修士論文
TAMA300データを用いた連続重力波解析

副田　憲志

2003年1月10日

目 次

第1章　概要

重力波は一般相対性理論から導かれる現象の1つであるが、2重星の観測による間接的な検証実験を除けば、直接的にはまだその存在は検証されていない。重力はその相互作用の弱さのため、源を天体現象に求めなければならない。重力波は発生源の種類により3つに大別される。1つ目は超新星爆発、星の衝突などから発生するバースト的重力波である。特に研究が進んでいるのは、連星中性子合体から放出されるチャープ波である。チャープ波の理論的波形はポストニュートニアン近似を使い正確に計算されているので、マッチドフィルタリング手法を使うことにより、データの中のチャープ信号をサーチすることができる。これを実行するための最適なサーチテンプレートの選び方の詳しい研究もなされている [5][6]。

二つ目は2重星や中性子星の自転から発生する連続重力波である。そして三つは宇宙からの背景放射である。Flanagan[7] は重力背景放射をサーチするために、二つの検出器の出力にどのような相関をとるかを決定し, この方法は Glasgow, Garching の二つの干渉計型検出器のプロトタイプで実行された [8][9]。また Allen は重力背景放射を検出することの重要性を [10] で細かく議論している。

予想される重力波の強度はバースト波が大きいことから、解析はバースト波を対象としたものが多かった。しかしパルサーからの連続重力波は強度は弱いが光、電波による観測により位置やスピンダウンの情報などが得られ、長時間積分により位相検波が行えるという強みがある。東京三鷹にあるレーザー干渉計型重力波検出器 TAMA300 で 2001 年 7 月から 8 月にかけて本格的な観測が行われ、1000 時間以上のデータが得られた。得られた全データを、Middleditch によって報告された SN1987A の跡の中のパルサーから放出されていると思われる連続重力波をターゲットにして解析した。解析方法の一部は 1989 年に Garching 重力波干渉計で得られたデータに対して、Niebauer らが行った方法に乗っ取っている [2]。

最適な解析方法はマッチドフィルタである。またターゲットの周波数がよくわかっていることから、長時間の積分によりノイズを落とし SN 比をかせぐことができる。信号が単色光ならば、単純に FFT を使ってスペクトルを求め、周波数領域で解析を行えばよいが、ターゲットに対する干渉計の相対運動（ドップラー効果)、重力波入射方向の変化（干渉計の感度変化)、パルサー自身の周波数変化（スピンダウン効果）の効果が信号には含まれており、完全な単色光ではない。よってマッチドフィルタを行うには、これらの効果を含んだ重力波波形を考え、データに補正を施してからスペクトルを求めることになる。またデータのノイズレベルは時間的に変化しており、この効果も SN 比悪化の原因となるので、データに対して重み

を付けて SN 比を最適化した。これらの操作を施したデータに FFT を用いてスペクトルを求めた。求めたスペクトルは Rayleigh 分布に従うことが分かった。これはノイズが白色雑音とみなせるということを示している。解析の結果、SN1987A 跡に報告されたパルサーからの重力波の上限値は第一種の誤りを犯す確率を 1%として 5.5×10^{-23} となった。

第2章　重力波とその検出

2.1　歴史

重力波は、一般相対性理論において Einstein 方程式を弱場近似の元で解いたときに得られる 4 重極放射の波動解であり、光速で伝播する時空の歪みである。重力波の存在は 1916 年に Einstein によって理論的に予言され、J.H.Taylor らの連星パルサー PSR1913+16 の公転周期変化の観測によって、その存在が間接的に証明された。J.H.Taylor らはこの功績により 1993 年にノーベル物理学賞を受賞している。しかし、重力相互作用はきわめて微弱なものであるため、いまだにその直接検出に成功した例はない。重力波の直接検出は、一般相対性理論の検証実験というだけでなく、現在の電磁波による天文学とは質の異なった、新しい天文学を拓く可能性を持っており、将来の発展が大いに期待される分野である。

2.2　重力波

2.2.1　Einstein 方程式

Einstein の一般相対性理論によると、4 次元時空内の異なる 2 点 x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ 間の局所的な距離 ds は、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ によって

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.1}$$

で与えられる。ここで $x^\mu = (ct, x, y, z)$ であり、$g_{\mu\nu}$ は Einstein 方程式に従う。

重力と質量の相互作用を表す Einstein 方程式は、二つの 2 階対称テンソル、Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ と物質のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を用いて

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

と表すことができる。Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ は

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{2.3}$$

で定義できる量で、Gは重力定数、$R_{\mu\nu}$ は

$$R_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\beta_{\mu\nu}\Gamma^\gamma_{\beta\gamma} - \Gamma^\beta_{\mu\gamma}\Gamma^\gamma_{\nu\beta} \tag{2.4}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\gamma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\nu,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\nu} - g_{\nu\gamma,\alpha}) \tag{2.5}$$

で定義される量であり、リッチテンソルと呼ばれている。$\Gamma^{\mu}_{\nu\gamma}$ はクリストッフェル記号と呼ばれ、ベクトルを座標で微分する際、基底ベクトルがいたる所で一定でないという理由から出てくる、基底ベクトルに付随する係数をまとめた量である。R と $R_{\mu\nu}$ には

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{2.6}$$

の関係があり、R はリッチスカラーと呼ばれる。

2.2.2 Einstein 方程式の線形近似

重力場のない平坦な時空、すなわちミンコフスキー空間においては、計量テンソルは

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$\equiv \eta_{\mu\nu} \tag{2.8}$$

とすることができる。

弱い重力場の場合を考えると、4 次元時空はミンコフスキー空間からのわずかなずれを受けるので、計量テンソルは平坦な時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ とそこからの摂動 $h_{\mu\nu}$ を加えた形

$$g^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{2.9}$$

で表すことができる。$h_{\mu\nu}$ の一次の範囲で式 (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) は

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\gamma} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (h_{\alpha\nu,\gamma} + h_{\alpha\gamma,\nu} - h_{\nu\gamma,\alpha}) \tag{2.10}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} ({h_{\alpha\nu}}^{,\alpha}{}_{,\mu} + {h_{\alpha\mu}}^{,\alpha}{}_{,\nu} - {h_{\mu\nu}}^{,\alpha}{}_{,\alpha} - h_{\mu\nu}) \tag{2.11}$$

$$R = {h_{\mu\nu}}^{,\mu\nu} \tag{2.12}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} ({h_{\alpha\nu}}^{,\alpha}{}_{,\mu} - {h_{\mu\nu}}^{,\alpha}{}_{,\alpha} - h_{,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} ({h_{\alpha\gamma}}^{,\alpha\gamma} - h^{,\alpha}{}_{,\alpha}) \tag{2.13}$$

となる。h は $h_{\mu\nu}$ の対角和

$$h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \tag{2.14}$$

である。

ここで、

$$\bar{h} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \tag{2.15}$$

というテンソルを導入し、式 (2.2), (2.3) 及び、式 (2.10)〜(2.13) を用いて Einstein 方程式を整理すると、

$$\frac{1}{2}[\bar{h}_{\alpha\nu}{}^{;\alpha}{}_{,\mu} + \bar{h}_{\alpha\mu}{}^{;\alpha}{}_{,\nu} - \bar{h}_{\mu\nu}{}^{;\alpha}{}_{,\alpha} - \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\gamma}{}^{;\alpha\gamma}\bar{h}] = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.16}$$

となるが、ゲージ条件としてローレンツゲージ条件

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{2.17}$$

を用いると線形化された Einstein 方程式

$$-\frac{1}{2}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.18}$$

を得ることができる。

2.2.3　波動方程式

特に真空状態では、式 (2.18) で

$$T_{\mu\nu} = 0 \tag{2.19}$$

と置くことにより Einstein 方程式は

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \qquad (\Box = -\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + \triangle) \tag{2.20}$$

となり、3 次元の波動方程式に帰着される。式 (2.20) はミンコフスキー空間の摂動が光速で伝播することを意味し、この方程式の解が重力波となる。

2.2.4　重力波の伝播

式 (2.20) の解として平面波解

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\exp(\mathrm{i}k_\alpha x^\alpha) \tag{2.21}$$

を考える。式 (2.28) が式 (2.17), (2.20) を満たすためには

$$A^{\mu\alpha} = 0 \tag{2.22}$$

$$k_\alpha k^\alpha \tag{2.23}$$

という条件が k_α に課されなければならない。式 (2.22) は重力波の振幅が進行方向と直交する、すなわち横波であるということを示し、式 (2.23) は電磁波とおなじように重力波が光速で進むということを示している。

2.2.5　重力波の自由度

ローレンツゲージの条件、式 (2.17) はゲージを一意にきめるわけではないので、まだ座標の取り方に任意性が残る。よって更に

$$A_{\alpha\beta} = 0 \tag{2.24}$$

$$A^{\alpha}_{\alpha} = 0 \tag{2.25}$$

という条件を課す。ただし U^{β} は任意に選べる時間的な単位ベクトルである。式 (2.22), (2.24), (2.25) をあわせて Transverse Tranceless gauge ‥ TT gauge と呼ぶ。式 (2.22),(2.24) は局所ローレンツ系において任意の観測者から見て重力波を横波 (Transverse wave) として観測することができる座標系が必ずあるということを意味する。一方、式 (2.25) は $\bar{h}_{\mu\nu}$ の対角和が 0 (traceless) であること、

$$\bar{h}^{TT}{\alpha_{\alpha}}^{\mu} = h^{TT}\alpha^{\mu}_{\alpha} = 0 \tag{2.26}$$

を意味する。

ここで、バックグラウンドのミンコフスキー空間に対して U_{μ} を時間基底

$$U^{\mu} = {\delta^{\mu}}_{0} \tag{2.27}$$

となるようなローレンツ系をとり、このとき重力波の進行方向を z 軸にとると、

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}e^{\mathrm{i}k(ct-z)} \tag{2.28}$$

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{+} & h_{\times} & 0 \\ 0 & h_{\times} & -h_{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

と書ける。h_{+} と $h_{\times}$ は $t-z$ の任意関数であり、上式より

$$h_{+} = A_{+}\exp[i\omega(t-z)] \tag{2.30}$$

$$h_{\times} = A_{\times}\exp[i\omega(t-z)] \tag{2.31}$$

と表すことができる。このように、重力波は横波で二つの自由度を持っていることがわかる。

2.2.6　質点に対する重力波の影響

固有距離の変化

重力以外に力を受けていない自由質点の運動は、測地線の方程式

$$\frac{d}{d\tau}U^{\alpha} + {\Gamma^{\alpha}}_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = 0 \tag{2.32}$$

に従う。ここで、U^α は質点の４元速度、τ は質点の固有時間である。質点が始めに静止しているようなローレンツ系を選び、この系に対する TT gauge をとる。この時、質点に働く加速度は

$$\left(\frac{dU^\alpha}{d\tau}\right)_0 = -\Gamma^\alpha_{00} \tag{2.33}$$

$$= -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(h_{\beta0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}) \tag{2.34}$$

$$= 0 \tag{2.35}$$

となり質点は加速度を受けないため、見かけ上は重力波の作用は現れない。

重力波の影響を見るには、二つの近接した質点間の固有距離を調べなければならない。二つの自由質点の TT gauge 上での座標を (0,0,0) と $(\epsilon, 0, 0)$ (ただし $\epsilon \ll 1$) とする。重力波が入射しても式 (2.33) より座標値は保たれるが、二質点間の固有距離 Δl は

$$\Delta l \equiv \int |ds^2|^{\frac{1}{2}} = \int |g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu|^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int_0^\epsilon |g_{xx}|^{\frac{1}{2}} \simeq |g_{xx}(x=0)|^{\frac{1}{2}}\epsilon$$

$$\simeq [1 + \frac{1}{2}h^{TT}_{xx}(x=0)]\epsilon \tag{2.36}$$

となり、重力波に対して変化することがわかる。

重力波の偏光

式 (2.32) より測地線偏差の方程式

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = R^i{}_{\alpha\beta j}U^\alpha U^\beta \xi^j \tag{2.37}$$

が導かれる。

今、$h^{TT}_{\mu\nu}$ の一次までを考えると

$$U^\alpha \simeq (1, 0, 0, 0)$$

$$\tau \simeq ct \tag{2.38}$$

とできるので、式 (2.35) は

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^i = -R^i{}_{0j0}\xi^j \tag{2.39}$$

となる。更に TT gauge では

$$R^i_{0j0} = -\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 h^{TTi}{}_j}{\partial t^2} \tag{2.40}$$

が成り立つので、式 (2.37) は更に

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^i = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^{TTi}{}_j}{\partial t^2}\xi^j \tag{2.41}$$

という結果になる。これは質点が質量 m を持っているならば、重力波は質点に対して

$$m\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^{TTi}{}_j}{\partial t^2}\xi^j \tag{2.42}$$

という外力となって働くことを意味している。この時質点の運動を以下に図示する。プラスモードとクロスモードの二つのモードを持っていてそれぞれ 45 度傾いた形をしている。

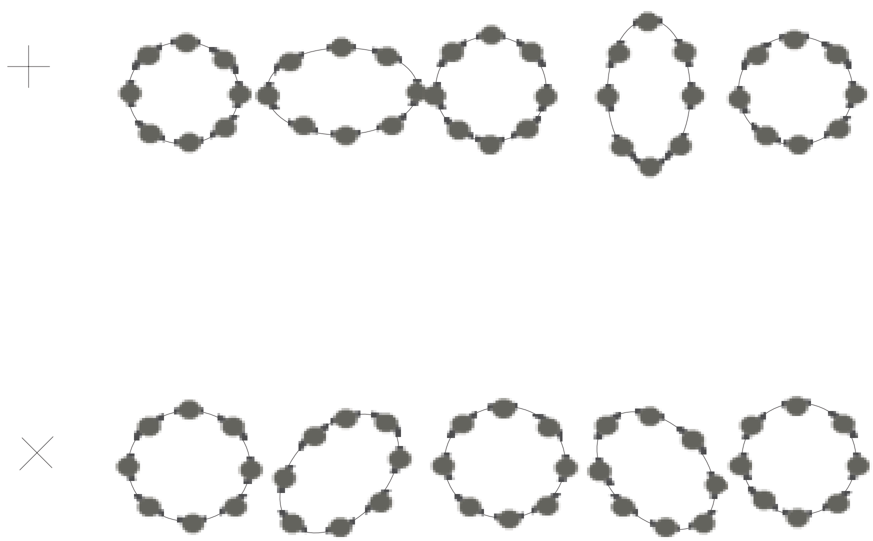

図 2.1: 重力波が入射した時の質点の変位、＋モード（上)、× モード（下）

2.3　パルサー

2.3.1　パルサーの一般論

　この論文で解析対象としているパルサーは高速で回転している中性子星である。パルサーは非常に高密度で、強い重力場を持っている。さらにパルサーは強い磁場を持っており、この効果によりパルサーは非軸対称性を持つことになる。そしてこの非軸対称性が重力波を生むのである。様々なパルサーの観測により、パルサーはその名が示す通り非常に規則正しいパルス (信号) を発していることが分かっている。我々の銀河内には知られているだけでも 700 以上のパルサーが存在するが、それらのほとんどは銀河面に集中している。

パルサーは電磁波の放射、粒子の放出、そしてもちろん重力波の放出によってエネルギーを失う。すなわち、回転周波数は完全に一定ではなく、時間によって変化していくものである。典型的にいって、出来たばかりのパルサーは大きなスピンダウンレートを持っている。現在までの観測によると、スピンダウンは主に電磁波の放射によるところが大きいということになっている。

2.3.2 回転体からの重力波

パルサーからどのように重力波が発生するかを見るために一点のまわりで回転する剛体からの重力波を計算してみることにする。簡単のため慣性主軸 (x_3 とする) のまわりで剛体が回転している場合を考えることにする。あるデカルト座標系 (S 系とする) でその剛体を見たとき、剛体の角速度が Ω であるとする。これにたいして剛体の静止系 (S' 系とする) を考える。S' 系から見た時、質量分布の 2 次のモーメントは

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

と書けるが、これを S 系からみると

$$J_{ij} = R^t J R \tag{2.44}$$

に見える。ここで

$$R = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t & 0 \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

である。これに従って $J_{ij}^{(3)}$ を計算すると 0 でない成分は

$$J_{11}^{(3)} = \left(\frac{2\Omega}{c}\right)^3 \frac{J_1 - J_2}{2} \sin 2\Omega t \tag{2.46}$$

$$J_{22}^{(3)} = -\left(\frac{2\Omega}{c}\right)^3 \frac{J_1 - J_2}{2} \sin 2\Omega t \tag{2.47}$$

$$J_{12}^{3} = J_{21}^{(3)} = -\left(\frac{2\Omega}{c}\right)^3 \frac{J_1 - J_2}{2} \cos 2\Omega t \tag{2.48}$$

となる。

結果だけ書くが、単位時間に重力波によってエネルギーの放出される割合は、$q_{\alpha\beta}$ を質量分布の 4 重極能率テンソルのうち時間的に変化する成分として、

$$P = \frac{G}{5c^2} \sum \overline{(\frac{d^3}{dt^3} q_{\alpha\beta})^2} \tag{2.49}$$

と表せるので [14]、式 (2.46), (2.47), (2.48) から、結局放出される重力波は回転の角速度 Ω の 2 倍の角周波数を持っていることがわかる

2.3.3 偏波と相対位相

重力波信号を検出するときの問題について考察を得るために、予想される重力波の形はどのようなものかを理解しておくことは重要である。重力波のプラスモード、クロスモードはそれぞれ次のようにかける [13]。

$$h_+ = h_0(1+\cos^2\theta)\cos(2\pi f_0 t) \tag{2.50}$$

$$h_\times = 2h_0\cos\theta\sin(2\pi f_0 t) \tag{2.51}$$

ここで θ は地球の公転面を xy 平面とした時、z 軸とパルサーの回転軸がなす角度である。h_0 は無次元の振幅であり、

$$h_0 = \frac{2\pi^2 G}{c^4}\frac{I_{zz}f_0^2}{r}\epsilon \tag{2.52}$$

ここで、

$$\epsilon = \frac{I_{xx}-I_{yy}}{I_{zz}} \tag{2.53}$$

であり、r は重力波源からの距離、I_{jk} はパルサーの慣性テンソルである。ここで式 (2.50), (2.51) をみればわかる通り、各モードの振幅はパルサーの回転軸の向きに依存しており、またパルサーから発生する重力波の二つのモードの位相差は常に $\pi/2$ である。

2.3.4 理論的アッパーリミット

ここでいう理論的な upper limit の意味するところはパルサーのスピンダウンによるエネルギーロスが全て重力波によるとして計算した重力波の振幅のことである。通常はスピンダウンによるエネルギーロスの大半は電磁波の放出によるものであるが、そのような電磁波によるエネルギーロスは全くないと仮定して計算するので理論的 upper limit と呼ぶのである。

いまここでその最大の重力波振幅を求めてみる。地球における GWflux は

$$S_{GW} = \frac{c^3}{32\pi G} < \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 > \tag{2.54}$$

で与えられる [14]。地球とパルサーとの距離を d とすると、パルサーから単位時間に放射されるエネルギーは $4\pi d^2 S_{GW}$ となる。観測されるエネルギー散逸 $-\frac{dE}{dt}$ が全て重力波に変換されるとして

$$-\frac{dE}{dt} = 4\pi d^2 S_{GW} = \frac{c^3 d^2}{8G} < \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 > \tag{2.55}$$

を得る。

$$E = \frac{1}{2}I\omega_{\mathrm{rot}}^2$$

より

$$-\frac{dE}{dt} = -I\omega_{\rm rot}\dot{\omega_{\rm rot}} = I\frac{2\pi}{P}\frac{2\pi}{P^2}\dot{P} = \frac{4\pi^2 I}{P^3}\dot{P}$$

となる。ここでPはパルサーの自転周期である。また

$$< \dot{h_+^2} >= \omega_{GW}^2 < h_+^2 >= 4\omega_{\rm rot}^2 < h_+^2 >= \frac{16\pi^2}{P^2} < h_+^2 >$$

である。同様の計算が $h_\times$ にもできるので、

$$< h_+^2 >=< h_\times^2 >= h_{\rm max}^2$$

とすると

$$h_{\rm max} = \sqrt{\frac{GI}{d^2c^3}\frac{\dot{P}}{P}} \tag{2.56}$$

となる。これに報告されたSN1987A跡のパルサーのパラメーターを用いて計算して、重力波のupper limitを 9.4×10^{-27} と求めることができる。

ただし報告されたパラメータはスピンダウン2〜3×10^{-10}Hz/s, 自転周期は2.14msである。パルサーまでの距離は16万光年を使い、Iを求めるためには典型的なパルサーの値である質量$1.4M_\odot$, 半径10kmという値を使った。

2.3.5 周波数の変化

2.3.1節においてスピンダウンは主に電磁波の放射によるものであると述べたが、重力波の検出の目的のためには、あらゆる可能性を考えて、充分に一般的な周波数の変化のモデルを作っておくのが好ましいだろう。それは次のように表せる。

$$f(t) = f_0(1 + \sum_k f_k t^k) \tag{2.57}$$

ここで f_0 は重力波の周波数, f_k はスピンダウンパラメーターとする。

パルサーは一般的にいって非常に高速で動いている物体である。このパルサーの固有運動は観測されるパルサーの周波数にドップラーシフトの影響を与えることになる。もしこの固有運動が一様（つまり一定速度）なら、固有運動の影響は、定数の周波数シフトだけとなる。この効果は観測自体では判定することはできない。だが、パルサーの固有運動に加速や、高次の微分が含まれていたら、この効果は観測される周波数を変調することになる。もちろん観測時間が、この高次の効果が効く時間スケールより短かければこの心配をする必要はないが、より長い観測時間を考えたときにはそうはいかない。そういう意味で上のパルサーのスピンダウンのモデルはこのような効果も含んだ形となっている。大部分のミリセカンドパルサーは連星系を成している。不幸なことに、それらのパルサーの固有運動は短いタイムスケールで変化してしまう (軌道周期)。これらの固有運動による

ドップラー効果の時間依存性は上のモデルのように、単純な級数では正確に表すことはできない。なぜなら軌道に関するパラメーターも考慮に入れる必要があるからである。よって知られているパルサーの連星系からの重力波をサーチする場合にはこの効果を扱うことが重要となる。またパルサーには、スピンダウンにより周波数が少しづつずれていく効果に加えて、いくつかの出来たばかりのパルサーでは時々周波数に急激な変化(グリッチ)が起こる。これらの周波数のグリッチの物理的メカニズムはまだよく分かっておらず、予測もできない。またこのようなグリッチの観測例は増えている。グリッチの効果は本論文ではあつかわないことにする。

2.3.6 これまでの解析

かにパルサー

連続重力波に関しては、今まで、干渉計型ではなく共振型の装置を使った解析が行われてきた。Crab pulsar の重力波周波数は 60Hz であり、この周波数に対して得られた今までで一番良い連続重力波のアッパーリミットは $h_{\rm rms} = 2 \times 10^{-22}$ という値である。

SN1987A 残骸の中のパルサー

1987 年、大マゼラン星雲の中で超新星爆発が起こった。位置は赤経 05 時 35.5 分赤緯 -69 度である。Middleditch らはこの SN1987A を 1992 年 2 月から 1996 年 2 月にかけてモニターし、複数の観測場所、観測機器で可視光領域において複雑な変調を受けた電磁波の放射をとらえた [1]。その周波数は 467.5Hz 付近であり、2〜3×10^{-10}Hz/s の割合で周波数は徐々に落ちていると報告された。これから周波数が 467.5Hz で自転周波数の変化であるスピンダウンパラメータが 2〜3×10^{-10}Hz/s のパルサーがあると考えられる。このパルサーに対する解析は今までにも Niebauer らのグループにも行われている [2]。彼らは重力波のそれぞれのモードに対してアッパーリミットを求めており、その値は 9×10^{-21} という値であった。その時の第一種の誤りを侵す確率は 5%である。

2.4 重力波の観測

2.4.1 TAMA300

近年のレーザー技術を始めとするさまざまな技術革新を受けて、長基調レーザー干渉計による直接検出計画が提案され、日本、欧州を中心にその研究計画が進められている。現在主流となっている Fabry-Perot-Michelson (FPM) レーザー干渉計

では、光源からのレーザー光をビームスプリッター (BS) で直交する 2 方向に分割し、その両腕をなす 2 本の Fabry-Perot 共振器に入射する。共振器から戻る光の位相は、FP 鏡間の固有距離に依存する。固有距離は重力波の影響を受けて変動するので、共振器から戻る光を再び BS 上で結合し、その干渉縞から重力波の信号を取り出すことができる。これがレーザー干渉計型検出器の重力波検出の原理である。

TAMA300 は日本の中規模重力波検出器計画であり、1995 年より国立天文台三鷹キャンパスにおいて 300 m 基線長のレーザー干渉計の建設が進められた。干渉計の設置は予定通りに終了し、2000 年からは世界に先駆けて重力波の本格的観測を始めた。現在は重力波データ取得のための観測ランと感度向上のための装置改良を繰り返している。

TAMA300 の目的は、まず、将来の km クラス大型レーザー干渉計に必要な技術を確立することである。次に、これを実証型検出器として運転し、実際に重力波検出を狙う。この研究は、国立天文台、東京大学、高エネルギー加速器研究機構、電気通信大学、大阪市立大学、京都大学、大阪大学など多くの研究機関からの研究者が参加している。なお、プロジェクト名 TAMA は、三鷹が属する多摩地区の多摩よりとられたものである。TAMA300 は、欧米の km クラスの検出に比べると、スケールは 1 桁小さい。その代わり、短時間で建設が可能であり、ほかに先行して観測を開始する予定であったが、この目標は達成された。目標は、中心周波数 300 Hz, 帯域幅 300 Hz で $h_{\rm rms} = 3 \times 10^{-21}$ の感度を達成することである。

2.4.2 レーザー干渉計型重力波検出器

TT gauge から見た重力波の影響

等価原理により一点における重力場の有無は重力場と加速度との違いを見分けられないので意味がない。重力波の有無もそういう意味で離れた 2 質点の 4 元速度ベクトルの変化の差を見てやらないと分からない。重力波が通る所に 2 つの自由質点があり、それらの空間座標を $(0, 0, 0)$, $(\epsilon, 0, 0)$ の位置にあるとする (z 軸方向に波は進行)。その座標系に対してはじめ自由質点は静止していたとする。自由質点の測地線の方程式は

$$\frac{d}{d\tau}U^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0 \tag{2.58}$$

であるが TT gauge で

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = -\Gamma^\alpha_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(h_{\beta 0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}) = 0 \tag{2.59}$$

である。従ってこの座標系に対して静止している自由質点はその座標値が変化しない。物理的な量としてはその座標値ではなく 2 点間の固有距離である。固有距離を計算すると、

$$\Delta l \quad \sim \quad (1 + h_+)^{\frac{1}{2}}\epsilon \tag{2.60}$$

$$\sim \quad (1+\frac{1}{2}h_+)\epsilon \tag{2.61}$$

となり、これは時間と共に変化していることが分かる。

重力波のレーザー干渉計に与える効果

次にレーザー干渉計に与える効果を考えてみる。簡単のため計量が

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (1+h(t))dx^2 + (1-h(t))dy^2 + dz^2 \tag{2.62}$$

であるとし、干渉計の腕が x 軸と y 軸に平行に伸びているとする。まず簡単のため、Michelson 干渉計の場合について考える。x 軸方向を往復する光についてはヌル測地線を進むので

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (1+h(t))dx^2 = 0 \tag{2.63}$$

であり、$h \ll 1$ なので、その 1 次まで展開すると

$$(1-\frac{1}{2}h(t))cdt = dx \tag{2.64}$$

となる。今、鏡が原点と座標値 1 のところにあるとし、座標時間 Δt_x かけて光がその間を往復するとする。この時、上の式を積分すれば

$$\Delta t_x = \frac{2l}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-\Delta t_x}^{t} h(t')dt' \tag{2.65}$$

が導かれる。Δt_x を h の 1 次まで求めれば、

$$\Delta t_x = \frac{2l}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-\frac{2l}{c}}^{t} h(t')dt' \tag{2.66}$$

となる (逐次近似)。ところで、先の考察から重力波が来ても、静止している質点はこの座標系では静止し続けるので、この Δt_x は鏡にとっての固有時間に相当する。第一項は重力波がなくても存在する項であり、重力波の効果は第二項である。従って固有時間間隔の差は

$$\delta\Delta t_x = \int_{t-\frac{2l}{c}}^{t} \frac{1}{2}h(t')dt' \tag{2.67}$$

である。同様に y 方向については

$$\delta\Delta t_x = -\delta\Delta t_y \tag{2.68}$$

となる。

2.4.3 Data taking 6

干渉計型重力波検出器 TAMA300 で 2001 年 8 月から 9 月にかけて 1000 時間を超える長時間観測が行われた。これは TAMA300 の 6 回目のテスト観測であり、DT6(Data taking 6) と呼ばれる。観測は Run 97〜111 までの 15 回の観測からなっている。各 Run は連続的な時系列データとして記録されている。各 Run では、観測データは連続的に記録されているが、そのデータが全て解析に使えるわけではない。すなわち、干渉計が安定な時間帯のデータは解析に使えるが、干渉計が安定でない時間帯は使えない。干渉計が安定な状態をロックされている、安定でない状態をロックが落ちているという。観測中に突発的な外乱があったときなどはロックが落ちる原因となるが、各 Run の先頭と末尾の数分程度もロックが落ちている状態となっている。

干渉計の出力は 20 kHz でサンプリングされており、それが磁気テープにファイルとして記録される。記録されるのは干渉計の出力だけではなく、干渉計の状態や、時間に関する情報なども記録される。つまり、観測データは多チャンネルの時系列データである。観測データのファイルは Frame Format という形式で記録されている。これは、データを Frame という単位で管理するフォーマットで、重力波干渉計の観測データを記録するフォーマットの国際規格として考えられたものである。今回の観測データでは、データ点 2^{16} 個 (約 3.2 秒）が１つの Frame に記録され、Frame 20 個 (約一分）が１つのファイルに記録されている。

第3章　解析手法

3.1　パルサーからの連続重力波解析

連続重力波として最も有望なソースは回転している中性子星、すなわちパルサーである。もしパルサーからの重力波が観測されれば、中性子星の物理やパルサーの進化についての重要な天文学的な情報を得ることが出来る。また重力波は地球の近くのパルサーを探す手段としても使うことが出来る。

一般にノイズの中に埋もれている信号を検出する最適な方法はマッチドフィルターという方法である。この方法は、SN 比が最適な状態で検出するには、信号と全く同じ波形のフィルターを使えばよいということを主張している。つまり重力波をサーチするには、サーチパラメーターの範囲に対してマッチドフィルターを行ってやればよい。この解析方法は、信号が正弦波だとするとパワースペクトルを求め、周波数領域で解析することと同値である。パルサーからの重力波はほぼ連続的であるため、マッチドフィルタを使って解析を行うことは、いくつかの補正を加えれば、パワースペクトルを求めて解析を行うことと同値になる。

ただし実際の解析においては計算時間を短縮するという問題があるので、上のマッチドフィルタリングを FFT を利用して行った。

またパワースペクトルの周波数分解能は観測時間 T の逆数に比例するので、スペクトル中で信号が一本のピークで表されるとすると、SN 比は振幅で考えれば $\sqrt{T}$ で向上する。すなわち原理的には観測時間を長くすれば、連続重力波は検出できるわけである。ただ観測時間を長くすれば、計算時間も当然増えてしまうので、現実的には解析は計算機の性能も考慮に入れて解析手法を考えなければいけない。以下ではこれらのことについて詳しく述べていくことにする。

3.1.1　マッチドフィルター

ここでノイズの中に埋もれた信号を取り出す方法であるマッチドフィルターについて述べる。重力波信号はノイズの中に埋もれていると考えられるので、ここで述べる考え方はそのまま連続重力波解析に当てはまる。

ノイズ $n(t)$ の中に信号 $h(t)$ が埋もれているとしよう。干渉計の出力は

$$o(t) = h(t) + n(t) \tag{3.1}$$

と書ける。信号のフーリエ変換を $\tilde{h}(f)$ とし、干渉計出力にフィルターを通した出

力を次のようにフィルター $q(t)$ との相関で表す。

$$
\begin{aligned}
c(t) &= (o \circ q)(t) & (3.2)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} o(t')q(t+t')dt' & (3.3)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{o}(f)\tilde{q}^*(f)e^{2\pi \mathrm{i} ft}df & (3.4)
\end{aligned}
$$

またフィルターの出力 $c(t)$ の期待値は信号とフィルターとの相関になることに注意しておく。

$$< c(t) >= (h \circ q)(t) \tag{3.5}$$

$n(t)$ がもしガウス型ノイズなら、フィルターを通ったあとのノイズもガウス型ノイズになる。また出力の分散は

$$\left\langle \{c(t)- < c(t) >\}^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)|\tilde{q}(f)|^2 df \tag{3.6}$$

となる。ここで $S(f)$ は干渉計のノイズスペクトルである。これらより信号のパワーとノイズのパワーの比である SN 比は

$$\frac{S}{N}(t) = \frac{(h \circ q)(t)}{[\int_{-\infty}^{\infty} S(f)|\tilde{q}(f)|^2 df]^{1/2}} \tag{3.7}$$

である。信号に対するマッチフィルターの名前はこの SN 比を最大にするフィルター $q(t)$ を見つけるという事実からきている。このフィルター $q(t)$ は簡単に計算できて [12]

$$\tilde{q}(f) = k\tilde{h}(f)/S(f) \tag{3.8}$$

となる。ここで k は任意の定数である。このフィルターでは、もし干渉計出力に信号が存在すると、信号波形 $h(t')$ において $t' = 0$ に相当する時刻 t で $c(t)$ は最大となる。つまり形も位相もぴったり同じであるフィルターを使えば、SN 比を最大にすることができるわけである。今回の解析では位相に興味はなく、パワーの比のみに興味があるので位相によらない値 $|c|^2$ 使えばよい。式 (3.4) でフィルター q を単色光として考えてみると、これはまさに出力をフーリエ変換していることに他ならない。つまり $|c|^2$ を考えるということはまさにパワースペクトルを考えるということと同じである。

3.1.2 パルサーからの連続重力波波形

もし信号が完全に単色であれば、最適な解析方法とはマッチドフィルターの方法から分かるように、パワースペクトルを求めて、解析を行うことである。しかしパルサーからの重力波はほぼ連続であるが、いくつかの効果により、単色光に振幅変調、位相変調を加えられた形となっている。マッチドフィルターを行うため

にこれらの形がどのようになっているかを正確に知る必要がある。その形は 2.3.3 節、2.3.5 節により

$$h_+ = h_0(1+\cos^2\theta)\cos\left\{2\pi f_0\left[(t+\delta t)+\sum f_k\frac{(t+\delta t)^{k+1}}{k+1}\right]\right\} \tag{3.9}$$

$$h_\times = 2h_0\cos\theta\sin\left\{2\pi f_0\left[(t+\delta t)+\sum f_k\frac{(t+\delta t)^{k+1}}{k+1}\right]\right\} \tag{3.10}$$

と書けるのであった。ただしここではドップラー効果である δt も含めて書いてある。また周波数 (式 (2.57)) を位相で考える際には, 時間で積分した形で考えればよい。

実際の干渉計の出力はプラスモードとクロスモードの線形結合の形に書ける。それぞれのモードに対する干渉計の感度を考えて、それによる重みをそれぞれ $S_+, S_\times$ とすると、結局、干渉計出力における重力波信号は

$$\begin{aligned} h &= S_+h_+ + S_\times h_\times \\ &= S_+h_0(1+\cos^2\theta)\cos\left\{2\pi f_0\left[(t+\delta t)+\sum f_k\frac{(t+\delta t)^{k+1}}{k+1}\right]\right\} \\ &+ S_\times 2h_0\cos\theta\sin\left\{2\pi f_0\left[(t+\delta t)+\sum f_k\frac{(t+\delta t)^{k+1}}{k+1}\right]\right\} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{S_+^2h_0^2(1+\cos^2\theta)^2+S_\times^2 4h_0^2\cos^2\theta}\ \sin\left\{2\pi f_0\left[(t+\delta t)+\sum f_k\frac{(t+\delta t)^{k+1}}{k+1)}\right]+\phi\right\} \tag{3.11}$$

と書ける。ここで

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{S_+(1+\cos^2\theta)}{2S_\times\cos\theta}\right)$$

さらに cos を複素数で考えると（実際の解析では CHT の操作により、cos の正の周波数だけとることになる)、式（3.11）を変形して、

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{S_+^2h_0^2(1+\cos^2\theta)^2+S_\times^2 4h_0^2\cos^2\theta} \\ &\quad\times\exp\left\{2\mathrm{i}\pi f_0\left(\delta t+\sum f_k\frac{(t+\delta t)^{k+1}}{k+1}\right)+\mathrm{i}\phi\right\}\exp(2\mathrm{i}\pi f_0 t) \end{aligned} \tag{3.12}$$

よってパルサーからの重力波は単色光に振幅変調 $\sqrt{S_+^2h_0^2(1+\cos^2\theta)^2+S_\times^2 4h_0^2\cos^2\theta}$, 位相変調 $\exp\left\{-2\mathrm{i}\pi f_0\left(\delta t+\sum f_k\frac{(t+\delta t)^{k+1}}{k+1}\right)-\mathrm{i}\phi\right\}$ がかかったものとなる。

3.1.3　FFT によるスペクトル計算

パルサーからの重力波波形は式 (3.12) とわかっているので、原理的には、解析はこれをフィルターとしてサーチパラメーターの範囲にマッチドフィルタを行えばよい。しかし計算時間を短縮するため、データに対してマッチドフィルタをひとつひとつ行うのではなく、FFT というアルゴリズムを利用した。以下では、まず FFT について説明してから、次にそれを利用してマッチドフィルタを行う方法を説明する。

FFT (Fast Fourier Transformation)

データ圧縮の処理を終えて得られた複素数値の時系列データ $z(\frac{k}{M}T), (k = 0, \cdots, M-1)$ の離散フーリエ変換 $\tilde{z}(\frac{M}{T}\hat{k})$ は、

$$\tilde{z}\left(\frac{M}{T}\hat{k}\right) = \frac{T}{M}\sum_{k=0}^{M-1} z\left(\frac{k}{M}T\right)e^{2\pi \mathrm{i}\frac{k\hat{k}}{M}} \qquad \left(\hat{k} = -\left[\frac{M}{2}\right], -\left[\frac{M}{2}\right]+1, \cdots, \left[\frac{M}{2}\right]\right) \tag{3.13}$$

であり、FFT(Fast Fourier Transformation) とはこれを高速で行うアルゴリズムのことである。これはつまり単色光のフィルターに対して高速でマッチドフィルターを行ってくれることと同じである。このプログラムは C や Matlab のライブラリーに入っており、コマンドを打つだけで上の演算を行うことができる。パワースペクトルは、

$$P\left(\frac{M}{T}\hat{k}\right) = \frac{\{\tilde{z}(\frac{M}{T}\hat{k})\}^2}{T} \tag{3.14}$$

となる。$P(f)$ の次元は、(長さ)^2/(周波数) で、1 Hz 当たりのパワーを表す。

変位の周波数分布を見るには、$P(f)$ の平方根

$$p(f) \equiv \sqrt{P(f)} \tag{3.15}$$

を用いる（以後、$p(f)$ を、振幅スペクトルと呼ぶ)。$p(f)$ の次元は (長さ)/(周波数)$^{1/2}$ である。をかける。

スペクトル

さて上の FFT を利用して、干渉計出力とフィルターとの相関 c を計算するには次のようにすればよい。フィルター q は式 (3.12) であらわせるので、相関 c の絶対値は、

$$\begin{aligned} |c(t)| &= |(o \circ q)(t)| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} o(t')q(t+t')dt'\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\int_0^T o(t)\sqrt{S_+^2 h_0^2(1+\cos^2\theta)^2 + S_\times^2 4h_0^2\cos^2\theta}\right. \\
&\quad \left. \times \exp\left\{-2\mathrm{i}\pi f_0\left(\delta t + \sum f_k \frac{(t+\delta t)^{k+1}}{k+1}\right) - \mathrm{i}\phi\right\}\exp(-2\mathrm{i}\pi f_0 t)dt\right|
\end{aligned}
$$

と表せる。

ここで

$$
o'(t) = o(t)\sqrt{S_+^2 h_0^2(1+\cos^2\theta)^2 + S_\times^2 4h_0^2\cos^2\theta}\times\exp\left\{\left[2\mathrm{i}\pi f_0\left(\delta t + \sum f_k \frac{(t+\delta t)^{k+1}}{k+1}\right]\right) + \mathrm{i}\phi\right\} \tag{3.16}
$$

とおくと、結局 $|c|$ は

$$
|c| = |(o \circ q)| \tag{3.17}
$$

$$
= \left|\int_0^T o'(t)\exp(-2\mathrm{i}\pi f_0 t)dt\right| \tag{3.18}
$$

となり、単純に o' のフーリエ変換で書ける。すなわち元のデータ $o(t)$ に対して上で求めた補正項をかけて $o'(t)$ にしてやれば、この補正されたデータに FFT が使えることになる。また SN 比が最適になるように、元のデータに復調を施してから、パワースペクトルを求めているとも解釈できる。ここで新たに $|c|^2$ をパワースペクトルと呼ぶことにする。つまりマッチドフィルタをひとつひとつ行う代わりに、FFT を利用しパワースペクトル $|c|^2$ を求め、これに対し解析を行ってやればよい。

3.1.4 信号検出

信号を検出するには周波数領域で、すなわち上で求めたパワースペクトルにおいて、統計的に有意なピークを探せばよい。そのためには周波数領域におけるノイズの統計を知ることがパワースペクトルの確率分布を考えるためには必要となる。よって実際の測定を正確に記述する統計的なモデルをまず考える。いったんこれが分かれば、ある閾値を決めたときにノイズのピークがその値を超える確率が計算できる。またノイズに加えて、実際に信号が存在していた場合の統計も考える必要がある。

次のいくつかの結果はより一般的な分布から導くことが出来るが、以下の議論ではノイズは白色雑音であり、時間領域でガウス型であると仮定する。ガウス型のモデルの有利な点はパワースペクトルの確率分布を導く際の解析的な計算が簡単に出来るということである。また後で出てくる解析の結果では、このモデルが正しいことを示している。

ガウス型雑音

ここでノイズの過程 V(t) のあらゆる点は時間領域で正規分布を持つ独立なランダム変数であると仮定しよう。

$$p(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(V-V_0)/2\sigma^2} \tag{3.19}$$

ここで V_0, σ^2 はそれぞれ分布の平均と分散を表す。もし信号が無ければ V_0 はゼロである。またもしノイズが時間的に定常的であれば分散 σ^2 は定数である。

ノイズ V(t) の離散フーリエ変換 (DFT) によってノイズのパワースペクトル $\tilde{V}(t)$ は次のように与えられる。

$$\tilde{V}(\omega) = \sum_t V(t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{3.20}$$

ガウス型ランダム変数の線形結合はまたガウス型ランダム変数なので、全ての周波数点において実部と虚部はまたガウス型ランダム変数となっている。サンプルが時間領域で相関を持たない限り、スペクトルは周波数間で相関を持たない、すなわち白色である。実部と虚部は統計的に独立であるので、結果、パワースペクトル $P = \tilde{V}\tilde{V}^*$ の分布は、Rayleigh 分布

$$p(P) = \frac{1}{P_0} e^{-P/P_0}, \qquad 0 \leq P \leq \infty \tag{3.21}$$

に従う。ここで $P_0 \equiv 2\sigma^2$ はパワースペクトルの平均である。

積分時間と SN 比

短時間の FFT では、全データ長 T を n 等分して、各区間のデータに対し FFT を行うことで、n 個のパワースペクトルが得られる。この場合は、これらのパワースペクトルの分布を足し合わせることによって、S/N 比を改善することができる。パワースペクトルの分布が式（3.21）で与えれらるようなノイズについて、n 個のパワースペクトル $P_1(\omega), P_2(\omega), \cdots, P_n(\omega)$ が得られたとして、これらを足し合わせて得られるパワースペクトル $P(\omega) = P_1(\omega) + P_2(\omega) + \cdots + P_n(\omega)$ の分布は、χ^2 分布

$$p_n(P) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{P^{n-1}}{P_0^n} e^{-P/P_0} \tag{3.22}$$

になり、P の平均と分散は

$$< P >= nP_0, \qquad < P^2 > - < P >^2 = nP_0^2 \tag{3.23}$$

となる。上式より、重力波信号のパワースペクトルの強度は n 倍になるので、S/N 比は $\sqrt{n}$ 倍になる。したがって線形化されたパワースペクトル $\sqrt{P}$ では、S/N 比は n の 4 乗根に比例する。

一方、S/N 比をよくするための方法として、上で述べた ’足し合わせ ’以外に、FFT の積分時間を長くすることが考えられる。全時間 T について積分すれば、パワースペクトルは 1 つしか得られないが、積分時間は n 倍となる。この方法では、S/N 比は n 倍、線形化されたスペクトルについては、S/N 比は $\sqrt{n}$ 倍となる。これは、’足し合わせ ’の処理では、n 個の区間における信号の間の位相関係の情報は使われないのに対し、積分時間を n 倍にすると、位相関係の情報まで使われるからである。

つまり SN 比をより大きくするためにはスペクトルを足し合わせるよりも、積分時間を長くするほうがよい。

3.2 データの加工

ここまでパルサー、連続波解析の一般論について述べてきたが、実際のデータは理想的なものではない。長時間の観測ではノイズレベルは常に一定ではないし、また実際に計算するためには計算量を減らす必要もある。そのためデータを加工する必要がある。以下このことについて詳しく述べる。

3.2.1 データ圧縮

標本化定理によれば、周波数領域でバンド幅の制限が B であるような連続実関数は周波数 $F_S \geq 2B$ で離散的な値にとりなおすことが完全にできる（その離散的な値がわかればもとの連続的な関数を完全に再現できる）。サンプリング周波数の半分をナイキスト周波数 f_N と定義すると、標本化定理は $f_N \geq B$ ならば、成り立つことになる。この概念を使って、興味のある信号を記録するために必要なサンプリングレートよりも、もっと高いサンプリングレートで元のデータが記録されているようなデジタルデータを考えてみよう。元のデータは興味のある周波数の情報を保存するようにデジタルフィルターにかけられ、その周波数を見るのに必要なバンド幅を保つ程度にリサンプルされる。すなわちこの操作によってデータ量を減らし、圧縮するわけである。このような圧縮は、計算量を減らすため解析ではよく使われるが、今回の解析のようにもともと計算量が膨大な場合などは特に重要になる。

CHT

今回の解析ではパワースペクトルを求める際の計算量を減らすためのデータ圧縮の方法として CHT(Complex heterodyne technique) を使った。CHT の手続きは以下のような 3 ステップからなっている。

1. データに $e^{-\mathrm{i}\omega_m t}$ (ω_m: heterodyne frequency) をかけて信号の周波数をシフトさ

せる。

2. cut off 周波数 ω_c のローパスフィルターに通し興味のある周波数帯域だけを取り出す。
3. データをリサンプルする。

1,2 によって興味のある周波数領域 $\omega_m - \omega_c$〜$\omega_m + \omega_c$ にバンドパスフィルターを通し、この周波数領域を DC 付近にシフトさせることが出来る。このようにして得られたデータはナイキスト周波数 ω_N を $\omega_N \simeq \omega_c$ ととれるので、サンプリング周波数を大幅に落とすことができる。そこで 3 で、データをリサンプルし、データ数を減らす。こうして、データの圧縮がなされる。本解析では 3 におけるリサンプルのデータ圧縮率を 1024×20=20480 とした。よってサンプリング周波数は 20kHz/20480≃1Hz となり、解析の周波数サーチ幅は最大で約 1Hz に制限される。

3.2.2 Weighting

1000 時間に及ぶ観測から得られたデータは解析には、データがとられていない、または、とられていても SN 比を悪化させる、という原因で使うことのできないデータのギャップを含んでいる。このギャップは全部で 3 種類に分けられる。それは

1. スパイク (データが外乱によって跳ね上がる部分)
2. ロックが落ちている部分 (open-loop 伝達関数の値で判断)
3. Run 間の観測が行われてない部分

の 3 つである。これらのギャップによって取り除かれたデータは全観測時間の約 30%である。

これらのデータを取り除いた後でも、データのノイズレベルは時間につれて変化するという効果を考慮しなければならない。これらの原因は装置によるものであったり、外乱の大きさの変化であったりするわけであるが、たとえノイズレベルが変化しようが重力波による信号は常に一定である。最適な SN 比を達成するためには、ノイズレベルが低い部分のデータが全体の SN 比により大きく効くようにデータを重み付けをしてやればいい。つまり解析の際には、ノイズレベルが低い部分をより重視するわけである。周期的な信号と変化するノイズを含むデータを重み付けするにはフーリエ変換をする前のデータに、ノイズパワーの逆数をかければよいことが容易に示される (後で示す)。ギャップと重み付けのファクターをつなぎ合わせたもの Weight function といい、これをデータにかけることにより SN 比を最適化するわけである。以下でそれぞれの部分の詳しい説明をする。

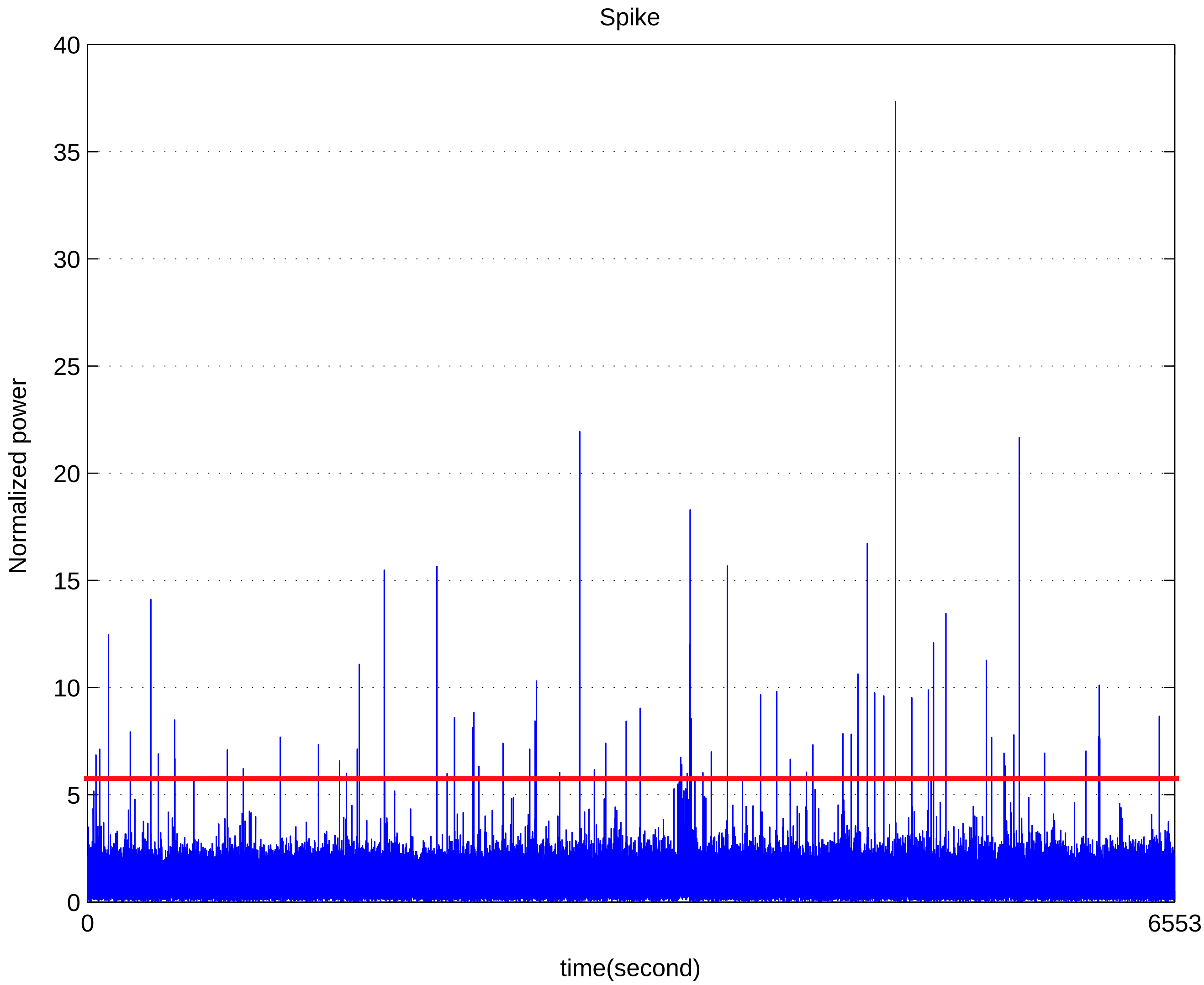

図 3.1: スパイクの例　赤線は平均パワーの 6 倍を表す

スパイク

観測中の急激な外乱によってデータが跳ね上がることがある。これをスパイクと呼び、この効果は全体の SN 比を悪化させる原因となる。もちろん何をもってスパイクと見なすかは、人為的に決めるものであり、その決めた値を超えたデータをスパイクとみなすのである。今回の解析ではその値を平均パワーの 6 倍と設定した。つまり平均パワーの 6 倍よりも大きいデータは全てスパイクとみなし、その部分とその前後数秒のデータは取りのぞく。次の図は今回の解析のデータの中の実際のスパイクの例である。図の中で赤線は平均パワーの 6 倍を表す。いくつかの点で平均パワーの 6 倍を超えているのが見て取れる。

open loop 伝達関数

長時間の解析を行う際には、SN 比を悪化させてしまうので、干渉計のロックが落ちている時間帯のデータは取り除く。そのためには、干渉計の動作状態（つまり、ロックされているかどうか）を知る必要がある。open-loop 伝達関数は、干渉計がロックされている時と、ロックが落ちているときでは、値が全然異なることから、干渉計の状態を判定するために、open-loop 伝達関数の値を用いることができる。

今回の解析では f=625Hz における open-loop 伝達関数の絶対値—G(f)—に対して、次のようにして干渉計の状態を判定した。

1. $|G(f)|$ の値が 1 分の間に 0.045 以上変化したら、ロックが落ちているとみなす。
2. $|G(f)| < 1.3$ 又は、$|G(f)| > 1.8$ なら、ロックが落ちているとみなす。
3. 1,2 以外なら、干渉計はロックされているとする。

次の図は実際の open-loop 関数の 1，2 の例である。

図 3.2 において、上側の図はデータが比較的安定している時間帯である。下側の図では図の右側の部分で open-loop 伝達関数の値が 1.3 以下となっておりロックが落ちている様子が見て取れる。

Run 間のギャップとその処理

Run と Run の間はハードウェアーの交換のため観測は行われておらず、データはとられていない。この間のデータは時系列 0 で埋めることとする (つまり Run 間の時間は常にサンプリング時間の整数倍とした)。このことについて若干の説明をしておく。Run と Run の間は観測をしているわけではない。次の Run が始まる時はまた新たな任意の時刻から始まるわけである。この時、もし前の Run の最後の点と次の Run の一番始めの点との時間差がサンプリング時間 Δt の整数倍でなかったらどうなるだろうか？例を考えてみよう。例えばサンプリング時間 Δt は 1 秒、重力波信号は 1 Hz であるとする。この時 RUN 間の時間は 10.5 秒だとする。パワースペクトルを求める際 FFT というプログラムを使うが、その都合上全てのデータ間は等しいサンプリング時間 Δt でなければならない。つまり Run 間が本当は 10.5 秒であるのに、Weight function を作る際にはそれを 10 秒か 11 秒にしてしまわなければならない。この Weight function を作ったときのずれ 0.5 秒は、重力波信号 1 Hz では位相 π に相当し、大きく SN 比をロスしてしまうことになる。

今回の解析ではターゲット周波数は（CHT で圧縮した後）最大で 0.1 Hz、サンプリング時間は約 1 秒であるので、位相は最大で $2\pi \times 0.1 \times 0.5 = 0.1\pi$ ずれることになる。しかしこれを防ぐために 2 回目のリサンプル（解析ではリサンプルは 2 回行われた。一回目の圧縮率は 1024 倍であり、2 回目の圧縮率は 20 倍である)

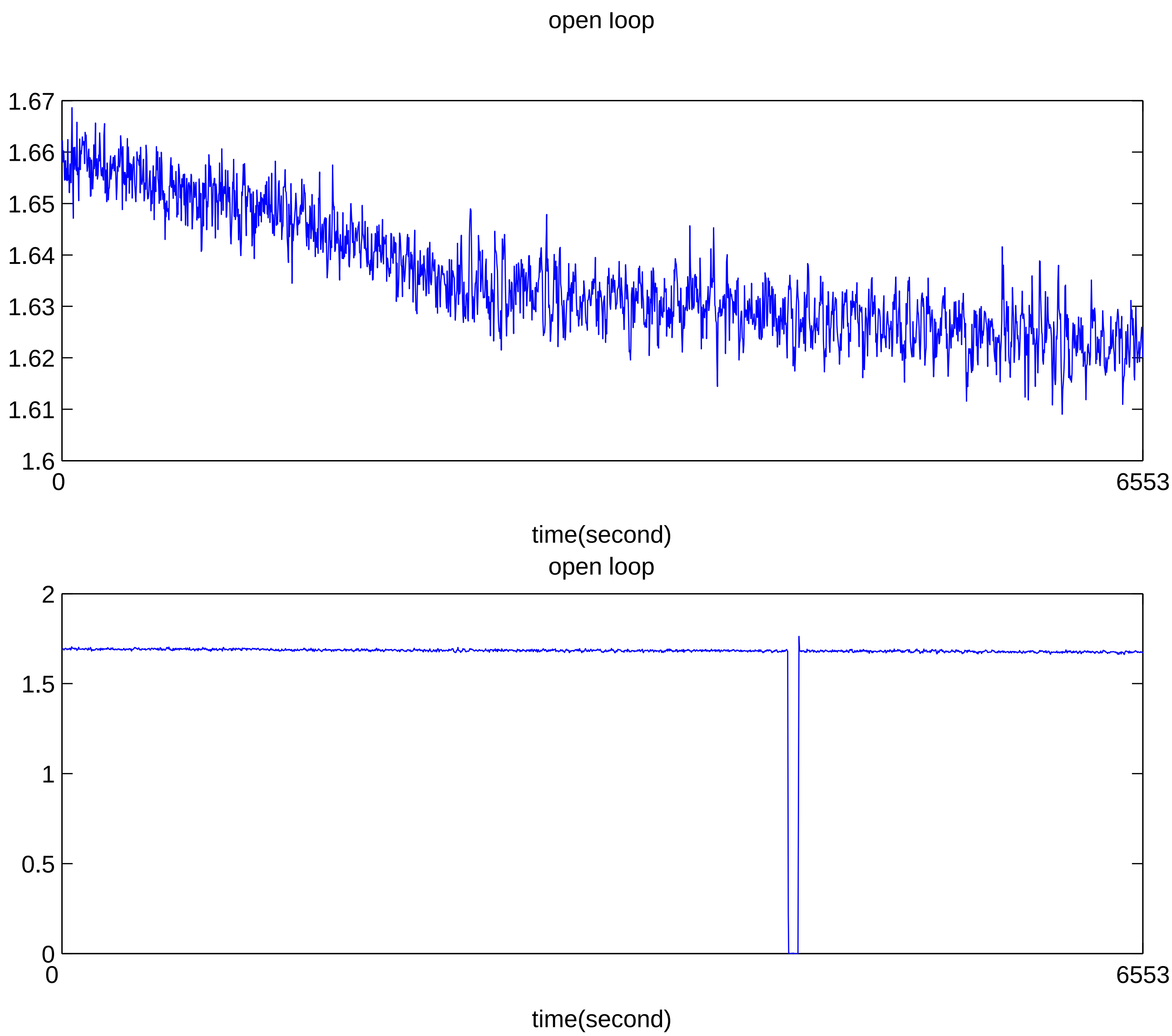

図 3.2: ロックが落ちている時間帯の例

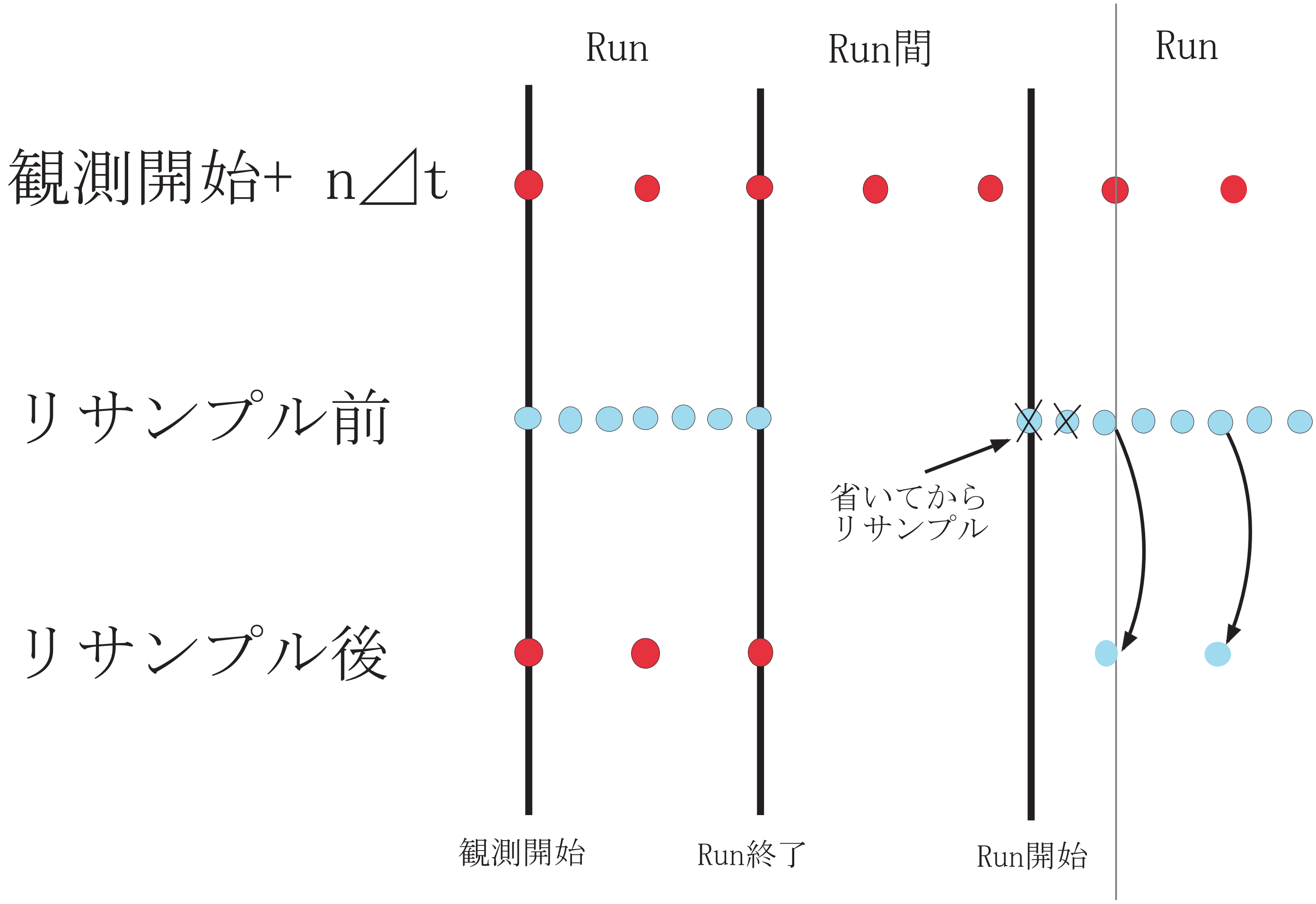

図 3.3: Run 間の時間処理の模式図

の前に Run の最初の数点を取り除くことにより、Run 間の時間間隔をなるべくサンプリング時間 Δt の整数倍になるようにし、この位相のずれを小さくした。最後のリサンプルをする前のサンプリング時間 Δt は約 0.05 秒である。つまり Run 間による最大の位相のずれは $0.1\pi/20 = \pi/200$ となる。このずれによる SN 比のロスは小さいとして許容することにする。図 3.3 は上の時間処理の模式図である。

データの重み付け

1000 時間を超えるデータでは、ノイズレベルの変動が無視出来ず、ノイズレベルの悪い時間帯のデータが、全体の SN 比を悪化させてしまう。そこで、時間帯毎にノイズレベルを評価し、よりノイズレベルの低い時間帯のデータを重視するようにする。具体的には、10 分毎のデータのノイズレベルからその時間帯での重みを決める関数を決定し、それを元のデータに掛け合わせる。また SN を最適化する

ための重みはノイズレベルの 2 乗の逆数ととればよい。それを以下示そう。

最適重み付けの証明　簡単のため次のようなモデルを考える。全観測時間は N であるとする。この観測時間内に単位時間ごとにノイズレベルが変化するとする。つまり全観測時間は区間 N にわけることができる。そして各区間のノイズの分散は $\sigma_i^2 \quad (i = 1, 2, \cdot\cdot, N)$ であるとする。ここでノイズパワーとはその区間のパワースペクトルの平均のことであるが、これはその区間の 2 乗平均、すなわち分散に等しいことに注意する。そして区間 i を重み k_i で重み付けしたとする。ただし前節述べたように Weight function の平均は 1 であるという条件がつく。

SN 比とは信号のパワーとノイズのパワーの比のことであるが、Weight function の平均を 1 にしておけば Weight function と単色光信号を掛け合わせたもののパワーは掛け合わせる前の単色光のパワーと変化しないことは”Weight function の作り方” の節で述べる。つまり SN 比の変化を考えるには、ノイズに対する Weight function の効果だけを考えればよい。

では重みのついたノイズパワーはどのように表されるかというと、上のモデルによれば

$$y = \sum_i k_i^2 \sigma_i^2 \qquad (\sum_i k_i = N, \quad W \text{ の平均が } 1) \tag{3.24}$$

とかける。つまり SN 比を最適化するということは $\sum_i k_i = N$ という条件のもと y を極値にするということと同じである。この極値問題は Lagrange の未定係数法を使い簡単に解くことができる。Lagrange の未定係数を λ として

$$g = \sum_i k_i^2 \sigma_i^2 - \lambda(\sum_i k_i - N) \tag{3.25}$$

という関数を考え、この極値問題を解く。まず λ について微分すると

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = \sum_i k_i - N = 0 \tag{3.26}$$

k_i で微分すると

$$\frac{\partial g}{\partial k_i} = 2k_i\sigma_i^2 - \lambda = 0 \tag{3.27}$$

よって

$$\lambda = 2k_i\sigma_i^2 \Longleftrightarrow k_i = \frac{\lambda}{2\sigma_i^2} \tag{3.28}$$

となる。ここで式（3.28）を式（3.26）に代入して、変形すると

$$\lambda = \frac{2N}{\displaystyle\sum_i \frac{1}{\sigma^2}} \tag{3.29}$$

これを式（3.27）代入することにより結局

$$k_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{N\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}} \propto \frac{1}{\sigma_i^2} \tag{3.30}$$

となり、SN 比を最適化するには、ノイズパワーの逆数で重み付けすればよいことがわかる。

3.2.3 Weight function

今までに述べた 3 つのギャップと重み付けの因子を全部あわせてつなぎ合わせた時系列データのことを Weight function という。この Weight function をデータに掛け合わせることにより、データに対して SN 比の最適化を行うわけである。

Weight function の性質

時系列データに Weight function を掛け合わせるということは、そのフーリエ変換は Weight function のフーリエ変換と、元の時系列データのフーリエ変換の畳み込みになる。すなわち Weight function を掛け合わせることにより、元の時系列データのスペクトルは変化する。まず単色光の信号に対しては、Weight function のフーリエ変換の効果で与えられる振幅のサイドバンドができる。だが Weight function のパワースペクトルが DC 成分において支配的な場合は信号のサイドバンドはほぼ無視できる。今回の解析ではこの効果は充分小さく、サイドバンドを偽の信号として検出してしまう可能性は無視してよい。

しかし Weight function のノイズに対する影響はもう少し複雑である。なぜなら Weight function をかけた後のノイズは非定常過程だからである。簡単のため Weight function をかける前のノイズは無相関で分散が 1 であると仮定する。すると Weight function $W(t)$ をかけたあとのノイズ $N(t)$ の相関関数は

$$< N(t)N'(t) >= W^2\delta_{t,t'} \tag{3.31}$$

と書ける。この等式は Weight function をかけたノイズは振幅が $W(t)$ で変調を受けているということを示している。また Weight function をかけても白色雑音は白色雑音に移されることが分かっている [11] ので、仮に Weight function が周期的なギャップをもつような形であったとしても、Weight function をかけることによって、ノイズが有意な信号に見えてしまうことはない。よって Weight function の効果によって偽信号を検出してしまう心配はしなくてよい。

上の処理を加えられたデータのパワースペクトルの大きさは一般には変化してしまう。よって解析を行うためには、これを正しく補正する必要がある。補正は

Weight function をかけた後も, 信号の振幅が正しく求められなければいけないことから、補正の因子は以下のように求められる。

1. 適当な信号 $\exp(2\mathrm{i}\pi ft)$ の振幅スペクトルを求め、その振幅を A とする。
2. 　同じ信号に、Weight function をかけたデータの振幅スペクトルを求めその振幅を B とする。
3. 補正因子 C は $C = A/B$ である。

また次のように考えることも出来る。Weight function と、信号 $D\exp(2\mathrm{i}\pi ft)$ の積の振幅スペクトルは、Weight function の振幅スペクトルを周波数軸方向に f だけ平行移動させ、全体を D 倍したものである。かつ、$D\exp(2\mathrm{i}\pi ft)$ の振幅スペクトルは、高さ $D\sqrt{T}$ の δ 関数型のピークとなることから、補正因子は、

$$C = \left(\frac{\tilde{W}(0)}{\sqrt{T}}\right)^{-1} \tag{3.32}$$

となる。($\tilde{W}(0)$ は Weight function の振幅スペクトルの f=0 における値、T は観測時間) ここで Weight function の時系列を $w(\frac{k}{M}T)$,(k=0,$\cdots$,M-1) と表すと、そのフーリエ変換は

$$\tilde{w}\left(\frac{M}{T}\hat{k}\right) = \frac{T}{M}\sum_{k=0}^{M-1} w\left(\frac{k}{M}T\right)\exp\left(-2\mathrm{i}\pi\frac{k\hat{k}}{M}\right) \quad \left(\hat{k} = -\frac{M}{2}, -\frac{M}{2}+1, \cdots, \frac{M}{2}\right) \tag{3.33}$$

なので、$\tilde{w}(0)$ は

$$\tilde{w}(0) = T\bar{w} \tag{3.34}$$

ここで、$\bar{w}$ は Weight function の時間平均である。また振幅スペクトルの定義より、

$$\begin{aligned} \tilde{W}(0) &= \sqrt{\frac{(\tilde{w}(0))^2}{T}} \\ &= \frac{\tilde{w}(0)}{\sqrt{T}} \\ &= \sqrt{T}\bar{w} \end{aligned}$$

が導かれる。よって補正因子 C は

$$\begin{aligned} C &= \left(\frac{\tilde{W}(0)}{\sqrt{T}}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\bar{w}} \end{aligned}$$

すなわち補正因子は Weight function の時間平均の逆数に等しいことが分かる。従って Weight function の時間平均が 1 になるようにあらかじめ規格化しておけば、補正因子をかける必要はない。

Weight function の作り方

実際には以下のような複雑な手続きを経て Weight function は得られる。以下の作業は CHT が終わった各 Run のデータに共通して行われる。

1. 各 Run についてスパイクの除去を行う。スパイクとはデータが何らかの外乱で、跳ね上がることである。今回の解析では、データが Run の平均パワーの 6 倍を超えた部分をスパイクとみなすことにする。そしてスパイクの前後 2 秒間のデータを 0 にするという形でスパイクの除去を行った。そして 0 でないデータは全て 1 とし、これを $W1$ とする。
2. 各 Run について open loop 伝達関数の値から干渉計のロックが落ちている時間帯を判定し、ロックが落ちている時間帯と、ロックが落ちる直前の 90 秒、及び、再びロックされた時刻から 210 秒のデータを 0 にする。これは、干渉計のロックが落ちる直前や、ロックされた直後のデータは質が悪いからである。1 と同様に 0 でないデータは全て 1 としこれを $W2$ とする。
3. 各 Run についてノイズレベルに応じた重み付けを行う。まず時系列データを z とすると、不安定な部分を 0 にしたデータ Z は $W1 \times W2 = W3$ とし、$Z = z \times W3$ と表せる。この時系列 Z を、10 分毎に区切っていき、各時間帯でノイズパワーを求める。ここでノイズパワーとは、その区間でのデータの 2 乗平均とする。$Z, W3$ のノイズパワーをそれぞれ Z_n, W_n とすると、ノイズレベルに応じた重み付け因子 W は

$$W = \left(\frac{Z_n}{W_n}\right)^{-1} \tag{3.35}$$

   となる。これは各時間帯における、ノイズレベルが安定な時間のデータ ($W3$ が 0 でない部分）の 2 乗平均の逆数となっている。
4. 各 Run の最終的な Weight function は不安定なデータを 0 とし、かつノイズレベルに応じた重み付けを行ったものなので、$W3 \times W$ である。
5. 各 Run 間の時系列を 0 のデータで埋めてつなぎ合わせたものが今回使った全データの Weight fucntion である。

全データの Weight function は解析結果の章で示す。

3.3 補正

マッチドフィルタリングを FFT を使って求める際、SN 比を最適化するために、元のデータ $o(t)$ を式 (3.16) のように補正する必要があった。このセクションでは、補正を実際に行うために式の中に出てくる、3 つの効果について述べる。補正をするために必要なのは次の 3 つである。

1. 感度 $S_+, S_\times$（重力波源に対する干渉計の向きの変化による効果）

2. ドップラー効果 δt (重力波源と干渉計の相対運動による効果)
3. スピンダウンパラメーター f_k (重力波源であるパルサーの自転の変化による効果)

以下で、上の3つの効果についてそれぞれ説明していくことにする。そして最後に補正をする際、現実的にはどのような問題があるのかについて述べる。

3.3.1 感度

一定周波数で回転しているパルサーから出ている重力波はスピンの回転軸と観測点との間の角度に依存する偏極をうける。つまり干渉計が受ける重力波信号の大きさは、干渉計とパルサーの位置関係によって変化する。干渉計がどれくらい重みで重力波を受けることが出来るかが感度である。まず一般的な理解を得るためにその形を書いてみる。

干渉計の出力は重力波のプラスモードとクロスモードの線形結合で書ける。一般的に書くと

$$V(t) = A_+ S_+(t)\cos(\omega_s t + \phi_0) + A_\times S_\times(t)\cos(\omega_s t) \tag{3.36}$$

ここで $A_+, A_\times$ は各偏極成分の強さ、$S_+, S_\times$ は各偏極成分の感度、ω_s は重力波の角周波数である。また ϕ_0 は二つの偏極の位相差である。感度 $S_+, S_\times$ は時間の関数であり、一般的には重力波源と運動する地球に貼り付いている干渉計の位置関係による。複雑な計算は付録Aにゆずるとして、ここでは結果だけ書くと

$$\begin{aligned}
S_+ &= 3\sin^2\alpha\sin^2\theta\cos 2\psi + 2A\sin 2\alpha\sin\theta\cos(\eta+\Phi_1) + 2B\cos\alpha\sin(2\eta+\Phi_2) \\
S_\times &= 4A\sin\alpha\sin\theta\sin(\eta+\Phi_1) + 2B\cos\alpha\sin(2\eta+\Phi_2)
\end{aligned}$$

ここで、

$$A\sin\Phi_1 \equiv \sin 2\psi, \quad A\cos\Phi_1 \equiv \cos\theta\cos 2\psi$$

$$A\sin\Phi_2 \equiv 2\cos\theta\sin 2\psi, \quad A\cos\Phi_2 \equiv (1+\cos^2\theta)\cos 2\psi$$

ここで式の中のパラメーターは以下の通りである。

α	パルサーの赤緯
β	パルサーの赤経
θ	干渉計の位置の余緯度
λ	干渉計の位置の経度
ψ	干渉計の腕と北向きのベクトルがなす角度
η	$\lambda - \beta + \Omega_E t$
Ω_E	地球自転の角速度

これらについて、一恒星日周期 $(\eta(t))$ の項と、半恒星日周期 (2η) の項を比べると、各々について $S_+(t)$ と $S_\times(t)$ では、位相が $\pi/2$ だけずれている。従って、$(S_+(t)\cdot S_\times(t))$ を一恒星日の整数倍の時間積分すると、0 になることがわかる。従って、時系列データに $S_+(t), S_\times(t)$ をかけることによって、＋モード、× モードを取り出すことができる。ローパスフィルターの cutoff 周波数 ω_c が、$\omega_c >> \Omega_E$ である限りは、$S_+(t), S_\times(t)$ をかけるのは、CHT を行った後でよい。

もし偏極が完全にわかっていれば、検出効率を最大にする解析の仕方はおのずときまるが、偏極がわかってない場合にモードを分離することは、その偏極の仕方によって重力波検出にとって、プラスにもマイナスにもなりうる。このことは次の例を考えればわかる。

干渉計が北極にあり真上から重力波を受ける場合を考えよう。このとき式（3.36）は

$$V(t) = A_+ \cos 2\Omega_E t \times \cos(\omega_s t + \phi_0) + A_\times \sin 2\Omega_E t \times \cos \omega_s t \tag{3.37}$$

となる。

もしただひとつの偏極だけが存在するならば、（すなわち、A_+ か $A_\times$ がゼロならば）信号は大まかにいって二つのサイドバンドを $\omega_s \pm 2\Omega_E$ で持つことになる。ここではサイドバンドのパワーが元の重力波のパワーに加えられるように信号を復調することが (すなわち単純にマッチドフィルタを行えば)SN 比を向上させることになる。一方、両偏極が等しく $(A_\times = A_+)$, かつ位相差が 90 度の場合を考えてみよう。この場合式（3.36）は, 合成することによって、

$$V(t) = A_+ \sin((\omega_s + 2\Omega_E)t) \tag{3.38}$$

となり、すでに信号の周波数はひとつだけになっている。よってこの場合は最初に、どちらか特定の編極を分離して解析をすることをしないで解析を行ったほうがよい。一般には信号は上に挙げた例のように簡単なものではない。よって重力波をサーチする場合には（位相差がわかっていない場合）偏極を分離する場合と、分離しない場合両方の解析を行ったほうがよい。

しかしパルサーからの重力波のモード間の位相差は理論的に $\pi/2$ とはっきりわかっているので、今回の解析では偏極を分離しない解析方法を使って解析を行った。

3.3.2　ドップラー効果

重力波源と干渉計の相対運動はドップラーシフトを引き起こす。この効果は地球の自転と地球の公転の効果の組み合わせから成っている。太陽系重心では重力波信号は単色光であると考えられるので、重力波は平面波であると仮定すると、その重力波が干渉計に着く時間と太陽系重心に着く時間の差 δt を使えば、干渉計での重力波波形はこの δt を含んだ形、式 (3.9), (3.10) のように書ける。

この時間差は太陽系重心から重力波源に向かう単位ベクトルと太陽系重心から干渉計に向かうベクトルの内積であらわされ

$$\delta t = a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \tag{3.39}$$

と表せる。ここで ω_1, ω_2 はそれぞれ自転と公転の角周波数である。またそれぞれの振幅と位相は重力波源と干渉計の位置に依存する定数である。国立天文台から地球の位置、速度を求めるプログラムを貸してもらい、これらの値を求めた。

太陽系重心で受ける信号を、各周波数 ω_s、振幅 s_0 の単色光とすると、実験室系、つまり干渉計でうける信号は位相変調を受けた形となり、δt を使って書くと

$$s(t) = s_0 \sin \omega_s (t + \delta t) \tag{3.40}$$

となる。この式を δt で展開してみることによって、どれくらいの観測時間でドップラー効果が効いてくるのかがわかる。級数において定数項と 1 次の項はただ信号の周波数をずらす効果しかないので SN 比には影響しない。しかし、2 次以上の効果は周波数の時間依存性を引き起こし、SN 比にも影響を及ぼす。これを補正するにはこの効果を補正するために、次の 3 通りの方法が考えられる。

1. 補間
2. Rebin
3. Frequency tracking

補間

地球によるドップラー効果の補正は、スペクトルを求めるためにフーリエ変換をする際の時間変数を実験室系の時間ではなく、太陽系重心での時間を使うことによってなされる。太陽系重心の時間を使ってフーリエ変換をすることによってどんな周波数の信号に対する復調も可能となる。これは結局はマッチドフィルターを行うことと同じであるが、データに対して補正項をかけて復調を行うのではなく、時間データ自体を補完することによって変換し、復調してやる方法である。しかしここで現実的な問題が発生する。それは実際のデータは離散的であることから起こる。データは干渉計において、つまり実験室系の時間で、等間隔サンプリングされている。一方、太陽系重心の時間で考えたときは実験室系では等間隔であった時間はもはや等間隔ではない。つまり実験室での等間隔サンプリングされたデータを太陽系重心の系の時間で考えるためにはなんらかの方法でデータ間を補完しなければならない。理論的にはこの問題は次のように解決される。サンプリング定理によれば、周波数のバンド幅が B と制限されていて、サンプリング間隔が $T < 2/B$ であるような関数 X は次の関係を使って正確に補完される。

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT) \mathrm{sinc}[\pi(\frac{t}{T} - n)] \tag{3.41}$$

ここで $\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$ であり、n は整数である。しかし実際は式（3.41）はゆっくりと収束し、また圧縮前のデータになされる。またデータが充分長くなければ補完は正確なものにはならない。

Rebinning

完全な補完でなく、近似的な補完の方法として Rebin という方法がある。これは太陽系重心の時間へ変換したデータを実験室系におけるデータの一番近い時間のデータで代用する方法である。この方法においてはドップラー効果による時間差 δt が実験室系におけるサンプリング時間 (つまり等間隔サンプリング) を超えてしまった場合にはその点は省略して、1 つ前の時間のデータで代用するものとする。例えば実験室系で 10 kHz でサンプリングしたとすると、ドップラー効果による Rebin のずれがサンプリング間隔１つ分超えてしまうには大体 10^7 個のデータ点が存在することになる。一見したところ、10^7 のデータのうちたった１つのデータ点を省く効果など無視できるように思える。しかし、例えば信号が 4 kHz だったとしてみると、１つのデータ点を省くことは位相にして 144 度の変化に相当するので、結果として大きな SN 比の低下を招いてしまう。よってやはり観測時間が大きくなった場合にはこの方法では駄目で式 (3.41) を使って、正確に補完する必要がある。

Frequency tracking

上の二つの方法は、計算時間が多く掛かり、観測時間が大きくなると SN 比を大きくロスしてしまうという難点があった。Frequency tracking という方法の利点は、補正が圧縮した後のデータに行えるということである。上の二つの方法は圧縮する前のデータに対して行わなければ、信号の情報を失うことになってしまう。よって必然的に計算量が多くなってしまうのである。この方法では圧縮したあとのデータに対して行うので補正による計算量は上の二つより大幅に少ない。そこで本解析では上の二つに変わる方法として Frequency tracking を使ってドップラー補正を行った。この方法はデータに解析的な信号 $\exp(-\mathrm{i}\omega_s \delta t)$ をかけることでドップラー補正をする方法である。すなわちマッチドフィルターと全く同じである。ここで ω_s は予想される信号の周波数であり、δt は干渉計（実験室系）と太陽系重心に重力波が到着する時間の時間差である。特定のパルサー（SN1987A remnant) をターゲットにする解析において ω_s は電波観測によって推定することが出来る。しかし一般的には ω_s は前もって知られてはいない。だが、限られたバンド幅を解析する場合には、ヘテロダイン周波数 ω_m を ω_s の替わりに使えばよい。ただここで注意したいのは、ω_s と実際の重力波信号の周波数がずれていた場合は、そのずれの効果によって、完全な補正が出来ないということである。これについては後の補正パラメーターのスキャンの節で詳しく述べることにする。

3.3.3　スピンダウン効果

スピンダウン効果はパルサーの自転の変化であり、その効果を含んだ信号は一般的に

$$h_+ = h_0(1+\cos^2\theta)\cos\left\{2\pi f_0\left[(t+\delta t)+\sum f_k\frac{(t+\delta t)^{k+1}}{k+1}\right]\right\} \tag{3.42}$$

$$h_\times = 2h_0\cos\theta\sin\left\{2\pi f_0\left[(t+\delta t)+\sum f_k\frac{(t+\delta t)^{k+1}}{k+1}\right]\right\} \tag{3.43}$$

とかけるのであった。ここでスピンダウン効果をあらわすのは $\sum f_k\frac{(t+\delta t)^{k+1}}{k+1}$ の部分である。しかし今回の解析では計算時間の都合上スピンダウンの効果は 2 次までに限った。実際通常観測されているパルサーのスピンダウンでも一番効いてくるのは 2 次の効果で 3 次以上の効果は小さい。2 次の効果とは、単位時間にパルサーのスピンの周波数がどれくらい落ちるかという量である。スピンダウンが 2 次まで効くとした場合を式で表すと

$$h_+ = h_0(1+\cos^2\theta)\cos\left\{2\pi f_0\left[(t+\delta t)+2\pi C(t+\delta t)^2\right]\right\} \tag{3.44}$$

$$h_\times = 2h_0\cos\theta\sin\left\{2\pi f_0\left[(t+\delta t)+2\pi C(t+\delta t)^2\right]\right\} \tag{3.45}$$

となる。

ここで C は観測された電磁波のスピンダウンパラメータであり、単位は Hz/s である。

3.3.4　補正パラメータのスキャン

これまでのセクションで述べた補正によって原理的には SN 比を最適化できる。しかしここで実際的な問題がでてくる。それは実際の重力波源からきている連続重力波のパラメータを前もって、正確に知っているわけではないことに起因する。つまりターゲットの重力波のパラメータは一定ではなく不定性があるのである。実際の重力波のパラメータと補正のパラメータがずれてしまうと、そのずれの効果で SN 比は低下してしまう。これをわかりやすく理解するために今回の解析の例を挙げてみよう。Middleditch によって報告されたスピンダウンパラメータのアッパーリミットは $2\sim3\times10^{-10}$ Hz/s である。つまりスピンダウンパラメータは前もって正確にわかっているわけではなく、1×10^{-10} Hz/s の不定性がある。たとえばスピンダウンの補正に 2.5×10^{-10} Hz/s という値を使ったとしよう。そして実際の重力波のスピンダウンパラメータは 2×10^{-10} Hz/s であったとしよう。すると補正と実際とではスピンダウンパラメーターに 0.5×10^{-10} Hz/s のずれがある。この効果によって SN 比が低下してしまう。当然このずれが大きければ大きいほど、SN 比のロスも大きくなる。

今回の解析ではこのずれの効果による SN 比のロスをなるべく小さく抑えるために次のような手法を使った。それはある補正パラメーターセット一回で補正を行うのではなく、与えられたパラメーター範囲を分割して、それぞれのパラメーターに対して補正を行うという手法である。つまり複数個の補正パラメーターセットを使って補正するのである。上の例でいえば、補正パラメータに 2.5×10^{-10} Hz/s を使えば、最大のずれは 0.5×10^{-10} Hz/s だが、もし補正を 10 回行えば（補正パラメータとしてスピンダウンパラメータの不定性の範囲を 10 等分した値を使う) 最大のずれは 0.05×10^{-10} Hz/s となり、SN 比の悪化も一回だけの補正の時よりも押さえることができる。

補正の回数を増やせばふやすほど原理的には、SN 比のロスは 0 にすることができるが、回数を増やした分だけ計算時間も当然増えてしまうので、実際の解析ではどれだけ SN 比のロスを許すかとと計算時間との兼ね合いになる。

今回の解析において三つの補正（スピンダウン補正、感度補正（=パルサーの回転軸に依る)、ドップラー補正) でそれぞれ、どれだけの SN 比のロスを許し、補正をどれだけの回数したのかについては次で述べる。

スピンダウンに関して

今回の解析における、スピンダウンパラメータは Middleditch による報告された値を使った。報告されたスピンダウンパラメータの upper limit は $2〜3 \times 10^{-10}$ Hz/s である。これは文字通り upper limit であり、実際の観測で得られた値はより広範囲にわたる。しかし計算機の計算時間による制限から重力波サーチのターゲットとしてはこの範囲のスピンダウンパラメータをサーチすることにした。計算時間に関する具体的な言及は結論の章で述べることにする。

この範囲を 550 等分して、すなわちこの範囲でスピンパラメータを少しずつ 550 回ずらして補正を行うことによって最大の SN 比のロスは 70%に抑えた。この値は少し大きいものとなっている。しかしこれ以上は計算時間による制限で増やすことができなかった。

パルサーの回転軸に関して

観測における未知のパラメーターの二つ目はパルサーの回転軸 θ である。パルサーの自転の回転軸がどの方向を向いているかは前もってはわからない。補正の章で述べたように、補正の際にこのパラメータを含む項は

1. $\sqrt{S_+^2 h_0^2 (1+\cos^2\theta)^2 + S_\times^2 4 h_0^2 \cos^2\theta}$
2. $\exp(-\mathrm{i}\phi) \qquad \left(\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{S_+(1+\cos^2\theta)}{S_\times 2\cos\theta}\right)\right)$

の二つがある。１は振幅変調を補正するためにかける項であり、２は位相変調を補正するためにかける項であった。重力波のパラメーターと補正のパラメーターがずれた場合、SN 比のロスの主な原因となるのは２の位相のずれの方である。この位相のずれは時間の２次の効果であり今回の解析のような 1000 時間を超える観測時間の解析では、少しのパラメータのずれは結果として大きな位相のずれになってしまう。しかし１はパラメータのずれは振幅のわずかなずれに相当し、位相補正の場合のように、SN 比のロスは時間に依存するものではない。SN ロスのほとんどは２の位相補正の際に発生し、１の補正による効果は無視できるとしてよい。ϕ の式を見ればわかるように、このパラメータには対称性があり、サーチする範囲は $0 \leq \phi \leq \pi$ でよい。

解析ではこの範囲を 160 等分し、つまりこのパラメータを少しずつ変えて 160 回補正を行った。これによる最大の SN 比のロスは 5%である。

ドップラー効果に関して

ドップラー補正で SN 比が悪化してしまう原因に関しては、上の二つの補正（スピンダウン補正、パルサーの回転軸の補正）とは事情が少し異なる。ドップラー効果が入った重力波は、

$$h = \exp(2\mathrm{i}\pi f(t + \delta t)) \tag{3.46}$$

とかけた。よって補正をするには FFT を行う前のデータに $\exp(-2\mathrm{i}\pi f \delta t)$ をかければよい。ここでドップラー効果は、重力波が干渉計と太陽系重心に到達する時間差 δt で表されたが、このパラメータに不定性はない。つまり地球の位置も速度も正確に知っているので δt に不定性はないのである。では SN 比がドップラー補正によってロスしてしまう原因はどこにあるのだろうか？

実はドップラー補正によって SN 比が悪化する原因は FFT のプログラムを使うことにある。FFT とは (Fast Fourier Transformation) の略であり、フーリエ変換を高速で行うアルゴリズムである。FFT というアルゴリズムは周波数を少しずつずらしながら離散フーリエ変換を行い、時間領域から周波数領域へデータを写像する。一方、一回の補正の際にかける $\exp(-2\mathrm{i}\pi f \delta t)$ においては f は定数である。よって FFT を使うと、補正の f と FFT の少しずつずらしていく f が一致する点では補正は完全となるが、この二つがずれる点では当然 SN 比をロスしてしまう。このずれ $(f_{FFT} - f_{correction})$ が大きければ大きいほど SN 比のロスも大きい。すなわちドップラー補正の場合パラメーターの不定性は δt にあるのではなく、f_{FFT}（不定性の大きさはサーチバンド幅）にあるのである。

このずれによる SN 比の低下が充分小さければ問題はないが、そうでなければこのずれの効果を考えなければならない。どれくらい SN 比が悪化するかを見積もるため次のような数値計算を行えばよい。まず、ずれの効果は δt と $\omega_m - \omega_s$ の積で表せる。よってこのずれによる SN 比のロスを見るには $\exp(\mathrm{i}(\omega_m - \omega_s)\delta t)$ のパワースペクトルをみればよい。もちろんこのずれの効果は観測時間が長いほど大

きくなるので、SN 比のロスも観測時間が長くなれば、大きくなる。これを防ぐ方法として ω_s を 1 つではなく複数点使って $\omega_m - \omega_s$ の効果によるずれの効果を小さくするということが考えれるが、当然その分だけ計算量は増えてしまう。よって実際の解析ではどこまで SN 比のロスを許すかということと計算時間がどれほどの長さなら許容できるかの兼ね合いとなる。

今回の解析では、この効果による SN 比のロスを抑えるためサーチ幅を 3 等分し、つまり補正の f を少しづつ 3 ずらして、3 つの補正パラメーターに対して補正を行った。これによる最大の SN 比のロスは 30%である。図は補正周波数にサーチ幅の中間の点を使った場合に FFT の f を変化させるにしたがって SN 比がどのように失われていくかを示す図である。図 3.4 の横軸は補正の周波数と重力波の周波

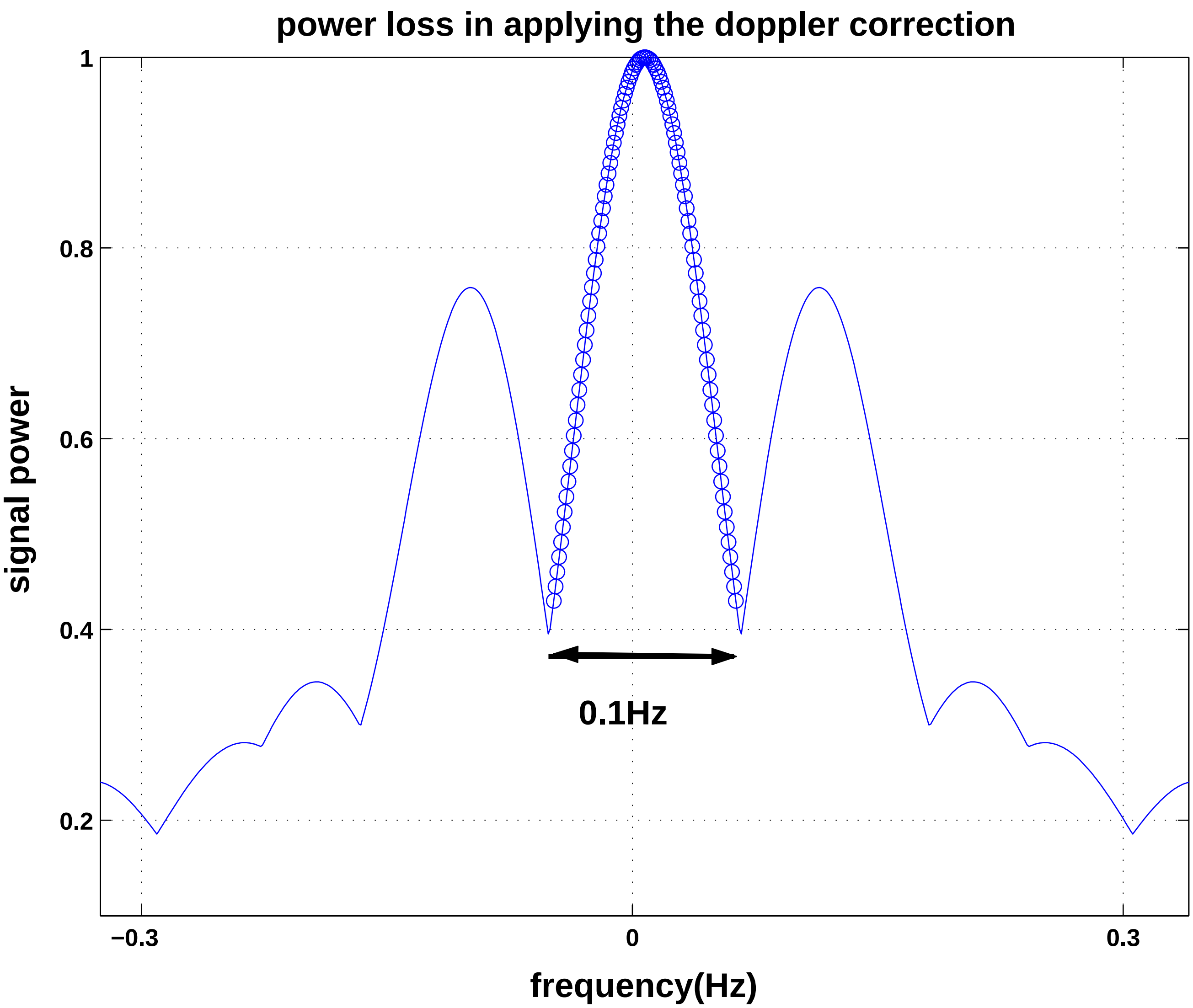

図 3.4: ドップラー補正による SN のロス

数のずれを表す。中心の一番値が高い部分が補正の周波数と重力波の周波数が一

致したときである。ずれが大きくなるにつれて全体的に値が小さくなっていることがわかる。

規格化

上の補正を行うことによって検出効率は最大になるが、スペクトルの絶対値が変化してしまうという問題が生じる。補正を複数のパラメータセットに対して行うことによって多くのスペクトルが得られる。信号を探すにはこれらのスペクトルの中から一番信号らしい点を探すが、補正によってそれぞれのスペクトルの縦軸の大きさが変化している。よって正しく解析を行うには縦軸の大きさ（パワー）がきちんと全てのスペクトルで比較できるように規格化しなければならない。信号を検出するには信号対雑音のパワーの比率をみてそれが大きければ、ピークは信号らしいといえるわけだが、全てのスペクトルでノイズパワーの平均が等しくなるようにスペクトルを規格化しておけば、全てのスペクトルを同等に扱うことができて便利である。それには次のように規格化すればよい。規格化後のスペクトルを P_N とすると、

$$P_N = \frac{P(f,\theta)}{< F(t,\theta)^2 >} \tag{3.47}$$

ここで、

$$F(f,\theta) = \sqrt{S_+^2 h_0^2 (1+\cos^2\theta)^2 + S_\times^2 4h_0^2 \cos^2\theta} \tag{3.48}$$

であり、$<\cdots>$は時間平均を表す。

3.4 統計的解釈

我々が興味のあるのは、ノイズの中に埋もれている、(重力波による) 有意な信号である。これを探すためには、パワースペクトルの値 P が特に大きな値をとる周波数に注目する。その中に、特にノイズとは思えないほど P が大きいような $\omega = \omega_a$ があれば、それが有意な信号によるものだと期待されるが、それがどの程度の確かさで重力波信号だといえるのかの議論が必要である。この確かさは、ノイズによるパワースペクトルの値が、$P = P_A$ に達してしまうような第一種の誤りを計算することにより評価される。また、このようにパワースペクトルが著しく大きな値をとることがなくても、$P(\omega) > P_M$ を満たす ω の分布が、ある周波数 ω_B 付近にかたまりをなしているとすれば、これは、周波数がおよそ ω_B の、ある有意な信号の存在を示唆しているものである可能性がある（その周波数をもった信号がなんらかの効果によって変調をうけている場合など)。この確かさも、ノイズによって、そのような ω の塊りができてしまうような、第一種の誤りの確率を計算することで、評価できる。

一方、このような有意な信号を示唆するものが一切見当たらない場合は、重力

波の upper limit を出す。これは、得られたパワースペクトル $P(\omega)$ に対して、すべての周波数 ω、において、$P(\omega) < P_T$ を満たす P_T をとり、これに対し、第二種の誤りをおかさない確率を計算することで評価できる。つまり、ある強度を超える重力波の信号は、観測データ中にはないという命題の確からしさを評価する。この際、閾値 P_T は、$P(\omega) > P_T$ である ω が存在するという第一種の誤りの確率で評価する（この確率が低い程、よい閾値である)。

3.4.1 第一種の誤り

まず適当な閾値 P_T を設定し、パワーが P_T を越えるようなピークがあるかを見る。つまり閾値があってはじめて信号が定義されるのである。しかしながら、第一種の誤り、つまり、ノイズによるパワースペクトルが、ある周波数でたまたま閾値 P_T を超えてしまうということもありうる。従って P_T を超えたピークが重力波だという主張の確からしさは、ノイズによるパワースペクトルが、P_T に達してしまう確率 P_1 で判定される。逆に言えば、この確率が充分小さくなるように、閾値 P_T を設定しなければいけない。

パワースペクトルがある与えられた周波数成分で閾値 P_T を超えてしまう確率 P_0 は、式 (3.21) を用いて、

$$P_0 = Prob(P < P_T) = \int_0^{P_T} p(P)dP \tag{3.49}$$

で与えられる。各周波数成分におけるパワースペクトルの値には相関がないので、N 個周波数成分があるとすると $P > P_T$ となる周波数成分の数の分布は、平均が $\mu \equiv NP_0$ であるポアソン分布になると考えられる。従って P_1 は、全周波数成分中に、$P > P_T$ となる成分が 1 つある確率で評価できる。つまり、

$$P_1 = \mu e^{-\mu} \tag{3.50}$$

で評価できる。この関係式から、第一種の誤りの確率 P_1 が充分小さくなるようにして、閾値 P_T を決定する。

3.4.2 第二種の誤り

次に第 2 種の誤りについて考える。つまり、パワースペクトル中に、重力波の信号は充分に検出可能な強度 P_s で含まれているが、重力波の周波数で、雑音が低いために、P_T を超えるピークとして観測されない、という確率 P_2 について評価する。それを見積もるために n 個のパワースペクトルの足し合わせを考える。この足し合わせのスペクトルにおいて、ある周波数における値が、強度 P_s の信号と強度 $P_0 = 1$ ののノイズによる寄与からなるものとすると、パワースペクトルの値

Ｐの分布は、

$$p_n(P;P_s)\left(\frac{P}{P_s}\right)^{(n-1)/2} e^{-(P+P_s)} I_{n-1}\left(2\sqrt{PP_s}\right) \tag{3.51}$$

となる。ここで I_n はｎ次の変形ベッセル関数。各々の足し合わせ前のパワースペクトル中の信号の強度がみな等しく s^2 であるとき、$P_s = ns^2 \propto n$ である。これより

$$<P>= n(1+s^2), \qquad <P>^2= n(1+2s^2) \tag{3.52}$$

となる。これは、式（3.23）において、$P_0(=1)$ を $1{+}s^2$ におきかえたものに等しい。
よって、求める確率 P_2 は、式（3.51）を用いて計算され、

$$P_2 = Prob(P < P_T) = \int_0^{\infty} p_n(P;P_s)dP \tag{3.53}$$

となる。これは

1. P_2 は、$\sqrt{P_s} - \sqrt{P_T}$〜0 の時は比較的大きい（$> 10^{-1}$) が、$\sqrt{P_s} - \sqrt{P_T}$ が大きくなるにつれて、急速に減少する。
2. 　一方 P_2 の $\sqrt{P_T}$ への依存性は弱い。

という性質を持つ。

3.4.3　ノイズの平均パワー

ここで上のセクションでノイズに関する統計的な議論をした際に使った、”平均パワー ”について注意を述べておく。上でいう平均パワーとはデータが全てノイズであると仮定して計算した平均パワーである。つまりデータの中に重力波信号が存在するとは仮定していない。ではもしデータの中に信号が存在した場合は上の議論はなりたたないのだろうか？これに関しては次のように考えることができる。もし信号が存在していたとする（議論のため信号は変調を受けておらずスペクトルでは一本のピークであるとする)。するとこれはスペクトルでは一本のピークで表されるが、もしピークが非常に大きければ統計的解析を行う前にそれが信号であるとわかってしまう。また、その明らかに信号と見れる点を除いて平均を求めればほぼノイズの平均と同じになるであろう。しかし今は予想される重力波の信号は非常小さく、パワーにしてもほかのノイズと区別できないようなレベルの話をしている。つまりたとえ信号が含まれていたとしても、そのパワーは充分小さく、信号を含めたスペクトルの平均をもとめたとしても、解析における全てのスペクトルの点で平均化した場合には、それはほぼノイズの平均と見なせるということになるわけである。よって実際に求められたスペクトルの平均をノイズの平均と見なしても何ら問題はない。

第4章　解析結果

4.1　解析の流れ

まず図 4.1 で解析の大まかな流れを示し、この順番にそって結論を述べていくことにする。

4.2　データ圧縮

TAMA300 のデータに対して行った、CHT 法によるデータ圧縮について以下にまとめる。

まず最初に 935 Hz をターゲットにして CHT 法によりデータ圧縮を行い、次に得られたデータに $\exp(2i\pi(-0.092)t)$ をかけて周波数を 0.092 Hz だけずらした。これはミドルリッチによって報告された重力波の周波数の平均値が 934.908 Hz であるため、それにあわせるための微調整である。データの圧縮率は 20480 倍であり、これによってサンプリング時間は 1.024 秒となる。そして結果得られたデータの ± 0.05 Hz を解析に使用した。これは元のデータの 934.908 ± 0.05 Hz を取り出すことに相当する。

4.3　Weighting

SN 比を最適化するために、ノイズレベルの変化に応じて重みをつけるための Weight function をデータに掛け合わせる。全データの Weight function を時系列として図 4.2 に示す。

図 4.2 において、値が大きい部分はノイズレベルが低い部分であり、値が小さい部分はノイズレベルが高い部分である。またゼロの部分はロックが落ちている部分と Run 間の部分である。図 4.2 の上にある 72%という数字は全体の観測時間の内、解析に使うことのできるデータの割合を表している。また図 4.3 に重み付けをした後のデータのスペクトルを示す。

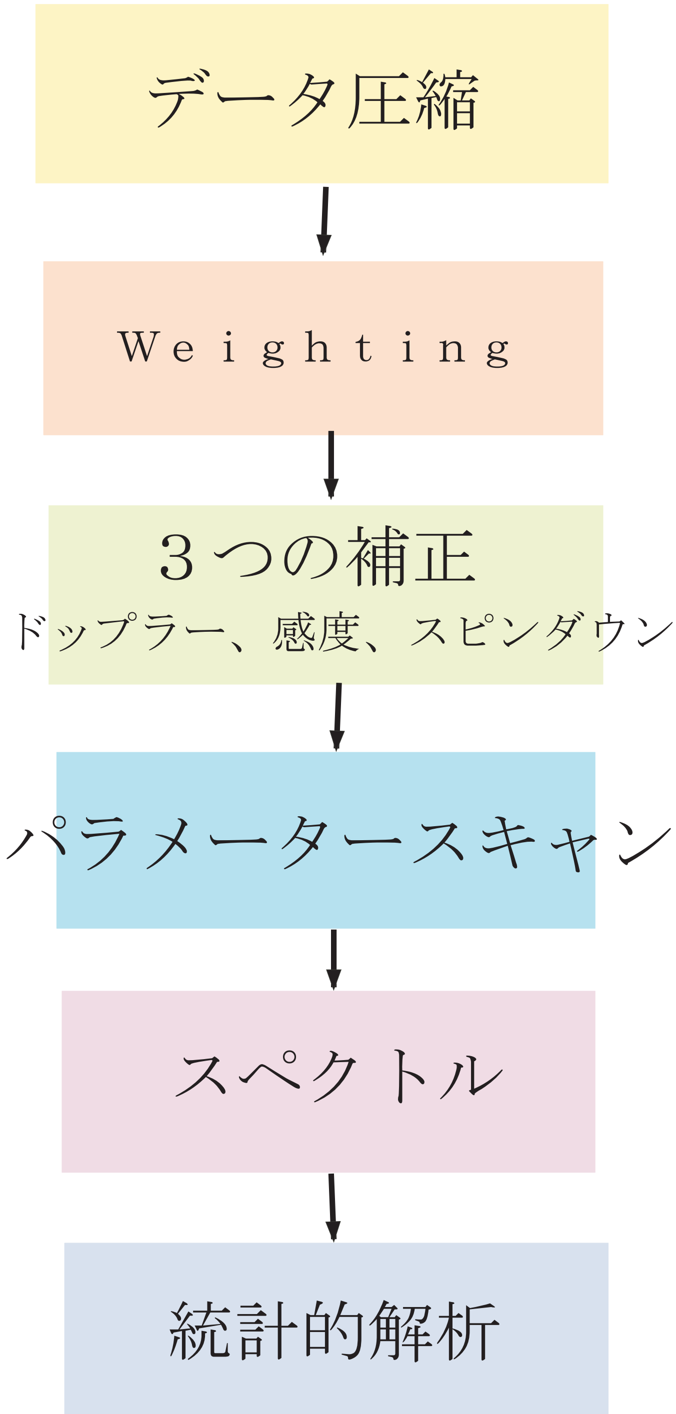
データ圧縮
Weighting
３つの補正
ドップラー、感度、スピンダウン
パラメータースキャン
スペクトル
統計的解析

図 4.1: 解析の流れ

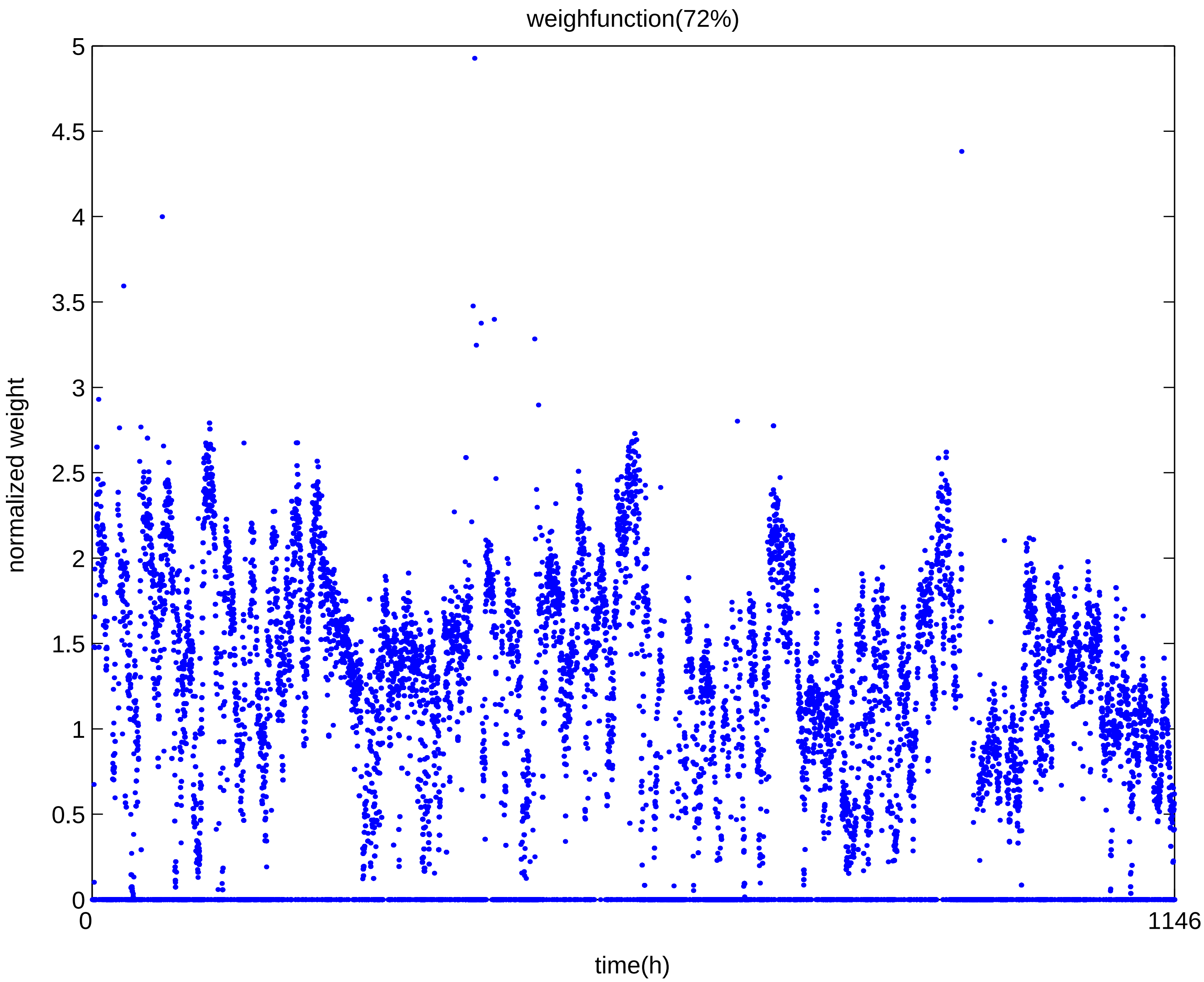

図 4.2: 全観測時間の Weight function

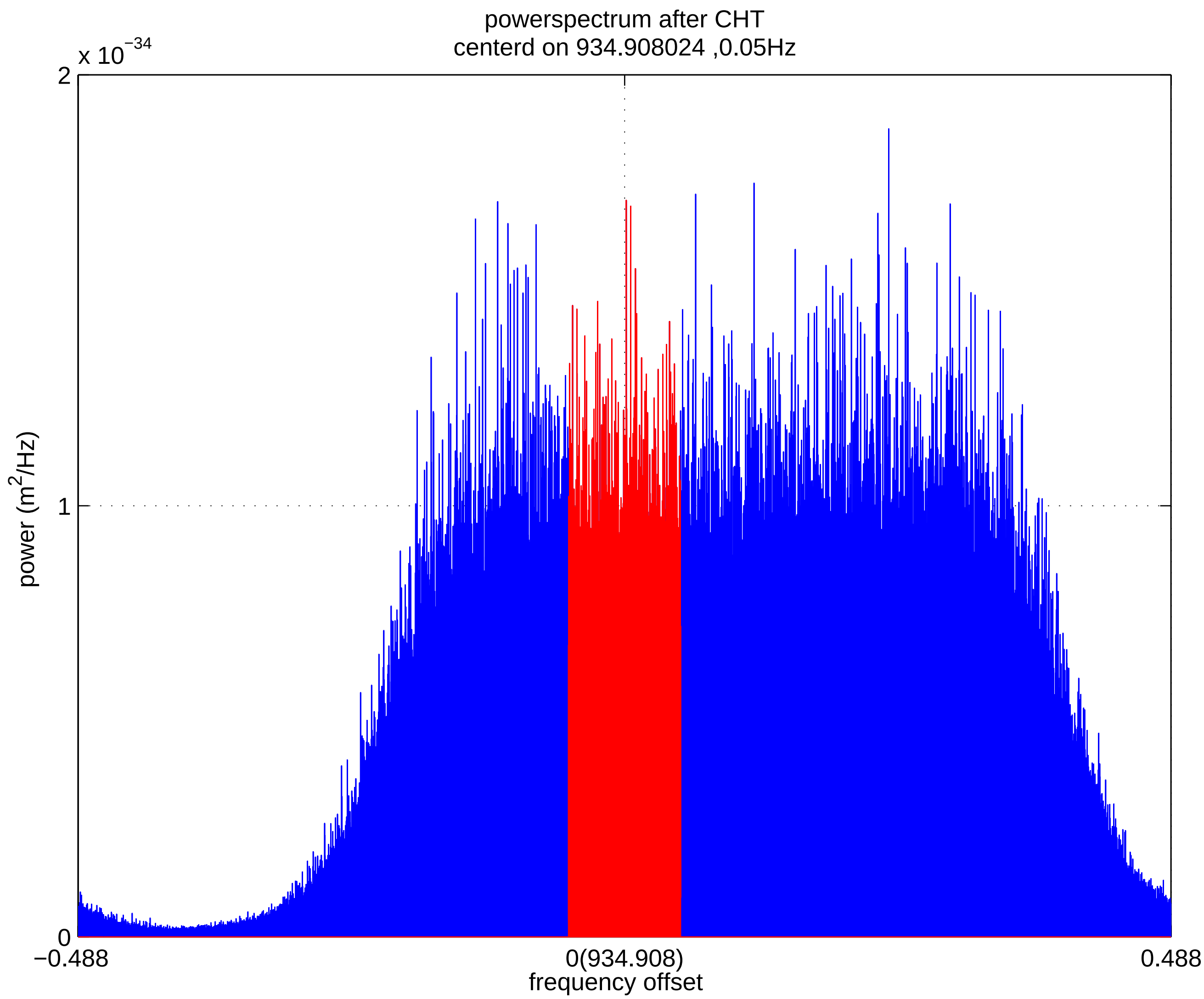

図 4.3: 図の赤い部分が実際の解析に使用したデータである。横軸は 934.908Hz からのずれを表す。

4.4 補正

予想される重力波形の最終的な形は

$$h = \sqrt{S_+^2 h_0^2 (1+\cos^2\theta)^2 + S_\times^2 4h_0^2 \cos^2\theta} \tag{4.1}$$

$$\exp(2\mathrm{i}\pi f_0 t)\exp(2\mathrm{i}\pi f_0 \delta t)\exp\{2\mathrm{i}\pi C(t+\delta t)^2\}\exp(2\mathrm{i}\pi\phi) \tag{4.2}$$

ここで

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{S_+(1+\cos^2\theta)}{2S_\times\cos\theta}\right) \tag{4.3}$$

CHT、Weighting によって得られたデータに対して、FFT を利用してマッチドフィルタを行うために、データに対して以下の手続きをして補正と規格化を行った。

1. データに $\exp(-2\mathrm{i}\pi f_0\delta t)$ をかけることによりドップラー補正を行う
2. データに $\exp\{-2\mathrm{i}\pi C(t+\delta t)^2\}$ をかけることによりスピンダウン補正（＋ドップラー補正）を行う
3. データに $\sqrt{S_+^2 h_0^2 (1+\cos^2\theta)^2 + S_\times^2 4h_0^2 \cos^2\theta}\,\exp(-\mathrm{i}\pi\phi)$ をかけることにより感度補正＋パルサーの回転軸の不定性による補正を行う
4. ノイズの平均値がすべての補正で一定になるように規格化因子 $< F^2(t,\theta) >$ によって 3 で得られたスペクトルを割る。ただし＜‥＞は時間平均を表し、F は
$$F(f,\theta) = \sqrt{S_+^2 h_0^2 (1+\cos^2\theta)^2 + S_\times^2 4h_0^2 \cos^2\theta}$$

これらの手続きによって, ある補正パラメータセット (θ, C) に対して、ひとつのスペクトル $P(f,\theta,C)$ が得られる。ここで f は周波数、θ はパルサーの回転軸、C はスピンダウンパラメータである。ここで補正をする際に使った、感度、ドップラー効果について図を示す。最初ににパルサーを SN1987A とし、干渉計を TAMA300 としたときの、それぞれの一日分の感度を図 4.4 を示す。図 4.4 において、赤い線はプラスモードに対する感度、青い線はクロスモードに対する感度である。もし重力波が干渉計の腕と同じ形で干渉計の真上から来たとすると、感度は 1 か -1 の値をとる。すなわち最高の感度になる。逆に感度が 0 の時はもし重力波が来ていてもそれを検出することはできない。

次に観測における δt の 2 日分と観測時間全体の 2 つの場合をそれぞれ、図 4.5 図 4.6 に示す。図 4.5 に見えるうねりは地球の自転の効果によるものである。図 4.6 に見えるカーブは公転の効果によるものである。

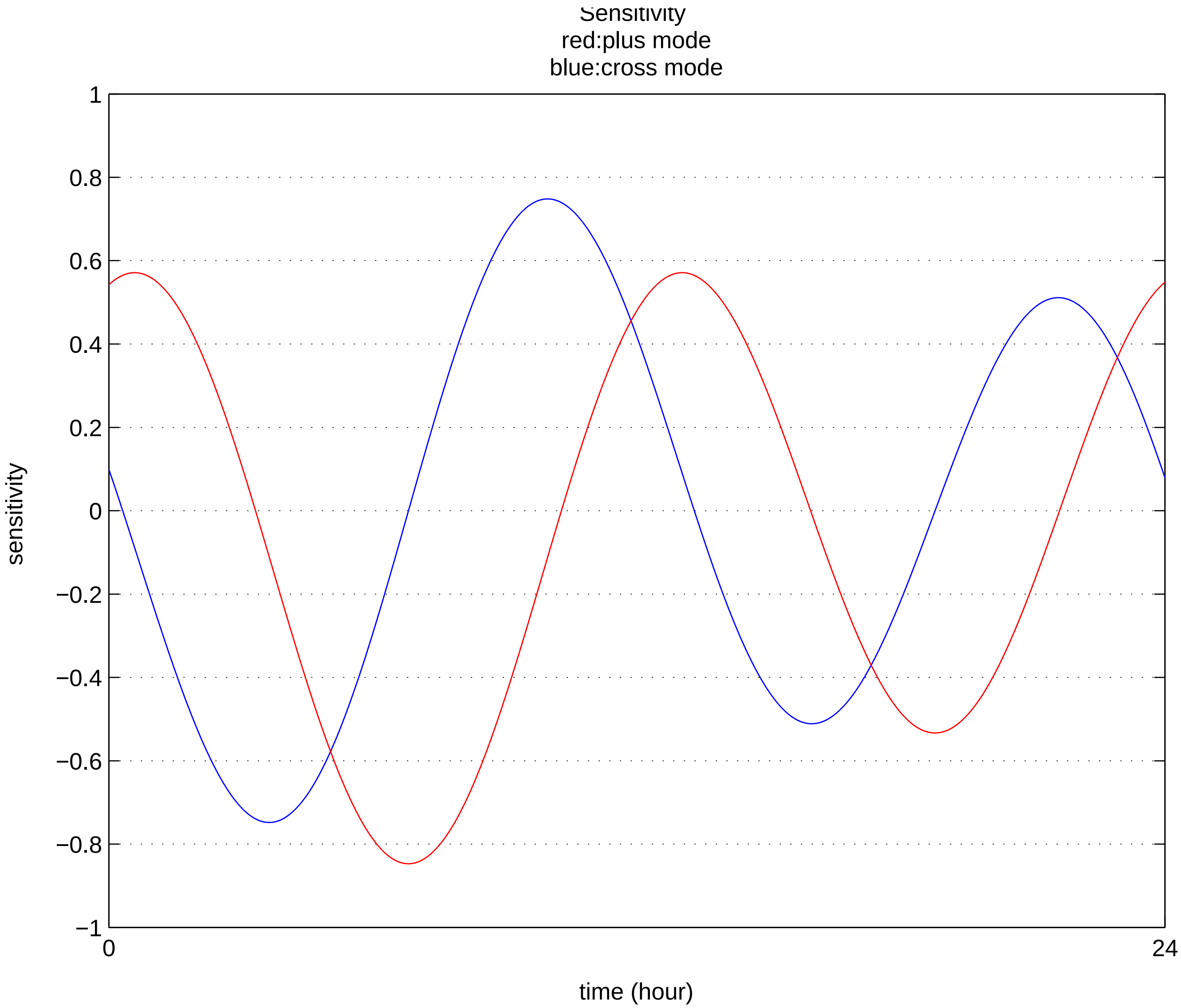

図 4.4: 一日分の感度曲線　赤い線はプラスモード、青い線はクロスモード

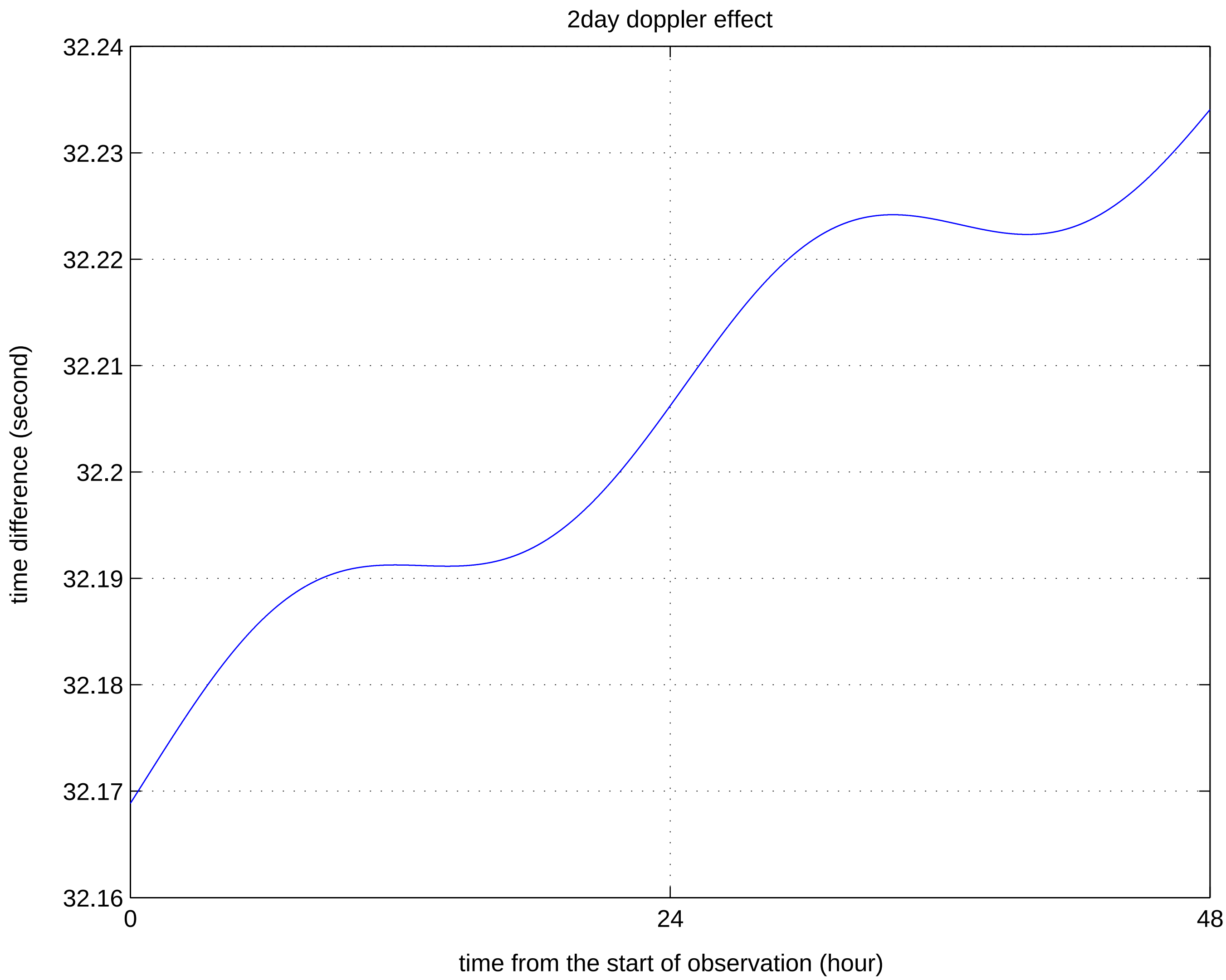

図 4.5: 観測開始から二日分の $\delta t(s)$

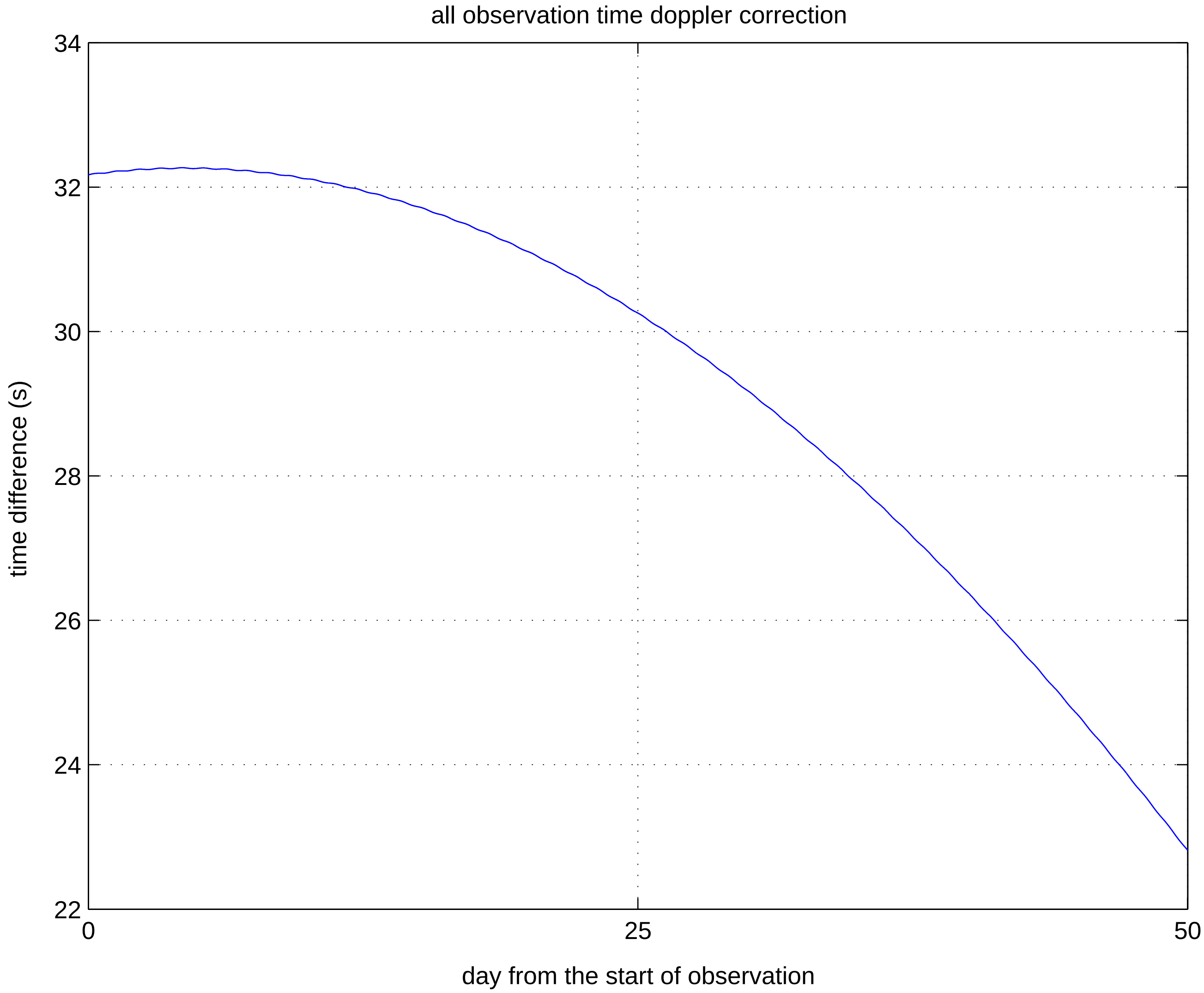

図 4.6: 全観測時間の δt

4.5　補正パラメータのスキャン

補正パラメーターと実際の重力波のパラメーターのずれによるSN比の低下を防ぐため、複数回の補正を行うことによりパラメータのずれを少なくした。以下は各補正にパラメータをずらした回数と範囲、許したSN比のロスである。

1. ドップラー補正 … 周波数 934.908 ± 0.05Hz を3等分してサーチ、最大SNロス30%
2. スピンダウン補正 … $2 \sim 3 \times 10^{-10}$Hz/s を550等分、最大SNロス70%
3. パルサー回転軸による補正 … $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲を160等分、最大SNロス5%

4.6　スペクトルの選択

パラメータをずらしてすべてのパラメータセットに対してスペクトルを求めると全部で $550 \times 160 = 88000$ 個のスペクトルを得る。このすべてのスペクトルの中から一番高いピークを取り出し、統計的解析を行う。よってもっとも高いピークを持つスペクトル $P(f, \theta_{max}, C_{max})$ を一つだけとりだしてそのスペクトルに限定して議論をする（このスペクトルの取り出し方については ”今後の課題 ”で議論する）。一番高いピークを持つスペクトルは $\theta = \frac{79\pi}{160}$, $C = 3 \times 10^{-10}$Hz/s のパラメータを使って補正をしたときであった。図4.7にそのスペクトルを示す。

4.7　パワースペクトルの分布

上で求められたパワースペクトルのヒストグラムを図4.8に示す。

4.5.3節の議論によれば、この分布は、パワーの平均値 P_0 に対し

$$f(P) = \frac{N \times \omega_{bin}}{\sigma} e^{-P/P_0} \tag{4.4}$$

で与えられる。ここで N=パワースペクトルのデータ点数=432593,w_{bin}=binの幅=2.49×10^{-41}(1/Hz) である。

またパワーの平均値 P_0 は

$$\sigma = 1.386 \times 10^{-35}\mathrm{m}^2/\mathrm{Hz}$$

であった。この P_0 に対する $f(P)$ を、ヒストグラム図中に赤線の直線で示す。ヒストグラムはこの直線とよく合致している。これは、前節で行った、ノイズが白色かつGaussian過程であるとした議論が、実際とよく合うことを示している。

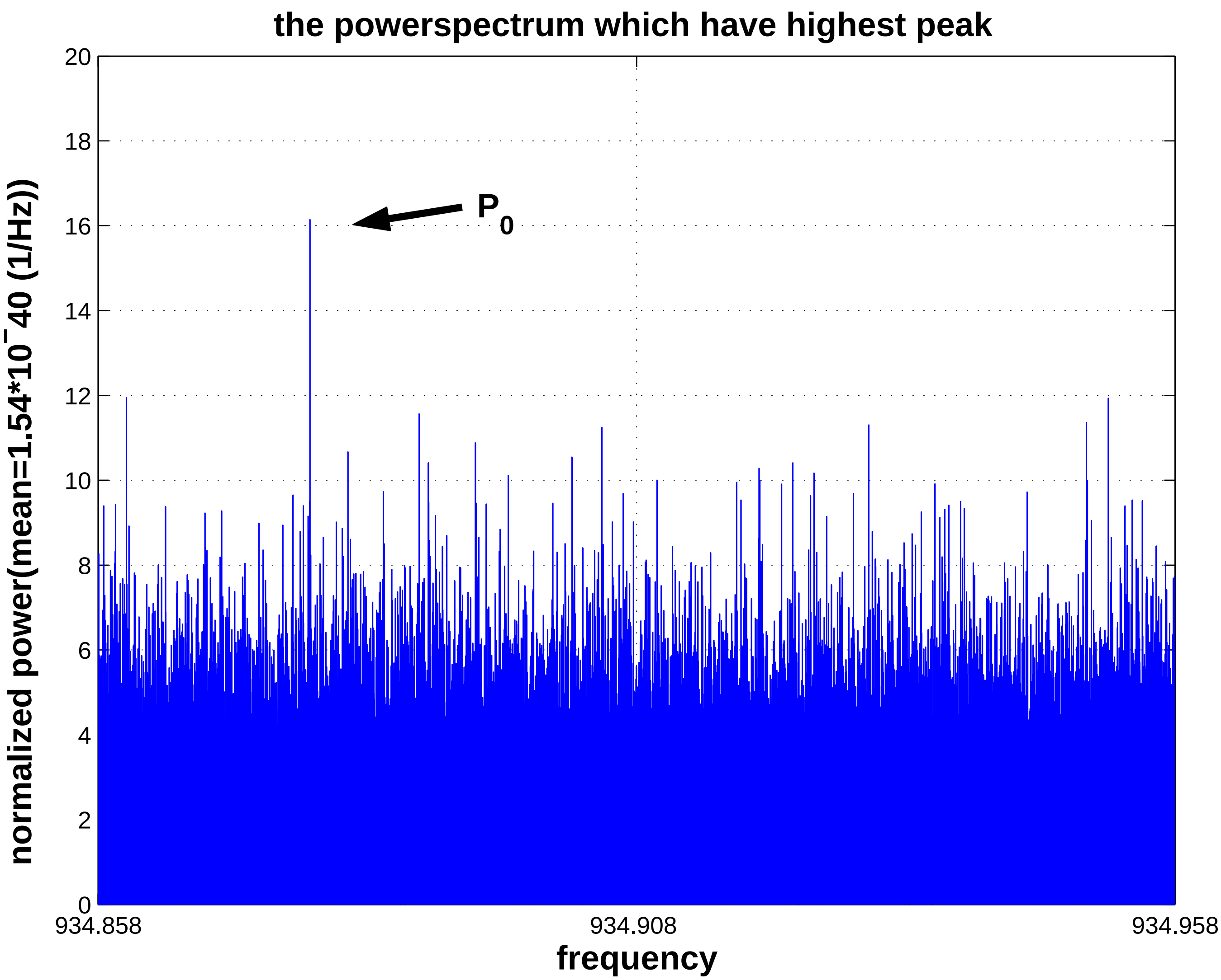

図 4.7: 最も高いピークを持つスペクトル　$\theta = \frac{79}{160}$, $C = 3 \times 10^{-10}\,\mathrm{Hz/s}$

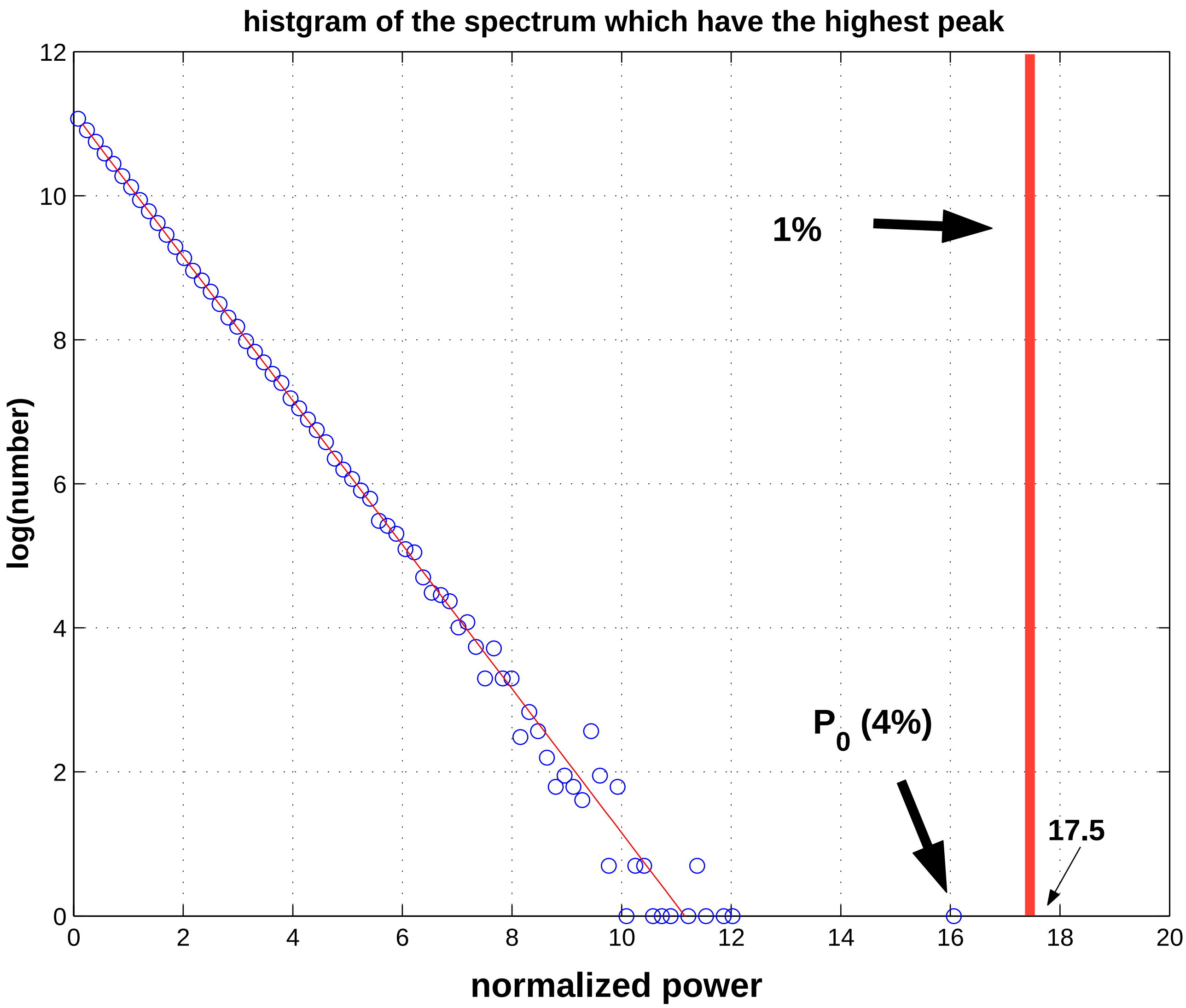

図 4.8: 最も高いピークを持つスペクトルのヒストグラム

4.8 Upper limit

図 4.8 のヒストグラムを見てみると、特にパワー P が突出して大きい点や、あるいは、特定の周波数付近にスペクトル点が固まっているというようなものは認められない。強いて言えば、$P \simeq 16P_0$ にピークがひとつあるが、これが重力波の候補といえる。そこで 4.5.5 節の議論に従って、閾値 P_T を、$16P_0$ と設定して、ノイズによるパワースペクトルの最大値が P_T を超えるという第一種の誤りの確率を評価してみる。ノイズのパワースペクトルの分布が Rayleigh 分布にしたがうことから、式（3.49）を計算して、

$$P_0 = \exp\left(-\frac{P_T}{P_0}\right) = e^{-16} \tag{4.5}$$

となる。パワースペクトルのデータ点数が $N = 432593$ であるので、$\mu = NP_0 = 0.0487$ として、P が P_T を超えるデータ点数の確率分布は、平均値 μ のポアソン分布に従うことになる。これは、P_T を超えるデータ点数の期待値が $\mu = 0.0487$ であることを意味する。得られたヒストグラムには P_T を超える点が 1 点存在し、計算した期待値とは少しずれている。また閾値を P_T を $12P_0$ としたときの期待値は $\mu = 2.6579$ となり、得られたヒストグラムの結果と大体合致している。次にこの二つの閾値 $16P_0, 12P_0$ をスペクトル点のうち一点でも越えてしまう確率を計算してみる。この確率はポアソン分布に従うことから簡単に計算できて、それぞれ 4.6%、18.6%となる。これらから結論できることは一番高いピークはノイズにしては少し大きいということである。しかしその確率は 4.6%であるので約 20 回同じ観測を行えば一回は実現されるほどの確率である。よってこの一回だけの観測では、このピークが重力波かどうかは断定することができない。いえるのはこのピークの高さは 20 回に一回は観測される程度のピークであるということだけである。

次に重力波の upper limit を出す。これには、4.5.8 節で述べた方法に従って、閾値 P_T をノイズのパワースペクトルが P_T を超える確率が十分に低くなるように選ばないといけない。$P_T = 17.5$ として、上と同様の計算をすると、ノイズのパワースペクトルが P_T を超える確率は 1%と十分に小さいので、$P_T = 17.5$ を採用することにする。

重力波の upper limit を求めるにはパワーを重力波の単位に戻せばよい。つまり、パワーが単位長さがどれだけひずんでいることに相当するかをもとめればよい。パワーの単位は $(\mathrm{m}^2/\mathrm{Hz})$ である。TAMA300 の片腕の長さは 300m であり、観測時間は 4325928s なので 1bin の周波数分解能は 1/4325928Hz である。よって uppler limit は $h_{upper} = \dfrac{\sqrt{17.5\sigma}}{300 \times \sqrt{4325928}} = 5.5 \times 10^{-23}$ と求まる。このときの第一種の誤りを犯す確率は 1%である。

第5章　結論と今後の課題

5.1　結論

SN1987A 跡に報告されたパルサーから放出されていると思われる連続重力波の upper limit は 5.5×10^{-23} であった。そのときの第一種の誤りは 1%である。

以下は解析におけるパラメータである。

1. 周波数 934.908 ± 0.05 Hz をサーチした
2. パルサーのスピンダウンは $2〜3 \times 10^{-10}$ Hz/s 範囲をサーチした
3. パルサーの回転軸は全ての方向を考慮に入れてサーチした
4. パラメータがずれた時の最大の SN 比ロスは 80%である

今まで、SN1987A をターゲットにして行われた連続重力波解析の一番よいアッパーリミットは、Niebauer によって得られた 9×10^{-21} という値だが、本解析では、この値より二桁もよい値となっており、今まで得られた値の中では最もよい値となっている。

まだ理論的アッパーリミットには 4 桁及ばないが、実際のデータを使って上限値を得たということは非常に意義のあることである。

5.2　今後の課題

今後の課題として主に次の 4 点を挙げことができる。

1. all sky search と計算時間について ⋯ 今回の解析はパルサーが決まった方向にあるとして解析を行ったが実際には超新星爆発のエネルギーによってパルサーは運動をしており位置がずれていることも考えられる。また全天における未知のソースからの連続重力波サーチも行うことができるだろう。これらのことをするためには位置もパラメータとみなし、サーチすることが必要となる。またスピンダウンパラメータも今回サーチしたのは報告された値のアッパーリミットの範囲だけであり、実際にはもっと広い範囲をサーチする必要があるし、同様のことが周波数にも言える。つまりより多くの計算時間を必要とする。今回の計算には約 18 個の CPU を使って、約 10 日の時間がかかった。つまり位置もパラメーターとみて 100 箇所をサーチしたとすれば、1000 日の時間が原理的にはかかるわけである。これは現実的ではない。つまり計算時

間を短縮できるようなアルゴリズムの開発が必要である。たとえば、そのひとつとしてヒエラルキーサーチのようなものが考えられる。これはパラメータの分割の仕方をいきなり細かくするのではなく、第一段階ではパラメータを荒く分割し、緩い条件でまず検索をし、その結果信号がありそうな部分を取り出して、そこだけを細かくパラメータを分割して計算するという効率的なアルゴリズムである。このような計算時間を短縮できる方法を考えていかねばならない。

2. 検出可能性について・・・今回の解析の結果得た連続重力波の upper limit は 5.5×10^{-23} であった。一方、理論的な upper limit は 9.4×10^{-27} であり、これに到達するにはもう 4 桁程必要である。つまり干渉計の感度をあと 4 桁向上するか、観測時間を今の (今回は約 1000 時間)8 桁倍にする必要がある。これからわかるように観測時間だけを上げてこの値に到達するのは無理であるから、干渉計自体の感度を向上させることがどうしても必要となる。

3. スペクトルの選び方について・・・4 章のスペクトルの選択で言及した方法の問題点について述べる。解析においてはたくさんのスペクトルの中から一番高いピークを持つスペクトルを一つだけとりだし、そのスペクトルに対して統計的解析を行い結果を求めた。スペクトルをひとつだけとりだせばよいという操作はそれぞれのスペクトルの間に完全な相関があるとみなすことと同じである。逆に全てのスペクトルを独立とみなし、解析に使うというのは、スペクトル間に全く相関がないということと同じである。最大 SN ロスが 100%に近づくということは得られた全てのスペクトルも無相関に近づくことであるが、今回の解析の最大の SN 比ロスを見てみると、その値は約 80%と見積もることができる。これを充分に小さいとみなすならば、得られた全てのスペクトル点 $88800 \times 432593 = 38414258400$ は独立とみなし解析をすることになる。しかしスペクトル間の相関と SN ロスとの関係ははっきりとわかっているわけではなく、最大 SN 比ロス 80%という値が全てのスペクトルが無相関であるといえるほど、充分小さいとみなせるかは定かではない。よってより正確な解析をするためには、正確にスペクトル間の相関と最大 SN 比ロスのとの関係を求めることが必要である。

4. RUN 間による SN 比のロスについて・・・最後に時刻のデータについて注意しておく。Run の最初の時刻が分かればその時刻にサンプリング時間の整数倍したものがその Run の時刻データとなる。解析は連続重力波をターゲットとしているので、Run 間の時間がずれれば信号の位相もずれてしまうことになる。今回の解析では Run の最初の時刻データの精度は 50μs である。そしてターゲットの周波数は約 1kHz であるので位相の精度は $2\pi \times 1000 \times 50 \times 10^{-6} = \pi/10$ となる。この誤差によって SN 比は悪化することになるので、将来はこの時刻の精度をよりよくすることも考えていかなくてはならない。

関連図書

[1] John Middleditch, Ferome A.Kristian, William E.Kunkel, Kym M.Hill, Robert D.Watson, Richard Lucinio, James N.Imamura, Thomas Y.Steiman-Cameron, Andrew Shearer, Raymond Butler, Michael Redfern, Anthony C.Danks :*Rapid photometry of supernova 1987A: a 2.14ms pulsar?*, New Astronomy 5 (2000)x 243-283

[2] T.M.Niebauer, A.Rudiger, R.Schilling,L.Schnupp, W.Winkler and K.Danzmann: *Pulsar search using data compression with the Garching gravitational wave detector* , Phys.Rev.D, **47**, 3106(1991)

[3] A.G.Lyne,Philos. Trans.R.Soc.London **341**, 29(1992)

[4] R.Narayan and J.P.Ostriker, Astrophys.J.**352**, 222(1990)

[5] T.A.Apostolatos,Phys.Rev.D, **54**, 2421(1996)

[6] B.Owen, Phys.Rev.D, **53**, 6749(1996)

[7] E.E.Flanagan, Phys.Rev.D, **48**, 2389(1993)

[8] K.Compton,Ph.D.thesis,University of Wales, Cardiff, 1996

[9] D.Nicholson *et al*, Phys.Lett.A **218**, 175(1996)

[10] B.Allen, in *Proceedings of the Les Houches School on Astrophysical Sources of Gravitational Waves*edited by J.A.Marck and J.P.Lasota(Cambridge University Press, Cambridge, 1996)

[11] T.M.Niebauer, R.Schilling, K.Danzmann, A.Rudiger and W.Winkler, Phys.Rev.A*43*, 5022(1991)

[12] 信号理論の基礎　実教出版株式会社　高橋進一　中川正雄　共著

[13] 重力波をとらえる　京都大学学術出版会　中村卓、三尾典克、大橋正健　編著

[14] 相対論　平川浩正　共立出版株式会社

付 録A　感度の計算

A.1　数学的準備

z 軸回りに角度 θ_z 回転させる行列は

$$R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

である。

また y 軸回りに角度 θ_y 回転させる行列は

$$R_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

である。

ベクトル $\vec{a}$ が行列によって $\vec{a} \to R\vec{a}$ と変換される際、行列 A は $A \to RAR^{-1}$ と変換される。

ある点の方向を表すとき、原点とその点とを結ぶ直線と z 軸とのなす角 θ、その直線と z 軸を含む平面と x 軸とのなす角 ψ との組（θ,ψ) によって表す。南極に干渉計があるとき、(π,0) である。

A.2　問題の設定

パルサーが（α,β) の方向にあり、重力波干渉計が (θ,λ+Ω_Et) の方向にあり (Ω_E は自転の角速度)、片方の腕と北極とのなす角が ψ のとき、感度を求める。(図 A.1)

A.3　初期状態

南極に干渉計があり、２本の腕が x 軸、y 軸を向いていて、重力波が z 軸方向に伝播しているとする。干渉計からみれば、真上から重力波が来ていることになる。(図 A.2)

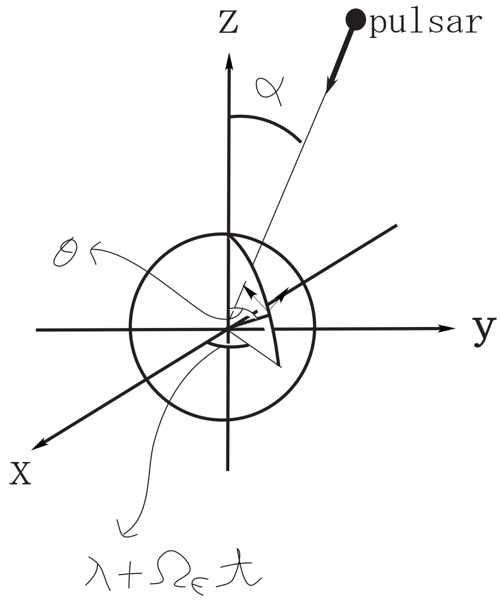

図 A.1: 問題の設定

この時、重力波の行列は

$$R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

で表される。以後、この行列を変換していって、感度を求めるが、重力波の行列は常に南極にある干渉計で測定したものであることに注意する。

A.4 重力波の方向

まず重力波の来る方向を合わせる。(図 A.3)

y 軸回りに $-(\pi-\alpha)$ 回転させる。$(\times R_y(\alpha-\pi))$。(図 A.4)

z 軸回りに β 回転させる。$(\times R_z(\beta))$(図 A.5)

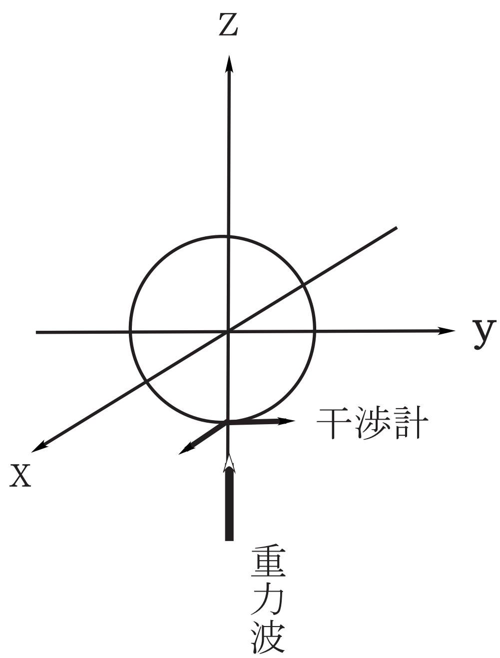

図 A.2: 初期状態

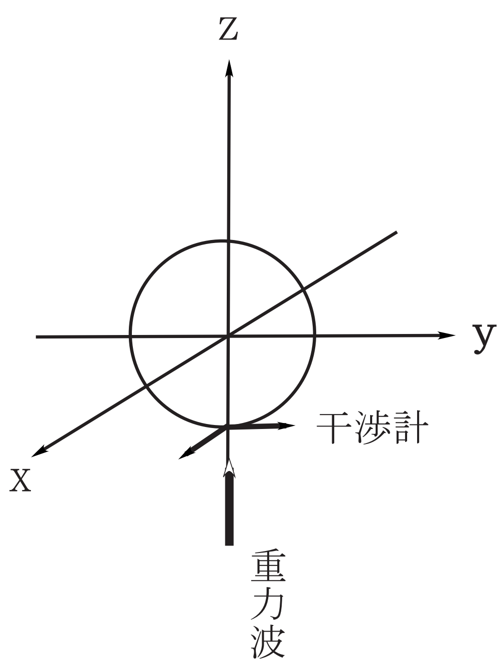

図 A.3: 重力波の来る方向を合わせる

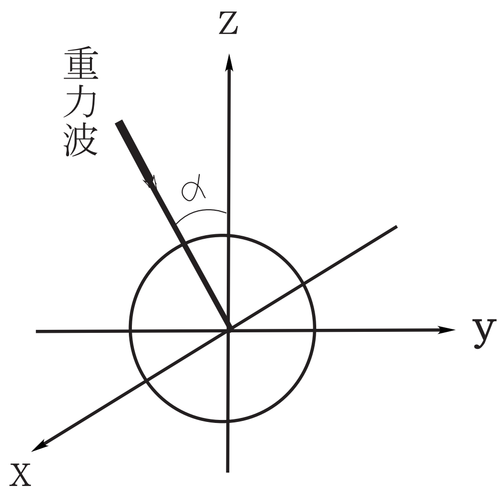

図 A.4: y 軸回りに $-(\pi - \alpha)$ 回転させる

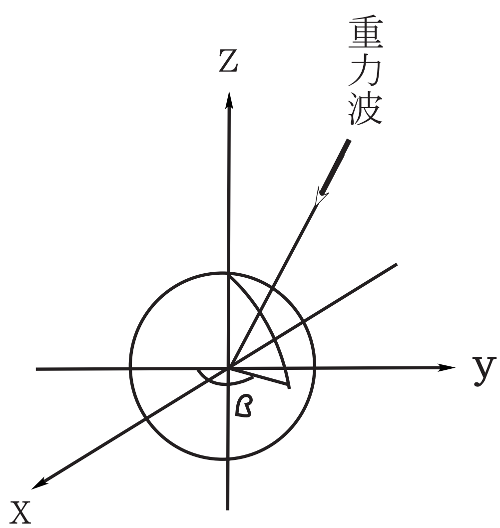

図 A.5: z 軸回りに β 回転させる

以上により、重力波の来る方向は (α,β) に定まった。このとき、重力波のベクトルは

$$R_z(\beta)R_y(\alpha-\pi)\begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_y^{-1}(\alpha-\pi)R_z^{-1}(\beta) \tag{A.4}$$

である。

A.5 干渉計の位置

次に干渉計の位置を合わせる。前節の操作によって、得られた行列は、南極の位置にある干渉計に対しての行列である。$(\theta, \lambda+\Omega_E t)$ の位置にある干渉計で、測定をすることを考える。(図 A.6) 感度は干渉計とパルサーの相対位置にのみよるから、干渉計 $(\theta, \lambda+\Omega_E t)$ に対する重力波 (α,β) の関係は、干渉計 $(\pi, 0)$ に対する重力波 $(\pi-\theta+\alpha, -\lambda-\Omega_E t+\beta)$ の関係に等しい。

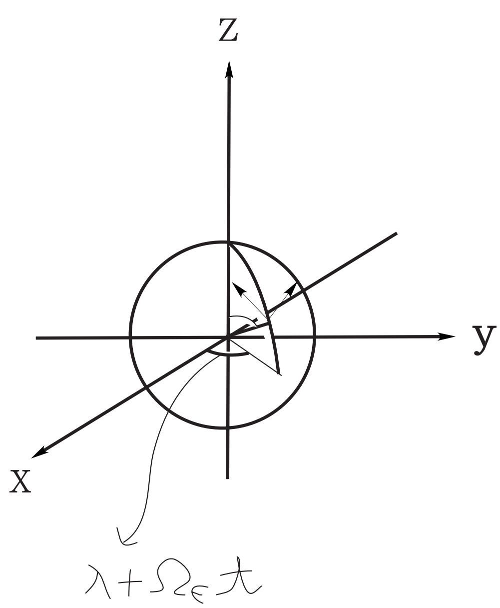

図 A.6: 干渉計の位置

z 軸回りに (-$\lambda - \Omega_E t$) 回転。(図 A.7)

y 軸回りに $(\pi-\theta)$ 回転。(図 A.8)

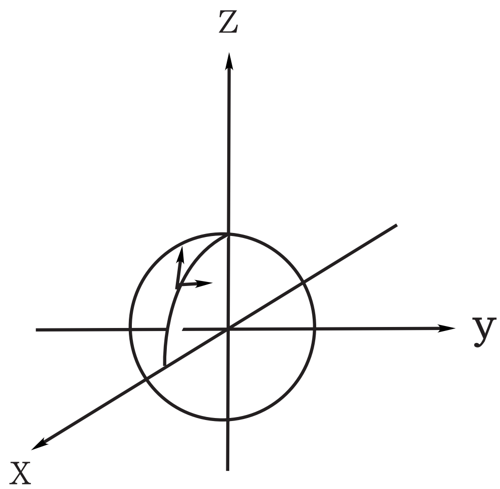

図 A.7: z 軸回りに (-$\lambda - \Omega_E t$) 回転

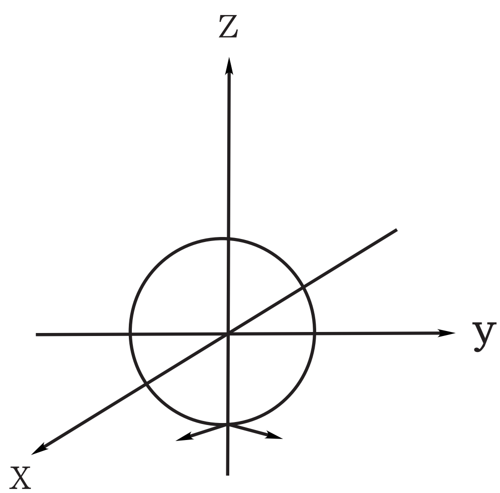

図 A.8: y 軸回りに ($\pi - \theta$) 回転

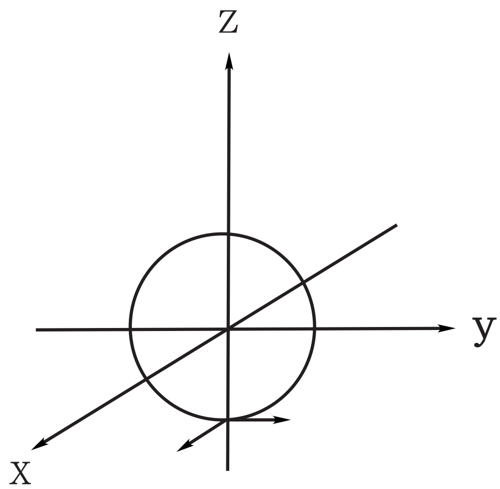

図 A.9: z 軸回りに ψ 回転

z 軸回りに ψ 回転。(図 A.9)

A.6 感度

上の操作により、重力波の行列は、

$$h = R_z(\psi)R_y(\pi-\theta)R_z(-\lambda-\Omega_E t)R_z(\beta)R_y(\alpha-\pi)\begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}R_y(\pi-\alpha)R_z(-\beta)R_z(\lambda+\Omega_E t)R_y(\theta-\pi \tag{A.5}$$

となる。
$R_z(-\lambda-\Omega_E t)R_z(\beta) = R_z(-\lambda+\beta-\Omega_E t)$ であるので、$-\lambda+\beta-\Omega_E t = \eta(t)$ とおくことにする。

$$R_z(\psi)R_y(\pi-\theta) = \begin{pmatrix} -\cos\theta\cos\psi & -\sin\psi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi & \cos\psi & \sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{pmatrix} = R(\psi,\theta) \tag{A.6}$$

とおくと、$h = R(\psi,\theta)\times$

$$\left\{\begin{pmatrix} h_+(\cos^2\alpha\sin 2\eta & -h_+\frac{1+\cos^2\alpha}{2}\sin 2\eta & -\frac{h_+}{2}\sin 2\alpha\cos\eta \\ -h_+\frac{1+\cos^2\alpha}{2}\sin 2\eta & h_+(\cos^2\alpha-(1+\cos^2\alpha)\cos^2\eta) & \frac{h_+}{2}\sin 2\alpha\sin\eta \\ -\frac{h_+}{2}\sin 2\alpha\cos\eta & \frac{h_+}{2}\sin 2\alpha\sin\eta & h_+ sin^2\alpha \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} -h_\times\cos\alpha\sin 2\eta & -h_\times\cos\alpha\cos 2\eta & h_\times\sin\alpha\sin\eta \\ -h_\times\cos\alpha\cos 2\eta & h_\times\cos\alpha\sin 2\eta & h_\times\sin\alpha\cos\eta \\ h_\times\sin\alpha\sin\eta & h_\times\sin\alpha\cos\eta & 0 \end{pmatrix}\right\} \times R^t(\psi,\theta)$$

感度は $\frac{h\text{ の (1,1) 成分}-h\text{ の (2,2) 成分}}{2}$ で与えられるので、これを一心不乱に計算して、

感度=

$$\frac{h_\times}{4}[3\sin^2\theta\cos 2\psi\sin^2\alpha+\sin 2\alpha\sin 2\theta\cos 2\psi\cos\eta-2\sin 2\alpha\sin\theta\sin 2\psi\sin\eta+$$

$$(1+\cos^2\alpha)(1+\cos^2\theta)\cos 2\psi\cos 2\theta-2(1+\cos^2\alpha)\cos\theta\sin 2\psi\sin 2\eta]$$

$$-\frac{h_\times}{4}[4\sin\alpha\sin\theta\sin 2\psi\cos\eta+2\sin\alpha\sin 2\theta\cos 2\psi\sin\eta+4\cos\alpha\cos\theta\sin 2\psi\cos 2\eta+$$

$$2\cos\alpha(1+\cos^2\theta)\cos 2\psi\sin 2\eta]$$

を得る。よって、$S_+, S_\times$ の関数形は次のようになる。

$$S_+(t)=[3\sin^2\theta\cos 2\psi\sin^2\alpha+\sin 2\alpha\sin 2\theta\cos 2\psi\cos\eta-2\sin 2\alpha\sin\theta\sin 2\psi\sin\eta+$$

$$(1+\cos^2\alpha)(1+\cos^2\theta)\cos 2\psi\cos 2\theta-2(1+\cos^2\alpha)\cos\theta\sin 2\psi\sin 2\eta]$$

$$S_\times(t)=[4\sin\alpha\sin\theta\sin 2\psi\cos\eta+2\sin\alpha\sin 2\theta\cos 2\psi\sin\eta+4\cos\alpha\cos\theta\sin 2\psi\cos 2\eta+$$

$$2\cos\alpha(1+\cos^2\theta)\cos 2\psi\sin 2\eta]$$

式の中のパラメーターについてまとめておくと、

α	パルサーの赤緯
β	パルサーの赤経
θ	干渉計の位置の余緯度
λ	干渉計の位置の経度
ψ	干渉計の腕と北向きのベクトルがなす角度
η	$\lambda-\beta+\Omega_E t$
Ω_E	地球自転の角速度

ここで $S_\times$,S_+ を次のように整理することによって結局

$$S_+=3\sin^2\alpha\sin^2\theta\cos 2\psi+2A\sin 2\alpha\sin\theta\cos(\eta+\Phi_1)+2B\cos\alpha\sin(2\eta+\Phi_2)$$

$$S_\times=4A\sin\alpha\sin\theta\sin(\eta+\Phi_1)+2B\cos\alpha\sin(2\eta+\Phi_2)$$

と表せる。ここで、

$$A\sin\Phi_1\equiv\sin 2\psi\quad ,A\cos\Phi_1\equiv\cos\theta\cos 2\psi$$

$$A\sin\Phi_2\equiv 2\cos\theta\sin 2\psi\quad ,A\cos\Phi_2\equiv(1+\cos^2\theta)\cos 2\psi$$

である。

謝辞

この研究に行うにあたってたくさんの人々にお世話になりました。まず東京大学大学院理学系研究科の坪野公夫先生には大学院の2年間大変お世話になりました。この研究環境を与えてくださっただけではなく、議論にも付き合って頂きました。いくら感謝してもしすぎることはありません。

坪野研究室助手の安東正樹助手にも大変お世話になりました。安藤さんとの議論なくしては本研究はありえないと断言しても差し支えありません。大変お忙しい身にもかかわらず親身かつ的確な助言をしてくださいました。また天文台の相馬先生には地球の位置、速度を出すプログラムを貸して頂きました。このプログラムなくしては、この研究結果は日の目を見ることはなかったでしょう。

そして天文台の辰巳さんにも、大変お忙しいなかTAMAの時間データについて、細かいご説明を頂きました。この時間データについてよくわかっていなかったら、この研究自体の時系列も変わっていました。

また大阪市立大学の神田先生にも解析全般について、貴重な議論、アドバイスを頂き、この研究のひとつの方向を指し示して頂きました。そして研究だけではなく、学会などでもいろいろお世話して頂き、精神的な支えにもなって頂きました。

そして坪野研の高森さん、沼田さん、麻生さん、飯田さんにも、物理についてだけではなく、政治から芸能までさまざまなことに関して議論して頂きました。そのひとつひとつの議論は今、私にとって試金石となっています。また研究室内でも個人的なお世話をしていただきました。

同級生の関君、西君にはこの2年間を通して、物理的な話はもちろんのこと、いろいろなことについて話合いました。彼らとの生活は私にとって非常に刺激的でした。

またM1の高城君とも、本当に短い間でしたが、さまざまなことについて話すことができ、いろいろなことを学ぶことができました。

そして秘書の大川さん、早瀬さんにも研究室内で多くのお世話をしていただきました。

以上の方々に研究の面でも、個人的な面でもさまざまなことについてお世話になり、この研究は多くの人々の協力なくしてはありえませんでした。以上の方々に、ここで深いお礼を述べたいと思います。