

修士論文
宇宙空間レーザー干渉計重力波検出器の可能性

理学系研究科物理学専攻 26067

高城毅

2004 年 1 月

目次

第 1 章 はじめに	1
第 2 章 重力波と検出	3
2.1 一般相対性理論における重力波	3
2.1.1 Einstein 方程式	3
2.1.2 Einstein 方程式の線形理論	3
2.1.3 平面波の伝播	4
2.1.4 自由質点に対する重力波の影響と偏波	6
2.1.5 重力波の放出	7
2.2 重力波源	9
2.2.1 低周波数帯域 (1Hz 以下) の重力波源	9
2.2.2 高周波数帯域 (1Hz~10kHz) の重力波源	10
2.3 重力波の検出	10
2.3.1 共鳴型重力波検出器	11
2.3.2 レーザー干渉計型重力波検出器	11
2.3.3 その他の重力波検出方法	12
第 3 章 レーザー干渉計型重力波検出器	13
3.1 Michelson 干渉計	13
3.1.1 Michelson 干渉計による位相変化の検出	13
3.1.2 Michelson 干渉計における重力波による光の位相変化	13
3.1.3 Michelson 干渉計の重力波に対する周波数応答	15
3.2 Fabry-Perot 干渉計型重力波検出器	16
3.2.1 Fabry-Perot 共振器	17
3.2.2 Fabry-Perot 干渉計の重力波に対する周波数応答	19
3.2.3 Fabry-Perot 干渉計の鏡の位置の変動に対する応答、周波数雑音に 対する応答	22
3.3 地上型レーザー干渉計型重力波検出器	22
3.3.1 地上型レーザー干渉計	23
3.3.2 地上型レーザー干渉計の雑音源	23
3.3.3 各国の地上型レーザー干渉計計画	24

第 4 章	宇宙空間レーザー干渉計型重力波検出器	25
4.1	LISA 計画	25
4.1.1	LISA の感度	26
4.1.2	LISA の軌道	28
4.1.3	LISA の干渉計構成	28
4.1.4	ドラッグフリー	29
4.2	DECIGO 計画	30
4.2.1	DECIGO の感度	31
第 5 章	直接干渉型宇宙空間レーザー干渉計型重力波検出器	35
5.1	FP-DECIGO のデザイン	35
5.2	FP-DECIGO の有限の大きさの鏡によるレーザー光パワーの損失	35
5.2.1	レーザー干渉計の拡散による損失	37
5.2.2	反射レーザー光の高次モードとの結合によるレーザー光パワー損失	37
5.2.3	FP 共振器の実効的反射率	40
5.2.4	レーザー光パワー損失からの鏡の大きさの要求	42
5.3	FP-DECIGO における雑音源	42
5.3.1	光の散乱雑音	42
5.3.2	光の輻射圧雑音	43
5.3.3	鏡の熱雑音	44
5.3.4	磁場との鏡との相互作用による雑音	44
5.4	FP-DECIGO の感度曲線	46
第 6 章	宇宙空間レーザー干渉計型重力波検出器の軌道計算	49
6.1	太陽の重力のみを考えた場合の軌道	49
6.1.1	S/C 間距離の変動	49
6.1.2	S/C 間相対速度の変動とドップラー効果	53
6.2	太陽以外の天体からの摂動も考えた場合の軌道	55
6.2.1	潮汐力	56
6.2.2	潮汐力の効果	57
6.2.3	一般相対論的な効果	58
6.3	太陽以外の天体も考慮した場合の軌道の数値計算	58
6.3.1	元期平均近点離角と S/C 間距離	59
6.3.2	S/C 間距離の変動のまとめ	60
6.3.3	地球からの角度と S/C 間距離	62
第 7 章	結果と考察	69
7.1	結果	69
7.2	問題点とその考察	71
7.3	今後の課題	71

付 録 A 宇宙空間レーザー干渉計型重力波検出器の応答関数の計算	73
A.1 宇宙干渉計の重力波に対する応答	73
A.2 FP-DECIGO の重力波に対する応答	77
付 録 B 惑星・月の影響下での S/C 間距離の数値計算	79
B.1 数値計算の方法	79
B.1.1 数値計算の手順	79
B.1.2 MATLAB コード	80

第1章 はじめに

重力波は、1916年に A.Einstein によって一般相対性理論からの帰結として予言されていた。間接的には J.H.Taylor と R.A.Hulse による連星パルサー PSR1913+16 の軌道周期の観測からその存在は確実なものとされている¹。しかし、Einstein における予言から 1 世紀近く経った現在でも直接検出は成されていない。それは重力による相互作用が非常に弱いものであるため、重力波の振幅が非常に小さいものであるからである。従って、地上における検出可能な重力波の生成は不可能であり、その源を大規模な天体現象に求めなければならない。重力波の直接検出は一般相対性理論の検証のみならず、従来の電磁波によるものとは異なる新たな天文学を開拓する可能性を秘めている。

重力波の直接検出の試みとしては、まず、1960 年代に共鳴型重力波検出器における観測が始められ、現在まで長期間の観測が行われてきた。1970 年代になるとレーザー干渉計型重力波検出器を用いた研究が始められ、現在では重力波検出の主流であり、最も将来有望であるとされている。現在、世界各地にて LIGO(アメリカ)、VIRGO(イタリア、フランス)、GEO(ドイツ)、TAMA(日本) などの大型のレーザー干渉計が計画され、一部は観測を始めている。さらに、高感度な次世代型の干渉計として、日本では低温技術を用いた LCGT も計画されている。

低周波数帯域 (1Hz 以下) の重力波源は多く予測されており、更にそれらは理論的な対象としても単に強度の問題としても非常に強力なものが多いと考えられている。地上のレーザー干渉計²において低周波数域の感度を制限するのは地面振動である。更に、レーザー干渉計は長基線長である程、低周波数域に感度を持つ。従って、このような低周波数域を観測対象とする場合、必然的にレーザー干渉計を地球外に設置することが考えられる。

欧米の NASA、ESA によって進行中の LISA 計画は宇宙空間に 3 機のスペースクラフト (S/C) を打ち上げ、それらの間で Michelson 干渉計を構成するというものである。3 機の S/C の重心は地球軌道上の地球の後方約 20° にあり、3 機が 1 辺 500 万 km の正三角形を構成しながら太陽の周りを公転する。LISA の特色として地上干渉計と異なる点は、長光路長によるレーザー光パワーの発散によって S/C において直接入射レーザー光を反射する事ができないため、位相同期の下、増幅して返すという方式がとられているという事である。

また、日本においても DECIGO という宇宙空間レーザー干渉計が検討されている。DECIGO は LISA の大きさを 1/100 にし、観測周波数帯域をちょうど LISA と地上の干渉計

¹Taylor らはこの功績によって 1993 年にノーベル物理学賞を受賞している。

²本論文においては「レーザー干渉計」又は単に「干渉計」を「レーザー干渉計型重力波検出器」の意味に用いることがある。

との間にとった、言わば LISA の縮小版ともいうべきものである。しかし、LISA の技術の流用では高感度化に高パワーのレーザー光を必要とし、LISA 以上の技術を要する。そこで、本論文では、地上型干渉計で用いられる Fabry-Perot 共振器を搭載した、言わば地上型干渉計の拡張としての宇宙空間レーザー干渉計 (FP-DECIGO) を考察し、その長所や問題点などを議論する。

Fabry-Perot 共振器はその特性上、共振状態に保たれなければならない。そのためには共振器長をレーザー光の波長 ($\sim 1\mu\text{m}$) よりも十分小さい精度で一定に保つ必要がある。干渉計を構成する S/C は近似的に正三角形を構成するが、実際はそれぞれが独立に Kepler 運動をするため、S/C 間距離は変動する。従って、S/C の軌道を計算し、S/C 間距離の変動の程度を求め、どの程度の制御が要求されるかを詳しく知る必要がある。

本論文の構成は以下の通りである。第2章では、重力波の理論的な議論、重力波源、その検出方法などを述べる。第3章では、レーザー干渉計型重力波検出器の原理、特に Michelson 干渉計や Fabry-Perot 干渉計について論ずる。第4章では、LISA や DECIGO の宇宙空間レーザー干渉計について言及する。第5章では、Fabry-Perot 共振器を備えた直接干渉型宇宙レーザー干渉計について、諸々の利点、問題点や制限などを考察する。第6章では、LISA 型の S/C 配置についての軌道計算について述べ、FP-DECIGO の場合について考察する。第7章では、結論と今後の展望について陳述する。

第2章 重力波と検出

2.1 一般相対性理論における重力波

2.1.1 Einstein 方程式

4次元時空における2点 x^μ 、 $x^\mu + dx^\mu$ 間の固有距離 ds^2 は、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

と表わせる。 $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルであり、時空の幾何学を決めている。特に、重力場がない平坦な時空 (Minkowski 時空) では

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

である。ここで $\eta_{\mu\nu}$ の行列表現は、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

である。

一般相対性理論によると、物質分布がある、つまり、重力場がある時空では、Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

が成り立つ。ここで、 $R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソル、 $R \equiv R^\alpha_\alpha$ はスカラー曲率、 $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである。また、 c は光速、 G は重力定数である。(2.4) 式によると、一般に重力場がある時空内の点では計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は $\eta_{\mu\nu}$ とは異なる。

2.1.2 Einstein 方程式の線形理論

重力場が弱い場合、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を平坦な時空からわずかにずれていると考えて、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

と表わす。 $h_{\mu\nu}$ は対称テンソルだとする。このとき、 $h_{\mu\nu}$ の1次の範囲での近似では、添字の上下は $\eta_{\mu\nu}$ で行うことができる。更に、

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

$$h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

とすれば、Einstein 方程式は

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\rho \bar{h}_\nu^\rho - \partial_\nu \partial_\rho \bar{h}_\mu^\rho - \partial_\rho \partial_\alpha \bar{h}_\beta^\alpha \eta^{\rho\beta} \eta_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

となる。演算子 $\square$ は D'Alembert 演算子である。座標変換の自由度を用いて、

$$\partial_\nu \bar{h}_\mu^\nu = 0 \quad (2.9)$$

という条件を課すと、結局、線形化された Einstein 方程式として

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

を得る。これは、 $\bar{h}_{\mu\nu}$ が波動方程式に従うことを示している。

対称テンソルを仮定したため、元々の $h_{\mu\nu}$ や $\bar{h}_{\mu\nu}$ は10の独立な自由度を持っていたが、(2.9) 式の条件によって、自由度は4減り、6となった。しかし、更に、座標変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu \quad (2.11)$$

をしたとき、Lorentz ゲージの条件

$$\square \xi^\mu = 0 \quad (2.12)$$

を満たす ξ^μ に対しては、(2.9) 式の条件は不変である。つまり、 $\bar{h}_{\mu\nu}$ にはまだゲージ変換の自由度4が残る。

2.1.3 平面波の伝播

真空中 $T_{\mu\nu} = 0$ での (2.10) 式の平面波解として、

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (2.13)$$

を考える。 k^μ は4元波数ベクトルであり、 $A_{\mu\nu}$ は振幅を表わす対称テンソルである。この解が (2.10) 式に従うためには

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \quad (2.14)$$

となる必要がある。これは、平面波が光速で伝播する事を示している。また、(2.9) 式の条件から

$$A_{\mu\nu}k^\mu = 0 \quad (2.15)$$

が成り立つ。これは、平面波が横波である事を示している。

今、簡単のために平面波が x^3 方向に進むときを考える。このとき、波数ベクトルは

$$k^\mu = (k, 0, 0, k) \quad (2.16)$$

と書くことができる。ゲージ変換の自由度を用いて、

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad (2.17)$$

$$\xi^\mu = \epsilon^\mu \exp(-ikx^0 + ikx^3) \quad (2.18)$$

と置く。この ξ^μ は (2.12) 式を満たしている。すると、この変換によって振幅テンソルは

$$A_{\mu\nu} \rightarrow A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - \epsilon_\mu k_\nu - \epsilon_\nu k_\mu + \eta_{\mu\nu} \epsilon^\alpha k_\alpha \quad (2.19)$$

と変換される。ここで、 ϵ_μ として、

$$\epsilon_0 = -\frac{2A_{00} + A_{11} + A_{22}}{4k}, \quad (2.20)$$

$$\epsilon_1 = -\frac{A_{01}}{k}, \quad (2.21)$$

$$\epsilon_2 = -\frac{A_{02}}{k}, \quad (2.22)$$

$$\epsilon_3 = \frac{2A_{00} - A_{11} - A_{22}}{4k} \quad (2.23)$$

を選べば、

$$A'_{00} = A'_{01} = A'_{02} = 0, \quad (2.24)$$

$$A'_{11} = -A'_{22} \quad (2.25)$$

となる。また、(2.15) 式から、

$$A'_{03} = A'_{13} = A'_{23} = 0, \quad (2.26)$$

$$A'_{03} + A'_{33} = 0 \quad (2.27)$$

が得られ、 $A_{\mu\nu}$ が対称テンソルであることを合わせれば、その独立な成分は2つであり、

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

となる。このとき、 $\bar{h} = \bar{h}_\mu^\nu = 0$ であるので、(2.6) 式より、 $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}$ となり、結局、

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp(-ikx^0 + ikx^3) \quad (2.29)$$

を得る。こうして選んだゲージを TT(Transverse-Traceless) ゲージと呼ぶ。

こうして、Minkowski 空間に対する揺らぎが重力波として伝播する事が導かれた。

2.1.4 自由質点に対する重力波の影響と偏波

重力のある一般の場合において自由粒子は運動方程式

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (2.30)$$

に従う。 τ は粒子の固有時間である。

最初、粒子は Minkowski 空間において静止しているとし、以下、TT ゲージで考える。
初期条件

$$\left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right)_0 = (c, 0, 0, 0) \quad (2.31)$$

のもとで、重力波が入射したとすると、 $t = t_0$ における 4 元加速度は

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \right)_0 &= -c^2 \Gamma^\mu_{00} \\ &= -\frac{c^2}{2} \eta^{\mu\alpha} (\partial_0 h_{0\alpha} + \partial_0 h_{\alpha 0} + \partial_\alpha h_{00}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

となる。ここで、TT ゲージでは $h_{0\alpha} = h_{\alpha 0} = 0$ であることを用いた。この結果は、重力波の入射によって自由質点は座標値を変えないということを示している。

重力波の影響を考えるために 2 自由質点間の固有距離を考える。ある時刻に 2 質点 P_1 、 P_2 が TT ゲージ上の座標で $(0, 0, 0)$ と $(\epsilon, 0, 0)$ にあったとすると、その間の固有距離は

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2} |g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|^2 &= \int_0^\epsilon |g_{11}| dx^1 \\ &\simeq |g_{11}(P_1)| \epsilon \\ &\simeq \left(1 + \frac{1}{2} h_{11}(P_1) \right) \epsilon \end{aligned} \quad (2.33)$$

となって、重力波の影響によって変化することがわかる。

このことは、等価原理によって任意の系は局所的には慣性系にできるため、1点では重力波の到来は分からず、重力波が2点間の重力の差、つまり、潮汐力の波動であることに由来する。

上の結果を、視覚的に表現するために P_1 を中心とし、 x^1x^2 平面の円周上に並んだ質点群に対する重力波の影響を考える。このとき、重力波のない場合の質点の位置は

$$x_0^1 = R_0 \cos \varphi, \quad (2.34)$$

$$x_0^2 = R_0 \sin \varphi, \quad (2.35)$$

$$x_0^3 = 0 \quad (2.36)$$

と書ける。ここに重力波が入射したとき質点の位置は

$$x^i = x_0^i + \frac{h_{ij}}{2} x_0^j \quad (2.37)$$

と変化するので、質点の中心からの固有距離は

$$R = |x^i x_i|^{1/2} \simeq R_0 + \frac{R_0}{2} h_{ij} \frac{x_0^i}{R_0} \frac{x_0^j}{R_0} \quad (2.38)$$

と変化する。TT ゲージで考えれば、 z 軸方向から入射した重力波は

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(-ikx^0 + ikx^3) \quad (2.39)$$

となるので

$$R = R_0 + \frac{R_0}{2} (h_+ \cos 2\varphi + h_\times \sin 2\varphi) \cos(-ikx^0 + ikx^3) \quad (2.40)$$

を得る。質点の作る円は重力波によってその形を変えることが分かる。 h_+ 、 $h_\times$ をそれぞれ + モード、 $\times$ モードと呼ぶ。それぞれの潮汐効果を図 2.1 に図示する。+ モード、 $\times$ モードの効果は 45° だけずれており、ある方向の固有距離が縮むとそれと直交する方向では伸びる事がわかる。

2.1.5 重力波の放出

重力場が存在する場合の線形化された Einstein 方程式 ((2.10) 式) は TT ゲージでは

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.41)$$

と書かれる。この解は、重力波源の質量分布の重心を原点にとれば、電磁波における遅延ポテンシャルの式と同様にして

$$h_{\mu\nu}(x) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (2.42)$$

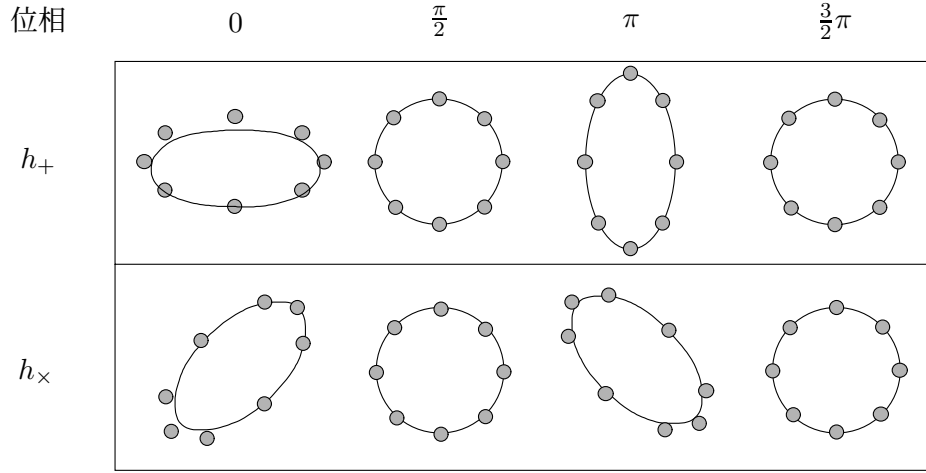


図 2.1: 重力波の偏波。+モードと×モード

と書ける。観測点が重力波源の大きさに比べて十分遠い場合を考えれば、重力波の空間成分は

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4 |\mathbf{x}|} \frac{d^2}{dt^2} \int \rho(t - |\mathbf{x}|/c) x'_i x'_j d^3 x' \quad (2.43)$$

となる。ここで、 $x^0 = ct$ 、 $T_{00}(x^0 - |\mathbf{x}|, \mathbf{x}') = c^2 \rho(t - |\mathbf{x}|/c)$ と書き換えた。 $\rho(t, \mathbf{x})$ は位置 $\mathbf{x}$ における物質の密度である。上式の積分部分は質量の4重極能率、つまり、慣性能率である。重力波の振幅は慣性能率の時間についての2階微分に比例する。

実は上式の h_{ij} は TT ゲージになっていない。TT ゲージでは

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4 |\mathbf{x}|} \left(P_i^l P_j^m - \frac{1}{2} P_{ij} P^{lm} \right) \ddot{I}^{lm}(t - |\mathbf{x}|/c) \quad (2.44)$$

と書かれる。ここで

$$P^{ij} = \delta^{ij} - \frac{x^i x^j}{|\mathbf{x}|^2}, \quad (2.45)$$

$$I^{ij}(t - |\mathbf{x}|/c) = \int \rho(t - |\mathbf{x}|/c) \left(x'^i x'^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} x'^l x'_l \right) d^3 x' \quad (2.46)$$

である。

これらの結果から、源から十分遠い点 $\mathbf{x}$ での重力波の振幅は

$$h \sim \frac{2G}{c^4 |\mathbf{x}|} \frac{d^2 I}{dt^2} \quad (2.47)$$

と書ける。また、重力波源から放出される全エネルギー E はエネルギーフラックスを表面積分することで得られ、その時間変化は

$$P \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5} \ddot{I}^{ij} \ddot{I}_{ij} \quad (2.48)$$

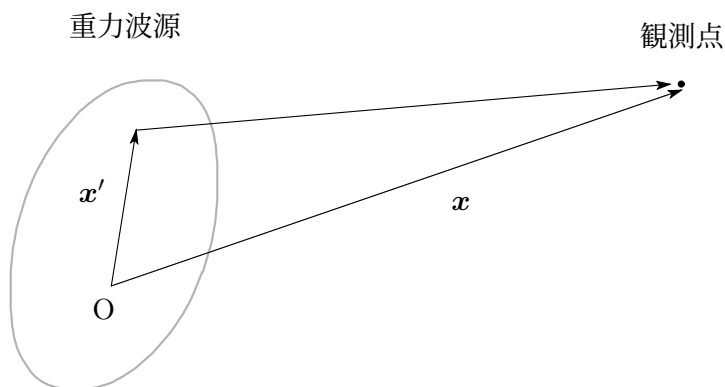


図 2.2: 重力波源と観測点

となる。

重力波源の重心を原点に取れば、質量の双極子能率は現れない。従って、重力波の放出には質量の 4 重極能率が変化する必要がある。

2.2 重力波源

重力による相互作用は非常に小さいため観測可能な強度となるには、激しい天体現象などが重力波源の対象となる。以下に重力波源となると予測される天体現象について概観する。

2.2.1 低周波数帯域 (1Hz 以下) の重力波源

1Hz 以下の低周波数帯域は、地上においては地面振動によって感度が制限され、かつ長い基線長を必要とするため、宇宙レーザー干渉計の対象となる。

1mHz 付近の低周波数帯域は NASA、ESA が計画している宇宙レーザー干渉計 LISA の観測帯域である。宇宙に多く存在する銀河の中心にあると考えられる巨大ブラックホールの合体や、我々の銀河系内のコンパクトな天体の連星などが放出する重力波は LISA の目標感度が達成されれば、確実に検出されることが考えられている。

また、初期宇宙の情報を持つと考えられている宇宙背景放射も観測対象とされており、電磁波天文学では見ることができないビッグバン直後の宇宙の様子を知ることができる可能性も示唆されている。

地上干渉計と LISA の間の周波数帯域 (0.1Hz 付近) を対象とする検出器として DECIGO が日本において提案されている。地上干渉計や LISA の観測帯域から出た連星系などが対

象となる。また、初期宇宙の背景放射にもこの観測帯域で興味深いものがある。

2.2.2 高周波数帯域 (1Hz~10kHz) の重力波源

地上のレーザー干渉計が対象とするのが、この周波数帯域である。この帯域の観測対象としては、主に、我々の銀河系内における中性子星やブラックホールの合体や超新星爆発などが挙げられる。

中性子星などの大質量の天体同士が連星系をなすと重力波の放出によって、その軌道を小さくし、最終的には合体する。この合体直前に放出される重力波は波形の理論的な予測もされており、その波形と得られた波形を比較することで連星計についてのさまざまな情報が得られると考えられている。

超新星爆発は、連星中性子星よりも、高頻度で大きな振幅の重力波を放出していると目されているが、その波形はバースト的なもので理論的予測が難しい。現在、さまざまなデータ解析手法が開発されている。

2.3 重力波の検出

重力波検出の原理は微小変位の測定である。ある重力波源から放出される重力波の振幅 h (無次元の歪み量) は、 r_g を天体の Schwarzschild 半径 ($r_g = 2GM/c^2$) とし、 r を天体からの距離、質量 M 、崩壊した質量 ΔM として、(2.47) 式から

$$h \sim \frac{r_g}{r} \frac{\Delta M}{M} \quad (2.49)$$

の程度の大きさである。例えば、太陽質量程度の天体が $\Delta M = 0.01M$ の重力崩壊を起こしたとき、

$$h \sim 10^{-18} \left(\frac{10 \text{ kpc}}{r} \right) \quad (2.50)$$

にしかならない¹。これは重力波の検出が非常に困難であることを示している。

基本的に重力波による2点間の固有距離の変化 δL は

$$\delta L \sim hL \quad (2.51)$$

と歪み量 h と2点間の距離 L の積の程度となるので、検出器としては長基線長のものが有利となる。

¹ $r = 10 \text{ kpc}$ はちょうどわれわれの銀河系の大きさ程度である。 h は距離に反比例するため、遠くの天体であるほど検出は困難になる。

δL の測定に際しては、多種の雑音が実効的に距離変化として混入してしまい感度を上げるため、雑音の低減は検出器における最も大きな課題の1つとなる。

重力波検出方法として様々なものが提案されているが、どの検出方法を選択するべきかは検出目標の放出する重力波の周波数帯域に依存する。従って、それぞれの検出方法は互いに相補的であるとも言える。以下に、重力波検出の方法を概観する。

2.3.1 共鳴型重力波検出器

共鳴型重力波検出器は、重力波検出の端緒を開いたという意味で歴史的にも意義がある。その原理は重力波によって引き起こされる外力が弾性振動子にもたらす振動を検出するというものである。

弾性体の振動を振動モードで展開したときの展開係数 $\xi(t)$ は

$$\mu \left(\ddot{\xi} + \frac{\omega_0}{Q_0} \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi \right) = f_{\text{GR}}(t) \quad (2.52)$$

という調和振動子の強制振動の方程式に従う。ここで、 ω_0 はそのモードの共振周波数、 Q_0 は弾性体の Q 値である。 $f_{\text{GR}}(t)$ は重力波が弾性体に及ぼす潮汐力であり、例えば、長さ l の円柱に縦方向から入射してきた重力波の場合には TT ゲージを用いて、

$$f_{\text{GR}}(t) = \frac{2l\mu}{\pi^2} \ddot{h}_+ \quad (2.53)$$

となる。但し、 μ はモードの換算質量である。

この場合、 $\xi(t)$ の Fourier 変換 $\xi(\omega)$ は

$$\xi(\omega) = -\frac{2l\omega^2}{\pi^2 \left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q_0} \right)} h_+ \quad (2.54)$$

となる。この式から明らかなように重力波の周波数が共振周波数に一致する $\omega = \omega_0$ のときに感度は最大となる。逆に言うとそれ以外の周波数では感度が小さく、観測帯域の狭さが共振型重力波検出器の欠点である。共鳴型重力波検出器の対象の周波数は数 100Hz から 1kHz 程度である。

2.3.2 レーザー干渉計型重力波検出器

現在、重力波検出の主流であり、最も有望とされているのがレーザー干渉計型重力波検出器である。この検出器は共振型と異なり、重力波に対する周波数応答関数が平坦であるため、観測帯域が広く取れるという利点がある。

その原理はレーザー干渉計を用いて2つの鏡間を往復するレーザー光の位相変化から鏡間の距離変化を測定するというものである。このとき、鏡は自由質点と見なされるため、自由質量型重力波検出器とも言われる。

現在、広く取られている方法は Michelson 干渉計を用いるもので、その詳細については次章で述べる。

2.3.3 その他の重力波検出方法

地球と宇宙に打ち上げたスペースクラフト間に電磁波を往復させ、重力波の影響によるドップラー効果を測定し、重力波を検出するというのがドップラートラッキングの方法である。この方法は低周波領域で有効であるが、感度が $h \sim 10^{-15}$ 程度であるため、かなり大きな振幅を持つ重力波しか検出できない。

非常に正確な周期でパルスを発する天体であるパルサーを用いる重力波検出方法にパルサータイミングの方法がある。この方法はパルスの到達時刻が重力波の影響によって乱されることを利用する。パルサータイミングの対象は超低周波である宇宙創生時の宇宙背景重力波や宇宙紐等の宇宙論的重力波などである。

第3章 レーザー干渉計型重力波検出器

3.1 Michelson 干渉計

レーザー干渉計型重力波検出器の基本的な原理は、重力波の及ぼした固有距離変化の Michelson 干渉計による検出である。以下に Michelson 干渉計の重力波に対する応答を考える。

3.1.1 Michelson 干渉計による位相変化の検出

図 3.1 に最も基本的な Michelson 干渉計を示す。ビームスプリッターで直交する 2 方向に分けられた入射光は、それぞれ鏡で反射した後、元の光路を復して、再びビームスプリッターで重ね合わせられて干渉する。このとき、2 光路に距離変化があれば、干渉光に変動がある。この干渉光変動を検出して距離変化を求めるということが、Michelson 干渉計による距離変化の検出の基本的な考え方である。

入射光 $E_{\text{in}} = Ee^{i\Omega t}$ がビームスプリッターにおいて分けられ、それぞれの光路を進んだ後、位相差 ϕ_x, ϕ_y をもって、干渉したとき、光検出器では

$$E_{\text{out}} = \frac{1}{2}Ee^{i(\Omega t - \phi_x)} - \frac{1}{2}Ee^{i(\Omega t - \phi_y)} \quad (3.1)$$

の光が検出される。よって、出力光の強度は

$$P_{\text{out}} = |E_{\text{out}}|^2 = \frac{1}{2}E^2(1 - \cos(\phi_x - \phi_y)) = \frac{P_{\text{in}}}{2}(1 - \cos(\Delta\phi)) \quad (3.2)$$

となる。但し、 $\Delta\phi = \phi_x - \phi_y$ とおいた。従って、出力光の強度の変動から位相差の変化、つまり、2 光路の距離変化が求められる。

3.1.2 Michelson 干渉計における重力波による光の位相変化

重力波 $h(t)$ が図 3.1 における z 方向から入射した場合、4 次元時空の線素は

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1 + h)dx^2 + (1 - h)dy^2 + dz^2 \quad (3.3)$$

である。 x 軸方向では $dy = dz = 0$ であり、光の世界線では $ds^2 = 0$ となるので、 x 方向に進む光 E_x について

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{c}{\sqrt{1 + h(t)}} \quad (3.4)$$

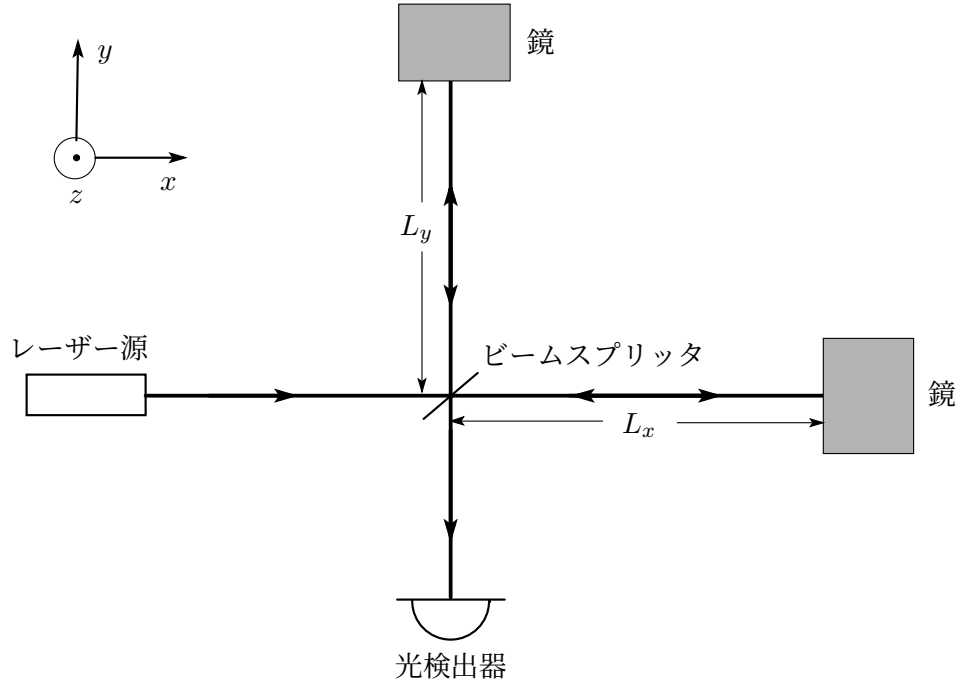


図 3.1: Michelson 干渉計

を得る。ここで、符号は $+$ が x 軸を正の向き、 $-$ が x 軸を負の向きに進む光に対応する。光 E_x が時刻 t_0 に干渉計に入射し、時刻 t に距離 L_x を往復したとして、(3.4) 式を積分すると、

$$\int_{t_0}^t \frac{dt'}{\sqrt{1+h(t')}} = \frac{1}{c} \left[\int_0^{L_x} dx + \int_{L_x}^0 (-dx) \right] = \frac{2L_x}{c} \quad (3.5)$$

となる。左辺は $h \ll 1$ とすれば、

$$\int_{t_0}^t \frac{dt'}{\sqrt{1+h(t')}} \simeq \int_{t_0}^t \left(1 - \frac{1}{2}h(t') \right) dt' = t - t_0 - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t h(t') dt' \quad (3.6)$$

と近似できるので、時刻 t における光 E_x の位相 $\phi_x(t)$ は

$$\phi_x(t) = \Omega t = \Omega \left(t_0 + \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t h(t') dt' \right) \quad (3.7)$$

となる。ここで $\Omega = 2\pi c/\lambda$ である。

y 方向に進む光 E_y では (3.8) 式で $h \rightarrow -h$ とすればよく、

$$\phi_y(t) = \Omega \left(t_0 + \frac{2L_y}{c} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t h(t') dt' \right) \quad (3.8)$$

表 3.1: 各周波数に最適な基線長。周波数が低くなるほど、最適な基線長を長くする必要がある。

$\omega/2\pi$ [Hz]	10^{-3}	0.1	1	10^3
L [km]	7.5×10^7	7.5×10^5	7.5×10^4	75

となる。従って、2 方向の位相差は

$$\Delta\phi = \phi_x - \phi_y = \frac{2\Omega(L_x - L_y)}{c} + \Delta\phi_{\text{GR}}(t), \quad (3.9)$$

$$\Delta\phi_{\text{GR}}(t) = \int_{t-2L/c}^t h(t') dt' \quad (3.10)$$

となる。 $L_x \simeq L_y \simeq L$ とし、また、 $|h| \ll 1$ であるので、積分の下限で $t_0 \simeq t - 2L/c$ とした。上式の第 1 項は静的な元々の位相差を示し、第 2 項が重力波による影響を示す。

3.1.3 Michelson 干渉計の重力波に対する周波数応答

重力波の観測では特定の周波数を対象とする場合が多いので、干渉計の周波数応答を考えることにする。 $h(t)$ の Fourier 変換を $h(\omega)$ とすれば、

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.11)$$

である。今、 $\Delta\phi_{\text{GR}}(t)$ の Fourier 変換を $\Delta\phi_{\text{GR}}(\omega)$ とすれば、

$$\Delta\phi_{\text{GR}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\phi_{\text{GR}}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.12)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{t-2L/c}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' h(\omega') e^{i\omega' t'} e^{-i\omega t} \quad (3.13)$$

$$= \frac{2}{\omega} \exp\left(-i\frac{L\omega}{c}\right) \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) h(\omega) \quad (3.14)$$

を得る。従って、干渉計の周波数応答関数は

$$H(\omega) \equiv \frac{\Delta\phi_{\text{GR}}(\omega)}{h(\omega)} = \frac{2}{\omega} \exp\left(-i\frac{L\omega}{c}\right) \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) \quad (3.15)$$

となる (図 3.2)。観測したい周波数 ω を固定して L の関数として見れば、 $|H|$ は $L\omega/c = \pi/2$ で最大となる。つまり、これ以上基線長を長くしても感度の向上はない。表に各周波数での $|H|$ が最大となる L を示す。

地上干渉計の場合、観測対象の周波数を 1kHz とすれば、基線長として 75km の干渉計が必要となり、建設が非現実的となる。そこで、実効的な光路長を稼ぐ方法として、ディ

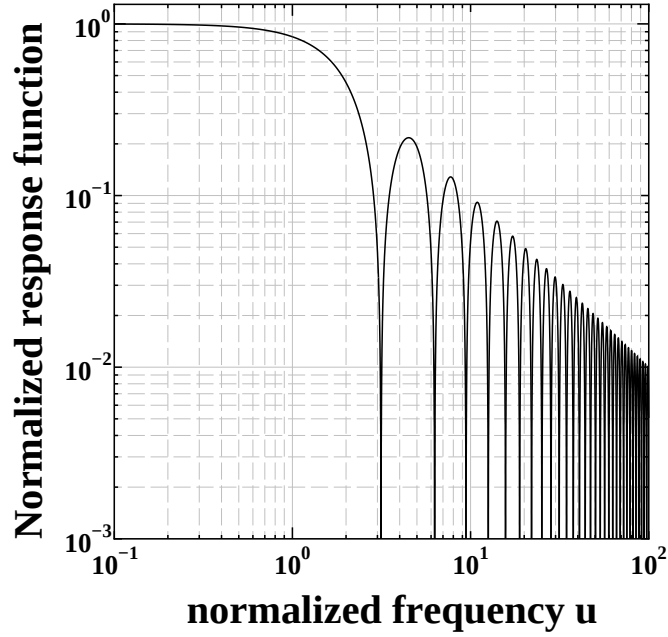


図 3.2: Michelson 干渉計の周波数応答関数の絶対値。縦軸は規格化した応答関数の絶対値、横軸は $u = \omega L/c$ とした。 $u < 1$ で周波数応答が急激に落ちることがわかる。また、 $u = n\pi$ (n は自然数) で零点を持つ。

レイライン (DL) 方式と Fabry-Perot (FP) 方式を用いることが考えられる。

DL 方式は鏡間で何度も光を反射させ、光路長を稼ぐ方法である。単純な Michelson 干渉計での折り返し数 2 を N とした場合に相当するので、その周波数応答関数は

$$H_{DL}(\omega) = \frac{2}{\omega} \exp\left(-i\frac{NL\omega}{2c}\right) \sin\left(\frac{NL\omega}{2c}\right) \quad (3.16)$$

となる。例えば、1kHz の周波数では $N = 50$ で最適な基線長が $L = 3\text{km}$ となる。

しかし、DL 方式は光の反射を異なる点でさせるため、FP 方式と比較して大きな鏡を必要とし、その製作や機械振動、これを収容する真空装置などの制約の厳しさがあり、地上の大型干渉計では FP 方式が主流となっている。

FP 方式については次節で扱うことにする。

3.2 Fabry-Perot 干渉計型重力波検出器

現在、地上型干渉計において主流となっている Fabry-Perot 干渉計について述べる。FP 干渉計は Michelson 干渉計の各腕に Fabry-Perot 共振器を用いたもので、共振器の多重干

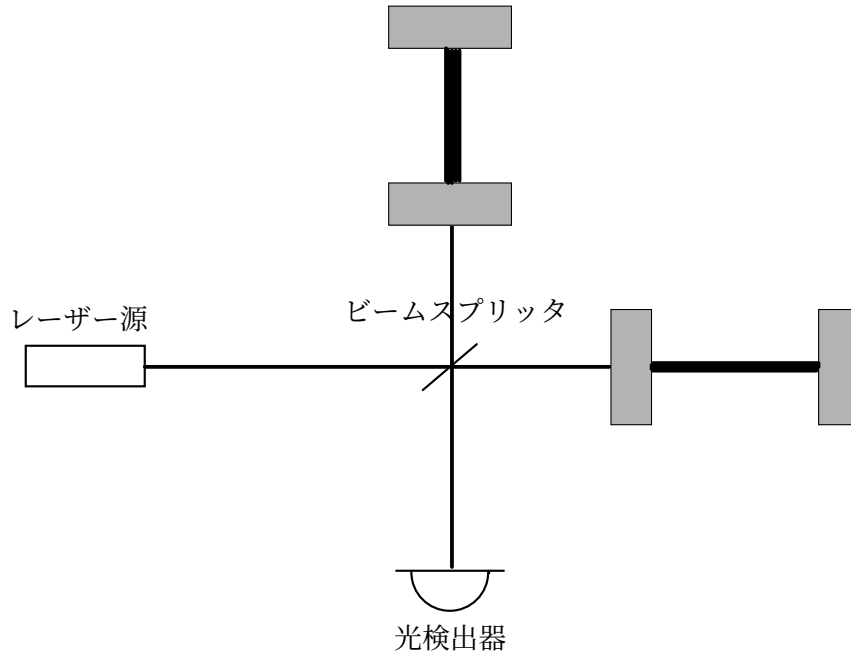


図 3.3: Fabry-Perot 干渉計

渉を利用することで単純な Michelson 干渉計よりも感度が上げられている

3.2.1 Fabry-Perot 共振器

Fabry-Perot 共振器は、2 枚の鏡の間を光が往復して、多重干渉するものである。

今、図 3.4 のような 2 枚の鏡を考え、光源に近いほうをフロントミラー F、遠いほうをエンドミラー E とし、それぞれの振幅透過率 t 、振幅反射率 r を考える。入射光を $E_i(t) = E_0 e^{i\Omega t}$ とすれば、反射光 $E_r(t)$ 、及び、透過光 $E_t(t)$ 、共振器内の電場 $E_a(t)$ 、 $E_b(t)$ には

$$E_a = t_F E_i + r_F E_b, \quad (3.17)$$

$$E_b = -r_E e^{-2i\Omega L/c} E_a, \quad (3.18)$$

$$E_r = t_F E_b - r_F E_i, \quad (3.19)$$

$$E_t = t_E e^{-i\Omega L/c} E_a \quad (3.20)$$

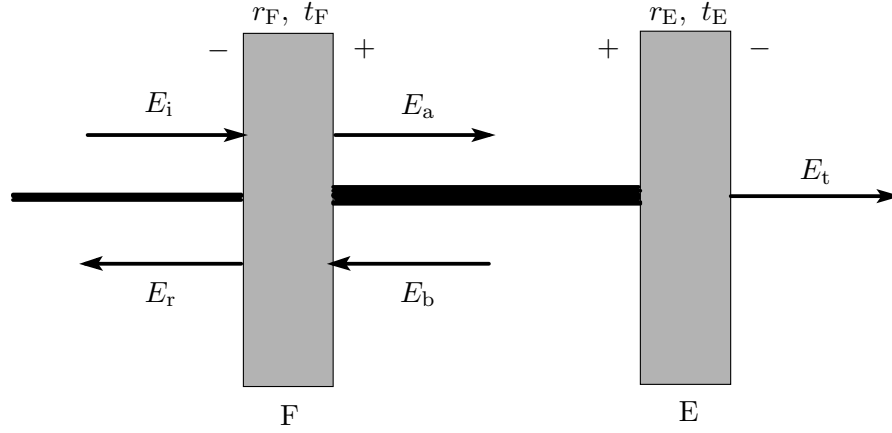


図 3.4: FP 共振器

という関係が成り立つので、これを解いて、

$$E_a = \frac{t_F}{1 - r_F r_E \exp(-2i\Omega L/c)} E_i, \quad (3.21)$$

$$E_b = \frac{t_F r_E \exp(-2i\Omega L/c)}{1 - r_F r_E \exp(-2i\Omega L/c)} E_i, \quad (3.22)$$

$$E_r = \left[-r_F + \frac{t_F^2 r_E \exp(-2i\Omega L/c)}{1 - r_F r_E \exp(-2i\Omega L/c)} E_i \right], \quad (3.23)$$

$$E_t = \frac{t_F t_E \exp(-i\Omega L/c)}{1 - r_F r_E \exp(-2i\Omega L/c)} E_i \quad (3.24)$$

となる。従って、実測される強度は、反射光、透過光についてそれぞれ

$$P_r = |E_r|^2 = \frac{\{r_F - r_E(r_F^2 + t_F^2)\}^2 + 4r_E r_F(r_F^2 + t_F^2) \sin^2(\Omega L/c)}{(1 - r_E r_F)^2 \{1 + F \sin^2(\Omega L/c)\}} P_i, \quad (3.25)$$

$$P_t = |E_t|^2 = \frac{t_E^2 t_F^2}{(1 - r_E r_F)^2 \{1 + F \sin^2(\Omega L/c)\}} P_i \quad (3.26)$$

となる。ここで、

$$F = \frac{4r_E r_F}{(1 - 4r_E r_F)^2} \quad (3.27)$$

とした。

透過光強度が最大するとき、共振器の内部の強度は最大となる。このときを共振という。つまり、共振条件は

$$\frac{\Omega L}{c} = n\pi \quad (n : \text{整数}) \quad (3.28)$$

となる。

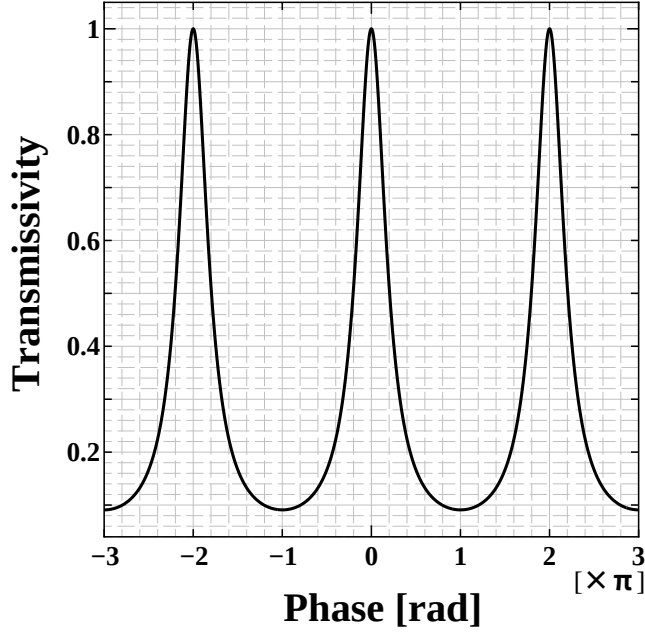


図 3.5: FP 共振器の透過光強度。透過光強度は適当に規格化してある。周期的に鋭いピークが立っている、つまり、共振していることが分かる。

隣り合う共振の振動数の差 f_{FSR} をフリースペクトラルレンジと呼ぶ。つまり、

$$f_{\text{FSR}} = \frac{c}{2L} \quad (3.29)$$

である。透過光強度は周期 $2\pi/f_{\text{FSR}}$ でピークを持つ。このピークの半値全幅を f_{FWHM} とすれば、

$$\frac{1}{1 + F \sin^2(\pi f_{\text{FWHM}} L/c)} = \frac{1}{2} \quad (3.30)$$

となるが、これから $f_{\text{FWHM}} \ll f_{\text{FSR}}$ として展開し、 f_{FSR} と f_{FWHM} の比 $\mathcal{F}$ を求めれば、

$$\mathcal{F} \equiv \frac{f_{\text{FSR}}}{f_{\text{FWHM}}} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} = \frac{\pi\sqrt{r_{\text{E}}r_{\text{F}}}}{1 - r_{\text{E}}r_{\text{F}}} \quad (3.31)$$

を得る。 $\mathcal{F}$ をフィネスといい、共振器を構成する鏡の反射率だけに依る。

3.2.2 Fabry-Perot 干渉計の重力波に対する周波数応答

光が共振器に入射してから鏡間を n 往復するのにかかる時間を Δt_n とすると、Michelson 干渉計で考えたのと同様にして、

$$\int_{t-\Delta t_n}^t \left(1 - \frac{1}{2}h(t')\right) dt' \simeq \frac{2Ln}{c} \quad (3.32)$$

となるので、(3.14) 式より、 $h(t)$ の Fourier 変換 $h(\omega)$ を用いて、

$$\Delta t_n \simeq \frac{2Ln}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-2Ln/c}^t h(t') dt' \quad (3.33)$$

$$= \frac{2Ln}{c} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp(-2iL\omega n/c)}{2i\omega} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.34)$$

を得る。一方、反射光は無限級数を用いて、

$$E_r = E_i \left[-r_F + t_F^2 r_E \sum_{n=1}^{\infty} (r_F r_E)^{n-1} \exp(-i\Omega \Delta t_n) \right] \quad (3.35)$$

と書けるので、 $h \ll 1$ として展開し、 h の 1 次までとれば、

$$\begin{aligned} \frac{E_r}{E_i} &\simeq -r_F + \frac{t_F^2 r_E \exp(-2iL\Omega/c)}{1 - r_F r_E \exp(-2iL\Omega/c)} \\ &\quad - \frac{t_F^2 r_E \exp(-2iL\Omega/c)}{1 - r_F r_E \exp(-2iL\Omega/c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega}{2\omega} \frac{1 - \exp(-2iL\omega/c)}{1 - r_F r_E \exp(-2iL(\omega + \Omega)/c)} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (3.36)$$

となる。ここで、共振条件 $L\Omega/c = m\pi$ (m : 整数) が満たされているときを考えると、

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{-r_F + (r_F^2 + t_F^2)r_E}{1 - r_F r_E} \left\{ 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} H_{FP}(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}, \quad (3.37)$$

$$H_{FP}(\omega) = \frac{\alpha\Omega}{\omega} \frac{\sin(L\omega/c)}{1 - r_F r_E \exp(-2iL\omega/c)} \exp(-iL\omega/c), \quad (3.38)$$

$$\alpha = \frac{t_F^2 r_E}{-r_F + (r_F^2 + t_F^2)} \quad (3.39)$$

を得る。第 1 項の搬送波は実数、第 2 項の側帯波は純虚数であり、重力波による影響は側帯波として検出される。従って、FP 方式の干渉計の周波数応答関数 $H_{FP}(\omega)$ は入力 $h(\omega)$ に対する側帯波の信号で定義される。更に、

$$E_r \simeq i(r_F - \alpha) e^{i[\Omega t + \phi_{GR}(t)/2]}, \quad (3.40)$$

$$\phi_{GR}(t) = \frac{1}{r_F - \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} H_{FP}(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.41)$$

と書けるので、この側帯波は位相変調を表わしている。

H_{FP} の絶対値を考えると、

$$|H_{FP}| = \frac{\alpha\Omega}{\omega(1 - r_F r_E)} \frac{|\sin(L\omega/c)|}{\sqrt{1 + F \sin^2(L\omega/c)}} \quad (3.42)$$

であり、特に $L\omega/c \ll 1$ のとき、

$$|H_{\text{FP}}| \simeq \frac{\alpha\Omega}{\omega(1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}})} \frac{L\omega/c}{\sqrt{1 + F(L\omega/c)^2}} \quad (3.43)$$

$$= \frac{\alpha L\Omega}{c(1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}})} \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \quad (3.44)$$

となる。これから、 $|H_{\text{FP}}|$ は 1 次のローパス特性を持つ事がわかる。ここで、

$$\tau \equiv \frac{\sqrt{F}L}{c} = \frac{2L}{\pi c} \mathcal{F} \quad (3.45)$$

であり、 τ は共振器内の光の平均滞在時間である。また、上式から $2\mathcal{F}/\pi$ は光の折り返し数を示す量である事もわかる。

図 3.6 に $\mathcal{F} = 5\pi$ の FP 方式と $N = 10$ の DL 方式の周波数応答関数を示す。

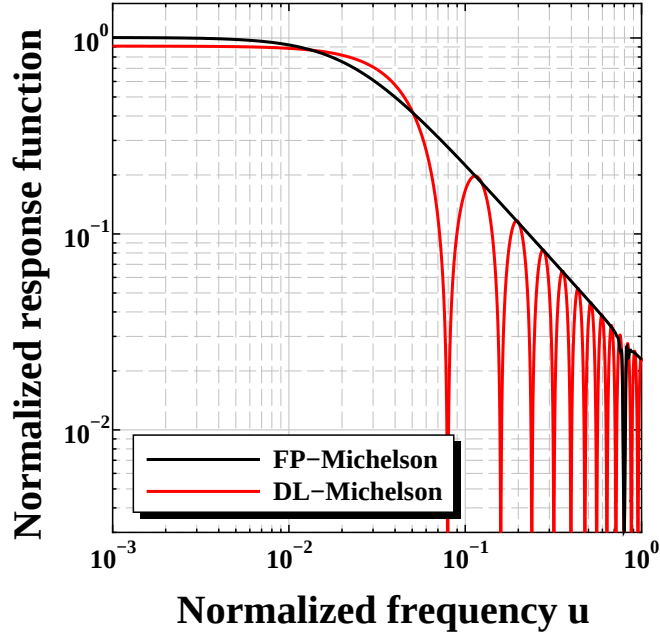


図 3.6: FP 方式と DL 方式の周波数応答関数。双方とも適当に規格化し、横軸には $u = \omega L/c$ を用いた。FP 方式ではフィネス $\mathcal{F} = 5\pi$ とし、DL 方式では折り返し数 $N = 10$ とした。双方とも $u < 10^{-1}$ で応答関数が急激に小さくなる。また、DL 方式に見られる零点は FP 方式では滑らかになっている (高周波数側に移動している)。

3.2.3 Fabry-Perot 干渉計の鏡の位置の変動に対する応答、周波数雑音に対する応答

Fabry-Perot 干渉計の共振器を構成する鏡の変動 $\delta L(t) (\ll 1)$ に対する応答は、共振条件 $L\Omega/c = m\pi$ (m : 整数) が満たされているときを考えると、

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{-r_F + (r_F^2 + t_F^2)r_E}{1 - r_F r_E} \left\{ 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{FP}}^{(L)}(\omega) \delta L(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}, \quad (3.46)$$

$$H_{\text{FP}}^{(L)}(\omega) = \frac{2\alpha\Omega}{c} \frac{\exp(-iL\omega/c)}{1 - r_F r_E \exp(-2iL\omega/c)} \quad (3.47)$$

で与えられる。

この $H_{\text{FP}}^{(L)}(\omega)$ は重力波に対する周波数応答関数 $H_{\text{FP}}(\omega)$ と

$$H_{\text{FP}}^{(L)}(\omega) = \frac{2\omega}{c \sin(L\omega/c)} H_{\text{FP}}(\omega) \quad (3.48)$$

$$\simeq \frac{2}{L} H_{\text{FP}}(\omega) \quad (3.49)$$

の関係にある。つまり、共振器長が δL だけ変動したときと振幅が $2\delta L/L$ の重力波が入射したときの応答は等しい。

また、Fabry-Perot 干渉計の周波数雑音 $\delta\nu(t) (\ll 1)$ に対する応答は、同様に共振条件 $L\Omega/c = m\pi$ (m : 整数) が満たされているときを考えると、

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{-r_F + (r_F^2 + t_F^2)r_E}{1 - r_F r_E} \left\{ 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{FP}}^{(F)}(\omega) \delta\nu(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}, \quad (3.50)$$

$$H_{\text{FP}}^{(F)}(\omega) = \frac{4\pi\alpha}{\omega} \frac{\sin(L\omega/c)}{1 - r_F r_E \exp(-2iL\omega/c)} \exp(-iL\omega/c) \quad (3.51)$$

で与えられる。

この $H_{\text{FP}}^{(F)}(\omega)$ は重力波に対する周波数応答関数 $H_{\text{FP}}(\omega)$ と

$$H_{\text{FP}}^{(F)}(\omega) = \frac{4\pi}{\Omega} H_{\text{FP}}(\omega) = \frac{2}{\nu} H_{\text{FP}}(\omega) \quad (3.52)$$

の関係にある。ここで、 $\nu = \Omega/2\pi$ はレーザー光源の周波数である。

3.3 地上型レーザー干渉計型重力波検出器

重力波検出器の設置場所には、地球上、宇宙空間、月面上などが考えられるが、レーザー干渉計型の場合、地球上に設置するものがまず計画され、観測を開始しつつある。以下では、地上型のレーザー干渉計の目標重力波源や、問題となる雑音源、すでに進行中の計画などを概観する。

3.3.1 地上型レーザー干渉計

地上型レーザー干渉計は、建設可能な設備の大きさの限界や地面振動などによって制限を受け、観測周波数帯域は 1Hz 以上となる。よって目標となる重力波源としては連星中性子星の合体や超新星爆発などが有力視されている。

3.3.2 地上型レーザー干渉計の雑音源

重力波信号は非常に微弱であるため、雑音の除去 (或いは低減) は大きな課題である。以下、地上型干渉計の感度を限定する主な雑音について述べる。

レーザー光の散乱雑音

散乱雑音 (ショットノイズ) はレーザー光の量子性に由来する原理的な雑音で、高周波数帯域の感度を決める。散乱雑音はレーザー光の出力の平方根に反比例することが知られているので、雑音の低減のためには高出力のレーザーが必要になる。また、干渉計からレーザー源に戻るレーザー光を打ち返して実効的な光量を増幅させるパワーリサイクリングという方法がとられる。

熱雑音

干渉計は有限温度の熱浴に接していると見なされるため、その構成部品は熱振動をする。特に鏡やそれを吊るす防振装置などの熱振動は直接光路長を変化させる。この熱雑音も避けることができないため、干渉計の感度を制限する。

熱雑音は物質の種類に依存し、そのパラメータは Q 値と呼ばれる。Q 値の高い物質ほど熱雑音は小さいため、高 Q 値の材質による鏡や防振装置の開発が必要となる。

また、熱振動は温度を下げることで低減できるため、干渉計の冷却も有効な手段として次世代の干渉計などでは検討されている。

地面振動

地上に固定された干渉計では、地面振動があると鏡などが揺れ、直接光路長に変化をもたらすため、重要な雑音源である。

地面は地震などのように突発的なものの他にも、人間活動や海洋の変動に起因する常微動があり、その大きさは場所によって異なるが、

$$x_{\text{seismic}} = 10^{-7} \left(\frac{1\text{Hz}}{f} \right)^2 \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (3.53)$$

のような形をしており、10Hz 以下の低周波数領域で支配的な雑音となる。

地面振動の低減は地上型干渉計計画の重要な課題の1つであり、鏡を振り子で吊るすことによる観測周波数帯域での防振の研究などが盛んに行われている。

3.3.3 各国の地上型レーザー干渉計計画

現在、各国で大型の地上型レーザー干渉計型重力波検出器の開発が進められ、一部は観測を始めている。

表 3.2: 各国の地上型レーザー干渉計計画

計画	参加国	設置場所	基線長	方式
LIGO	アメリカ合衆国	Hanford/Livingston	4km/2km	FP
VIRGO	フランス/イタリア	Cascina	3km	FP
GEO	ドイツ/イギリス	Hannover	600m	DL
TAMA	日本	三鷹	300m	FP

最も大規模なものとして、アメリカ合衆国の LIGO(Laser Interferometer Gravitational wave Observatory) 計画が進められている。LIGO は Hanford と Livingston にそれぞれ基線長 4km、Hanford に 2km のレーザー干渉計が建設され、観測を始めている。

ヨーロッパでは、フランスとイタリアの共同計画として VIRGO 計画が進められており、イタリアの Pisa 郊外に 3km のレーザー干渉計が建設中である。この計画では低周波での雑音源となる地面振動の防振に力を入れている。また、ドイツとイギリスが進めている GEO では 600m の干渉計が完成している。

日本の TAMA 計画では各国に先駆けて、三鷹に 300m のレーザー干渉計が建設され、観測を始めている。TAMA 計画にはその後の大型干渉計の技術開発という目的も含まれている。

また、将来的な計画としては日本で LCGT 計画が進められている。鏡の熱雑音低減のために低温鏡を用い、神岡鉱山の地下に 3km のレーザー干渉計を建設予定である。

第4章 宇宙空間レーザー干渉計型重力波検出器

重力波源として、1Hz から 1mHz 以下の低周波数領域のものは、非常に多く、強力なものがあると予測されている。その主なものとして

- 巨大ブラックホールの合体
- ビッグバン直後の宇宙背景放射
- ダークマター

などが挙げられる。

しかし、地上のレーザー干渉計重力波検出器が働く周波数領域は 100Hz から 1kHz であり、今後の技術の進歩を鑑みても 10Hz 以下の低周波領域での重力波観測は困難である。それは、

- 低周波域の感度が地面振動や地球の重力場変動によって限定
- 長基線長干渉計の建設の困難

が主な原因として挙げられる。その両方を解決する案として宇宙空間配置の重力波検出器が考えられている。まず、最も近い将来に実現予定のものとして欧米の NASA、ESA による LISA がある。また、日本でも DECIGO が計画されている。

4.1 LISA 計画

欧米の ESA、NASA で計画中の LISA (Laser Interferometer Space Antenna) は、3つのスペースクラフト (S/C) がほぼ等辺の三角形を構成するもので、その各々の辺が $5 \times 10^6 \text{ km}$ という長基線長の Michelson 干渉計の腕であり、1年をかけて太陽周回軌道を1周する。目標の観測周波数は 10^{-4} から 10^{-2} Hz という低周波数であり、銀河系内の連星系や銀河系外の巨大ブラックホールの合体などを重力波源の目標とする。2012年前後に打ち上げ予定である。

図 4.1 は LISA の感度 (無次元歪み量) と主な観測対象である銀河系内連星系と銀河系外ブラックホールの出す重力波の予想振幅である。LISA の感度が達成されれば、これらは十分検出可能だといえる。

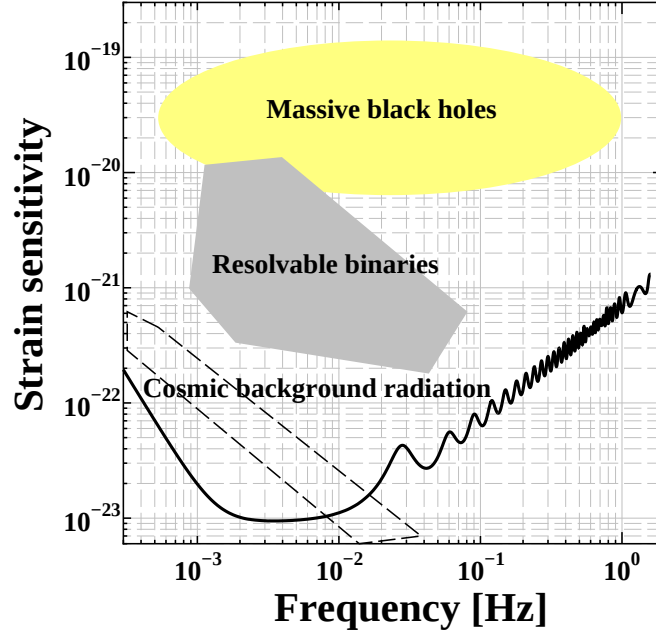


図 4.1: 銀河系内連星系と銀河系外巨大ブラックホールにたいする LISA の感度曲線 (無次元歪み量)。曲線は LISA の検出の閾値で 1 年間の観測で $S/N=5$ としている。

4.1.1 LISA の感度

LISA の感度は 10^{-3} から 10^{-2} Hz で最も良くなるように設定されている。LISA の感度のフロアレベルを決めるのは、プルーフマス (PM) に対する変位雑音で、最も原理的な雑音である散射雑音がこの周波数帯域で、光路片道あたり

$$\delta L_{\text{shot}} \sim 2.2 \times 10^{-11} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (4.1)$$

程度の大きさとなる。これを基準に LISA の変位雑音は目標値で

$$\delta L \sim 4.0 \times 10^{-11} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (4.2)$$

とされる (表 4.1)。

低周波数帯域の感度を決めるのは PM への加速度雑音である。LISA では加速度雑音の目標値は

$$\delta a \sim 1.2 \times 10^{-14} \text{ m/s}^2 \sqrt{\text{Hz}} \quad (4.3)$$

と考えられている (表 4.2)。

以上の雑音から計算した LISA の感度曲線を図 4.2 に示す。

表 4.1: LISA における変位雑音

雑音源	大きさ [$\times 10^{-11} \text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$]	数
散射雑音 (1W レーザー、30cm 望遠鏡)	1.1	4
マスタークロック雑音	1.0	1
レーザーの残留周波数雑音	1.0	1
レーザーのビームポインティングの不安定性	1.0	4
レーザーの位相同期雑音	0.5	4
散乱光雑音	0.5	4
その他	0.3	32
計	4.0	

表 4.2: LISA における加速度雑音

雑音源	大きさ [$\times 10^{-14} \text{m/s}^{-2}\sqrt{\text{Hz}}$]	数
S/C の熱膨張	0.1	1
ペイロードの熱膨張	0.05	1
誘電損失による雑音	0.1	1
S/C の変位による重力雑音	0.05	1
キャビティ内の温度勾配	0.1	1
帯電した PM への静電気力	0.1	1
惑星間磁場変動による帯電した PM に対するローレンツ力	0.1	1
PM への残留ガスの衝突	0.1	1
望遠鏡の熱膨張	0.05	1
惑星間磁場変動による帯電した PM に対する磁気力	0.05	1
その他	0.05	4
	0.03	16
計	4.0	

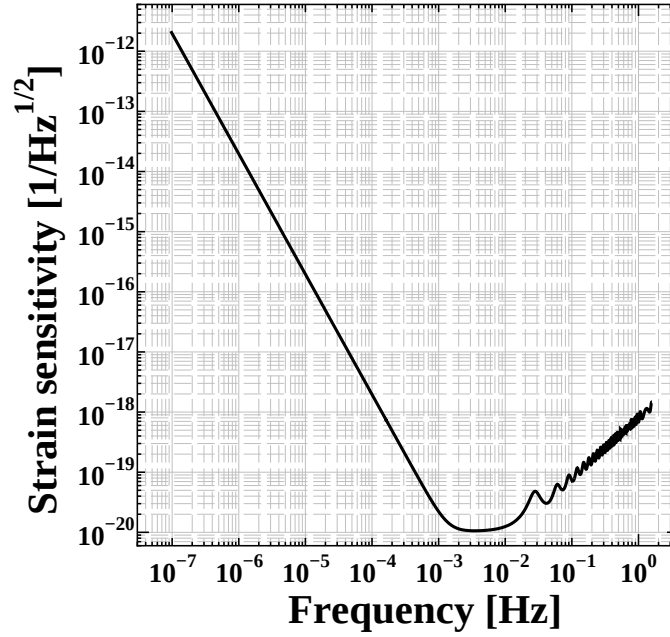


図 4.2: LISA の感度曲線。

4.1.2 LISA の軌道

LISA を構成する 3 機の S/C の重心は半径 $1\text{AU}=1.5 \times 10^8\text{km}$ の地球軌道上にあり、地球の後方約 20° を地球の後を追うように周回する。これは、地球の重力場、磁場による影響を抑えるという要請と地球からの通信や軌道投入費用による制限を考慮したためである。また、3 機の S/C が作る三角形は公転面から 60° 傾いた円錐面にはほぼ接し、重心が 1 年で公転する間に、各 S/C は重心の周りを 1 周する。これは、S/C 間の距離変動をなるべく小さくするために選ばれたもので、一般の配置では S/C 間距離 l の変動は 1 年で $\Delta l \sim d \sim 10^6\text{km}$ の程度になるが、この配置によって $\Delta l \sim d^2/10a_E \sim 10^4\text{km}$ と小さくなる。

4.1.3 LISA の干渉計構成

LISA は 3 つの S/C がほぼ等辺の三角形の頂点にあり、各 S/C 間をレーザー光を往復させることで Michelson 干渉計を構成する。3 本の腕は余剰であるが、腕の 1 本が不具合を生じた場合に備えてある。

腕が $5 \times 10^6\text{km}$ という長基線長であるため、レーザー光であっても回折による損失が大きく、通常の Michelson 干渉計のようにビームスプリッターでそれぞれの方向に分けた光を鏡で直接反射させ、戻ってきた 2 光を干渉させるということはできない。従って、位相同期した光を増幅して打ち返すという方法がとられる。

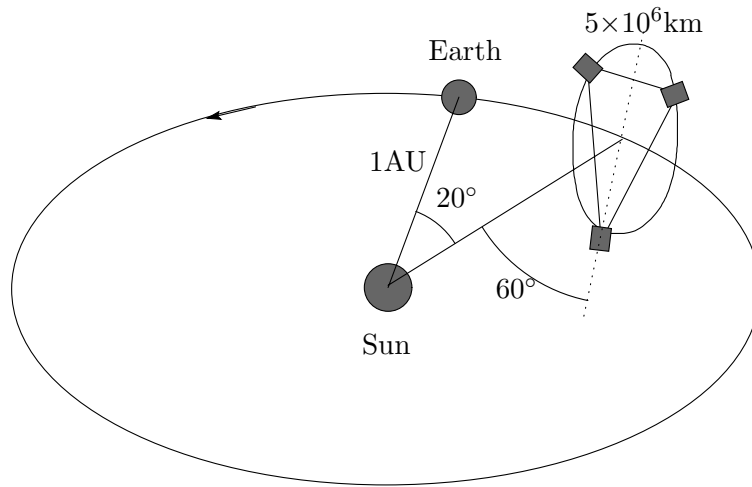


図 4.3: LISA の軌道。3 機の S/C の重心は半径 $1\text{AU}=1.5 \times 10^8\text{km}$ の地球軌道上にあり、地球の後方約 20° を地球の後を追うように周回する。また、S/C は黄道面から 60° 傾いた副軌道を作り、重心周りを 1 年かけて周回する。

図に示すように各 S/C は各々が 1 対の光学系を搭載し、それぞれの光学系にレーザー源がある。干渉計の腕は A1-C2、A2-B1、B2-C1 間で構成される。S/C1 を主 S/C とし、それに積まれるレーザー源の 1 つ A1 を主レーザー源と呼ぶことにする。主 S/C のもう 1 つのレーザー源 A2 は主レーザー源に同期される。その他の S/C のレーザーは主 S/C から打ち出されたレーザーに同期され、増幅されて打ち返される。これによって、各々のレーザー光は実質的に同一光源から出たものと考えることができ、光の損失を補うことができる。

また、S/C 間の相対速度が有限であるために起こるレーザー光のドップラー効果があるため、基準周波数を用いてヘテロダイン検波をする。

4.1.4 ドラッグフリー

Michelson 干渉計の原理により、干渉計の腕を成す鏡は自由質点でなければならない。LISA において、鏡の役割をするのは各 S/C の各光学系に積まれたプルーフマス (PM) である。S/C の外装は PM に働く外部からの外乱、主に太陽風の輻射圧 (平均 $5 \times 10^{-6}\text{N/m}^2$) を防ぐために働く。その結果、理想的には、宇宙空間において PM にはたらく外乱は S/C との相対運動によって起こる重力場変動のみとなる。従って、PM が常に S/C の中心にあって相対運動がないように、S/C の位置を制御する必要がある。これをドラッグフリー制御という。ドラッグフリー制御をするためには μN 程度の微小な力を滑らかに調整できなければならない。FEED(Field Emission Electric Propulsion) というマイクロスラスターが ESA で開発されており、実験室レベルでは要求精度に合うものが報告されている。

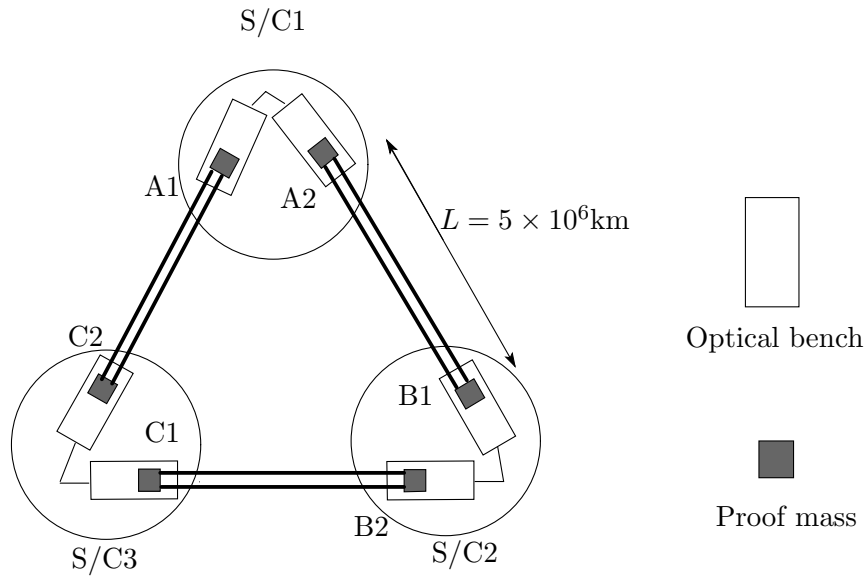


図 4.4: LISA の S/C の構成。

4.2 DECIGO 計画

地上型の干渉計が対象とするのは 10Hz から 1kHz であり、LISA の対象は 10^{-4} から 10^{-2} Hz の周波数である。そこで、地上型、LISA を補う周波数を対象とした DECIGO (DECihelz Interferometer Gravitational wave Observatory) が日本で計画されている。DECIGO の対象とする 10^{-2} から 1Hz の周波数には宇宙物理学的に貴重な重力波源も存在し、その実現は重力波天文学にとって重要であると考えられる。DECIGO は LISA の規模を小さくして基線長を 5×10^4 km とし、 10^{-1} Hz で最高感度を得られるようにしたものである。

DECIGO の対象とする重力波源は

- LISA の観測帯域から出た連星系
- 地上型干渉計の観測帯域に至る前の連星系
- 宇宙初期の重力波源

などが挙げられる。DECIGO の観測周波数帯域では、我々の銀河系に存在する白色矮星連星¹などの未知の重力波源による重力波雑音の混入がないことは LISA にはない利点である。よって、宇宙初期の背景重力波を観測できる可能性があり、宇宙論的興味も大きい。

¹ 白色矮星連星は LISA の観測帯域の周波数の重力波を放出しつつ軌道を小さくしながら合体するが、その合体時の重力波の周波数は DECIGO の観測帯域に入る前のものである。

4.2.1 DECIGO の感度

DECIGO の感度は LISA と全く同等の技術を用いて、干渉計の腕の長さ、つまり、S/C 間の平均距離を 100 分の 1 にした場合、光源から距離 L 離れたところのレーザー光パワー P が L^{-2} に比例することを考慮して、散射雑音が

$$h_{\text{shot}} \propto \frac{1}{L\sqrt{P}} \propto \frac{1}{L\sqrt{L^{-2}}} = 1 \quad (4.4)$$

となるため、雑音スペクトルのフロアレベルは変化せず、高周波数側に 2 桁シフトする。一方で、低周波数帯域を制限する加速度雑音は基線長によらないため、低周波数側の雑音スペクトルは 2 桁悪化し、結果として、感度曲線はフロアレベルが LISA と等しいが周波数帯域が広いものとなる。

図 4.5 に DECIGO の感度曲線を示す。

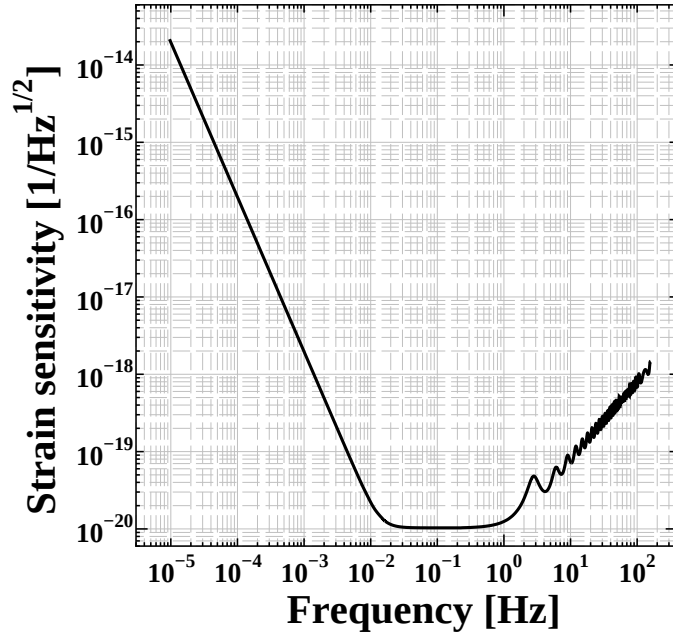


図 4.5: DECIGO の感度曲線

量子限界

光の量子性に起因する雑音である散射雑音、輻射圧雑音はそれぞれ

$$\delta L_{\text{shot}} = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{2\hbar\Omega}{P}}, \quad (4.5)$$

$$\delta L_{\text{radiation}} = \frac{1}{M\omega^2} \sqrt{\frac{8\hbar\Omega P}{c^2}} \quad (4.6)$$

と書かれるが、それらの2乗和は、

$$\delta L^2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{2\hbar\Omega}{P} + \left(\frac{1}{M\omega^2}\right)^2 \frac{8\hbar\Omega P}{c^2} \geq \frac{4\hbar}{M\omega^2} \quad (4.7)$$

となるため、最小値に制限がある。この制限を標準量子限界 (SQL) という。この最小値をとるときのレーザー光のパワーは

$$P_{\text{opt}} = \frac{M\omega^2\lambda c}{8\pi} \quad (4.8)$$

となる。DECIGO では $\omega = 2\pi/10\text{rad Hz}$ なので、 $M = 100\text{kg}$ とすれば

$$h_{\text{SQL}} \sim 3.3 \times 10^{-26} \text{ } 1/\sqrt{\text{Hz}} \quad (0.1\text{Hz}) \quad (4.9)$$

まで下がりうる。つまり、原理的には標準量子限界までは感度は任意に取りうる。しかし、そのとき必要なレーザー光パワーは

$$P_{\text{SQL}} \sim 5 \text{ kW} \quad (4.10)$$

であり、長光路長による拡散を考えるとレーザー光源として

$$P_{\text{SQL0}} \sim 10 \text{ MW} \quad (D = 3\text{m}) \quad (4.11)$$

もの高パワーのレーザー光源と大口径の望遠鏡が要求されることになる。

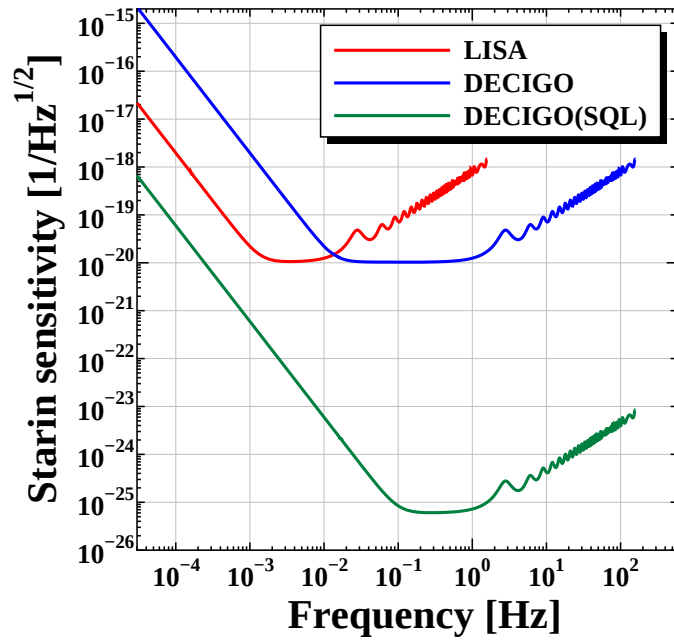


図 4.6: LISA、DECIGO、標準量子限界の DECIGO の感度曲線。通常の DECIGO は LISA と同様の技術としてある

第5章 直接干渉型宇宙空間レーザー干渉計型重力波検出器

DECIGO は LISA の縮小版ともいうべき重力波検出器であり、LISA と同等の技術が必要である。特に LISA や DECIGO のような長基線長の干渉計においては回折損失を防ぐためのレーザーの高パワー化は欠かせなくなる。

そこで、LISA にはない要素を持つデシヘルツの周波数を観測周波数帯域とする宇宙空間干渉計型重力波検出器として、両腕に FP 共振器をもつ直接干渉型レーザー干渉計 (FP-DECIGO) を考察する¹。これは、LISA の縮小版ではなく、地上型干渉計の拡張としての宇宙空間干渉計を考えるものである。

FP-DECIGO としては、基線長 $d = 500\text{km}$ でフィネス $\mathcal{F} = 50$ のものと、基線長 $d = 30\text{km}$ でフィネス $\mathcal{F} = 500$ のものを考える。

5.1 FP-DECIGO のデザイン

FP-DECIGO は 3 機の S/C 間で FP 共振器を構成する (図 5.1)。各鏡間は 30km から 500km の長基線長である。S/C は鏡を防護するためにあり、鏡とは独立にある。

5.2 FP-DECIGO の有限の大きさの鏡によるレーザー光パワーの損失

FP-DECIGO の S/C は LISA や従来の DECIGO に比べて短基線とはいえ、鏡の変位による雑音を抑えるために 100km 程度の長い基線長が必要となる。そのため、レーザー光の回折によるパワーの損失を十分に抑えなければならない。この節では、レーザー光の回折損失を考え、それを抑えるのに必要な大きさの鏡の大きさを見積もる。

¹以下では LISA の縮小型のものを単に DECIGO、FP 共振器を持つものを FP-DECIGO と呼んで区別する。

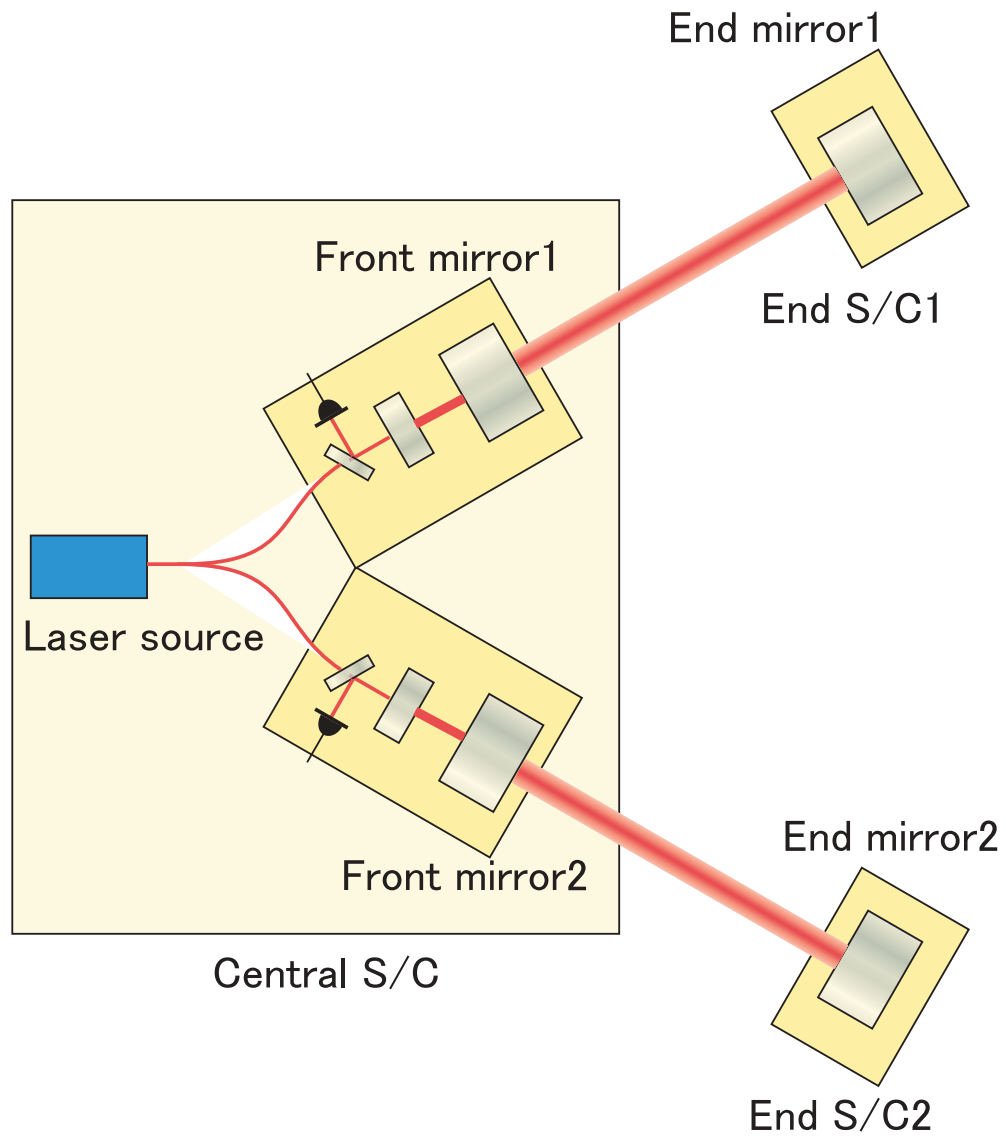


図 5.1: FP-DECIGO のデザイン

5.2.1 レーザー干渉計の拡散による損失

レーザー光は光軸に垂直な方向に無限に広がっているため、有限の大きさの鏡で反射したとき、鏡の外側の部分は損失となる。今、ガウシアンビームを想定し、その基本モードを考えれば、レーザー光の規格化された振幅は、光軸方向を z 軸として、

$$\Psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\lambda z_R}} \frac{iz_R}{z + iz_R} \exp \left[-\frac{\pi(x^2 + y^2)}{\lambda(z + iz_R)} \right] \quad (5.1)$$

と書ける。ここで、 z_R はレイリーレンジと呼ばれ、レーザー光のウエストでのビーム径 w_0 と

$$z_R = \frac{1}{2} k w_0^2 \quad (5.2)$$

の関係がある。

これから、 L だけ離れた直径 $D = 2R$ の鏡面で受けるレーザー光パワーは

$$\begin{aligned} P_{\text{received}} &= P_0 \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} |\Psi(x, y, L)|^2 dx dy \\ &= P_0 \left(1 - \exp \left[-\frac{2\pi z_R}{\lambda(L^2 + z_R^2)} R^2 \right] \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

となる。 P_0 は入射光のパワーである。図に鏡間距離や鏡の直径を変えたときのレーザー光パワーの回折損失の変化を示す。鏡間の距離を 500km とすると、鏡の直径 1m で損失が 23%、直径 1.5m で 3.6%、直径 2m で 0.3% 以下となる。従って、フィネスが 50 程度であると、レーザー光パワーが落ちないためには 2m の鏡が必要となる。逆に 1m の鏡では鏡間 100km でフィネス 300 程度が限界となる。

LISA のようなさらに長基線長 (5×10^6 km) の干渉計では、光路を進む間にレーザー光パワーが急激に落ちるため、直接干渉はできず、同期増幅させるという方法がとられる。

5.2.2 反射レーザー光の高次モードとの結合によるレーザー光パワー損失

FP 共振器はガウシアンビームの基本モードが共振するように設計されるが、現実には共振器の理想的な状態からのずれによってレーザー光は高次のモードと結合する。その 1 例として鏡の大きさが有限であるため、無限大の直径を想定したときのずれから、反射レーザー光には基本モード以外の高次のモードが混入する。しかし、一般に高次のモードは基本モードに合わせられた共振器の構成では共振しないため、そのままレーザー光パワーの損失となる。今、半径 R 、振幅反射率 r の鏡で反射した直後のレーザー光の振幅は

$$\Psi(x, y, L) = \begin{cases} r \sqrt{\frac{2}{\lambda z_R}} \frac{iz_R}{L + iz_R} \exp \left[-\frac{\pi(x^2 + y^2)}{\lambda(L + iz_R)} \right] & (x^2 + y^2 \leq R^2) \\ 0 & (x^2 + y^2 > R^2) \end{cases} \quad (5.4)$$

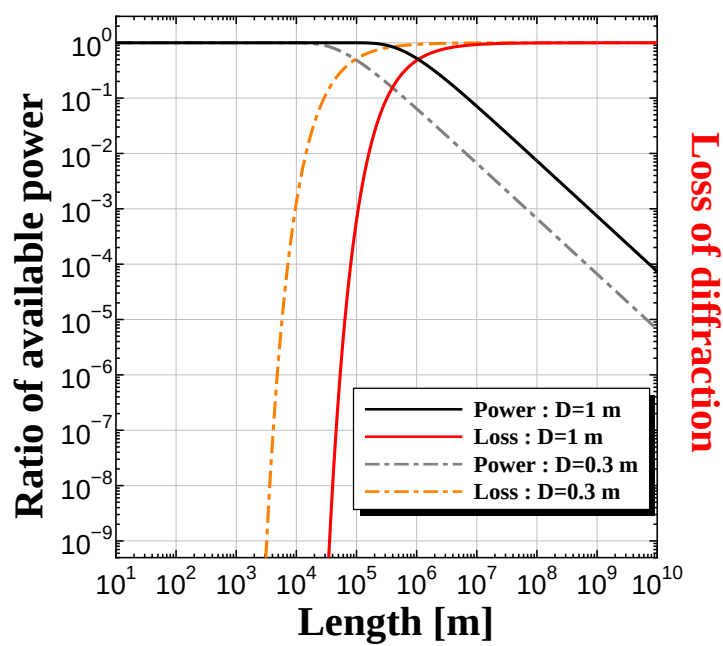


図 5.2: レーザー光パワーの回折損失と鏡間の距離の関係。鏡の直径が 1m と 30cm の場合について示す。1m のとき、 $L = 30\text{km}$ 、30cm のとき、 $L = 3\text{ km}$ 程度で損失が急激に大きくなることが分かる。

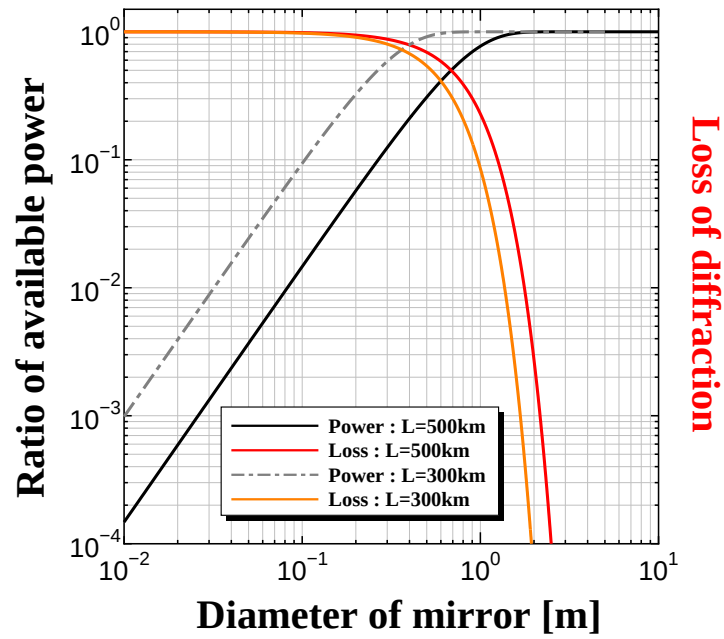


図 5.3: レーザー光パワーの回折損失と鏡の直径の関係。鏡間距離が 500km と 300km の場合について示す。500km のとき、2m の直径、300km のとき 1m 数十 cm の直径の鏡が必要なことがわかる。

と書ける。高次のガウシアンモード系 $\{\Psi_{nm}\}$ は完備であるので、反射レーザー光はガウシアンモードで展開できて、

$$\Psi(x, y, L) = \sum_{n,m} \Psi_{nm}(x, y, L) \langle \Psi_{nm} | \Psi \rangle \quad (5.5)$$

となる。ここで、展開係数は

$$\langle \Psi_{nm} | \Psi \rangle = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} dx dy \Psi_{nm}^*(x, y, L) \Psi(x, y, L) \quad (5.6)$$

である。今、共振器は基本モードが共振するように構成されているとすると、関心があるのは $n = m = 0$ の展開係数のみである。基本モードは

$$\Psi_{00}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\lambda z_R}} \frac{iz_R}{z + iz_R} \exp \left[-\frac{\pi(x^2 + y^2)}{\lambda(z + iz_R)} \right] \quad (5.7)$$

と書けるので、

$$\langle \Psi_{00} | \Psi \rangle = r \left(1 - \exp \left[-\frac{2\pi z_R}{\lambda(L^2 + z_R^2)} R^2 \right] \right) \quad (5.8)$$

を得る。従って、反射によってレーザー光パワーは

$$P = P_{\text{recieved}} r^2 \left(1 - \exp \left[-\frac{2\pi z_R}{\lambda(L^2 + z_R^2)} R^2 \right] \right)^2 \quad (5.9)$$

と変わることになる。

5.2.3 FP 共振器の実効的反射率

前節の結果は、レーザー光パワーが1回の反射につき、

$$P_{\text{after}} = r^2 \left(1 - \exp \left[-\frac{2\pi z_R}{\lambda(L^2 + z_R^2)} R^2 \right] \right)^2 P_{\text{before}} \quad (5.10)$$

に低減することを示している。つまり、FP-共振器の鏡の振幅反射率は実効的に

$$r_{\text{eff}} = r \left(1 - \exp \left[-\frac{2\pi z_R}{\lambda(L^2 + z_R^2)} R^2 \right] \right) \quad (5.11)$$

となると考えられる。

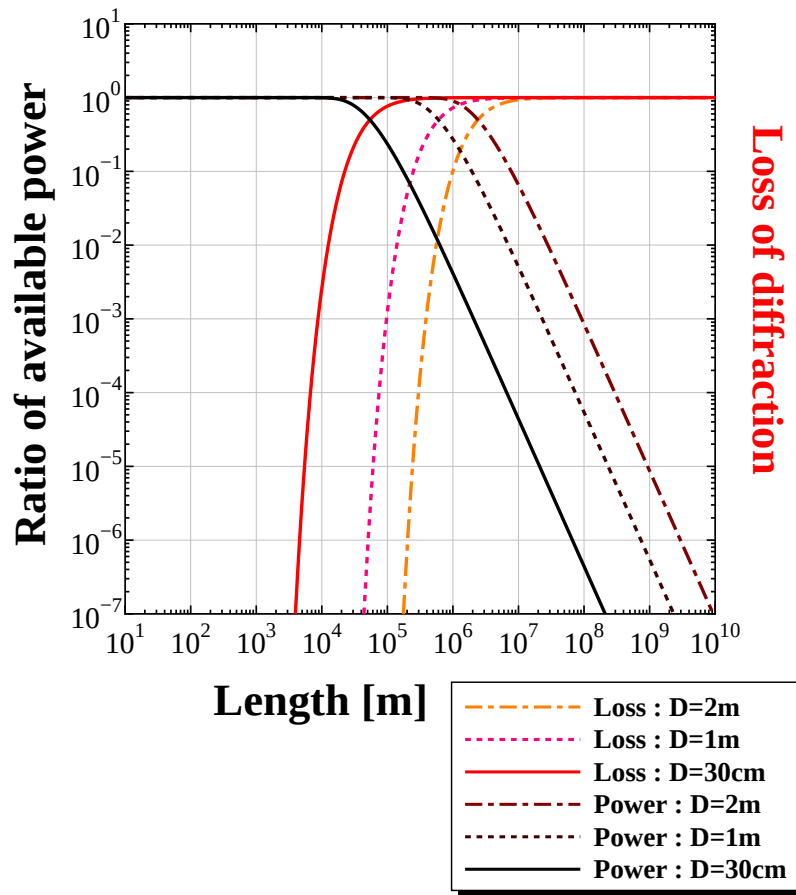


図 5.4: 基線長とレーザー光の実効反射パワー及び損失の関係。

5.2.4 レーザー光パワー損失からの鏡の大きさの要求

FP 共振器にパワー P_i のレーザー光が入射したとき、反射光のパワーは

$$P_r = |E_r|^2 = \frac{\{r_F - r_E(r_F^2 + t_F^2)\}^2 + 4r_E r_F(r_F^2 + t_F^2) \sin^2(\Omega L/c)}{(1 - r_E r_F)^2 \{1 + F \sin^2(\Omega L/c)\}} P_i \quad (5.12)$$

である。さらに、共振状態を考えれば、

$$P_r = \frac{\{r_F - r_E(r_F^2 + t_F^2)\}^2}{(1 - r_E r_F)^2} P_i \quad (5.13)$$

を得る。ここで、反射率としては (5.11) 式を用いれば、FP 共振器の実効的な反射パワーが求まる。従って、反射パワーに要求をつけることで必要な鏡の大きさが求まる。

$L = 500\text{km}$ で、フィネス 50 のとき、 $P_r/P_i > 0.9$ にするには、直径が 2.1m の鏡が必要となる。一方、 $L = 30\text{km}$ で、フィネス 500 程度ならば、 $D = 60\text{cm}$ となる。

5.3 FP-DECIGO における雑音源

5.3.1 光の散乱雑音

レーザー干渉計において最も原理的となる雑音は²、光が量子的な光子であることに起因する光の散乱雑音 (Shot noise) である。この雑音によって検出可能なレーザー光の最小の位相変化は

$$\delta\phi_{\text{shot}} = \sqrt{\frac{2\hbar\Omega}{\eta P}} \quad (5.14)$$

となる。ここで $\hbar$ は Planck 定数、 Ω はレーザー光の角周波数、 η は光検出器の効率、 P は受光面でのレーザー光のパワーである。従って、検出器で検出可能な重力波信号は応答関数 $H(\omega)$ を用いて、

$$h_{\text{shot}}(\omega) = \left| \frac{r_F - \alpha_C}{H(\omega)} \right| \delta\phi \quad (5.15)$$

$$= \left| \frac{r_F - \alpha_C}{H(\omega)} \right| \sqrt{\frac{2\hbar\Omega}{\eta P}} \quad (5.16)$$

となる。

FP-DECIGO の場合、応答関数は $H_{\text{FP}}(\omega)$ で与えられ、また、光検出器に到達するレーザー光パワーは

$$P = (r_F - \alpha_C)^2 P_0 \quad (5.17)$$

²ここで言う「原理的」とは、装置の改良によって除去できないという意味である。

で与えられるので、結局、散射雑音が決める重力波信号の最小値は

$$h_{\text{shot}}(\omega) = \frac{\sqrt{\lambda}}{L} \left| \frac{1 - r_{\text{FrE}}}{\alpha_C} \right| \sqrt{\frac{4\pi\hbar c}{\eta P_0}} \sqrt{\frac{1 + F \sin^2 \omega L/c}{R(\omega)}} \quad (5.18)$$

となる。これはレーザー光パワーの平方根に反比例するので、高パワーのレーザーを用いれば散射雑音は低減できる。

低周波数において、この $h(\omega)$ は非常に平坦な振る舞いをし、 $L = 500\text{km}$ 、 $D = 1\text{m}$ で

$$h_{\text{shot}}(\omega) \sim 9.4 \times 10^{-23} \text{ Hz}^{-1/2} \quad (5.19)$$

程度となる。

散射雑音は干渉計の観測帯域におけるフロアレベルを決める。

5.3.2 光の輻射圧雑音

鏡に入射するレーザー光パワーの揺らぎは、入射光子の数の揺らぎ、つまり、総運動量の揺らぎに由来する。入射光子は鏡に力積を与えるため、結果として、パワーの揺らぎは鏡の位置の揺らぎをもたらし、干渉計の雑音となる。この入射パワーの揺らぎに起因する雑音を輻射圧雑音 (Radiation pressure noise) という。

今、鏡がパワー P のレーザー光によって受ける力は、 $2P/c$ と書けるから、質量 M の鏡の位置は

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{2P}{c} \quad (5.20)$$

の運動方程式に従う。Fourier 展開を考えれば、揺らぎは

$$\delta x(\omega) = -\frac{1}{M\omega^2} \delta P(\omega) \quad (5.21)$$

となる。コヒーレント状態の光子数は Poisson 分布に従うので、揺らぎは光子数の平均の平方根程度である。従って、パワーの揺らぎも同様に

$$\langle \delta P(\omega)^2 \rangle \propto P \quad (5.22)$$

となる。上 2 式を合わせれば、鏡の位置の揺らぎはレーザー光パワーの平方根に比例することがわかる。つまり、散射雑音とは逆にレーザー光パワーを大きくすると雑音が増大する。

FP 共振器を持つ干渉計においては、輻射圧雑音と等価な重力波信号は

$$h_{\text{radiation}}(\omega) = \frac{16\mathcal{F}}{\pi m L \omega^2} \sqrt{\frac{\pi \hbar P_0}{c \lambda (1 + (\omega L/c)^2)}} \quad (5.23)$$

となり [10]、低周波数域で支配的な雑音となる。

5.3.3 鏡の熱雑音

干渉計の鏡は有限温度の熱浴に接している限り、熱振動を起こす。この熱振動の共振周波数 ω_0 は一般に宇宙空間重力波検出器の対象とする重力波の周波数よりもずっと大きい、観測周波数帯域での雑音になり得る。

鏡の損失 $\phi (= 1/Q)$ が周波数に依らないというモデル (ストラクチャーダンピングモデル) を用いれば、熱雑音のスペクトル密度は $\omega \ll \omega_0$ において

$$h_{\text{thermal}}(\omega) = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{4k_B T \phi (1 - \sigma^2)}{\sqrt{\pi} E r_0 \omega}} \quad (5.24)$$

と書ける。ここで、 k_B は Boltzmann 定数、 T は鏡の絶対温度、 σ は鏡の Poisson 比、 E は鏡の Young 率、 r_0 は鏡の位置でのレーザー半径である。

大まかに見積もって、 $k_B T \sim 10^{-21} \text{J}$ 、 $\sigma \sim 0.1$ 、 $E \sim 10^{11} \text{Pa}$ 、 $\phi \sim 10^{-8}$ 、 $r_0 \sim 1 \text{m}$ 程度なので、基線長 $L \sim 10^2 \text{km}$ においては、

$$h_{\text{thermal}}(\omega) \sim 10^{-26} \left(\frac{2\pi \times 1 \text{Hz}}{\omega} \right)^{1/2} \text{Hz}^{-1/2} \quad (5.25)$$

となり、散乱雑音に比べて無視できる。

5.3.4 磁場との鏡との相互作用による雑音

S/C 内外部における磁場との相互作用に変動があると、帯電した鏡に働く Lorentz 力による外乱によって鏡は加速度雑音を受ける。変動には

1. 磁場が変動する
2. 鏡に帯電する電荷が変動する

の2つの場合が考えられる。

以下にその雑音について LISA の報告と比較しながら考察する。

S/C 内の磁場変動

LISA においてはレーザー光源の周波数安定化のために永久磁石を用いており、それが S/C 内の磁場変動の原因となりうるということが報告されている [11]。LISA では磁気モーメント $m_s \sim 1.5 \text{Nm/T}$ の永久磁石を用いる。これと PM との距離は $r \sim 1 \text{m}$ であるので、PM の位置での磁場は

$$B_{\text{SC}} \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_s}{r^3} \sim 8 \times 10^{-7} \text{ T} \quad (5.26)$$

となる。この変動は $\delta B_{\text{SC}} \sim 10^{-7} \text{T}$ 程度であると報告されている。

一方、S/C 内の電子回路を流れる電流の作る磁場も考えうるが、これは 10^{-9}T 程度であり、その変動は無視できる。

S/C 外部の磁場変動

太陽系内の惑星間における磁場はほぼ一定で

$$B_{\text{ip}} \sim 3 \times 10^{-8} \text{ T} \quad (5.27)$$

であり、周波数依存性は凡そ

$$\delta B_{\text{ip}}(f) \sim 3 \times 10^{-9} \left(\frac{1 \text{ mHz}}{f} \right) \text{ T}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (5.28)$$

とされる。

帯電した鏡に働く Lorentz 力

S/C 内磁場と鏡に相対運動はないので、Lorentz 力は S/C 外磁場、惑星間磁場 B_{ip} によってもたらされる。鏡 (つまり、S/C) の速度を $\mathbf{V}$ とすると、鏡は Lorentz 力によって、加速度

$$\mathbf{a} = \frac{q}{M} (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (5.29)$$

を受ける。 q は鏡に帯電した電荷であり、 M は鏡の質量である。ここで、磁場、電荷に

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \delta \mathbf{B}, \quad (5.30)$$

$$q = \bar{q}t + \delta q \quad (5.31)$$

の変動があるとする、加速度は

$$\delta \mathbf{a} = \frac{\delta q}{M} (\mathbf{V} \times \bar{\mathbf{B}}) + \frac{\bar{q}t}{M} (\mathbf{V} \times \delta \mathbf{B}) \quad (5.32)$$

という変動を受ける。但し、2 次の微小量は無視した。

帯電の過程は Poisson 過程だと考えられるので、電流について

$$\delta \dot{q}(\omega) = \sqrt{2e\bar{q}} \quad (5.33)$$

が成り立つ [6]。従って、

$$\delta q(\omega) = \frac{\sqrt{2e\bar{q}}}{\omega} \quad (5.34)$$

を得る。

以上より、(5.32) 式は

$$\delta \mathbf{a} = \frac{\sqrt{2e\bar{q}}}{M\omega} (\mathbf{V} \times \bar{\mathbf{B}}) + \frac{\bar{q}t}{M} (\mathbf{V} \times \delta \mathbf{B}(\omega)) \quad (5.35)$$

となる。

上式の第1項は

$$\delta a(\omega) \sim \frac{\sqrt{2e\bar{q}}}{M\omega} V B_{\text{ip}} \quad (5.36)$$

であり、 $M = 100\text{kg}$ 、 $V \sim 3 \times 10^4\text{m/s}$ 、 $B_{\text{ip}} \sim 3 \times 10^{-8}\text{T}$ を代入して、

$$\delta a(f) \sim 8 \times 10^{-16} \sqrt{\bar{q}} \left(\frac{1\text{Hz}}{f} \right) \text{ms}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (5.37)$$

を得る。従って、鏡に帯電する速さには上限があることが分かる。

一方、第2項は

$$\delta a(f) \sim \frac{q}{M} V \delta B_{\text{ip}}(f) \sim 10^{-9} q \left(\frac{1\text{Hz}}{f} \right) \text{ms}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (5.38)$$

となって、帯電する電荷に上限があることが分かる。

1Hz 付近での散射雑音レベルが $9.4 \times 10^{-23} \text{1}/\sqrt{\text{Hz}}$ であるので、これを超えないようにするには、

$$\dot{q} < 3 \times 10^{-5} \text{C/s}, \quad (5.39)$$

$$q < 5 \times 10^{-15} \text{C} \quad (5.40)$$

が必要となる。宇宙線からの帯電は $\dot{q} \sim 13e \text{s}^{-1} \sim 10^{-18}\text{C/s}$ と見積もられているので、帯電速度については問題ないと考えられるが、電荷の方はこの帯電速度では1時間程で上限を超えてしまう。鏡の放電や電気遮蔽の必要がある。

5.4 FP-DECIGO の感度曲線

散射雑音と輻射圧雑音から決まる FP-DECIGO の感度曲線を示す。

基線長 $d = 500\text{km}$ 、フィネス $\mathcal{F} = 50$ 、鏡の直径 $D = 2\text{m}$ 、レーザー光パワー 1W としたときの FP-DECIGO の感度曲線を図 5.5 に示す。フロアレベルは 0.1Hz で $h \sim 9.4 \times 10^{-23} \text{1}/\sqrt{\text{Hz}}$ である。DECIGO よりも2桁ほど感度が上がった。しかし、直径2m という大口径の鏡が必要であり、非常に高い技術が必要である。

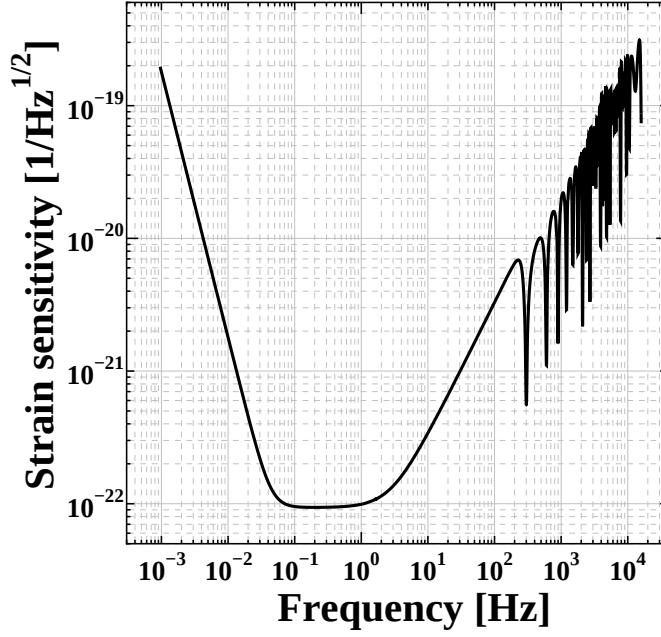


図 5.5: 基線長 $d = 500\text{km}$ 、フィネス $\mathcal{F} = 50$ 、鏡の直径 $D = 2\text{m}$ 、質量 $M = 100\text{kg}$ 、入射レーザー光パワー 0.3W としたときの FP-DECIGO の感度曲線。

基線長 $d = 30\text{km}$ 、フィネス $\mathcal{F} = 500$ 、鏡の直径 $D = 60\text{cm}$ 、質量 $M = 100\text{kg}$ 、レーザー光パワー 1W としたときの FP-DECIGO の感度曲線を図 5.6 に示す。フロアレベルは 1Hz で $h \sim 1.7 \times 10^{-22} 1/\sqrt{\text{Hz}}$ である。 $d = 500\text{km}$ の場合よりも感度が落ち、観測帯域が狭くなっている。しかし、鏡の直径 60cm は地上型の干渉計で現在使われているサイズの倍程度であり、十分可能であると考えられる。

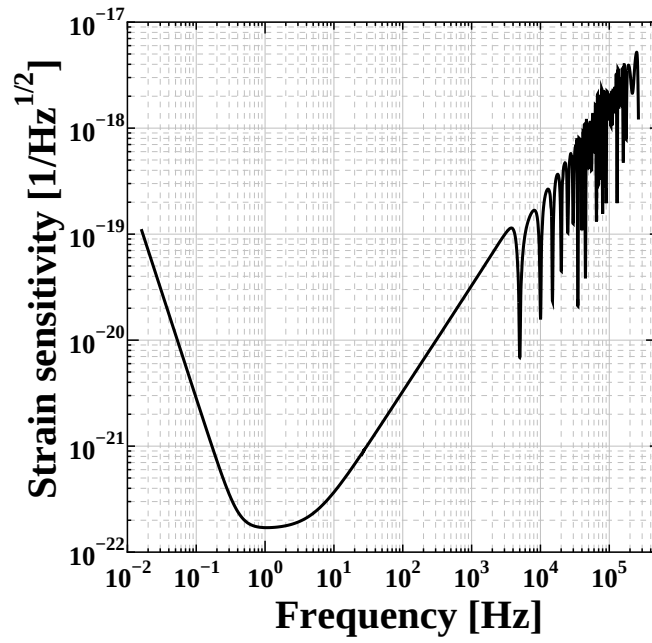


図 5.6: 基線長 $d = 30\text{km}$ 、フィネス $\mathcal{F} = 500$ 、鏡の直径 $D = 60\text{cm}$ 、入射レーザー光パワー 0.3W としたときの FP-DECIGO の感度曲線。

第6章 宇宙空間レーザー干渉計型重力波検出器の軌道計算

FP 干渉計において、FP 共振器を共振状態でロックするために光路長はレーザー光の波長よりも十分小さい精度で一定に保たなければならない。しかし、LISA 型の構成の場合、3 機の S/C は近似的に正三角形を構成するが、実際は、それぞれの S/C が太陽を焦点とした楕円軌道を描くため、厳密に S/C 間の距離は一定とはならない。更には、太陽以外の天体からの外乱が加わるため、各 S/C の軌道も楕円からずれる。そこで、S/C の軌道を計算し、S/C 距離の距離変動の時間発展を論じ、FP 共振器を共振状態でロックするために必要な要求について考察することは非常に重要である。

6.1 太陽の重力のみを考えた場合の軌道

6.1.1 S/C 間距離の変動

まず、太陽からの重力のみが働くときを考える。これは太陽と S/C の 2 体問題であり、S/C は太陽を焦点とした楕円軌道を描く¹。3S/C の重心は黄道面上にあるので、基準系として黄道面を xy 平面とし太陽の位置を原点とする直交座標系 xyz をとる。

各 S/C の軌道を指定するために、軌道要素を用いる。軌道要素とは、軌道長半径 a 、軌道離心率 e 、軌道傾斜角 i 、昇交点経度 Ω 、近点引数 ω 、元期近点離角 M_0 の 6 つの量である。各軌道要素は図 6.1.1 に示される量である。また、各 S/C を $j = 1, 2, 3$ で呼ぶこととし、対応する物理量には下付添字 j をつける。

公転の平均運動 n_j について、Kepler の第 3 法則

$$n_j = \sqrt{\frac{\mu_j}{a_j^3}} \quad (6.1)$$

が成り立つ。ここで、 $\mu_j = G(M_\odot + m_j) \simeq GM_\odot$ であり、 G は重力定数、 $M_\odot$ 、 m_j はそれぞれ太陽、S/C j の質量である。

¹重力が働く場合、天体は重力源を焦点とした楕円、双曲線、放物線のいずれかの軌道を描くが、S/C には閉じた軌道が要求されるので、ここでは楕円軌道のみを考える。

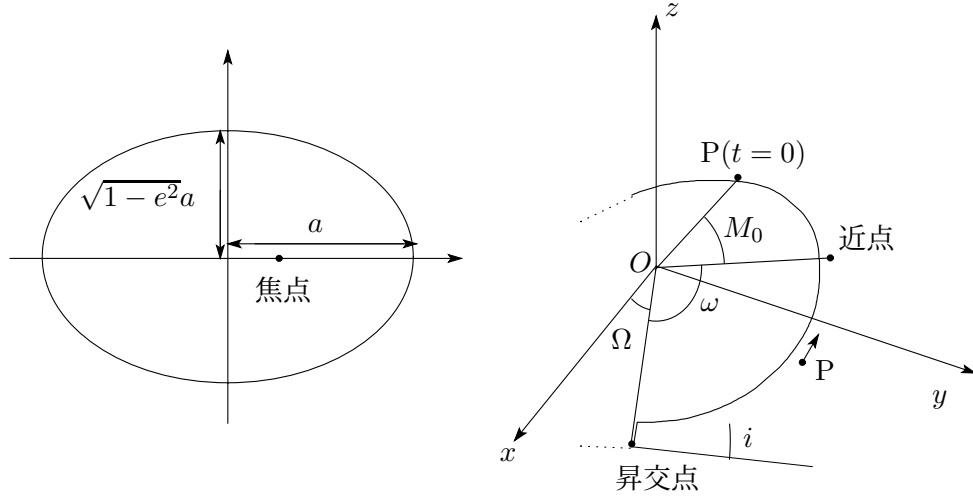


図 6.1: 軌道要素。軌道長半径 a は楕円の大きさを、軌道離心率 e は楕円の形状を示す (図左)。軌道傾斜角 i は軌道の基準系に対する傾きを、昇交点経度 Ω は軌道の基準系に対する位置を、近点引数 ω は軌道の基準系に対する向きを、元期近点離角 M_0 は元期 $t = 0$ における軌道上での位置を示す (図右)。

3機の S/C が対称であるときを考えると、軌道要素は

$$a_1 = a_2 = a_3 = a, \quad (6.2)$$

$$e_1 = e_2 = e_3 = e, \quad (6.3)$$

$$i_1 = i_2 = i_3 = i, \quad (6.4)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega, \quad (6.5)$$

$$\Omega_1 = \Omega, \quad \Omega_2 = \Omega + \frac{2}{3}\pi, \quad \Omega_3 = \Omega - \frac{2}{3}\pi, \quad (6.6)$$

$$M_{01} = M_0, \quad M_{02} = M_0 - \frac{2}{3}\pi, \quad M_{03} = M_0 + \frac{2}{3}\pi \quad (6.7)$$

となる。即ち、楕円軌道の形と大きさを決める軌道長半径 a 、及び、軌道離心率 e は、S/C によらず等しく、更に各 S/C 軌道は 120° 、その軸を開いた位置関係である事を要求する。

今、S/C の公転周期を地球と等しくするために (6.1) 式から

$$a = a_E \quad (6.8)$$

が要求される。 $a_E = 1.49597870 \times 10^8 \text{ km}$ は地球の軌道長半径である。

軌道傾斜角は S/C 間の典型的な距離を d とすれば、3 S/C の重心はほぼ黄道面上にある

ので²、

$$i \sim \frac{d}{2a} \quad (6.10)$$

となる。

また、対称性より、各 S/C の近点方向は $2\pi/3$ ずつ開いているので、

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \text{ or } \frac{3}{2}\pi \quad (6.11)$$

である。

さらに、

$$\Omega = 0, \quad M_0 = 0 \quad (6.12)$$

としても、一般性を失わない³。

これらの軌道要素から各 S/C の位置 (x_j, y_j, z_j) を求め、 $e, i \ll 1$ として e と i の 3 次まで展開して、S/C1 と S/C2 間の距離 L_{12} を計算すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{L_{12}(t)}{a} \right)^2 &= \frac{3}{2} (5e^2 + i^2) + \frac{3}{2} (-3e^2 + i^2) \cos \left(2nt + \frac{\pi}{3} \right) \\ &\quad + \frac{15}{4} ei^2 \sin \left(nt + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{3}{4} (-4e^3 + ei^2) \cos 3nt \end{aligned} \quad (6.13)$$

となる。 $L_{12}(t)$ の時間平均が d なので、

$$d^2 = \frac{3}{2} (5e^2 + i^2) a^2 \quad (6.14)$$

である。

$e \gg i$ のとき、 $d/a = \sqrt{15/2}e$ であるので、

$$L_{12}(t) = d \sqrt{1 - \frac{3}{5} \cos \left(2nt + \frac{\pi}{3} \right)} \quad (6.15)$$

となって、 $L_{12}(t)$ は 2 年周期で大きく (d の程度) 変動する。

逆に、 $i \gg e$ のとき、 $d/a = \sqrt{3/2}i$ であるので、

$$L_{12}(t) = d \sqrt{1 - \cos \left(2nt + \frac{\pi}{3} \right)} \quad (6.16)$$

²結果から、重心の z 座標 z_G は

$$z_G \simeq -\frac{3}{2} \sqrt{3} a_E e^2 = -\frac{3\sqrt{3}}{24} \frac{d^2}{a_E} \ll d \quad (6.9)$$

であることが導かれる。

³ Ω によって x 軸の向きを、 M_0 によって元期を定義したことになる。

となって、やはり、 $L_{12}(t)$ は2年周期で大きく (d の程度) 変動する。

e と i が同程度の量として、 $i = \sqrt{3}e$ とすれば、(6.13) 式より、 $L_{12}(t)/a$ の変動のうち e^2 、 i^2 の項の変動はなくなり、 e^3 の項が主となる。すなわち、

$$\left(\frac{L_{12}(t)}{a}\right)^2 = 12e^2 + \left\{\frac{45}{4}\sin\left(nt + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{3}{4}\cos 3nt\right\}e^3 \quad (6.17)$$

となる。 $L_{12}(t)$ の時間平均が d であることから、 $12a^2e^2 = d^2$ 、つまり、

$$e = \frac{d}{2\sqrt{3}a}, \quad i = \frac{d}{2a} \quad (6.18)$$

を得る。

結局、 a_E 、 d を用いて、 $L_{12}(t)$ を表すと

$$L_{12}(t) = d + \frac{d^2}{64\sqrt{3}a_E} \left\{15\sin\left(nt + \frac{\pi}{6}\right) - \cos 3nt\right\} \quad (6.19)$$

となる⁴。S/C 間距離 $L_{12}(t)$ の変動は、1 年で

$$\Delta L = \frac{d^2}{4\sqrt{3}a_E} \quad (6.20)$$

の程度となり、 d^2 に比例する。図 6.2 に d に対する ΔL の値を示す。また、 $d = 500\text{km}$ のときの各 S/C 間距離の変動を図 6.3 に示す。3 本の S/C 間距離の変動は位相が $2\pi/3$ ずれたものになる。

以下、軌道要素として、

$$a = a_E, \quad (6.21)$$

$$e = \frac{d}{2\sqrt{3}a_E}, \quad (6.22)$$

$$i = \frac{d}{2a_E}, \quad (6.23)$$

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \text{ or } \frac{3}{2}\pi \quad (6.24)$$

$$\Omega_1 = \Omega, \quad \Omega_2 = \Omega + \frac{2}{3}\pi, \quad \Omega_3 = \Omega - \frac{2}{3}\pi, \quad (6.25)$$

$$M_{01} = M_0, \quad M_{02} = M_0 - \frac{2}{3}\pi, \quad M_{03} = M_0 + \frac{2}{3}\pi \quad (6.26)$$

を基準とする。基準軌道要素のときの各 S/C の軌道の位置関係を図 6.1.1 に示す。

⁴関数

$$f(x) = 15 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - \cos 3x$$

は $x = \pi/3$ で極大値 16 をとり、 $x = 4\pi/3$ で極小値 -16 を取る。

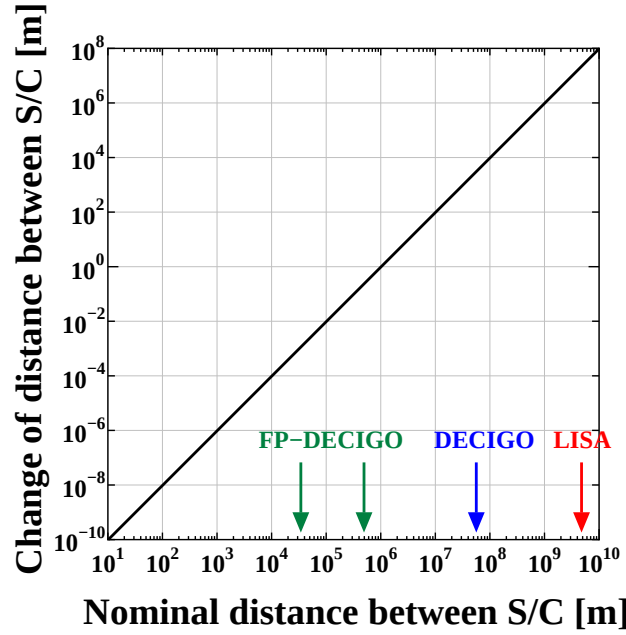


図 6.2: 太陽の重力のみの影響下での各平均 S/C 間距離 d (横軸) に対する距離変動 ΔL (縦軸)。

6.1.2 S/C 間相対速度の変動とドップラー効果

S/C 間の相対速度の時間変化は、(6.19) 式を時間について微分して

$$V(t) = \dot{L}_{12}(t) = \frac{\sqrt{3}d^2n}{64a_E} \left\{ 5 \cos \left(nt + \frac{\pi}{6} \right) + \sin(3nt) \right\} \quad (6.27)$$

である⁵。従って、相対速度変動は 1 年で最大

$$\Delta V = \frac{\sqrt{2}d^2n}{12a_E} \quad (6.29)$$

となる。

この相対速度の変動によって、S/C 間を往復するレーザー光はドップラー効果を受ける。

⁵関数

$$f(x) = 5 \cos \left(nt + \frac{\pi}{6} \right) + \sin(3nt) \quad (6.28)$$

は $x = 5\pi/6, 11\pi/6$ で凹型の「へこみ」の部分 ± 4 の値を取り、 $x = \pm \{\arccos(\pm 1/\sqrt{3}) - 2\pi/3\}$ で凹型の「肩」の部分 $\pm 16/3$ を取る (図 6.6 参照)。

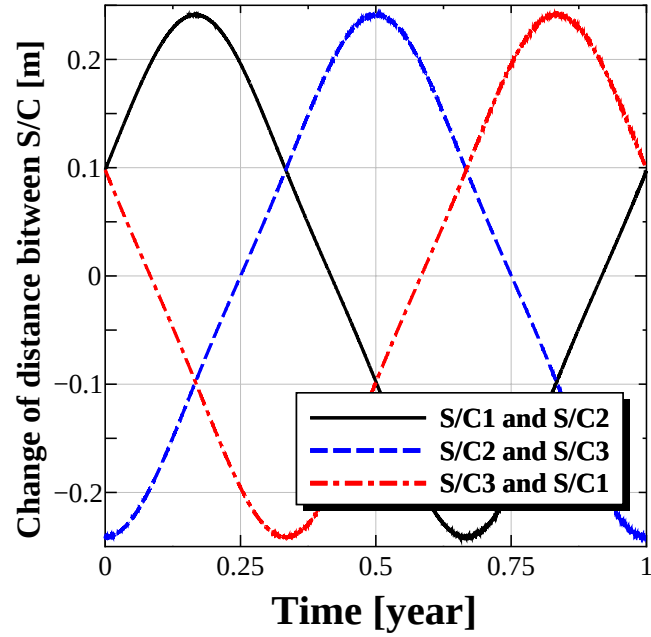


図 6.3: 太陽の重力のみの影響下での $d = 5 \times 10^2 \text{ km}$ のときの S/C 間距離の変動。3 本の腕の長さの変動は位相が $2\pi/3$ ずれたものになる。

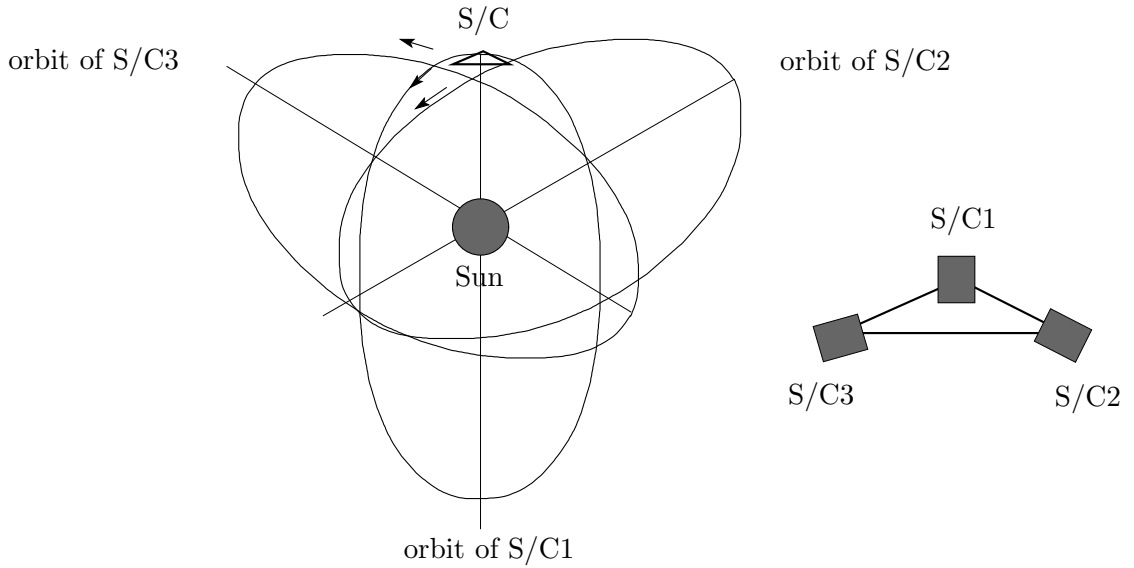


図 6.4: 基準軌道要素における各 S/C の軌道の位置関係。 $\omega = \pi/2$ 、 $\Omega = M_0 = 0$ とした。各 S/C の軌道は 120° ずつ軸が開いた向きにあり、同じ大きさ、形状の楕円軌道である。更に実際は紙面垂直方向にそれぞれ角度 i だけ傾いている。軌道離心率 e を大きく誇張して描いたが、図より 3 機の S/C は正三角形を維持できないのが分かる

S/C1 から発せられたレーザー光の S/C2 で受けた振動数 f は

$$f(t) = f_0 \sqrt{\frac{c - V(t)}{c + V(t)}} \simeq \left(1 - \frac{V(t)}{c}\right) f_0 \quad (6.30)$$

となる。 f_0 はレーザー光源での振動数である。従って、往復で考えた場合、振動数は1年で最大

$$\Delta f = 2 \frac{\Delta V}{c} f_0 \quad (6.31)$$

だけドップラーシフトする⁶。図 6.5 に d に対する ΔV と Δf の値を示す。

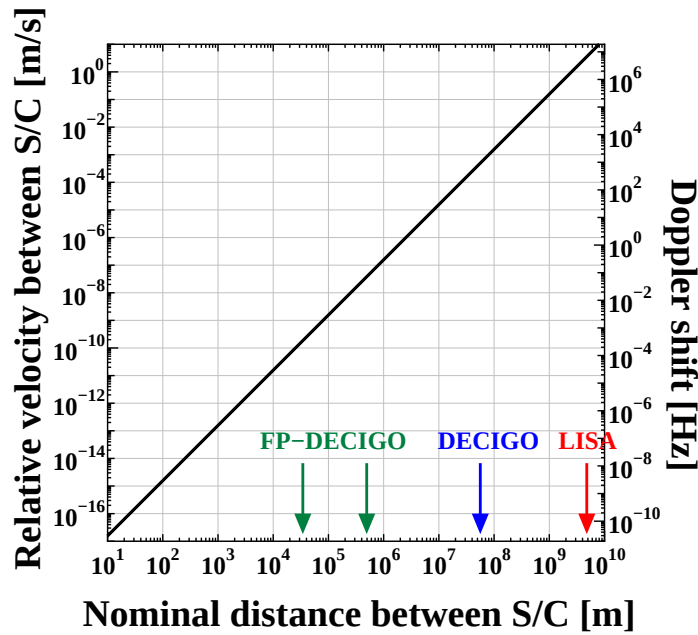


図 6.5: 太陽の重力のみの影響下での各平均 S/C 間距離 d (横軸) に対する相対速度変動 ΔV 、及び、ドップラーシフト Δf (縦軸)。

6.2 太陽以外の天体からの摂動も考えた場合の軌道

前節では、純粋な太陽と S/C の純粋な 2 体問題として軌道を計算したが、現実には S/C は太陽以外の天体からも重力を受けるため、その軌道は楕円軌道からははずれる。この節では、太陽以外の天体による重力の効果について考慮する。

⁶厳密にはレーザー光が往復する間に $V(t)$ が変化するが、その変化はレーザー光の往復時間では十分に小さい。

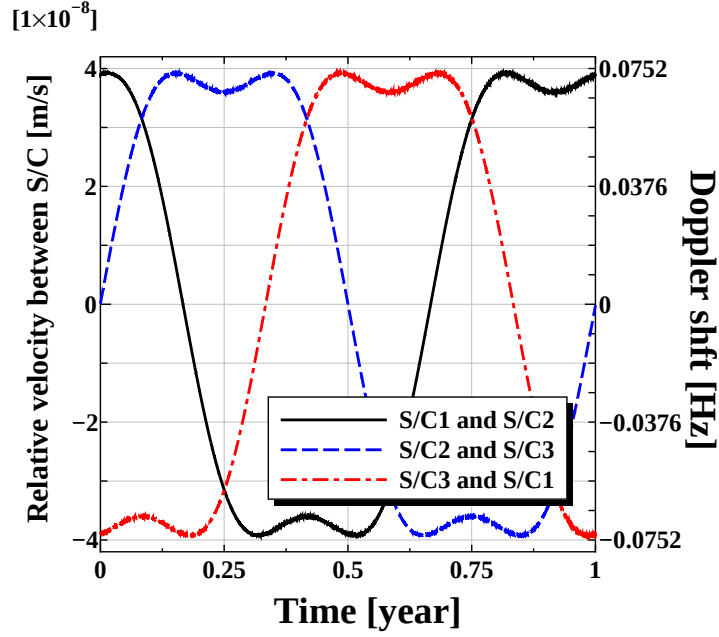


図 6.6: 太の重力のみの影響下での $d = 5 \times 10^2 \text{ km}$ のときの S/C 間相対速度、及び、ドップラースhift。

6.2.1 潮汐力

図のように 2S/C が Δr だけ離れているときに r だけ離れた天体から受ける重力の差、つまり、潮汐力を考える。ここで、 $\Delta r \ll r$ とする。天体の質量を m とすれば、2S/C に働く (単位質量あたりの) 潮汐力 f_{tidal} は

$$f_{\text{tidal}} \sim \frac{Gm}{r^2} - \frac{Gm}{(r + \Delta r)^2} \sim \frac{Gm}{r^2} \left(1 - 1 + \frac{2\Delta r}{r} \right) \sim \frac{2Gmd}{r^3} \quad (6.32)$$

程度となる。ここで潮汐力が最大となる場合として $\Delta r \sim d$ とした。

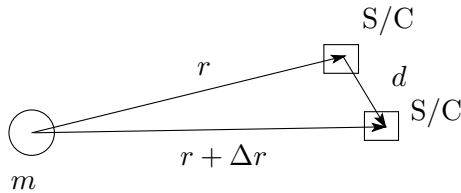


図 6.7: 2S/C 間と天体の位置

各天体についての潮汐力 f_{tidal} を表 6.1 に示す。S/C に最も近い地球の影響が大きく、ついで木星であることがわかる。金星の接近時は地球と同程度以上の潮汐力を及ぼすためそ

の影響は無視できない。天王星以遠の惑星、太陽系内の惑星以外の天体や太陽系外の天体はその効果の非常に小さいことがわかる。

表 6.1: 太陽以外の天体による潮汐力。 $m_{\odot} = 2.0 \times 10^{30} \text{kg}$ 、 $1\text{AU} = 1.5 \times 10^{11} \text{m}$ とし、S/C からの平均距離について求めた。S/C は地球軌道上を地球の後方 20° にあるとした。地球に近い惑星については最接近時と平均の 2 場合について示す。また、最大の小惑星セレス、最も近い太陽系外恒星の α ケンタウリ、銀河系全体による潮汐力も示す。

天体	$m [m_{\odot}]$	$r [\text{AU}]$	$f_{\text{tidal}}/f_{\text{tidal}\odot}$
水星 (接近時)	1.7×10^{-7}	0.62	7.0×10^{-7}
水星 (平均)	1.7×10^{-7}	1	1.7×10^{-7}
金星 (接近時)	2.5×10^{-6}	0.28	1.1×10^{-4}
金星 (平均)	2.5×10^{-6}	1	2.5×10^{-6}
地球	3.0×10^{-6}	0.34	7.6×10^{-5}
火星 (接近時)	3.2×10^{-7}	0.5	2.5×10^{-7}
火星 (平均)	3.2×10^{-7}	1.5	9.2×10^{-8}
木星	9.6×10^{-4}	5.2	6.8×10^{-6}
土星	2.9×10^{-4}	9.6	3.3×10^{-7}
天王星	4.4×10^{-5}	19	6.2×10^{-9}
海王星	5.2×10^{-5}	40	1.9×10^{-9}
冥王星	7.4×10^{-9}	40	1.2×10^{-13}
月	3.7×10^{-8}	0.34	9.4×10^{-7}
小惑星セレス	5.9×10^{-10}	2.7	3.0×10^{-11}
銀河系	2×10^{11}	1.8×10^9	3.6×10^{-17}
α ケンタウリ	1	2.7×10^5	5.0×10^{-17}

6.2.2 潮汐力の効果

太陽系以外の天体の潮汐力の S/C に及ぼす影響を考える。この潮汐力によって S/C 間距離は時間 T の間に粗く見積もって

$$\Delta L_{\text{tidal}} \sim \frac{GmdT^2}{r^3} \quad (6.33)$$

程度変動する。つまり、S/C 間距離は不安定であり、時間とともに大きくなっていく。これが太陽重力のみ働くときの S/C 距離変動 ((6.20) 式) と同程度になるには、

$$\frac{GmdT^2}{r^3} \sim \frac{d^2}{4\sqrt{3}a_E}, \quad (6.34)$$

$$T \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r^3 d}{\sqrt{3}Gma_E}} \quad (6.35)$$

程度の時間がかかる。表 6.1 において最も影響の大きい地球の場合、 $T \sim 5 \times 10^2 \sqrt{d}$ 年であり、基線長の短い干渉計ほど太陽以外の天体からの影響が相対的に大きくなる。LISA の場合、 $d = 5 \times 10^6 \text{ km}$ として $T \sim 3$ 年、DECIGO の場合、 $d = 5 \times 10^4 \text{ km}$ として $T \sim 3$ 月、FP-DECIGO の場合、 $d = 5 \times 10^2 \text{ km}$ として $T \sim 10$ 日となる。

FP 共振器の共振状態を保っておく必要があるため、FP-DECIGO では S/C 間距離を一定に保つ制御が重大なテーマとなる。

6.2.3 一般相対論的な効果

古典的力学的な扱いのもとにおける潮汐力のみではなく、一般相対性理論の効果も考えると、古典力学に対する一般相対性理論の効果の割合は S/C の公転速度の 2 乗に比例し、

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim \left(\frac{3 \times 10^4 \text{ m/s}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}}\right)^2 \sim 10^{-8} \quad (6.36)$$

程度となる。これは太陽系の惑星による潮汐力と同程度で、小惑星や太陽系外天体よりも非常に大きい。

6.3 太陽以外の天体も考慮した場合の軌道の数値計算

太陽以外の天体の影響を考慮した場合、S/C は運動方程式、

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t), \quad (6.37)$$

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = -\frac{Gm_\odot}{|\mathbf{x}(t)|^3} \mathbf{x}(t) - \sum_k \frac{Gm_k}{|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k(t)|^3} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k(t)) \quad (6.38)$$

に従うが、この問題は多体問題であり解析的な解は知られていない。従って、数値計算の方法で軌道を求め、S/C 間距離の変化などを考えることにする。

数値計算に際して、太陽以外の天体としては、太陽系の 9 つの惑星と月による影響を考え、2004 年 7 月 14.0 日を元期とした。尚、一般相対性理論の効果、惑星に働く摂動の効果は考えず、惑星は太陽を焦点とする楕円軌道を描くとした。

6.3.1 元期平均近点離角と S/C 間距離

S/C の初期条件としては、6.1 節で求めた基準軌道要素 ((6.21) から (6.26) 式) を用いる。 Ω と M_0 にはまだ任意性が残っているが、S/C 重心の地球からの角度を θ とすれば、地球の軌道要素 $\omega_E, \Omega_E, M_{0E}$ と S/C の軌道要素 ω, Ω, M_0 との間には

$$\omega_E + \Omega_E + M_0 = \omega + \Omega + M_0 + \theta \quad (6.39)$$

の関係がある⁷ので、 θ を指定すると Ω と M_0 は独立ではなくなる。従って、以下では M_0 の違いにおける S/C 間距離の時間発展の違いについて考える。

M_0 の違いは 3 機の S/C と摂動天体、特に最も影響の大きい地球との位置関係を決めるため、 M_0 によって S/C と地球の間の距離がどのように変化するかを調べる。

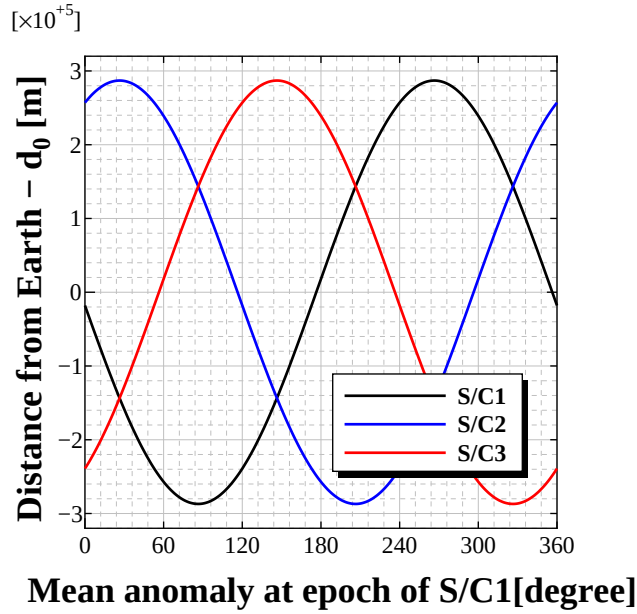


図 6.8: 元期平均近点離角に対する元期での S/C と地球の間の距離。S/C と地球間の平均距離 $d_0 = 5.16640193850927 \times 10^{10} \text{m}$ との差を示す。S/C の重心は地球の後方 20° にあるとした。

図 6.8 に S/C の重心が地球の後方 20° にあるとしたときの元期での S/C と地球の間の距離の M_0 への依存性を示す。6.2 節で見積もった潮汐力は最も悲観的な場合を考えたが、常に 3 機の S/C のうちどれか 2 機は地球からの距離の差が $3 \times 10^5 \text{m} \sim d$ 程度あり、6.2 節

⁷一般に天体の軌道傾斜角が小さいとき、近点引数、昇交点経度、元期平均近点離角の和 $\omega + \Omega + M_0$ は基準系 x 軸からの凡その角度を表わす。

で見積もった程度の潮汐力の効果があると考えられる。

図 6.8 から特徴的な場合として、 $M_0 = 26^\circ, 56^\circ, 86^\circ, 116^\circ$ のときを考えることにする。これらの M_0 のとき、元期での地球と 3 機の S/C の位置関係は凡そ図 6.9 のようにある。

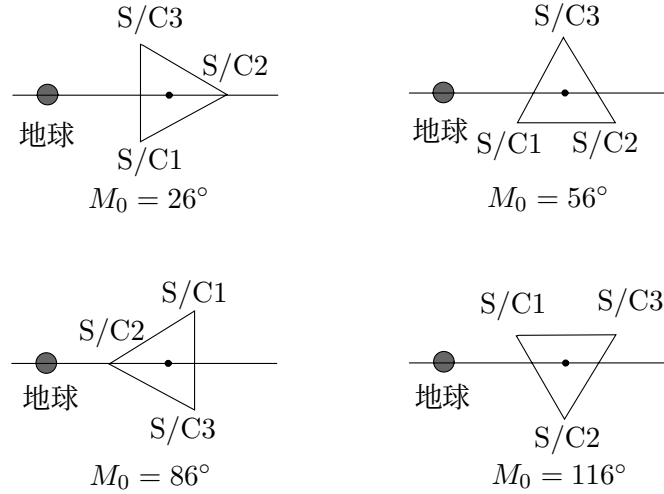


図 6.9: 各 M_0 における地球と S/C の位置関係

それぞれの M_0 に対する S/C 間距離の変化を図 6.10 に示す。6.2 節での見積もりのとおり、1 年で 10^3m 程度 S/C 距離間距離が変動し、時間とともに大きくなり不安定である。また、数年程度の時間では、異なる腕の変動の大きさの相対関係は保たれることが分かる。 $M_0 = 26^\circ$ と 86° のとき、 56° と 116° のときは S/C が入れ替わっているように変化しているので、以下では $M_0 = 26^\circ$ と 56° のときのみ考察する。

$M_0 = 26^\circ$ のとき、元期において S/C2 が地球から最も遠く、S/C1 と S/C3 は地球から等しい距離にある。このとき、 $\Delta L_{12} \sim \Delta L_{23} < \Delta L_{31}$ である。干渉計の腕は 2 本の長さが等しいことが望ましいので、2 本の距離変動も同程度になって小さいのが望ましい。従って、 $M_0 = 26^\circ$ が最も望ましい元期平均近点離角であるといえる。

$M_0 = 56^\circ$ のとき、元期において S/C1、S/C3、S/C2 の順に地球から遠くなる。1 本の腕の長さだけ小さい変動に抑えられ、残り 2 本の腕の変動は大きいものになっている。腕が 1 本の干渉計を用いるとき望ましい配置といえる。

以下では $M_0 = 26^\circ$ として考える。

6.3.2 S/C 間距離の変動のまとめ

前節の結果から、S/C 間距離は FP 共振器を共振状態でロックするには非常に大きな変動をすることがわかった。そこで、必要となるのは光路長の制御である。しかし、常に制

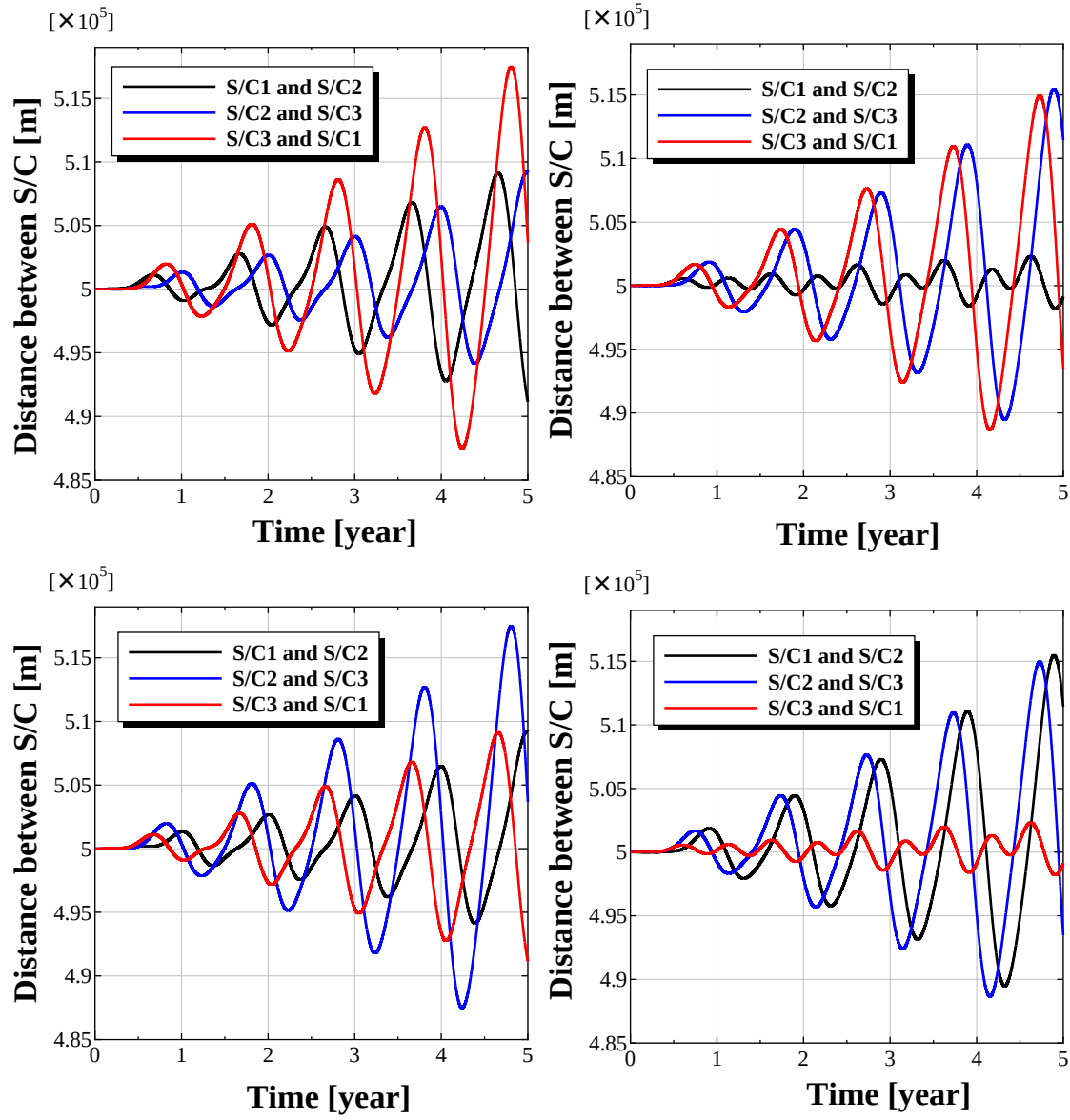


図 6.10: M_0 を変えたときの S/C 距離の変化。左上 $M_0 = 26^\circ$ 、右上 $M_0 = 56^\circ$ 、左下 $M_0 = 86^\circ$ 、右下 $M_0 = 116^\circ$ 。

御をかけ続けるようなスラスターの開発は容易ではない。従って、ある期間毎に制御を加えることになる。

以下に、 $d = 500\text{km}$ 、 30km 、 $\theta_{S/C-E} = 20^\circ$ 、 45° のときの S/C 間距離変動を示す。同時に距離変動が 1m 程度となる期間分も示す。元期近点離角 $M_0 = 26^\circ$ とした。

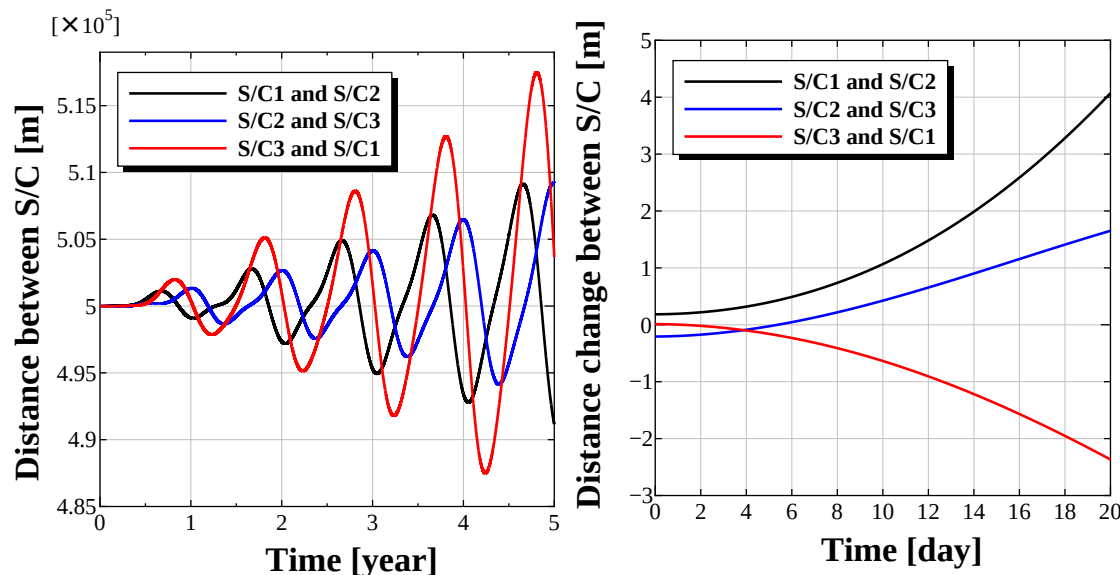


図 6.11: $d = 500\text{km}$ 、 $\theta_{S/C-E} = 20^\circ$ での S/C 距離変動。左が 5 年間の S/C 間距離の変動、右が 20 日間での S/C 間距離の平均距離からの変動。

どの場合も、変動が 1m 程度の期間を超えると、急激に距離が変わる。従って、 1m 程度の変動のうちに制御を与え、軌道を修正してやらなければならない。よって、変動が長い間小さく保たれる $d = 30\text{km}$ の方が $d = 500\text{km}$ よりも有利である。

6.3.3 地球からの角度と S/C 間距離

LISA 計画では S/C は地球の後方約 20° に配置される。これは、軌道投入や通信のための要求への制限と、地球の重力場や磁場の影響の低減の折衷を考へてのことである。しかし、S/C を地球の軌道上に配置する場合、外乱の影響の最も大きい地球からなるべく遠ざけることは、S/C の軌道安定のために効果的であると考えられる。

以下では、S/C と地球の間の角度 $\theta_{S/C-E}$ を変化させたときの S/C 間距離の時間発展について考察する。

$\theta_{S/C-E}$ による S/C に働く地球による潮汐力を図 6.15 に示す。 $\theta_{S/C-E}$ が 0° から 60° の範囲で大きく地球による潮汐力が変わることがわかる。従って、S/C 間距離の変動も同様な依存性を示すと考えられる。

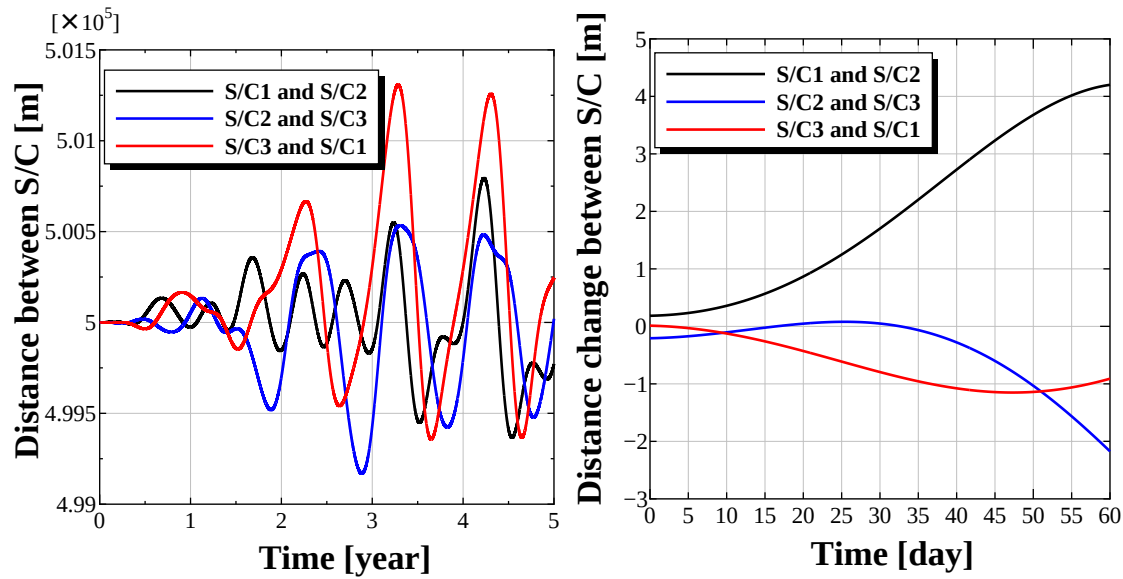


図 6.12: $d = 500\text{km}$, $\theta_{\text{S/C-E}} = 45^\circ$ での S/C 距離変動。左が 5 年間の S/C 間距離の変動、右が 60 日間での S/C 間距離の平均距離からの変動。

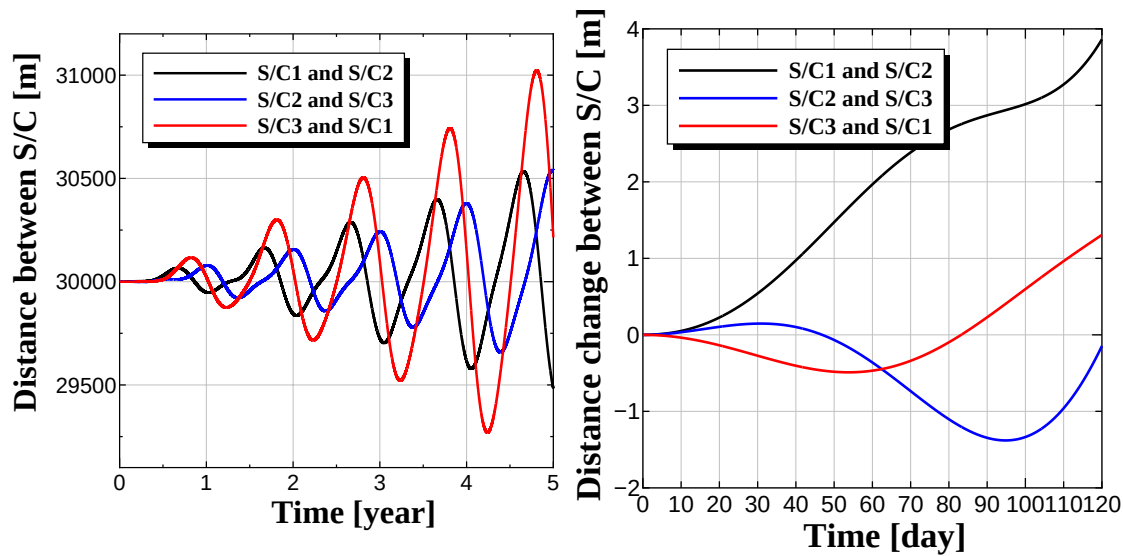


図 6.13: $d = 30\text{km}$, $\theta_{\text{S/C-E}} = 20^\circ$ での S/C 距離変動。左が 5 年の S/C 間距離の変動、右が 120 日間での S/C 間距離の平均距離からの変動。

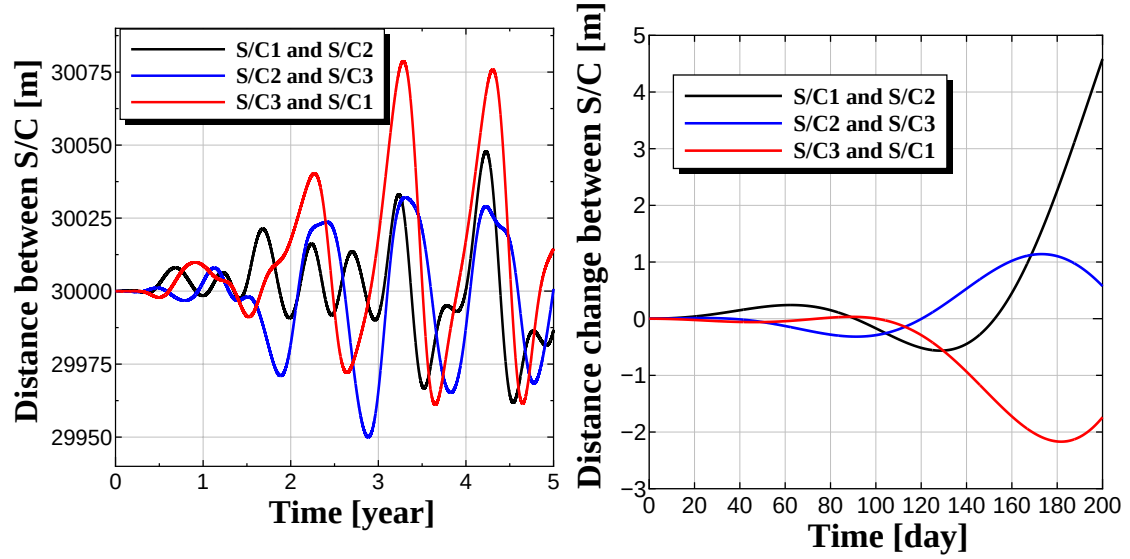


図 6.14: $d = 30\text{km}$ 、 $\theta_{\text{S/C-E}} = 45^\circ$ での S/C 距離変動。左が 5 年の S/C 間距離の変動、右が 200 日間での S/C 間距離の平均距離からの変動。

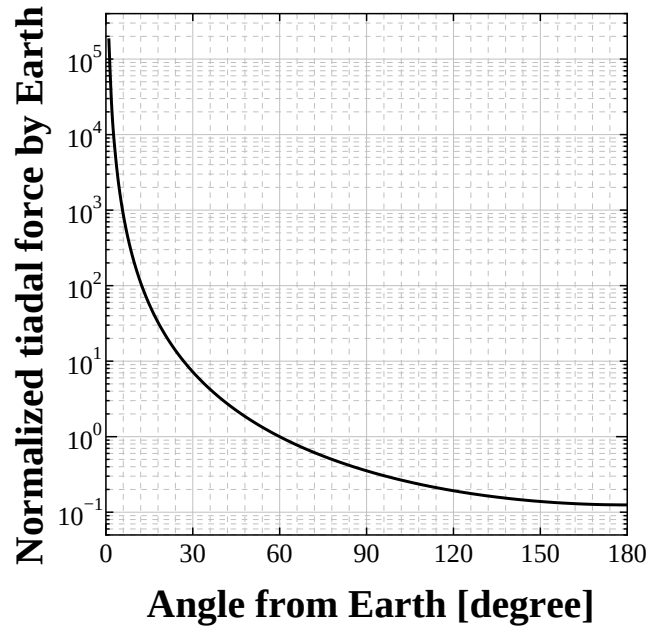


図 6.15: 地球からの角度 $\theta_{\text{S/C-E}}$ による S/C に働く地球による潮汐力の変化。縦軸は $\theta_{\text{S/C-E}} = 60^\circ$ のときを 1 とした潮汐力の大きさである。

S/C と地球の間の角度 $\theta_{S/C-E}$ を $\theta_{S/C-E} = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ と変化させたときの S/C 間距離変化を図 6.16、6.17 を示す。予想通り $\theta_{S/C-E}$ が $10^\circ (\Delta L \sim 150\text{km})$ から $45^\circ (\Delta L \sim 1.5\text{km})$ の範囲で S/C 間距離の変動の大きさに大きく違いがある。

一方で $\theta_{S/C-E}$ が 45° から 180° の範囲では S/C 間距離の変動の大きさに差はない。これは地球から離れたため、地球以外の惑星、主に金星の影響が大きくなったためと考えられる。

以上から、 $\theta_{S/C-E}$ は 45° 程度以上が望ましいと考えられる。このために今後の宇宙通信技術の発展が重要である。

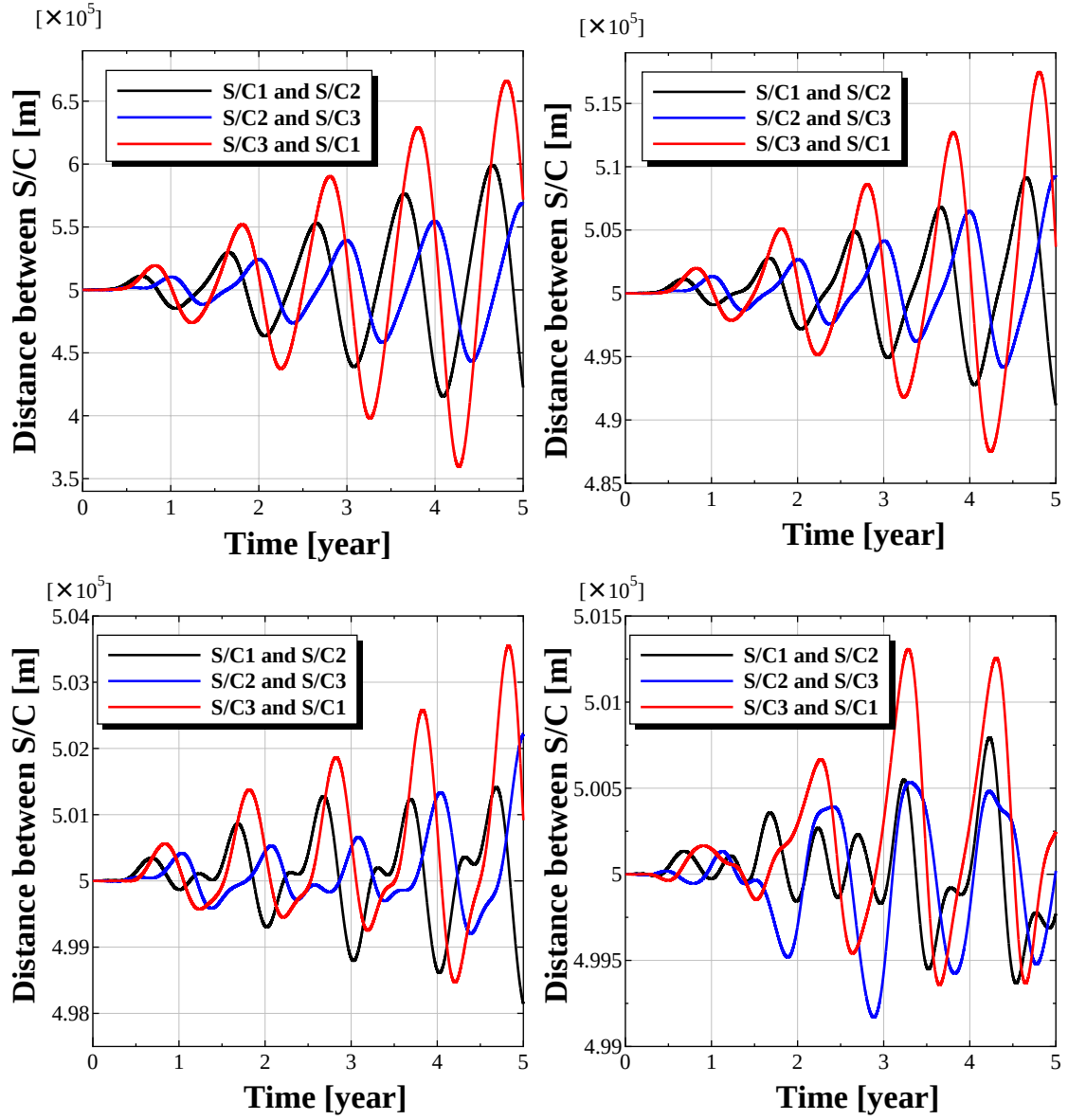


図 6.16: 地球からの角度 $\theta_{S/C-E}$ を変えたときの S/C 間距離の変化。左上 $\theta_{S/C-E} = 10^\circ$ 、右上 $\theta_{S/C-E} = 20^\circ$ 、左下 $\theta_{S/C-E} = 30^\circ$ 、右下 $\theta_{S/C-E} = 45^\circ$ 。

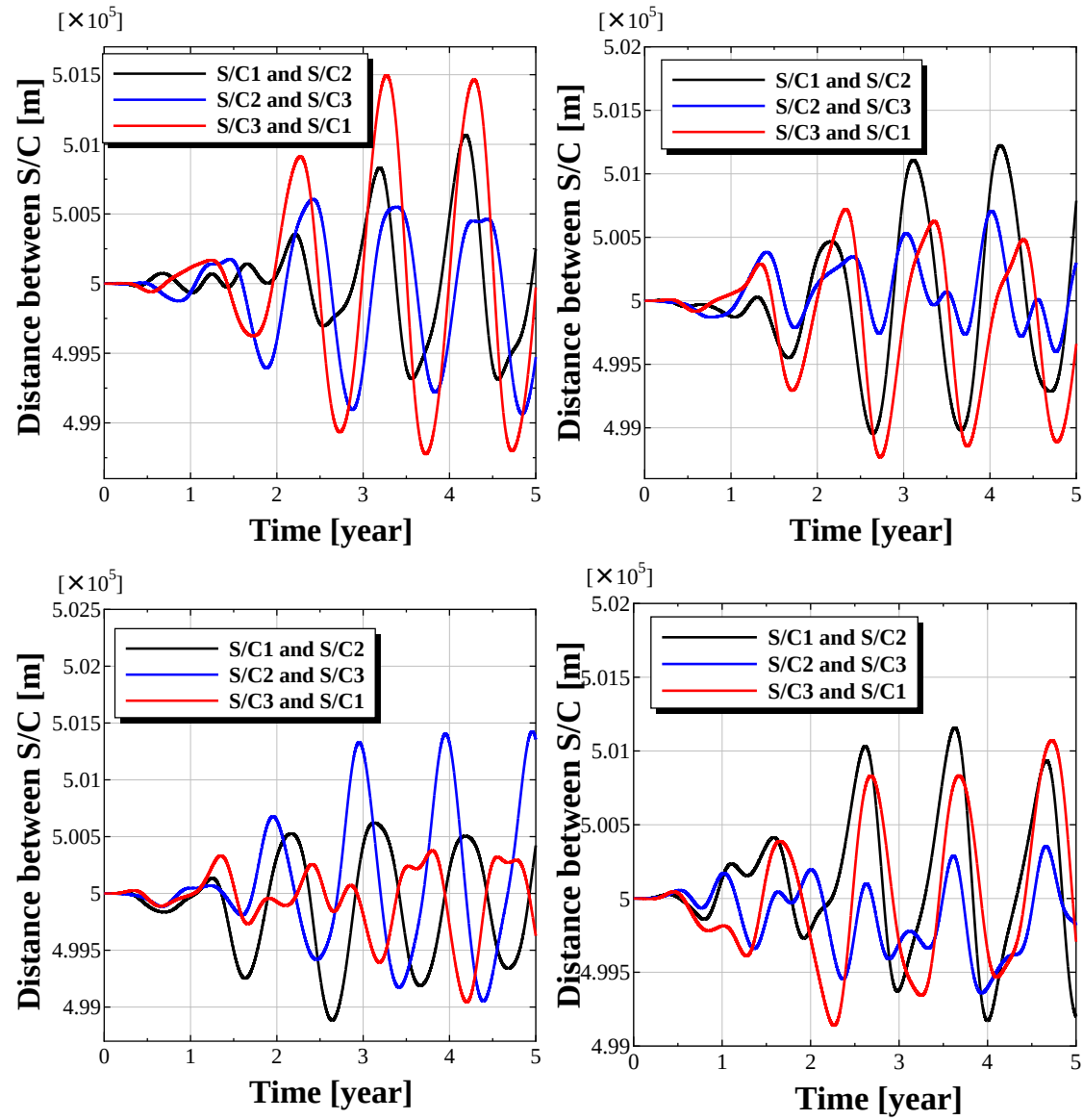


図 6.17: 地球からの角度 $\theta_{S/C-E}$ を変えたときの S/C 間距離の変化。左上 $\theta_{S/C-E} = 60^\circ$ 、右上 $\theta_{S/C-E} = 90^\circ$ 、左下 $\theta_{S/C-E} = 120^\circ$ 、右下 $\theta_{S/C-E} = 180^\circ$ 。

第7章 結果と考察

7.1 結果

FP 共振器を備える宇宙空間干渉計型重力波検出器を考察し、感度について次の結果が得られた (図 7.1)。

- 基線長 $d = 500\text{km}$ 、フィネス $\mathcal{F} = 50$ 、鏡の直径 $D = 2\text{m}$ 、レーザー光パワー 1W のとき、感度曲線のフロアレベルは 0.1Hz から 1Hz の間で $h \sim 1 \times 10^{-22} \text{ } 1/\sqrt{\text{Hz}}$ となった。
- 基線長 $d = 30\text{km}$ 、フィネス $\mathcal{F} = 500$ 、鏡の直径 $D = 60\text{cm}$ 、質量 $M = 100\text{kg}$ 、入射レーザー光パワー 0.3W のとき、感度曲線のフロアレベルは 0.7Hz から 2Hz で $h \sim 2 \times 10^{-22} \text{ } 1/\sqrt{\text{Hz}}$ となった。

表 7.1: FP-DECIGO の感度。基線長 d 、フィネス $\mathcal{F}$ 、鏡の直径 D 、鏡の質量 M 、共振器に入射するレーザー光パワー P などのパラメータも合わせて示す。

$d \text{ [km]}$	$\mathcal{F}$	$D \text{ [m]}$	$M \text{ [kg]}$	$P \text{ [W]}$	$h \text{ [} 1/\sqrt{\text{Hz}} \text{]}$
500	50	2	100	0.3	$1 \times 10^{-22} \text{ @ } 0.1\text{Hz}$
30	500	0.6	100	0.3	$2 \times 10^{-22} \text{ @ } 1\text{Hz}$

また、宇宙空間干渉計の S/C の軌道を計算し、S/C 間距離の変動を求めた。

- 基線長 $d = 500\text{km}$ の場合、地球からの角度 20° のときに 1 年で 2km 、10 日で 1m 程度の変動があることがわかった。地球からの角度 45° のときは 1 年で 200m 、1 ヶ月で 1m 程度の変動があることがわかった。
- 基線長 $d = 30\text{km}$ の場合、地球からの角度 20° のときに 1 年で 100m 、1 ヶ月で 1m 程度の変動があることがわかった。地球からの角度 45° のときは 1 年で 10m 、4 ヶ月で 1m 程度の変動があることがわかった。

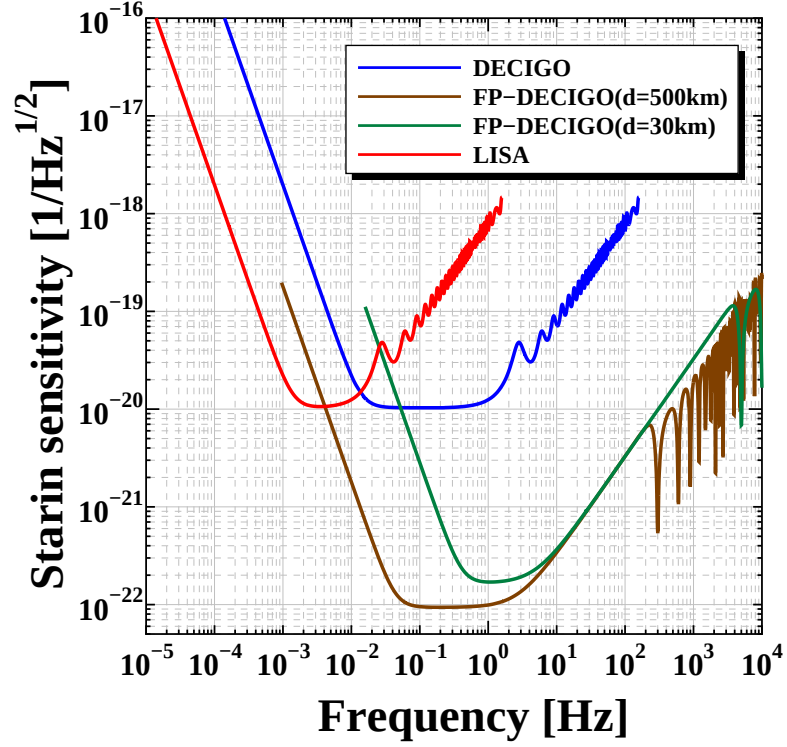


図 7.1: FP-DECIGO の感度曲線。基線長 $d = 500\text{km}$ 、フィネス $\mathcal{F} = 50$ 、鏡の直径 $D = 2\text{m}$ 、質量 $M = 100\text{kg}$ 、レーザー光パワー 0.3W のときと基線長 $d = 30\text{km}$ 、フィネス $\mathcal{F} = 500$ 、鏡の直径 $D = 60\text{cm}$ 、質量 $M = 100\text{kg}$ 、入射レーザー光パワー 0.3W のときを示す。参考に LISA と DECIGO の感度曲線も示す。

7.2 問題点とその考察

基線長 $d = 500\text{km}$ の場合、DECIGO よりも 2 桁ほど良い感度が得られたが、回折損失を防ぐための直径 2m の鏡の製作は非常に困難である。鏡の形状の制御など新たな技術が必要になると考えられる。一方、基線長 $d = 30\text{km}$ の場合、感度は 500km のものよりもやや落ち、観測帯域が狭くなるが、直径 60cm と地上型の倍ほどの大きさの鏡で回折損失を防げる為、実現性は高い。

また、S/C 間距離の変動は、FP 共振器を安定にロックするには大きすぎると考えられる。なるべく制御の負担を減らすためには、地球からの角度を 45° 程度にし、基線長 $d = 30\text{km}$ にするのが有利であると考えられる。そのためには宇宙通信技術の発達が不可欠である。また、初期配置として基準軌道要素を選んだが、惑星などの摂動の効果を逆に利用して S/C 間距離変動の小さくなるような最適な初期配置がある可能性も考えられる。

7.3 今後の課題

宇宙干渉計の実現のためには、

- 干渉計の雑音の研究
- 大口径鏡の製作、制御
- 高出力レーザー光源の開発
- S/C 間距離が小さくなるような最適な初期配置の研究
- S/C 間距離の制御
- 宇宙開発技術一般の発展

などが課題となると考えられる。

まず、干渉計の雑音の問題として、FP-DECIGO は基線長が短いため、LISA に比べて変位雑音の影響を受けやすい。この様なことを鑑みて、雑音源の研究とその大きさの見積もりは重要である。

レーザー光パワーが大きいほど散射雑音が小さくなり、感度は上がる。従って、レーザーの高パワー化や鏡の大口径化はそのまま感度の向上につながる。

本論文では基準軌道要素での S/C 間距離の変動について考えたが、初期配置を少し変えるだけで軌道の発展は大きく変わる。初期配置によっては、S/C 間距離変動が小さくなるものがあり、制御に対する要求を緩和できる可能性がある。

FP 共振器を共振状態に保つための光路長の制御は重要であり、FP-DECIGO が実現可能かはこれに掛かっているといっても過言ではない。また、制御による雑音の混入も重大であるため、今後のさらなる研究が要される。

これらの課題が克服されれば、宇宙干渉計は十分重力波を検出できると考えられる。

付 録 A 宇宙空間レーザー干渉計型重力波検出器の応答関数の計算

宇宙空間レーザー干渉計の対象とする重力波源は連続波であり、その振幅の変化のタイムスケールは干渉計の公転時間 $T \sim 1$ 年に比べて非常に大きい。従って、宇宙空間レーザー干渉計の感度として、干渉計の公転時間についての平均したものを考える [19]。

A.1 宇宙干渉計の重力波に対する応答

初めに一本の腕の基本的な Michelson 干渉計で考える。重力波源の方向と干渉計の腕の成す角度を θ とし、重力波の偏極の干渉計の腕に固定した座標系に対する角度を ψ とすれば、腕への入射レーザー光と腕の端点で反射してきたレーザー光との間の周波数 ν の変化 (ドップラーシフト) は

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{1}{2} \cos 2\psi \{ (1 - \cos \theta) h(t) + 2 \cos \theta h(t - \tau - \tau \cos \theta) - (1 + \cos \theta) h(t - 2\tau) \} \quad (\text{A.1})$$

となる。ここで ν_0 は入射光の周波数、 $\tau = L/c$ は光が腕を進むのにかかる時間である。 θ 、 ψ の時間変化は非常にゆっくりとしているので以下では無視する。

干渉計の出力としては位相の情報が得られるため、位相変化

$$\Delta\phi(t) = \int_0^{t'} \Delta\nu(t') dt' \quad (\text{A.2})$$

について考える。

$h(t)$ の Fourier 変換 $h(\omega)$ を導入する¹と、 $\Delta\phi(t)$ の Fourier 変換 $\Delta\phi(\omega)$ は

$$\Delta\phi(\omega) = \frac{\nu_0}{2i\omega} \cos 2\psi \{ (1 - \mu) + 2\mu \exp[-i\omega\tau(1 + \tau)] - (1 + \mu) \exp[-2i\omega\tau] \} h(\omega) \quad (\text{A.3})$$

となる。位相変化に対応する重力波の歪み量は

$$\frac{\Delta\phi(\omega)}{\nu_0\tau} \quad (\text{A.4})$$

¹以下では誤解の恐れがない限り時間の関数 $f(t)$ の角周波数についての Fourier 変換を $f(\omega)$ と書く。

とかけるので、2本の腕の干渉を考えて出力は

$$\Delta(\omega) = \frac{\Delta\phi_1(\omega) - \Delta\phi_2(\omega)}{\nu_0\tau} \quad (\text{A.5})$$

となる。

干渉計の重力波に対する応答 $R(\omega)$ を

$$|\Delta(\omega)|^2 = R(\omega)|h(\omega)|^2 \quad (\text{A.6})$$

で定義する²。

2本の腕と重力波の波数ベクトルの成す角度を図 A.1 で示したように置く。すると、

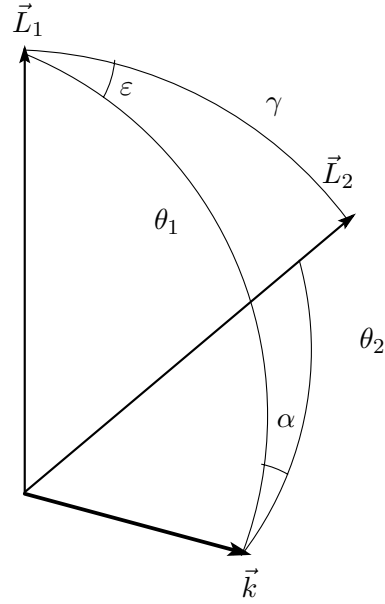


図 A.1: 干渉計の腕と重力波の向きの幾何学的関係。 L_1 と L_2 をそれぞれ干渉計の腕にとり、 k を重力波の波数ベクトルとする。

$$|\Delta(\omega)|^2 = \frac{1}{(\nu_0\tau)^2} (T_1(\omega) + T_2(\omega) - 2T_3(\omega)) |h(\omega)|^2 \quad (\text{A.7})$$

²第3章の応答関数の定義と違うことに注意を要する。定義の違いを文字 H と R との違いで区別する。

となる。ここで、

$$T_1(\omega) = \cos^2(2\Psi_1) \{ \mu_1^2 (1 + \cos^2(\omega\tau)) + \sin^2(\omega\tau) - 2\mu_1^2 \cos(\omega\tau) \cos(\omega\tau\mu_1) - 2\mu_1 \sin(\omega\tau) \sin(\omega\tau\mu_1) \}, \quad (\text{A.8})$$

$$T_2(\omega) = \cos^2(2\Psi_2) \{ \mu_2^2 (1 + \cos^2(\omega\tau)) + \sin^2(\omega\tau) - 2\mu_2^2 \cos(\omega\tau) \cos(\omega\tau\mu_2) - 2\mu_2 \sin(\omega\tau) \sin(\omega\tau\mu_2) \}, \quad (\text{A.9})$$

$$T_3(\omega) = \cos(2\Psi_1) \cos(2\Psi_2) \eta(\omega), \quad (\text{A.10})$$

$$\eta(\omega) = \{ \cos(\omega\tau) - \cos(\omega\tau\mu_1) \} \{ \cos(\omega\tau) - \cos(\omega\tau\mu_2) \} \mu_1 \mu_2 + \{ \sin(\omega\tau) - \mu_1 \sin(\omega\tau\mu_1) \} \{ \sin(\omega\tau) - \mu_2 \sin(\omega\tau\mu_2) \} \quad (\text{A.11})$$

と置いた。また、 $\mu_i = \cos \theta_i$ である。

$|\Delta(\omega)|^2$ の公転時間と重力波の偏極に関する平均は

$$\overline{|\Delta(\omega)|^2} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^\varepsilon d\varepsilon \int_0^\pi \sin \theta d\theta |\Delta(\omega)|^2 \quad (\text{A.12})$$

で得られる。

干渉計の各腕にに対する変数 (θ_1, Ψ_1) と (θ_2, Ψ_2) は対称かつ独立に T_1 と T_2 内にあるので、それらの平均は等しく

$$\bar{T}_1 = \bar{T}_2 = \frac{1}{8\pi^2} \int d\Psi_1 d\varepsilon d\theta_1 \sin \theta_1 T_1 \quad (\text{A.13})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (1 + \cos^2 u) \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{u^2} \right) + \sin^2 u + \frac{4}{u^3} \sin u \cos u \right\} \quad (\text{A.14})$$

となる。但し、 $u = \omega\tau$ と置いた。 T_3 については

$$\Psi_2 = \Psi_1 + \alpha \quad (\text{A.15})$$

であるので、

$$\bar{T}_3 = \frac{1}{8\pi^2} \int d\Psi_1 d\varepsilon d\theta_1 \sin \theta_1 T_3 \quad (\text{A.16})$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int d\varepsilon d\theta_1 \sin \theta_1 \cos(2\alpha) \eta(u, \theta_1, \theta_2) \quad (\text{A.17})$$

と書ける。これを

$$\sin \alpha = \frac{\sin \gamma \sin \varepsilon}{\sin \theta_2}, \quad (\text{A.18})$$

$$\cos \theta_2 = \cos \gamma \cos \theta_1 + \sin \gamma \sin \theta_1 \cos \varepsilon \quad (\text{A.19})$$

などの関係を用いて積分する。しかし、 T_3 についての積分は解析的には実行できないので数値的に解くことになる。

以上より、宇宙空間干渉計の応答として

$$R(u) = \frac{2}{u^2}(\bar{T}_1 - \bar{T}_2) \quad (\text{A.20})$$

$$= \frac{1}{u^2} \left\{ (1 + \cos^2 u) \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{u^2} \right) + \sin^2 u + \frac{4}{u^3} \sin u \cos u - \frac{1}{4\pi} \int d\varepsilon d\theta_1 \sin \theta_1 (1 - 2 \sin^2 \alpha) \eta(u, \theta_1) \right\} \quad (\text{A.21})$$

を得る。無次元量である u について表わせば、 $R(u)$ は L に拠らない。 $R(u)$ の周波数依存性を図 A.2 に示す。

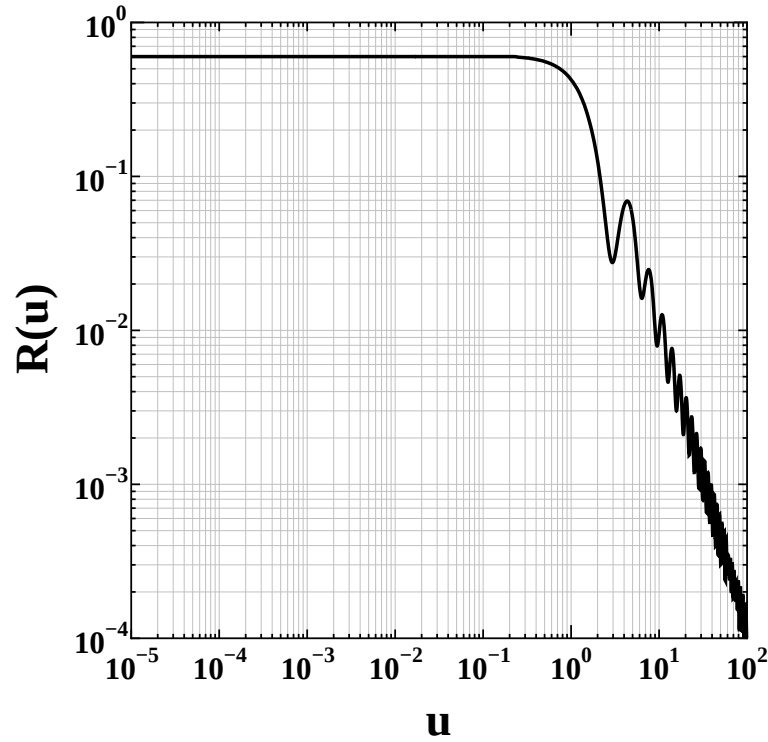


図 A.2: 応答関数 $R(u)$ の周波数依存性。 $\gamma = \pi/3$ とし、無次元量である $u = \omega\tau$ に対する依存性を示す。 u について表現すれば干渉計の大きさ L によらない。高周波数 $u > 1$ で急激に小さくなり、低周波数の極限 $u \rightarrow 0$ で一定値に収束している。

特に低周波数の極限では

$$\bar{T}_1 \sim \frac{4}{15}u^2, \quad (\text{A.22})$$

$$\bar{T}_3 \sim \left(\frac{4}{15} - \frac{2}{5} \sin^2 \gamma \right) u^2 \quad (\text{A.23})$$

と漸近するので、 R は一定値に収束し、

$$R = \frac{4}{5} \sin^2 \gamma \quad (\text{A.24})$$

となる。逆に高周波数 $u > 1$ では、応答関数は急激に小さくなる。

$u \sim 1$ では、LISA($L \sim 5 \times 10^6 \text{km}$) で $f \sim 10^{-2} \text{Hz}$ 、DECIGO($L \sim 5 \times 10^4 \text{km}$) で $f \sim 1 \text{Hz}$ 、FP-DECIGO($L \sim 5 \times 10^2 \text{km}$) で $f \sim 10^2 \text{Hz}$ となり、それぞれの高周波数帯域の感度を制限する。

A.2 FP-DECIGO の重力波に対する応答

前節では単純な Michelson 干渉計について応答関数を求めたが、FP-DECIGO は FP 共振器で構成されるため、(A.21) 式だけでは不十分である。FP 共振器を腕とする干渉計は Michelson 干渉計の応答に共振器を構成する鏡の反射率などを用いて、

$$|H_{\text{HP}}(\omega)| = \frac{L}{\lambda} \left| \frac{\alpha_C}{1 - r_F r_E} \right| \sqrt{\frac{R(\omega)}{1 + F \sin^2(\omega L/c)}} \quad (\text{A.25})$$

と書かれる³。用いた文字の定義は第 3 章に準ずる。

³ここでの応答関数の定義は第 3 章でしたものである。

付 録 B 惑星・月の影響下での S/C 間距離の 数値計算

太陽以外の天体の影響を考慮した場合、S/C は運動方程式、

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{v}(t), \\ \dot{\mathbf{v}}(t) &= -\frac{Gm_{\odot}}{|\mathbf{x}(t)|^3}\mathbf{x}(t) - \sum_k \frac{Gm_k}{|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k(t)|^3}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k(t))\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

に従うが、この問題は多体問題であり解析的な解は知られていない。従って、本論文では数値計算によって微分方程式 (B.1) を解いた。

B.1 数値計算の方法

数値計算にはテクニカルコンピューティング言語である MATLAB6.5.1 を用いた。MATLAB には常微分方程式の初期値問題を数値計算する関数として、ode で始まる関数群があるが、その中の ode113 を用いた。ode113 は可変次数の Adams-Bashforth-Moulton PECE ソルバであり、厳重な許容値や ODE ファイル関数が特に計算量が多い場合には、他の ode よりも効率的である。

ode 関数を用いるには微分方程式を定義する ODE ファイル関数を必要とする。ODE ファイル関数はあるスカラー t とベクトル y について、ベクトル $y' = dy/dt$ を返す関数である。この関数を odefun とすれば、微分方程式の解 y は

$$[t, y] = \text{ode113}('odefun', t, y_0, \text{option}) \quad (\text{B.2})$$

で与えられる。ここで、 y_0 は y の $t = 0$ における値で、option は精度の変更などのオプションを示す変数である。

B.1.1 数値計算の手順

数値計算には以下の 8 つの関数を用いた。ここで、添字 p は惑星、月に関する量であり、添字 $j = 1, 2, 3$ は各 S/C に関する量であることを示している。

- $u = \text{eccentricanomaly}(t; n_p, M_{0p}, e_p)$: 各惑星の離心近点離角 u を求める。

- $\mathbf{x}_p = \text{positionP}(t; a_p, e_p, i_p, \omega_p, \Omega, M_{0p}, m_p)$: 惑星の位置を求める。
- $(a_p, e_p, i_p, \omega_p, \Omega_p, M_{0p}, m_p) = \text{planet_element2004}$: 惑星の 2004 年 7 月 14.0 日の軌道要素と質量を与える。この関数は行が惑星、列が軌道要素についての 7×9 の定数行列である
- $d\mathbf{y}_j/dt = \text{eqm_potential_by_all_P}(t; \mathbf{y}_{j0})$: 時刻 t 、初期値 $\mathbf{y}_{j0}$ の微分方程式 (B.1) を定義する。ここで、 $\mathbf{y}_j(t) = (\mathbf{x}_j(t), \mathbf{v}_j(t))$ である。
- $\mathbf{x}_j = \text{position}(t; a, e, i, \omega, \Omega, M_0)$: 太陽の重力のみの影響下における S/C の位置を求める。
- $\mathbf{v}_j = \text{velocity}(t; a, e, i, \omega, \Omega, M_0)$: 太陽の重力のみの影響下における S/C の速度を求める。
- $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \text{orbit_perturbed_byP}(t; a, e, i, \omega, \Omega, M_0)$: 各天体の影響も考慮した S/C の位置を求める
- $(L_{12}, L_{23}, L_{31}) = \text{distance_perturbed_byP}(t; a, e, i, \omega, \Omega, M_0)$: 各天体の影響も考慮した S/C 間距離を求める。

これらの関数を用いた計算の手順の概念図は図 B.1 のようになる。

B.1.2 MATLAB コード

離心近点離隔の計算

```
function u=eccentricanomaly(w,M,t,e);

% solution of Kepler equation : wt+M=u-e*sinu
%
% u=wt+M+sum[2/n*Jn(ne)sin(n(wt+M))]
%
% w : mean motion
% t : time
% e : eccentricity
% n : number of series factor
% M : mean anomaly at epoch
%
% Jn(x) : Bessel functions of the first kind
%
```

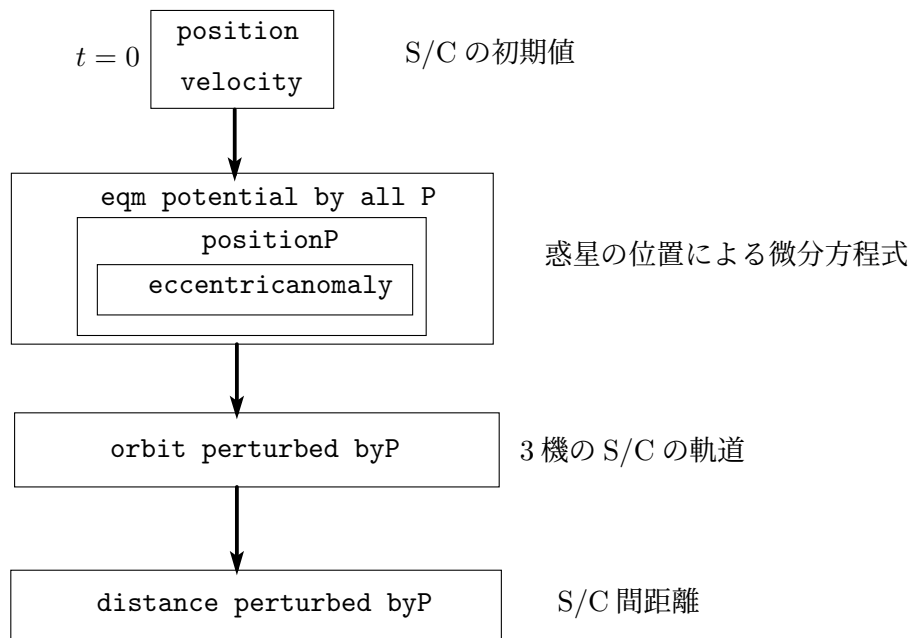


図 B.1: S/C 間距離計算の MATLAB 関数の概念図。微分方程式を定義するために、惑星の離心近点離角と軌道を求め、それと S/C の初期値から天体の影響を受けた S/C の軌道を求める。最後に 3 機の軌道から S/C 間距離を求める。

```

l=w.*t+M;
u=1;

n=1;

while 2/n*besselj(n,n*e)>eps;
    n=n+1;
end

for i=1:n
    u=u+2./i.*besselj(i,i*e).*sin(i*l);
end

f=u;

```

天体の位置の計算

```

function x=positionP(a,e,i,w,W,M,mp,t);

% The position of a planet give in orbit elements
%
% a : semi-major axis at epoch
% e : eccentricity at epoch
% i : inclination at epoch
% w : argument of percenter at epoch
% W : longitude of the ascending node at epoch
% M : mean anomaly at epoch
% mp : mass
% t : time from epoch
%

GS=6.673*1.9889e19;
G=6.673e-11;

n=sqrt(GS+G*mp)./a.^(3/2);

% position of the body
u=eccentricanomaly(n,M,t,e);          % eccentric anomaly of the body

```



```

X=a.*(cos(u)-e);
Y=a.*sqrt(1-e.^2).*sin(u);

x=(cos(w).*cos(W)-sin(w).*sin(W).*cos(i)).*X
+(-sin(w).*cos(W)-cos(w).*sin(W).*cos(i)).*Y;

y=(cos(w).*sin(W)+sin(w).*cos(W).*cos(i)).*X
+(-sin(w).*sin(W)+cos(w).*cos(W).*cos(i)).*Y;

z=sin(w).*sin(i).*X+cos(w).*sin(i).*Y;

x=[x',y',z'];

```

微分方程式の定義

```

function dy=eqm_potential_by_all_P(t,y);

G=6.673e-11;
GS=6.673*1.9889e19;
pe=planet_elment2004;

% position of Mercury
aMe=pe(1,1);
eMe=pe(1,2);
iMe=pe(1,3);
wMe=pe(1,4);
WMe=pe(1,5);
MMe=pe(1,6);
mMe=pe(1,7);

pMe=positionP(aMe,eMe,iMe,wMe,WMe,MMe,mMe,t);

xMe=pMe(:,1);
yMe=pMe(:,2);
zMe=pMe(:,3);

% distance between S/C and Planet
rMe=sqrt((y(1)-xMe).^2+(y(2)-yMe).^2+(y(3)-zMe).^2);

```

```

% gravitational force to S/C by planet
fMex=-G*mMe*(y(1)-xMe)./rMe.^3;
fMey=-G*mMe*(y(2)-yMe)./rMe.^3;
fMez=-G*mMe*(y(3)-zMe)./rMe.^3;

% position of Vinus
aV=pe(2,1);
eV=pe(2,2);
iV=pe(2,3);
wV=pe(2,4);
wV=pe(2,5);
MV=pe(2,6);
mV=pe(2,7);

pV=positionP(aV,eV,iV,wV,wV,MV,mV,t);

xV=pV(:,1);
yV=pV(:,2);
zV=pV(:,3);

rV=sqrt((y(1)-xV).^2+(y(2)-yV).^2+(y(3)-zV).^2);
fVx=-G*mV*(y(1)-xV)./rV.^3;
fVy=-G*mV*(y(2)-yV)./rV.^3;
fVz=-G*mV*(y(3)-zV)./rV.^3;

% position of Earth
aE=pe(3,1);
eE=pe(3,2);
iE=pe(3,3);
wE=pe(3,4);
wE=pe(3,5);
ME=pe(3,6);
mE=pe(3,7);

pE=positionP(aE,eE,iE,wE,wE,ME,mE,t);

xE=pE(:,1);
yE=pE(:,2);
zE=pE(:,3);

```

```

rE=sqrt((y(1)-xE).^2+(y(2)-yE).^2+(y(3)-zE).^2);
fEx=-G*mE*(y(1)-xE)./rE.^3;
fEy=-G*mE*(y(2)-yE)./rE.^3;
fEz=-G*mE*(y(3)-zE)./rE.^3;

% position of Mars
aMa=pe(4,1);
eMa=pe(4,2);
iMa=pe(4,3);
wMa=pe(4,4);
WMa=pe(4,5);
MMa=pe(4,6);
mMa=pe(4,7);

pMa=positionP(aMa,eMa,iMa,wMa,WMa,MMa,mMa,t);

xMa=pMa(:,1);
yMa=pMa(:,2);
zMa=pMa(:,3);

rMa=sqrt((y(1)-xMa).^2+(y(2)-yMa).^2+(y(3)-zMa).^2);
fMax=-G*mMa*(y(1)-xMa)./rMa.^3;
fMay=-G*mMa*(y(2)-yMa)./rMa.^3;
fMaz=-G*mMa*(y(3)-zMa)./rMa.^3;

% position of Jupiter
aJ=pe(5,1);
eJ=pe(5,2);
iJ=pe(5,3);
wJ=pe(5,4);
WJ=pe(5,5);
MJ=pe(5,6);
mJ=pe(5,7);

pJ=positionP(aJ,eJ,iJ,wJ,WJ,MJ,mJ,t);

xJ=pJ(:,1);
yJ=pJ(:,2);

```

```

zJ=pJ(:,3);

rJ=sqrt((y(1)-xJ).^2+(y(2)-yJ).^2+(y(3)-zJ).^2);
fJx=-G*mJ*(y(1)-xJ)./rJ.^3;
fJy=-G*mJ*(y(2)-yJ)./rJ.^3;
fJz=-G*mJ*(y(3)-zJ)./rJ.^3;

% position of Saturn
aSa=pe(6,1);
eSa=pe(6,2);
iSa=pe(6,3);
wSa=pe(6,4);
WSa=pe(6,5);
MSa=pe(6,6);
mSa=pe(6,7);

pSa=positionP(aSa,eSa,iSa,wSa,WSa,MSa,mSa,t);

xSa=pSa(:,1);
ySa=pSa(:,2);
zSa=pSa(:,3);

rSa=sqrt((y(1)-xSa).^2+(y(2)-ySa).^2+(y(3)-zSa).^2);
fSax=-G*mSa*(y(1)-xSa)./rSa.^3;
fSay=-G*mSa*(y(2)-ySa)./rSa.^3;
fSaz=-G*mSa*(y(3)-zSa)./rSa.^3;

% position of Uranus
aU=pe(7,1);
eU=pe(7,2);
iU=pe(7,3);
wU=pe(7,4);
WU=pe(7,5);
MU=pe(7,6);
mU=pe(7,7);

pU=positionP(aU,eU,iU,wU,WU,MU,mU,t);

xU=pU(:,1);

```

```

yU=pU(:,2);
zU=pU(:,3);

rU=sqrt((y(1)-xU).^2+(y(2)-yU).^2+(y(3)-zU).^2);
fUx=-G*mU*(y(1)-xU)./rU.^3;
fUy=-G*mU*(y(2)-yU)./rU.^3;
fUz=-G*mU*(y(3)-zU)./rU.^3;

% position of Neptune
aN=pe(8,1);
eN=pe(8,2);
iN=pe(8,3);
wN=pe(8,4);
WN=pe(8,5);
MN=pe(8,6);
mN=pe(8,7);

pN=positionP(aN,eN,iN,wN,WN,MN,mN,t);

xN=pN(:,1);
yN=pN(:,2);
zN=pN(:,3);

rN=sqrt((y(1)-xN).^2+(y(2)-yN).^2+(y(3)-zN).^2);
fNx=-G*mN*(y(1)-xN)./rN.^3;
fNy=-G*mN*(y(2)-yN)./rN.^3;
fNz=-G*mN*(y(3)-zN)./rN.^3;

% position of Pluto
aP=pe(9,1);
eP=pe(9,2);
iP=pe(9,3);
wP=pe(9,4);
WP=pe(9,5);
MP=pe(9,6);
mP=pe(9,7);

pP=positionP(aP,eP,iP,wP,WP,MP,mP,t);

```

```

xP=pP(:,1);
yP=pP(:,2);
zP=pP(:,3);

rP=sqrt((y(1)-xP).^2+(y(2)-yP).^2+(y(3)-zP).^2);
fPx=-G*mP*(y(1)-xP)./rP.^3;
fPy=-G*mP*(y(2)-yP)./rP.^3;
fPz=-G*mP*(y(3)-zP)./rP.^3;

% position of Moon
aM=pe(10,1);
eM=pe(10,2);
iM=pe(10,3);
wM=pe(10,4);
WM=pe(10,5);
MM=pe(10,6);
mM=pe(10,7);

pM=positionP(aM,eM,iM,wM,WM,MM,mM,t);

xM=pM(:,1);
yM=pM(:,2);
zM=pM(:,3);

rM=sqrt((y(1)-xM).^2+(y(2)-yM).^2+(y(3)-zM).^2);
fMx=-G*mM*(y(1)-xM)./rM.^3;
fMy=-G*mM*(y(2)-yM)./rM.^3;
fMz=-G*mM*(y(3)-zM)./rM.^3;

% force from Sun
r=sqrt(y(1).^2+y(2).^2+y(3).^2);
fSx=-GS*y(1)./r.^3;
fSy=-GS*y(2)./r.^3;
fSz=-GS*y(3)./r.^3;

dy(1,:)=y(4);
dy(2,:)=y(5);

```

```

dy(3,:)=y(6);

dy(4,:)=fSx+fMex+fVx+fEx+fMax+fJx+fSax+fUx+fNx+fPx+fMx;
dy(5,:)=fSy+fMey+fVy+fEy+fMay+fJy+fSay+fUy+fNy+fPy+fMy;
dy(6,:)=fSz+fMez+fVz+fEz+fMaz+fJz+fSaz+fUz+fNz+fPz+fMz;

```

S/C の軌道の計算

```

function p=orbit_perturbed_byP(a,e,i,w,W,M,t);

% position and velocity of S/C with the perturbed by the Earth
%
% orbit elements at t=epoch
% a : semi-major axis
% e : eccentricity
% i : inclination
% w : argument of pericenter
% W : longitude of the ascending node
% M : mean anomaly at epoch
% t : time

% position of S/C at epoch
x0=position(a,e,i,w,W,M,0);
% velocity of S/C at epoch
v0=velocity(a,e,i,w,W,M,0);

p0=[x0(1),x0(2),x0(3),v0(1),v0(2),v0(3)];

options = odeset('RelTol',2.22045e-014,
'AbsTol',[1e-100 1e-100 1e-100 1e-100 1e-100 1e-100]);

[t,p]=ode113('eqm_potential_by_all_P',t,p0,options);

```

S/C 間距離の計算

```

function l=distance_perturbed_byP(a,e,i,w,W,M,t);

% distance between S/C with the perturbed by the all planets and Moon.
%

```

```
% orbit elements at t=epoch
% a : semi-major axis
% e : eccentricity
% i : inclination
% w : argument of pericenter
% W : longitude of the ascending node
% M : mean anomaly at epoch
% t : time

p1=orbit_perturbed_byP(a,e,i,w,W,M,t);
p2=orbit_perturbed_byP(a,e,i,w,W+2*pi/3,M-2*pi/3,t);
p3=orbit_perturbed_byP(a,e,i,w,W-2*pi/3,M+2*pi/3,t);

l12=sqrt((p1(:,1)-p2(:,1)).^2+(p1(:,2)-p2(:,2)).^2+(p1(:,3)-p2(:,3)).^2);
l23=sqrt((p3(:,1)-p2(:,1)).^2+(p3(:,2)-p2(:,2)).^2+(p3(:,3)-p2(:,3)).^2);
l31=sqrt((p1(:,1)-p3(:,1)).^2+(p1(:,2)-p3(:,2)).^2+(p1(:,3)-p3(:,3)).^2);

l=[l12,l23,l31];
```


関連図書

- [1] Einstein, A., "Die Grundlauge der allgemeiner Relative theorie." Ann.der Phys. **17** 892(1916)
- [2] 佐藤勝彦, 「相対性理論」, 岩波書店 (1996)
- [3] 三尾典克, 大橋正健編, 「重力波アンテナ技術検討書」 (1992)
- [4] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健編著, 「重力波をとらえる」, 京都大学学術出版会 (1998)
- [5] LISA Pre-Phase A Report Second Edition(July 1998)
- [6] Laser Interferometer Space Antenna : A Cornerstone Mission for the Observation of Gravitational Waves, System and Technology Study Report(July 2000)
- [7] Folkner, W. M., *et al*, "LISA orbit selection and stability", Class. Quantum Grav. **14** 1405-1410(1997)
- [8] Folkner, W. M., *et al*, "LISA orbit selection and stability", Class. Quantum Grav. **18** 4053-4057(1997)
- [9] 「スペース重力波アンテナ WG 第 1 回ミーティング OHP 集」 (2002)
- [10] 山本一広, 「LCGT の目標感度 ver3.1」 (2002)
- [11] Schumaker, B. L., "Disturbance reduction requirements for LISA", Class. Quantum Grav. **20** S239-S253(2003)
- [12] 安東正樹, 東京大学修士論文 (1996)
- [13] 「TAMA プロジェクト研究報告書」 (2002)
- [14] 木下宙, 「天体と軌道の力学」, 東京大学出版会 (1998)
- [15] Hughes, S. P., "Preliminary optimal orbit design for the laser interferometer space antenna(LISA)", the AAS Guidance and Control Conference, Breckenridge, Co.(Feb 2002)
- [16] Borse, G. J., 「MATLAB 数値解析」, オーム社 (1998)

- [17] 国立天文台編, 「理科年表平成 15 年版」, 丸善株式会社 (2003)
- [18] 安東正樹, 「直接干渉型宇宙重力波検出器の可能性」, 坪野研究室輪講資料 (2003)
- [19] Larson, S. L., Hiscock, W. A., Hellings, R. W., "Sensitivity curves for spaceborne gravitational wave interferometers", Phys. Rev. D **62**, 062001(2000)

謝辞

本研究を行うにあたって多くの人にお世話になった。

指導教官である坪野公夫教授は、私に宇宙空間干渉計というテーマを与えて下さったばかりでなく、マイペースな私にも我慢強く対応して下さい、研究するのに快適な環境を整えて下さった。

坪野研究室の助手である安東正樹氏には、その多くの経験と鋭い洞察から適切な助言を大いに頂いただけではなく、氏の研究に対する態度、心構えなど大いに学ぶべき事があった。

坪野研究室の特別研究員である河邊径太氏は、豊富な経験と知識から、様々な助言、指摘を頂いた。

博士課程の飯田幸美氏には、研究の議論を交わした事は勿論、趣味に関することから雑多なことまで色々とお話して頂いた。

博士課程の麻生洋一氏は、非常に鋭い物理的観察力をお持ちで、色々な意見や助言を頂いた。また、計算機に詳しい氏に、計算機のことなどを教えて頂いた。

修士課程の梶村宰氏は、年齢の近い事もあり研究以外の話も多くした。その様な他愛もない会話が、ともすれば大変な事もある研究生生活の一助になったことは言うまでもない。

修士課程の阿久津朋美氏は、宇宙線研究所から坪野研究室に時折来て研究しておられたが、氏との会話も非常に有益であったと思う。

秘書の早瀬由香理さんにもお世話になった。彼女のおかげで事務的な作業を快活に進められた。また、公的、私的に関わらず彼女との会話は非常に有益だった。

その他、多くの方のお世話になったのは、言うまでもない。この場を借りて感謝の意を示したいと思う。