Space-Time*. 1975.

[37] A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, Vol. 354, No. 7, pp. 769–822, 1916.

[38] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, M. Agathos, K. Agatsuma, N. Aggarwal, O. D. Aguiar, L. Aiello, A. Ain, P. Ajith, B. Allen, A. Allocca, P. A. Altin, S. B. Anderson, W. G. Anderson, K. Arai, M. A. Arain, M. C. Araya, C. C. Arceneaux, J. S. Areeda, N. Arnaud, K. G. Arun, S. Ascenzi, G. Ashton, M. Ast, S. M. Aston, P. Astone, P. Aufmuth, C. Aulbert, S. Babak, P. Bacon, M. K.M. Bader, P. T. Baker, F. Baldaccini, G. Ballardin, S. W. Ballmer, J. C. Barayoga, S. E. Barclay, B. C. Barish, D. Barker, F. Barone, B. Barr, L. Barsotti, M. Barsuglia, D. Barta, J. Bartlett, M. A. Barton, I. Bartos, R. Bassiri, A. Basti, J. C. Batch, C. Baune, V. Bavigadda, M. Bazzan, B. Behnke, M. Bejger, C. Belczynski, A. S. Bell, C. J. Bell, B. K. Berger, J. Bergman, G. Bergmann, C. P.L. Berry, D. Bersanetti, A. Bertolini, J. Bet-

zwieser, S. Bhagwat, R. Bhandare, I. A. Bilenko, G. Billingsley, J. Birch, R. Birney, O. Birnholtz, S. Biscans, A. Bisht, M. Bitossi, C. Biwer, M. A. Bizouard, J. K. Blackburn, C. D. Blair, D. G. Blair, R. M. Blair, S. Bloemen, O. Bock, T. P. Bodiya, M. Boer, G. Bogaert, C. Bogan, A. Bohe, P. Bojtos, C. Bond, F. Bondu, R. Bonnand, B. A. Boom, R. Bork, V. Boschi, S. Bose, Y. Bouffanais, A. Bozzi, C. Bradaschia, P. R. Brady, V. B. Braginsky, M. Branchesi, J. E. Brau, T. Briant, A. Brillet, M. Brinkmann, V. Brisson, P. Brockill, A. F. Brooks, D. A. Brown, D. D. Brown, N. M. Brown, C. C. Buchanan, A. Buikema, T. Bulik, H. J. Bulten, A. Buonanno, D. Buskulic, C. Buy, R. L. Byer, M. Cabero, L. Cadonati, G. Cagnoli, C. Cahillane, J. Calderón Bustillo, T. Callister, E. Calloni, J. B. Camp, K. C. Cannon, J. Cao, C. D. Capano, E. Capocasa, F. Carbognani, S. Caride, J. Casanueva Diaz, C. Casentini, S. Caudill, M. Cavaglià, F. Cavalier, R. Cavalieri, G. Cella, C. B. Cepeda, L. Cerboni Baiardi, G. Cerretani, E. Cesarini, R. Chakraborty, T. Chalermsongsak, S. J. Chamberlin, M. Chan, S. Chao, P. Charlton, E. Chassande-Mottin, H. Y. Chen, Y. Chen, C. Cheng, A. Chincarini, A. Chiummo, H. S. Cho, M. Cho, J. H. Chow, N. Christensen, Q. Chu, S. Chua, S. Chung, G. Ciani, F. Clara, J. A. Clark, F. Cleva, E. Coccia, P. F. Cohadon, A. Colla, C. G. Collette, L. Cominsky, M. Constancio, A. Conte, L. Conti, D. Cook, T. R. Corbitt, N. Cornish, A. Corsi, S. Cortese, C. A. Costa, M. W. Coughlin, S. B. Coughlin, J. P. Coulon, S. T. Countryman, P. Couvares, E. E. Cowan, D. M. Coward, M. J. Cowart, D. C. Coyne, R. Coyne, K. Craig, J. D.E. Creighton, T. D. Creighton, J. Cripe, S. G. Crowder, A. M. Cruise, A. Cumming, L. Cunningham, E. Cuoco, T. Dal Canton, S. L. Danilishin, S. D'Antonio, K. Danzmann, N. S. Darman, C. F. Da Silva Costa, V. Dattilo, I. Dave, H. P. Daveloza, M. Davier, G. S. Davies, E. J. Daw, R. Day, S. De, D. Debra, G. Debreczeni, J. Degallaix, M. De Laurentis, S. Deléglise, W. Del Pozzo, T. Denker, T. Dent, H. Dereli, V. Dergachev, R. T. Derosa, R. De Rosa, R. Desalvo, S. Dhurandhar, M. C. Díaz, L. Di Fiore, M. Di Giovanni, A. Di Lieto, S. Di Pace, I. Di Palma, A. Di Virgilio, G. Dojcinoski, V. Dolique, F. Donovan, K. L. Dooley, S. Doravari, R. Douglas, T. P. Downes, M. Drago, R. W.P. Drever, J. C. Driggers, Z. Du, M. Ducrot, S. E. Dwyer, T. B. Edo, M. C. Edwards, A. Effler, H. B. Eggenstein, P. Ehrens, J. Eichholz, S. S. Eikenberry, W. Engels, R. C. Essick, T. Etzel, M. Evans, T. M. Evans, R. Everett, M. Factourovich, V. Fafone, H. Fair, S. Fairhurst, X. Fan, Q. Fang, S. Farinon, B. Farr,

W. M. Farr, M. Favata, M. Fays, H. Fehrmann, M. M. Fejer, D. Feldbaum, I. Ferrante, E. C. Ferreira, F. Ferrini, F. Fidecaro, L. S. Finn, I. Fiori, D. Fiorucci, R. P. Fisher, R. Flaminio, M. Fletcher, H. Fong, J. D. Fournier, S. Franco, S. Frasca, F. Frasconi, M. Frede, Z. Frei, A. Freise, R. Frey, V. Frey, T. T. Fricke, P. Fritschel, V. V. Frolov, P. Fulda, M. Fyffe, H. A.G. Gabbard, J. R. Gair, L. Gammaitoni, S. G. Gaonkar, F. Garufi, A. Gatto, G. Gaur, N. Gehrels, G. Gemme, B. Gendre, E. Genin, A. Gennai, J. George, L. Gergely, V. Germain, Abhirup Ghosh, Archisman Ghosh, S. Ghosh, J. A. Giaime, K. D. Giardina, A. Giazotto, K. Gill, A. Glaefke, J. R. Gleason, E. Goetz, R. Goetz, L. Gondan, G. González, J. M.Gonzalez Castro, A. Gopakumar, N. A. Gordon, M. L. Gorodetsky, S. E. Gossan, M. Gosselin, R. Gouaty, C. Graef, P. B. Graff, M. Granata, A. Grant, S. Gras, C. Gray, G. Greco, A. C. Green, R. J.S. Greenhalgh, P. Groot, H. Grote, S. Grunewald, G. M. Guidi, X. Guo, A. Gupta, M. K. Gupta, K. E. Gushwa, E. K. Gustafson, R. Gustafson, J. J. Hacker, B. R. Hall, E. D. Hall, G. Hammond, M. Haney, M. M. Hanke, J. Hanks, C. Hanna, M. D. Hannam, J. Hanson, T. Hardwick, J. Harms, G. M. Harry, I. W. Harry, M. J. Hart, M. T. Hartman, C. J. Haster, K. Haughian, J. Healy, J. Heefner, A. Heidmann, M. C. Heintze, G. Heinzel, H. Heitmann, P. Hello, G. Hemming, M. Hendry, I. S. Heng, J. Hennig, A. W. Heptonstall, M. Heurs, S. Hild, D. Hoak, K. A. Hodge, D. Hofman, S. E. Hollitt, K. Holt, D. E. Holz, P. Hopkins, D. J. Hosken, J. Hough, E. A. Houston, E. J. Howell, Y. M. Hu, S. Huang, E. A. Huerta, D. Huet, B. Hughey, S. Husa, S. H. Huttner, T. Huynh-Dinh, A. Idrisy, N. Indik, D. R. Ingram, R. Inta, H. N. Isa, J. M. Isac, M. Isi, G. Islas, T. Isogai, B. R. Iyer, K. Izumi, M. B. Jacobson, T. Jacqmin, H. Jang, K. Jani, P. Jaranowski, S. Jawahar, F. Jiménez-Forteza, W. W. Johnson, N. K. Johnson-Mcdaniel, D. I. Jones, R. Jones, R. J.G. Jonker, L. Ju, K. Haris, C. V. Kalaghatgi, V. Kalogera, S. Kandhasamy, G. Kang, J. B. Kanner, S. Karki, M. Kasprzack, E. Katsavounidis, W. Katzman, S. Kaufer, T. Kaur, K. Kawabe, F. Kawazoe, F. Kéfélian, M. S. Kehl, D. Keitel, D. B. Kelley, W. Kells, R. Kennedy, D. G. Keppel, J. S. Key, A. Khalaidovski, F. Y. Khalili, I. Khan, S. Khan, Z. Khan, E. A. Khazanov, N. Kijbunchoo, C. Kim, J. Kim, K. Kim, Nam Gyu Kim, Namjun Kim, Y. M. Kim, E. J. King, P. J. King, D. L. Kinzel, J. S. Kissel, L. Kleybolte, S. Klimenko, S. M. Koehlenbeck, K. Kokeyama, S. Koley, V. Kondrashov, A. Kontos, S. Koranda, M. Korobko, W. Z. Korth, I. Kowalska, D. B. Kozak, V. Kringel, B. Krishnan, A. Królak, C. Krueger, G. Kuehn, P. Kumar, R. Kumar, L. Kuo, A. Kutynia, P. Kwee, B. D. Lackey, M. Landry, J. Lange, B. Lantz, P. D. Lasky, A. Lazzarini, C. Lazzaro, P. Leaci, S. Leavey, E. O. Lebigot, C. H. Lee, H. K. Lee, H. M. Lee, K. Lee, A. Lenon, M. Leonardi, J. R. Leong, N. Leroy, N. Letendre, Y. Levin, B. M. Levine, T. G.F. Li, A. Libson, T. B. Littenberg, N. A. Lockerbie, J. Logue, A. L. Lombardi, L. T. London, J. E. Lord, M. Lorenzini, V. Loriette, M. Lormand, G. Losurdo, J. D. Lough, C. O. Lousto, G. Lovelace, H. Lück, A. P. Lundgren, J. Luo, R. Lynch, Y. Ma, T. Macdonald, B. Machenschalk, M. Macinnis, D. M. Macleod, F. Magaña-Sandoval, R. M. Magee, M. Mageswaran, E. Majorana, I. Maksimovic, V. Malvezzi, N. Man, I. Mandel, V. Mandic, V. Mangano, G. L. Mansell, M. Manske, M. Mantovani, F. Marchesoni, F. Marion, S. Márka, Z. Márka, A. S. Markosyan, E. Maros, F. Martelli, L. Martellini, I. W. Martin, R. M. Martin, D. V. Martynov, J. N. Marx, K. Mason, A. Masserot, T. J. Massinger, M. Masso-Reid, F. Matichard, L. Matone, N. Mavalvala, N. Mazumder, G. Mazzolo, R. McCarthy, D. E. McClelland, S. McCormick, S. C. McGuire, G. McIntyre, J. McIver, D. J. McManus, S. T. McWilliams, D. Meacher, G. D. Meadors, J. Meidam, A. Melatos, G. Mendell, D. Mendoza-Gandara, R. A. Mercer, E. Merilh, M. Merzougui, S. Meshkov, C. Messenger, C. Messick, P. M. Meyers, F. Mezzani, H. Miao, C. Michel, H. Middleton, E. E. Mikhailov, L. Milano, J. Miller, M. Millhouse, Y. Minenkov, J. Ming, S. Mirshekari, C. Mishra, S. Mitra, V. P. Mitrofanov, G. Mitselmakher, R. Mittleman, A. Moggi, M. Mohan, S. R.P. Mohapatra, M. Montani, B. C. Moore, C. J. Moore, D. Moraru, G. Moreno, S. R. Morriss, K. Mossavi, B. Mours, C. M. Mow-Lowry, C. L. Mueller, G. Mueller, A. W. Muir, Arunava Mukherjee, D. Mukherjee, S. Mukherjee, N. Mukund, A. Mullavey, J. Munch, D. J. Murphy, P. G. Murray, A. Mytidis, I. Nardecchia, L. Naticchioni, R. K. Nayak, V. Necula, K. Nedkova, G. Nelemans, M. Neri, A. Neunzert, G. Newton, T. T. Nguyen, A. B. Nielsen, S. Nissanke, A. Nitz, F. Nocera, D. Nolting, M. E.N. Normandin, L. K. Nuttall, J. Oberling, E. Ochsner, J. O'Dell, E. Oelker, G. H. Ogin, J. J. Oh, S. H. Oh, F. Ohme, M. Oliver, P. Oppermann, Richard J. Oram, B. O'Reilly, R. O'Shaughnessy, C. D. Ott, D. J. Ottaway, R. S. Ottens, H. Overmier, B. J. Owen, A. Pai, S. A. Pai, J. R. Palamos, O. Palashov, C. Palomba, A. Pal-Singh, H. Pan, Y. Pan, C. Pankow, F. Pannarale, B. C. Pant, F. Paoletti, A. Paoli,

M. A. Papa, H. R. Paris, W. Parker, D. Pascucci, A. Pasqualetti, R. Passaquieti, D. Passuello, B. Patricelli, Z. Patrick, B. L. Pearlstone, M. Pedraza, R. Pedurand, L. Pekowsky, A. Pele, S. Penn, A. Perreca, H. P. Pfeiffer, M. Phelps, O. Piccinni, M. Pichot, M. Pickenpack, F. Piergiovanni, V. Pierro, G. Pillant, L. Pinard, I. M. Pinto, M. Pitkin, J. H. Poeld, R. Poggiani, P. Popolizio, A. Post, J. Powell, J. Prasad, V. Predoi, S. S. Premachandra, T. Prestegard, L. R. Price, M. Prijatelj, M. Principe, S. Privitera, R. Prix, G. A. Prodi, L. Prokhorov, O. Puncken, M. Punturo, P. Puppo, M. Pürrer, H. Qi, J. Qin, V. Quetschke, E. A. Quintero, R. Quitzow-James, F. J. Raab, D. S. Rabeling, H. Radkins, P. Raffai, S. Raja, M. Rakhmanov, C. R. Ramet, P. Rapagnani, V. Raymond, M. Razzano, V. Re, J. Read, C. M. Reed, T. Regimbau, L. Rei, S. Reid, D. H. Reitze, H. Rew, S. D. Reyes, F. Ricci, K. Riles, N. A. Robertson, R. Robie, F. Robinet, A. Rocchi, L. Rolland, J. G. Rollins, V. J. Roma, J. D. Romano, R. Romano, G. Romanov, J. H. Romie, D. Rosińska, S. Rowan, A. Rüdiger, P. Ruggi, K. Ryan, S. Sachdev, T. Sadecki, L. Sadeghian, L. Salconi, M. Saleem, F. Salemi, A. Samajdar, L. Sammut, L. M. Sampson, E. J. Sanchez, V. Sandberg, B. Sandeen, G. H. Sanders, J. R. Sanders, B. Sassolas, B. S. Sathyaprakash, P. R. Saulson, O. Sauter, R. L. Savage, A. Sawadsky, P. Schale, R. Schilling, J. Schmidt, P. Schmidt, R. Schnabel, R. M.S. Schofield, A. Schönbeck, E. Schreiber, D. Schuette, B. F. Schutz, J. Scott, S. M. Scott, D. Sellers, A. S. Sengupta, D. Sentenac, V. Sequino, A. Sergeev, G. Serna, Y. Setyawati, A. Sevigny, D. A. Shaddock, T. Shaffer, S. Shah, M. S. Shahriar, M. Shaltev, Z. Shao, B. Shapiro, P. Shawhan, A. Sheperd, D. H. Shoemaker, D. M. Shoemaker, K. Siellez, X. Siemens, D. Sigg, A. D. Silva, D. Simakov, A. Singer, L. P. Singer, A. Singh, R. Singh, A. Singhal, A. M. Sintes, B. J.J. Slagmolen, J. R. Smith, M. R. Smith, N. D. Smith, R. J.E. Smith, E. J. Son, B. Sorazu, F. Sorrentino, T. Souradeep, A. K. Srivastava, A. Staley, M. Steinke, J. Steinlechner, S. Steinlechner, D. Steinmeyer, B. C. Stephens, S. P. Stevenson, R. Stone, K. A. Strain, N. Straniero, G. Stratta, N. A. Strauss, S. Strigin, R. Sturani, A. L. Stuver, T. Z. Summerscales, L. Sun, P. J. Sutton, B. L. Swinkels, M. J. Szczepańczyk, M. Tacca, D. Talukder, D. B. Tanner, M. Tápai, S. P. Tarabrin, A. Taracchini, R. Taylor, T. Theeg, M. P. Thirugnanasambandam, E. G. Thomas, M. Thomas, P. Thomas, K. A. Thorne, K. S. Thorne, E. Thrane, S. Tiwari, V. Tiwari, K. V. Tokmakov, C. Tomlinson, M. Tonelli, C. V. Torres, C. I.

Torrie, D. Töyrä, F. Travasso, G. Traylor, D. Trifirò, M. C. Tringali, L. Trozzo, M. Tse, M. Turconi, D. Tuyenbayev, D. Ugolini, C. S. Unnikrishnan, A. L. Urban, S. A. Usman, H. Vahlbruch, G. Vajente, G. Valdes, M. Vallisneri, N. Van Bakel, M. Van Beuzekom, J. F.J. Van Den Brand, C. Van Den Broeck, D. C. Vander-Hyde, L. Van Der Schaaf, J. V. Van Heijningen, A. A. Van Veggel, M. Vardaro, S. Vass, M. Vasúth, R. Vaulin, A. Vecchio, G. Vedovato, J. Veitch, P. J. Veitch, K. Venkateswara, D. Verkindt, F. Vetrano, A. Viceré, S. Vinciguerra, D. J. Vine, J. Y. Vinet, S. Vitale, T. Vo, H. Vocca, C. Vorvick, D. Voss, W. D. Vousden, S. P. Vyatchanin, A. R. Wade, L. E. Wade, M. Wade, S. J. Waldman, M. Walker, L. Wallace, S. Walsh, G. Wang, H. Wang, M. Wang, X. Wang, Y. Wang, H. Ward, R. L. Ward, J. Warner, M. Was, B. Weaver, L. W. Wei, M. Weinert, A. J. Weinstein, R. Weiss, T. Welborn, L. Wen, P. Weßels, T. Westphal, K. Wette, J. T. Whelan, S. E. Whitcomb, D. J. White, B. F. Whiting, K. Wiesner, C. Wilkinson, P. A. Willems, L. Williams, R. D. Williams, A. R. Williamson, J. L. Willis, B. Willke, M. H. Wimmer, L. Winkelmann, W. Winkler, C. C. Wipf, A. G. Wiseman, H. Wittel, G. Woan, J. Worden, J. L. Wright, G. Wu, J. Yablon, I. Yakushin, W. Yam, H. Yamamoto, C. C. Yancey, M. J. Yap, H. Yu, M. Yvert, A. Zadrożny, L. Zangrando, M. Zanolin, J. P. Zendri, M. Zevin, F. Zhang, L. Zhang, M. Zhang, Y. Zhang, C. Zhao, M. Zhou, Z. Zhou, X. J. Zhu, M. E. Zucker, S. E. Zuraw, and J. Zweizig. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 2016.

[39] A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, Vol. 322, No. 10, pp. 891–921, 1905.

[40] A Siegman. *Lasers*. 1986.

[41] John Jackson. *Classical Electrodynamics*. 1998.

[42] H. Kogelnik and T. Li. Laser Beams and Resonators. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 54, No. 10, pp. 1312–1329, 1966.

[43] 榎本雄太郎. 干渉計型重力波検出器における光学機械相互作用と光の空間モードの揺らぎについて. 修士論文, 東京大学, 2017.

[44] 高橋進一, 中川正雄. 信号理論の基礎. 1976.

[45] 片山徹. フィードバック制御の基礎. 2002.