

修士論文

ねじれ型重力波検出器 TOBA の開発
及び背景重力波探査

東京大学大学院 理学系研究科
物理学専攻 坪野研究室
正田亜八香

目次

第 1 章	はじめに	7
第 2 章	重力波とその検出	9
2.1	重力波の導出	9
2.1.1	測地線方程式と計量テンソル	9
2.1.2	Einstein 方程式の線形化	10
2.1.3	重力波解	11
2.1.4	自由質点に対する重力波の影響 (TT gauge)	12
2.1.5	自由質点に対する重力波の影響 (Proper detector frame)	12
2.1.6	重力波の偏波	13
2.1.7	重力波の発生	14
2.2	重力波源	15
2.2.1	連星中性子星合体	15
2.2.2	超新星爆発	15
2.2.3	ブラックホール合体	16
2.2.4	背景重力波	16
2.3	重力波の検出方法	16
2.3.1	共振型重力波検出器	16
2.3.2	干渉計型重力波検出器	17
2.3.3	その他の重力波検出方法	19
第 3 章	ねじれ振り子型重力波検出器	21
3.1	重力波に対する応答	21
3.1.1	運動方程式	21
3.1.2	周波数応答	22
3.1.3	Pattern function	23
3.2	雑音源	25
3.3	Torsion-bar Antenna (TOBA)	26
3.4	プロトタイプ TOBA	26
3.4.1	超伝導を用いた磁気浮上	28
3.4.2	フィードバック制御	28
3.4.3	回転読み取り系	29
3.4.4	アクチュエータ	31
3.4.5	感度	31

第 4 章	同時観測	33
4.1	東京・京都における同時観測	33
4.2	観測データ	34
4.2.1	時系列データ	34
4.2.2	ノイズレベル	34
第 5 章	背景重力波探査	39
5.1	背景重力波	39
5.1.1	背景重力波のスペクトル	39
5.1.2	過去の観測と理論的上限值	40
5.2	相関解析の原理	42
5.2.1	相関値 Y	42
5.2.2	Optimal filter と Signal-to-noise ratio	43
5.2.3	1 台での感度との比較	43
5.3	信号処理	44
5.3.1	キャリブレーション	44
5.3.2	データセレクション	45
5.3.3	相関値の計算	46
5.3.4	信号の検出・非検出決定	48
5.3.5	上限値の設定	50
5.3.6	パラメータチューニング	51
5.4	解析結果	53
5.4.1	解析パラメータ	53
5.4.2	相関値と上限値	55
5.5	今後の展望	58
第 6 章	コイル-コイル アクチュエータの開発	59
6.1	目的と概要	59
6.2	動作原理	60
6.2.1	基本型	60
6.2.2	2 コイル浮上型	61
6.2.3	3 コイル浮上型	63
6.3	特性評価	65
6.3.1	基本型での特性	65
6.4	伝達関数	67
6.4.1	基本型アクチュエータ	69
6.4.2	2 コイル浮上型アクチュエータの伝達関数	71
6.5	共振周波数の測定	74
6.6	雑音源	74
6.6.1	磁場ノイズ	74
6.6.2	熱雑音	75
6.6.3	ノイズスペクトル	75
6.7	今後の展望	75

第 7 章	まとめ	79
7.1	背景重力波探査	79
7.2	コイル-コイル アクチュエータの開発	79
補遺 A	コイルの特性	81
A.1	コイルの抵抗値と自己インダクタンス	81
A.2	相互インダクタンス	82
補遺 B	定電圧ドライバでのコイル-コイル アクチュエータの応答	83
B.1	理論値	83
B.1.1	特性評価	84
補遺 C	Optimal filter と Overlap reduction function	87
C.1	Optimal filter の導出	87
C.2	Overlap reduction function の計算	90
補遺 D	電気回路	93

第1章 はじめに

ガリレオが1609年に初めて望遠鏡を月に向けて以来、人類は電磁波を用いて宇宙を観測してきた。しかし宇宙には、宇宙の晴れ上がり以前の宇宙や、ブラックホールや超新星の内部構造など、電磁波では散乱などによってとらえる事のできない現象も存在する。そこで近年、電磁波に代わる観測手段が検討されている。そのうちのひとつが重力波である。

重力波は1916年にEinsteinによって予言された光速で伝搬する時空の歪みである[1]。重力波には、中性子星やブラックホールの連星、超新星爆発といった、質量の大きな天体の高速運動によって発生するものや、インフレーションによる宇宙空間のダイナミクスに起因して生じるものが存在する。後者は特に背景重力波と呼ばれ、これは現在観測されている宇宙最古の姿 — 宇宙マイクロ波背景放射よりも過去の宇宙の情報を持った、非常に興味深い観測対象である。背景重力波が観測できれば、インフレーションにおける再加熱温度の決定など、宇宙論の進展に大きく貢献できると期待されている。しかし、重力波の及ぼす相互作用は非常に小さい為、現在までその直接観測には至っていない。一方で、重力波の存在はTaylorとHulseによるPSR1913+16の観測結果によって間接的に証明されている[2]。これは、重力波の放出によるエネルギー損失によってパルサーの公転周期が変化する事をつきとめたものであり、彼らはこの功績により1993年にノーベル物理学賞を受賞している。

重力波を直接とらえる為、これまでに世界各地で重力波検出器が開発されてきた。現在の検出器の主流は大型のレーザー干渉計であり、アメリカのLIGOやイタリアのVirgo、日本のLCGTなどがこれにあたる。レーザー干渉計型重力波検出器は、ビームスプリッターから鏡までの光路長変動を観測する事で時空の歪みを検出する。この際に用いられる鏡は、自由質点としてふるまうように振り子のように懸架されている。このレーザー干渉計の観測周波数帯は、地面振動による制限から主に100 Hz以上の高周波数領域となり、観測ターゲットとしてはパルサーや中性子星連星、超新星爆発などが挙げられる。

一方、低周波重力波を観測しようと考案されたのが、宇宙間重力波望遠鏡である。これは、衛星間でレーザー干渉計を構築する事で重力波を観測しようという試みであり、ヨーロッパを中心としたNGO(旧LISA)、日本のDECIGOといった計画が進められている。これらは地面振動の影響を受けないのに加え、干渉計の基線長を非常に長くとれる事から、1.0 Hz以下という低周波に良い感度を持つ。これによる観測ターゲットは、ブラックホール連星や背景重力波などといったものが挙げられる。しかし、これらの計画は1つの干渉計に3台の衛星を必要とする非常に規模の大きな計画である。これを実現させるには莫大な予算や時間、人手が必要とされる。更には打ち上げ後のアップデートや修理が困難などといった衛星特有の問題を孕んでいる。

そこで、地上で低周波重力波を観測するため開発されたのがねじれ振り子型重力波検出器 Torsion-bar Antenna (TOBA)[3]である。レーザー干渉計は重力波による空間の歪みを長さ変動で観測するのに対し、TOBAでは、重力波からの潮汐力による棒状テストマスの回転を観測する。このような新しい原理を用いた重力波検出器 TOBAは0.1 – 1.0 Hz付近で最も良い感度を持つように設計されている。TOBAの将来的なデザインでは、長さ約10 mの棒状のテストマスを2本、直交して懸架し、4Kという低温に冷やして熱雑音を低減する予定となっている。このような構成はレーザー干渉計型重力波検出器と比べて単純、かつ小型である事から、比較的low予算、短時間で実現可能であると考えられる。更に、目標感度に達成できれば、宇宙のほぼ全域の中間質量ブラックホール連星をサーベイ出来る他、1年間の同

時観測によって背景重力波に理論値よりも厳しい上限値を与える事ができるなど、TOBA による重力波の直接観測も期待できる。つまり、TOBA は DECIGO とほぼ同様の周波数帯で重力波観測ができる為、TOBA による低周波重力波の初検出を行い、DECIGO や LISA などにサイエンス的なフィードバックを与える事も可能である。

このように低周波重力波を初検出できる可能性を持った TOBA であるが、現在までに小型のプロトタイプが開発されている [4][5]。これは、腕の長さが約 20cm という小型のねじれ振り子を用いており、特徴的な技術として超伝導のピン止め効果を用いた振り子の懸架を行っている。これによって回転方向の散逸が小さくなり、ねじれ振り子の共振周波数を小さく抑える事に成功している。また、このプロトタイプ TOBA1 台を用いた重力波探査は既に行われており、世界で初めて 0.2 Hz という低周波数帯において背景重力波の上限値が与えられた [6]。

そこで今回、我々は背景重力波の検出を目指し、背景重力波をターゲットとしたプロトタイプ TOBA2 台による同時観測・相関解析を行った。更に、今後の TOBA の感度向上のため、新型のアクチュエータを開発した。この論文ではまず、2 章で重力波や従来の重力波検出器について紹介する。3 章では今回使用した新型重力波検出器 TOBA の原理やプロトタイプ TOBA の装置の概要について述べる。このプロトタイプ TOBA を用いた同時観測の状況やノイズレベル、データクオリティなどを 4 章で、背景重力波をターゲットとした解析手法、及び解析結果について 5 章で述べる。更に、今後の TOBA の感度向上のために開発した新型アクチュエータの原理、及び特性について 1 章で詳しく説明する。

第2章 重力波とその検出

重力波とは、宇宙空間を光速で伝搬する時空の歪みである。これは、一般相対性理論の Einstein 方程式を線形近似する事で導出される波動解であり、1916年に Einstein によって予言された [1]。重力波の存在は Taylor と Hulse による PSR1913+16 の観測結果によって間接的に証明されているものの [2]、その相互作用が非常に小さい為、その直接検出には至っていない。現在、重力波の直接検出を目指し、共振型検出器、レーザー干渉計型検出器、パルサータイミングなどの観測手法が開発研究されている。

この章ではまず、Einstein 方程式の線形化によって重力波解を導出し、次にその発生と主な重力波源について述べる。最後に、現在までに研究されている主要な重力波の直接検出方法について紹介する。

2.1 重力波の導出

2.1.1 測地線方程式と計量テンソル

一般相対性理論によれば、4次元空間内の異なる2点 x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ の間の世界間隔 (線素 ds) は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

と書ける。¹ $g_{\mu\nu}$ は時空の構造を表す計量テンソルである。例えば重力場のない平坦な時空 (Minkowski 時空) の場合、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

と書ける。但し、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

である。

この計量テンソルを用いれば、測地線方程式

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.4)$$

に従って、重力以外の外力を受けない粒子の運動を求める事ができる。ここで、 τ は粒子の固有時間、 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ はクリストッフェル記号

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (2.5)$$

である。つまり、粒子の運動は時空の構造 $g_{\mu\nu}$ によって決定される事がわかる。

¹ここでは Einstein の縮約の表記を用いている。ただし、ギリシャ文字の添え字は 0,1,2,3 の数字を、ローマ字の添え字は 1,2,3 の数字を表すものとする。また、座標は $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ とする。

2.1.2 Einstein 方程式の線形化

この $g_{\mu\nu}$ は, Einstein 方程式に従う. Einstein 方程式は,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

である. ただし, $R_{\mu\nu}$ はリッチテンソル, R はリッチスカラー, $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソル, G と c はそれぞれ重力定数と光速である. $R_{\mu\nu}$ と R はリーマンテンソル

$$R_{\mu\rho\nu}^{\lambda} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda}\Gamma_{\mu\rho}^{\beta} \quad (2.7)$$

を用いてそれぞれ

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} \quad (2.8)$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

と書ける. 式 2.6 では, 左辺が時空の構造を表す項からなり, 右辺が重力を表す項となっている. つまり, 時空の構造 (歪み) と重力は, 一対一の関係なのである.

ここで, 式 2.6 から重力波解を導くため, $g_{\mu\nu}$ に対して線形近似を施す. 今, Minkowski 時空 (平坦な時空) に微小な摂動が加わった時の時空を考える. このときの計量テンソルは, 微小な摂動成分 $h_{\mu\nu}$ を用いて

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

と書ける. これを式 2.6 に代入し, $h_{\mu\nu}$ の 1 次まで考えていく.

このときのクリストッフェル記号は

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right), \quad (2.11)$$

リーマンテンソルは

$$R_{\mu\rho\nu}^{\lambda} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial^2 h_{\alpha\nu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 h_{\mu\rho}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} \right), \quad (2.12)$$

リッチテンソルは

$$R_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial^2 h_{\mu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} \right) \quad (2.13)$$

と書ける. ただし, $h \equiv h_{\lambda}^{\lambda}$ である. 更にリッチスカラーは

$$R \simeq \frac{\partial^2 h^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_{\alpha}\partial x^{\alpha}} \quad (2.14)$$

となる.

ここで, Lorentz gauge

$$\frac{\partial \bar{h}_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad (2.15)$$

をとる. ただし, $\bar{h}_{\mu\nu}$ は trace reverse tensor で,

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.16)$$

で定義される. この Lorentz gauge の下で式 2.6 に式 2.13, 2.14 を代入すると

$$\frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\alpha}} = \square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

と書き下す事ができる.

2.1.3 重力波解

真空中の時, $T_{\mu\nu} = 0$ なので, 式 2.17 は

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.18)$$

という波動方程式となる．これは, $\bar{h}_{\mu\nu}$ が波動として時空を伝搬する事を表している．これが重力波である．

式 2.18 の解として,

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (2.19)$$

を考える．これが Einstein 方程式 2.17 と Lorentz gauge の条件 2.15 を満たす時,

$$A_{\mu\nu} k^\mu = 0 \quad (2.20)$$

$$k_\mu k^\mu = 0 \quad (2.21)$$

$$(2.22)$$

でなければならない．ここで式 2.20 は重力波が横波である事を表し, 式 2.21 は重力波が光速で伝わる事を表している．

さて, 式 2.15 で Lorentz gauge を課したが, 座標変換にはまだ任意性が残っている．そこで, Transverse Traceless gauge (TT gauge)

$$A_\alpha^\alpha = 0 \quad (2.23)$$

$$A_{\mu\nu} U^\nu = 0 \quad (2.24)$$

$$(2.25)$$

を課す．ここで, U^ν は任意の時間的ベクトルである．式 2.23 は $A_{\mu\nu}$ のトレースが 0 である事を示し, 式 2.24 は重力波が横波として観測できる座標系が存在している事を示している．

ここで $U^\nu = \delta_0^\nu$ (Minkowski 時空の単位時間ベクトル) すると, 式 2.24 より

$$A_{\mu\nu} \delta_0^\nu = A_{\mu 0} = 0. \quad (2.26)$$

更に角振動数 ω の重力波が z 軸方向に進んでいるとすると, $k_\alpha = (\omega, 0, 0, \omega/c)$ なので, 式 2.23 より

$$A^{\mu\alpha} k_\alpha = A^{\mu 3} \omega/c = 0 \quad (2.27)$$

$$\therefore A_{\mu 3} = 0 \quad (2.28)$$

従って, TT gauge を満たす $A_{\mu\nu}$ は

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

となる．これより, 重力波は h_+ と h_\times の 2 つの自由度を持っている事がわかる．

また, 任意の単位ベクトル \hat{n} の方向に伝搬する重力波に対し, \hat{n} に直交する 2 つの単位ベクトル \hat{u} と \hat{v} を用いて

$$e_{\mu\nu}^+(\hat{n}) \equiv \hat{u}_\mu \hat{u}_\nu - \hat{v}_\mu \hat{v}_\nu \quad (2.30)$$

$$e_{\mu\nu}^\times(\hat{n}) \equiv \hat{u}_\mu \hat{v}_\nu + \hat{v}_\mu \hat{u}_\nu \quad (2.31)$$

と偏波テンソル (polarization tensor) を定義すれば, 一般的な重力波解は

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \sum_{A=+, \times} h_A(\hat{\mathbf{n}}) e_{\mu\nu}^A(\hat{\mathbf{n}}) e^{-i\omega(t - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{x}}/c)} \quad (2.32)$$

と書き直せる. 但し, x は観測点の座標ベクトルである. 時刻 t に x で観測される重力波は, これの全方向, 全周波数の重ね合わせとなるため,

$$\bar{h}_{ij}(t, x) = \sum_{A=+, \times} \int_{-\infty}^{+\infty} df \int d^2\hat{\mathbf{n}} h_A(f, \hat{\mathbf{n}}) e_{ij}^A(\hat{\mathbf{n}}) e^{-i\omega(t - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{x}}/c)} \quad (2.33)$$

となる.

2.1.4 自由質点に対する重力波の影響 (TT gauge)

Minkowski 時空の上で静止している自由質点に働く重力波の効果, TT gauge において考える. 静止している粒子では

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = (1, 0, 0, 0) \quad (2.34)$$

なので, 測地線方程式 2.4 は

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} &= -\Gamma_{00}^\lambda \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial\bar{h}_{\alpha 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial\bar{h}_{\alpha 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial\bar{h}_{00}}{\partial x^\alpha} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

となる. これは, 粒子には力が働かず, TT gauge の座標軸上で静止し続ける事を意味する. つまり, TT gauge とは, 粒子に働く力が打ち消されるように座標が変化する gauge なのである.

では, 重力波の影響を見る為に, 近接した 2 粒子の世界間隔の変化を見ることとする. TT gauge の下で $(0,0,0,0)$ と $(0,\epsilon,0,0)$ に静止している 2 つの粒子を考える. この 2 粒子間の固有距離 δl は

$$\begin{aligned} \delta l \int |ds^2|^{1/2} &= \int |g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|^{1/2} \\ &= \int_0^\epsilon |g_{11}|^{1/2} dx^1 \\ &\simeq |g_{11}|^{1/2} x \simeq \left(1 + \frac{1}{2}\bar{h}_{11}\right) \epsilon \end{aligned} \quad (2.36)$$

となり, 2 質点間の距離が重力波によって変動する事がわかる.

2.1.5 自由質点に対する重力波の影響 (Proper detector frame)

実際に観測を行う実験室系は, 上で扱った TT gauge とは異なる. そこで, 座標 x の周りの十分小さい領域のみを考える. これによって導き出される実験室系を proper detector frame と呼ぶ.

x から微小距離 ξ だけ離れた地点 $x + \xi$ における測地線方程式を考えると,

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu(x + \xi) \frac{d(x^\nu + \xi^\nu)}{d\tau} \frac{d(x^\rho + \xi^\rho)}{d\tau} \quad (2.37)$$

ξ^μ の 1 次の項のみ考えると,

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = -2\Gamma_{\nu\rho}^\mu(x)\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{d\xi^\rho}{d\tau} - \xi^\sigma\frac{\partial\Gamma_{\nu\rho}^\mu}{\partial x^\sigma}(x)\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} \quad (2.38)$$

となる.

ここで, 観測地点周辺のごく狭い範囲のみを考えると, たとえ重力波があったとしても, 線素は

$$ds^2 \simeq -c^2 dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (2.39)$$

としてよい. つまり, 計量テンソルは x の 1 次のオーダーで $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ として良いので, $g_{\mu\nu}$ の微分は 0 となり,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 \quad (2.40)$$

となる. また, 実験室系は十分ゆっくりと動いていると考えれば, $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau} = c$ とできて, 式 2.38 は

$$\frac{d\xi^\mu}{d\tau^2} = -c^2 \xi^\sigma \frac{\partial\Gamma_{00}^\mu}{\partial x^\sigma} \quad (2.41)$$

と書ける. 更に,

$$\begin{aligned} R_{0\sigma 0}^\mu &= \frac{\partial\Gamma_{00}^\mu}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial\Gamma_{0\sigma}^\lambda}{\partial x^0} + \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \Gamma_{00}^\alpha - \Gamma_{\beta 0}^\mu \Gamma_{0\sigma}^\beta \\ &= \frac{\partial\Gamma_{00}^\mu}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial\Gamma_{0\sigma}^\lambda}{\partial x^0} \\ &= \frac{\partial\Gamma_{00}^\mu}{\partial x^\sigma} \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$(2.43)$$

となるため,

$$\frac{d\xi^\mu}{d\tau^2} = -c^2 \xi^\sigma R_{0\sigma 0}^\mu. \quad (2.44)$$

ここでリーマンテンソルと重力波の関係は式 2.12 より

$$R_{0\sigma 0}^\mu = R_{\mu 0\sigma 0} = -\frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 h_{\mu\sigma}}{\partial t^2} \quad (2.45)$$

である. ただし, リーマンテンソルは gauge invariant であるため, 重力波振幅 h_{ij} には TT gauge と同じものを使って良い. 従って,

$$\ddot{\xi}^i = \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij} \xi^j \quad (2.46)$$

が, proper detector frame での測地線方程式となる. つまり, 実験室系で見ると, 質量 m の自由粒子には重力波によって

$$F_i = \frac{m}{2} \ddot{h}_{ij} \xi^j \quad (2.47)$$

の力が加わる事を表している. これが, 重力波が質点に及ぼす潮汐力となる.

2.1.6 重力波の偏波

ここでは, 自由粒子の位置が重力波によってどう変化するのかを調べる. 式 2.47 の, $t \rightarrow \infty$ で発散しないような解を求めると,

$$\delta\xi^i = \frac{1}{2} h_j^i \xi^j \quad (2.48)$$

となる．従って，角振動数 ω を持った重力波が z 軸方向から伝搬してきた時の ξ の変化量は，式 2.19，2.29 より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta\xi^x \\ \delta\xi^y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^x \\ \xi^y \end{pmatrix} e^{i\omega(t-z/c)} \\ &= \frac{1}{2}h_+ \begin{pmatrix} \xi^x \\ -\xi^y \end{pmatrix} e^{i\omega(t-z/c)} + \frac{1}{2}h_\times \begin{pmatrix} \xi^y \\ \xi^x \end{pmatrix} e^{i\omega(t-z/c)} \end{aligned} \quad (2.49)$$

である．この第1項と第2項はそれぞれ重力波の $+$ mode と \times mode の偏波を表している．

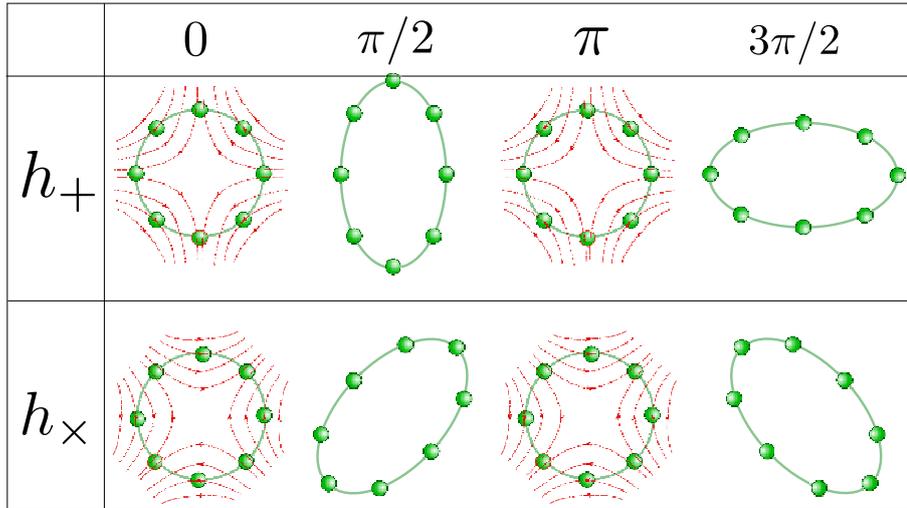


図 2.1: 重力波の偏波．紙面に垂直な方向から，それぞれ h_+ ， h_\times の重力波が伝搬してきた時の，自由質点の動きを表している．赤の破線は質点にかかる力の線を表している．

これらのモードによる質点の動きを図示すると，図 2.1 のようになっている．また， $\text{div}F = 0$ より，力の向きは図 2.1 の赤線のようになる．ここから，力の湧き出しや吸い込みは存在しない事がわかる．

2.1.7 重力波の発生

遠方の十分小さい重力波源から重力波が発生する時の重力波放射を考える．重力波振幅は，式 2.17 より

$$\bar{h}_{ij}(t, x) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{ij} \left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}' \right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (2.50)$$

重力波源が重力波の波長に比べて十分小さい場合，

$$\bar{h}_{ij}(t, x) = \frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2}{dt^2} \int \rho \left(t - \frac{r}{c}, y \right) y_1 y_j d^3y \quad (2.51)$$

と近似できる．ここで $\rho(t, y)$ は重力波源の密度である． z 方向に進む重力波を考えると，重力波源より十分遠方では，

$$\bar{h}_{ij}(x) = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{ij}(t') \quad (2.52)$$

となる。ただし、 $r \equiv |\vec{x} - \vec{x}'|$, $t' \equiv t - r/c$ とした。 Q_{ij} は四重極モーメント

$$Q_{ij}(t) = \int \rho(\vec{x}', t') \left(x'_i x'_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x'^i x'^j \right) d^3 x' \quad (2.53)$$

である。つまり、重力波の発生には、電磁場の様に双極子モーメントではなく、四重極モーメントが必要である事がわかる。

また、この重力波源から単位時間あたりに放射される重力波のエネルギーは

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \ddot{Q}_{ij}^2 \quad (2.54)$$

となる。

2.2 重力波源

重力波観測でターゲットとなる重力波源としては、主に連星中性子合体やブラックホール合体、超新星爆発、背景重力波などが考えられる。ここでは、主な重力波源とその周波数帯、観測から得られるサイエンスなどについて概観していく。

2.2.1 連星中性子星合体

中性子星のような重くてコンパクトな天体が連星を形成しているとき、中性子星はお互いのまわりを回りながら重力波を放出する。2つの中性子星は放出した重力波によって運動エネルギーを失って最後には合体をし、合体の瞬間には非常に大きな重力波を放出すると予想されている。

この天体現象連星が合体する直前までに放出する重力波の周波数はおよそ 10 Hz – 1 kHz 程度であり、その波形は Chirp 波形と呼ばれる。Chirp 波形とは、時間が進むに従って周波数が高くなり、振幅が大きくなる様な波形である。この波形は、Post-Newtonian 近似を用いて解析的に求める事ができるのが大きな特徴である。波形がわかっていると、信号解析の際に Matched Filtering という手法を用いて、ノイズに埋もれた重力波信号を効率よく拾い出す事ができるので、重力波を初検出できる可能性のあるターゲットとして注目されている。

連星中性子星合体からの重力波を観測する事により、一般相対性理論の検証や、重力波によるハッブル定数の決定が可能になる他、中性子星の半径や質量から、中性子星内部の状態方程式を決定できるとも期待されている。

2.2.2 超新星爆発

超新星爆発では、超新星内部が重力崩壊する際に非対称性が存在する事で重力波が放出されると期待されている。この重力波の周波数はおよそ 1 kHz 程度で、パースト的に発生するものだと考えられている。超新星爆発からの重力波の波形の予測は非常に難しい為、Matched filter のような手法は用いる事ができないが、パースト波を検出するための様々な解析手法が研究されている。

超新星爆発からの重力波は超新星の内部の情報を持つため、現在までわかっていない超新星爆発の仕組みの謎を解き明かす鍵となると期待されている。

2.2.3 ブラックホール合体

ブラックホールも非常に重くコンパクトな天体であるため、ブラックホール連星からも重力波が発生すると期待されている。ブラックホールは中性子星より質量が大きい為、その重力波の周波数は低くなり、およそ 10 Hz 以下だと考えられている。

ブラックホールは電磁波での直接観測が難しい事から、重力波によるブラックホールの観測によって様々な観測的事実が得られると期待されている。例えば、銀河中心の超巨大ブラックホールは、中間質量ブラックホールの合体によって生まれたのか、質量降着によって生まれたのか、未だにその議論は決着を見せていない。しかし、銀河中心でのブラックホール合体についての観測事実により、超巨大ブラックホールの進化論、ひいては銀河の進化論の発展に貢献する事ができると期待されている。

2.2.4 背景重力波

背景重力波とは、宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background, CMB) と同様に、宇宙全天から放射されていると考えられている重力波である。この重力波の振幅は $f^{-3/2}$ に比例すると考えられ、低周波での重力波観測が重要となる。背景重力波の起源としては、上で述べた様な天文学的起源のものと、宇宙論的起源のもの重ね合わせであると考えられている。その波形はガウシアンのような振る舞いを見せると考えられているが、予測する事は不可能である。従って、重力波検出器 1 台での観測ではノイズと背景重力波の判別が難しい。そこで背景重力波をとらえる為に重要となる解析手法が、相関解析である。この相関解析では、2 台以上の重力波検出器を用いて同時観測を行う。この時背景重力波はどの検出器にも同じ様に伝搬してきているため、それぞれのデータの共通成分を相関解析によって取り出せば、背景重力波をとらえる事ができる、というものである。

背景重力波の天文学的起源のものは、連星や超新星爆発起源の重力波であるが、1 つ 1 つに分離して検出する事が出来ない程小さな振幅のもの重ね合わせであると考えられる。一方、天文学的起源のものは、宇宙初期のインフレーションや相転移に伴って放出されるものである。これは、ビッグバンから約 10^{-22} 秒後の宇宙の姿を映し出すものであり、電磁波では見る事ができない初期宇宙を観測する事ができる。これによって、インフレーションの際の再加熱の温度などといった、宇宙進化の謎を解き明かすパラメータを決定する事ができると期待されている。

2.3 重力波の検出方法

重力波の直接検出のためには、重力波による自由質点間の固有距離の変化 (潮汐力) を観測しなければならない。しかし、重力波による質点への影響は非常に微弱なもので、その検出は困難である。直接検出を試みた最初の重力波検出器は、1960 年代にメリーランド大学の J. Weber 氏によって考案された共振型重力波検出器である [7]。その後、近年ではレーザー干渉計を用いた重力波検出器の開発が主流となり、現在までに様々な研究開発が重ねられ、直接検出も間近であると期待されている。

他にもドップラートラッキングやパルサータイミングなどといった検出方法の研究も行われている。

2.3.1 共振型重力波検出器

弾性体に重力波が入射すると、その潮汐力によって弾性振動が励起される。この弾性振動モードの励起を読み取る事によって重力波をとらえるのが共振型重力波検出器である。弾性体の振動の運動方程式

は、ある弾性モードに対して

$$\mu \left(\ddot{\xi} + \frac{\omega_0}{Q_0} \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi \right) = f_{\text{GW}}(t) \quad (2.55)$$

と書ける．但し、 μ, ω_0, Q_0 はそれぞれ、弾性振動モードの換算質量、弾性体の共振周波数及び Q 値である． $f_{\text{GW}}(t)$ は重力波が弾性体に及ぼす潮汐力で、式 2.47 から見てもとれるように、 \ddot{h}_{ij} に比例する．これより、周波数領域で

$$\xi(\omega) = -\frac{1}{\mu \left(\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega_0 \omega}{Q_0} \right)} f_{\text{GW}}(t) \quad (2.56)$$

と書け、 Q 値が大きい時、 $\omega \sim \omega_0$ の付近では重力波振幅が増幅されて共振器が振動する事となる．共振型重力波検出器では、この振動をトランスデューサーを検出し、重力波信号を読み取る．ただし、共振周波数以外の周波数帯域では振動が励起されないで、重力波に対して殆ど感度を持たない．

また、共振型重力波検出器では、弾性体が重く長いものを用いた方が重力波から受け取るエネルギーが大きく感度が良いので、実際の検出器は重さ数トンという巨大なものとなる．この検出器の感度を制限する雑音は主に、熱雑音やトランスデューサーの雑音である．そのため、弾性体を極低温まで冷却したり、SQUID などを用いた高感度トランスデューサーを取り入れるなどといった工夫がなされている．

2.3.2 干渉計型重力波検出器

現在、世界各地で大型の干渉計型重力波検出器が建設されており、研究の主流となっている検出方法である．この検出器では、離れた 2 つの自由質点間の距離変動を干渉計を用いて測定するものである．

レーザー干渉計の構成は図 2.2 のようになっている．レーザー光源から出た光はビームスプリッターで直交する 2 方向に分けられた、それぞれが鏡で反射されて返ってくる．この反射光をビームスプリッターで再結合させて干渉を見る．ビームスプリッターと鏡は懸架されているため、振り子の共振周波数以上であれば自由質点としてみなして良い．従って、重力波が入射するとビームスプリッターと鏡の距離が変化する．この距離の変化は、図 2.1 のように、2 つの腕で逆相であるため、2 つの反射光の間に位相差が生じ、干渉縞が変化する．この干渉縞の変化をみる事で、重力波を検出するのである．

ここで、マイケルソン干渉計での重力波の応答を考える．周波数 Ω を持った入射光の電場を

$$E_{in} = E_0 e^{i\Omega t} \quad (2.57)$$

とすると、フォトディテクターで受ける光の強度は

$$\begin{aligned} P_{out} &= \left| \frac{1}{2} E_0 e^{i(\Omega t + \phi_x)} - \frac{1}{2} E_0 e^{i(\Omega t + \phi_y)} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} E_0^2 (1 - \cos(\phi_x - \phi_y)) \end{aligned} \quad (2.58)$$

と書ける．但し、 ϕ_x, ϕ_y は 2 つに分けられた光が鏡で反射してビームスプリッターで再結合するまでに生じる位相差である．ビームスプリッターから鏡までの距離をそれぞれ ξ_x, ξ_y とし、+mode 偏波の重力波が入射したときを考えると、

$$\delta_x = \frac{2\xi_x \Omega}{c} + \frac{\Omega}{2} \int_{t-2\xi_x/c}^t h(t') dt' \quad (2.59)$$

$$\delta_y = \frac{2\xi_y \Omega}{c} - \frac{\Omega}{2} \int_{t-2\xi_y/c}^t h(t') dt' \quad (2.60)$$

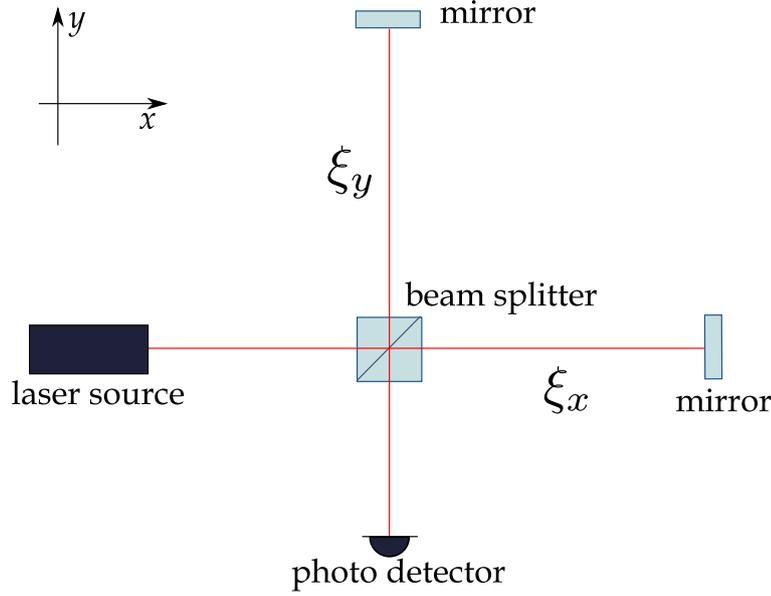


図 2.2: レーザー干渉計型重力波検出器の構成

となる．この第 2 項が重力波による影響であるが， x 軸と y 軸で符号が逆になっている，つまり差動で変化している事に注意されたい． $\xi_x \simeq \xi_y \simeq \xi$ とすると，

$$\phi_x - \phi_y = \frac{2(\xi_x - \xi_y)\Omega}{c} + \delta\phi_{\text{GW}} \quad (2.61)$$

となり，位相差に重力波の影響が表れる．ここで

$$\begin{aligned} \delta\phi_{\text{GW}} &= \Omega \int_{t-2\xi/c}^t h(t') dt' \\ &= \Omega \int_{t-2\xi/c}^t \int_{-\infty}^{+\infty} h(\omega) e^{i\omega t'} d\omega dt' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\text{MI}}(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$H_{\text{MI}}(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\xi\omega}{c}\right) e^{-i\xi\omega/c} \quad (2.63)$$

である．但し，式 2.62 の 2 行目では h にフーリエ変換を施している． H_{MI} はマイケルソン干渉計の応答関数であり，

$$\frac{\xi\omega}{c} = \frac{\pi}{2} \quad (2.64)$$

となるときにその応答が最大となり，干渉計の感度が最も良くなる．例えば 1 kHz の重力波に対して最も感度が良いのは， ξ が約 75 km の時となる．しかし，基線長 (ξ) が 75 km のマイケルソン干渉計を作るのは現実的には不可能である．そこで，鏡の多重反射を利用する Delay Line 方式や，多重干渉を利用する Fabry Perot 方式などを利用する事によって実効的な基線長を長くする工夫がなされている．

現在，世界各国で表 2.1 のような大型レーザー干渉計型重力波検出器が開発されている．地上のレーザー干渉計型重力波検出器にはアメリカの LIGO[8] やイタリアの Virgo[9] など研究が進められており，日本でも LCGT[10] の建設が始まろうとしている．それぞれの干渉計の腕の長さは 3~4 km と巨

大なものであり、そのターゲット周波数は、100～10k Hz となっている。近年の研究により非常に良い感度を実現しており、レーザー干渉計型重力波検出器による重力波の初観測も間近であると期待されている。これは、ビームスプリッターや鏡を吊るす振り子の共振周波数を下げる事が難しく、ビームスプリッターや鏡が自由質点としてふるまえないからである。

そこで、低周波数帯の重力波を観測する為に、宇宙間にレーザー干渉計を構築する計画も進められている。これが、ヨーロッパの NGO (旧 LISA[11]) や、日本の DECIGO[12] といった計画である。これらの計画は宇宙空間に 3 台の衛星を打ち上げ、それぞれを自由質点として正三角形のレーザー干渉計を構築する。この 3 台の衛星は正三角形を保ったまま地球軌道上 (レコード盤軌道) を周回する。また、このレーザー干渉計を 2～3 組構築する事で、相関解析などを可能にする予定である。これらの検出器が良い感度を持つ重力波の周波数帯は 0.01～1.0 Hz 程度となっており、背景重力波やブラックホール連星などといった低周波重力波の観測を目指している。

国	プロジェクト	基線長	方式
アメリカ	LIGO	4 km	Fabry Perot
イタリア・フランス	Virgo	3 km	Fabry Perot
ドイツ・イギリス	GEO	600 m	Delay Line
日本	LCGT	3 km	Fabry Perot
ヨーロッパ	NGO (LISA)	5,000,000 km	宇宙 (Michaelson)
日本	DECIGO	1,000 km	宇宙 (Fabry Perot)

表 2.1: 世界各国のレーザー干渉計型重力波検出器の計画

2.3.3 その他の重力波検出方法

ここでは、上記以外の重力波検出方法として、ドップラートラッキングやパルサータイミングについて紹介する。

パルサータイミングとは、パルサーのパルスが地球に到着する時間が重力波によって変動するのを観測するものである。パルサータイミングでの重力波のターゲット周波数はより低周波の 10^{-7} Hz 周辺であり、背景重力波などの観測を目指している。

また、パルサータイミングは地球と衛星の間で電磁波を往復させ、そこを通過する重力波で引き起こされるドップラーシフトを用いて重力波を検出する方法である。衛星には、例えば Cassini などといった衛星が使用されている。この方法での重力波のターゲット周波数は 10^{-5} Hz 周辺となっているが、この方法では電磁波の周波数安定度によって感度が制限されている。

第3章 ねじれ振り子型重力波検出器

前章で概観したように、現在研究の主流となっている地上レーザー干渉計型重力波検出器の重力波に対する感度は、1 kHz 以上の高周波にしかない。従って、背景重力波や中間質量ブラックホール連星などといった低周波重力波をとらえる事は難しい。宇宙空間でのレーザー干渉計では、0.01 – 1 Hz といった低周波での重力波観測が期待されるものの、3 台以上の衛星を必要とする非常に規模の大きいプロジェクトである。技術的にもドラッグフリー制御などといった様々な特殊技術が必要となる。更には、宇宙空間では修理やアップデートが困難であるなどといった問題が存在する。

そこで近年研究され始めているのが、「ねじれ振り子型重力波検出器」である。これは、棒状の物体を水平に懸架した時、重力波からの潮汐力によって棒が回転するのを読み取る事で重力波を検出する方法であり、そのコンセプトは 1969 年、Braginsky らによって提唱された [13]。現在、0.1 – 1.0 Hz といった低周波の重力波に対して良い感度を持った重力波検出器 Torsion-bar Antenna (TOBA) [3] の開発計画が進んでおり、これまでに、TOBA のプロトタイプが東京大学と京都大学で開発されている。

この章では、ねじれ振り子型重力波検出器の重力波に対する応答について説明した後、プロトタイプ TOBA の構成、動作原理などについて述べる。

3.1 重力波に対する応答

3.1.1 運動方程式

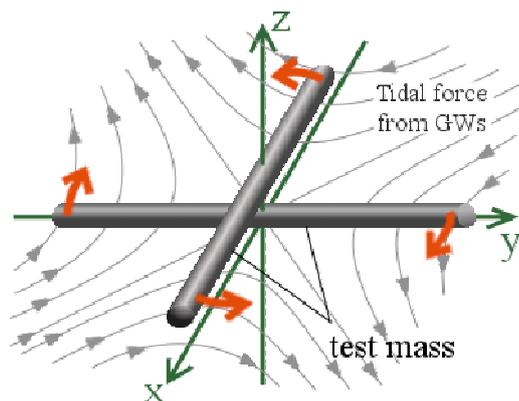


図 3.1: TOBA の概念図

図 3.1 の様に、棒状のテストマスが xy 平面上に置かれ、 z 軸で支えられ、 z 軸を中心軸として自由に回転できるものとする。ここに、 z 軸方向から振幅 h_{ij} をもった重力波がやって来た時のテストマスの応答を考える。

重力波がテストマス（重力波の影響を受ける物体）に及ぼす力は、式 2.47 より

$$F^i dV = \frac{\rho}{2} \ddot{h}_{ij} \xi^j dV \quad (3.1)$$

と書ける．ここで、 ρ はテストマスの密度、 ξ^i は微小体積 dV の位置である．この時テストマスに蓄えられるエネルギーは

$$U = - \int \int F^i dV d\xi_i = -\frac{1}{4} \rho \ddot{h}_{ij} \xi^i \xi^j dV \quad (3.2)$$

$$= \frac{\ddot{h}_{ij}}{4} \int \rho \xi^i \xi^j dV \quad (3.3)$$

となる．ただし、テストマスの長さは重力波に対して十分に短いとし、 h_{ij} は距離に依らないものとした．従って、テストマスにかかる潮汐力は

$$F_{gw} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{1}{4} \ddot{h}_{ij} q^{ij} \quad (3.4)$$

となる．但し、 θ はねじれ振り子の z 軸回りの回転角、 q^{ij} はテストマスの四重極モーメントで、

$$q^{ij} = \int \rho \left(\xi^i w^j + \xi^j w^i - \frac{2}{3} \delta^{ij} \xi^k w_k \right) dV \quad (3.5)$$

で定義される． w^i モード関数であるが、回転の場合

$$w^i = (-y, x, 0) \quad (3.6)$$

で与えられ、

$$q_+ = q_{11} = -q_{22} = \int \rho (2xy) dV \quad (3.7)$$

$$q_\times = q_{12} = q_{21} = - \int \rho (x^2 - y^2) dV \quad (3.8)$$

となる．

以上より、テストマスの z 軸を回転軸とした回転方向の運動方程式は

$$I \ddot{\theta}(t) + \gamma \dot{\theta}(t) + \kappa \theta(t) = \frac{1}{4} \ddot{h}_{ij} q^{ij} \quad (3.9)$$

となる．ここで、 I はテストマスの慣性モーメント、 γ と κ はそれぞれ回転方向の散逸とバネ定数を表し、 ϕ は内部摩擦による loss angle である．

3.1.2 周波数応答

ここでは、ねじれ振り子の重力波に対する周波数応答を考える．今、

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

の振幅を持った重力波がねじれ振り子に入射したとすると、式 3.9 より、ねじれ振り子の角度変動は周波数領域で

$$-\omega^2 I \tilde{\theta}(\omega) + i\omega \gamma \tilde{\theta}(\omega) + \kappa(1 + i\phi) \tilde{\theta}(\omega) = -\frac{1}{2} \omega^2 (h_+ q_+ + h_\times q_\times) \quad (3.11)$$

となる．従って，

$$\tilde{\theta}(\omega) = \sum_{A=+, \times} H_A(\omega) \tilde{h}_A \quad (3.12)$$

$$H_A(\omega) = \frac{q_A}{2I} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2(1 + i\phi) + i\omega\gamma/I} \quad (3.13)$$

と書ける．ここで， $f_0 = \omega_0/2\pi = \sqrt{|\kappa|/I}/2\pi$ を振り子の回転方向の共振角周波数とした．この $H_A(\omega)$ が重力波からテストマスの回転への伝達関数である．

更に，半径 r ，長さ l ，重さ M の一様な円柱状テストマスが x 軸上に置かれていた時， $r \ll l$ とすると，

$$q_+ = 0 \quad (3.14)$$

$$q_\times = \frac{1}{24} M (4l^2 - 3r^2) \simeq \frac{1}{6} M l^2 \quad (3.15)$$

$$I = \frac{1}{12} M (3r^2 + l^2) \simeq \frac{1}{12} M l^2 \quad (3.16)$$

なので，

$$F_{\text{GW}} = \frac{q_\times}{2} \ddot{h}_\times \quad (3.17)$$

$$H_+ = 0 \quad (3.18)$$

$$H_\times(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2(1 + i\phi) + i\omega\gamma/I} \quad (3.19)$$

となる．つまり， x 軸上にテストマスが乗っているとき， \times mode の重力波にのみ感度を持つ事となる．更に， $H(\omega)$ は回転方向の共振周波数より十分高い周波数帯で大きくなり，

$$H_\times \simeq \frac{1}{2} \quad (3.20)$$

となる．振り子の共振周波数より大きい周波数帯で良い感度を持つという点ではレーザー干渉計型重力波検出器と同様である．しかし，並進方向の共振周波数は数 Hz までしか低くする事が出来ないのに対し，回転方向の共振周波数は数 mHz のオーダーまで低くする事が可能である点が異なる．これにより，ねじれ振り子型重力波検出器では，地上での観測にも関わらず 0.1 – 1 Hz の低周波数帯に良い感度を持つ事が出来るのである．

3.1.3 Pattern function

Pattern function とは，検出器への重力波の入射角に対する依存性を表す関数である．ここでは，ねじれ振り子型重力波検出器の場合の pattern function を求める．

極座標系で $\mathbf{n} = (1, \theta, \phi)$ の方向から重力波 $h_{ij}(t)$ が入射すると，検出器で検出される重力波振幅 $h(t)$ は，detector tensor D_{ij} を用いて

$$h(t) = \sum_{A=+, \times} D^{ij} e_{ij}^A(\hat{\mathbf{n}}) h_A(t) \quad (3.21)$$

と書ける．pattern function は

$$F_A(\mathbf{n}) \equiv D^{ij} e_{ij}^A(\hat{\mathbf{n}}) \quad (3.22)$$

で定義されるため，式 3.21 は

$$h(t) = F_+(\theta, \phi) h_+(t) + F_\times(\theta, \phi) h_\times(t) \quad (3.23)$$

となる。

では、ねじれ振り子の場合に pattern function がどのように書けるかを、実験室系での h_{xy}, h_{yx} が重力波から見た h_+, h_\times を用いてどのように書けるのかを導出する事で求めたい。まず、ねじれ振り子の場合、detector tensor は $n = (1, 0, 0)$ の時は式 3.17 のように書ける事から、

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (u_i v_j + v_i u_j) \quad (3.24)$$

となる。ここで、 u はテストマスの円筒方向 (図 3.2 では x 軸方向)、 v はテストマスの回転平面上の u と垂直なベクトルである。

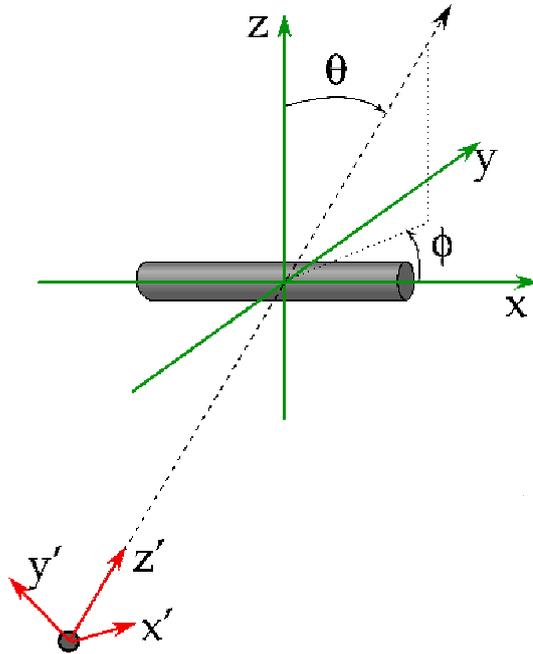


図 3.2: 重力波の入射方向とねじれ振り子

図 3.2 のように座標系をとり、 $n = (1, \theta, \phi)$ の方向からやってくる重力波を考える。 n を z' 軸とした座標系を (x', y', z') とおき、この座標系から見た重力波を

$$h'_{ij} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

とする。これを実験室系 (proper antenna frame) (x, y, z) に、回転行列

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

を用いて変換する。2 次のテンソルの場合の回転は、 $h_{ij} = R_{ik} R_{jl} h'_{kl}$ によって座標変換できるので、

$$h_{xy} = h_{yx} = -\frac{1}{2} (\cos \phi \sin \phi \cos^2 \theta - \sin \phi \cos \phi) h_+ + (\cos^2 \phi \cos \theta - \sin^2 \phi \cos \theta) \quad (3.27)$$

より

$$\frac{1}{2}(h_{xy} + h_{yx}) = -\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \sin 2\phi h_+ + \cos 2\phi \cos \theta h_\times \quad (3.28)$$

となる．従って，式 3.23 より

$$F_+(\theta, \phi) = -\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \sin 2\phi \quad (3.29)$$

$$F_\times(\theta, \phi) = \cos 2\phi \cos \theta \quad (3.30)$$

となる事がわかる．この pattern function はマイケルソン干渉計の pattern function と全く同等のものである．

3.2 雑音源

ここでは，ねじれ振り子型重力波検出器において原理的に問題となるノイズについて議論する．共振型重力波検出器の研究から，ねじれ振り子の感度は主に熱雑音で制限されると知られている．熱雑音は，懸架系の機械的損失と，テストマス自体の内部摩擦による機械的損失の2つに起因するものがある．懸架系の損失はダンピング係数 γ で，テストマスの内部摩擦は loss angle ϕ に依存する．

ここでは，揺動散逸定理を用いてそれぞれの熱雑音を導出する．テストマスの運動方程式は 3.9 と同様に

$$[-I(2\pi f)^2 + i\gamma(2\pi f) + \kappa^2(1 + i\phi)] \tilde{\theta} = \tilde{N} \quad (3.31)$$

と書ける．ここ \tilde{N} はテストマスにかかるトルクで，重力波によるトルクその他，熱雑音によるトルク $\tilde{N}_{\text{thermal}}$ も含まれる．

$\gamma > 0, \phi = 0$ の場合，熱雑音 $\tilde{N}_{\text{thermal}}$ は，ボルツマン定数 k_B を用いて

$$\tilde{N}_{\text{thermal}}(f) = \sqrt{4k_B T \gamma} \quad (3.32)$$

と書ける．これは速度に比例した項から導出されるので，viscous damping と呼ばれている．一方 $\gamma = 0, \phi > 0$ の場合，

$$\tilde{N}_{\text{thermal}}(f) = \sqrt{4k_B T \frac{\phi \kappa^2}{2\pi f I}} \quad (3.33)$$

となる．この項は viscous damping に対して structure damping と呼ばれている．

熱雑音を重力波の感度と比較するため，重力波振幅 $\tilde{h}_n(f)$ に換算すると，

$$\tilde{h}_n(f) = \frac{2}{(2\pi f)^2 q_+} \tilde{N}_{\text{thermal}}(f) \quad (3.34)$$

より，viscous damping は

$$\tilde{h}_n(f) = \frac{2}{(2\pi f)^2 q_+} \sqrt{4k_B T \gamma}, \quad (3.35)$$

structure damping は

$$\tilde{h}_n(f) = \frac{2}{(2\pi f)^{5/2} q_+} \sqrt{4k_B T \frac{\phi \kappa^2}{I}} \quad (3.36)$$

となる．

つまり，熱雑音を下げるには， γ や ϕ を下げる，もしくは T を下げる事が重要となる事がわかる．

3.3 Torsion-bar Antenna (TOBA)

現在，以上で述べたねじれ振り子を用いて，新型の重力波検出器 Torsion-bar Antenna (TOBA) の開発が進められている．この計画の最終段階では，長い腕を持つねじれ振り子を用いて回転読み取り精度を向上させ，低温化する事で熱雑音を下げるなどの工夫が施される予定である．

感度の例として，表 3.1 のパラメータを用いた時に得られると期待される感度曲線を図 3.3 に示した [3] ．

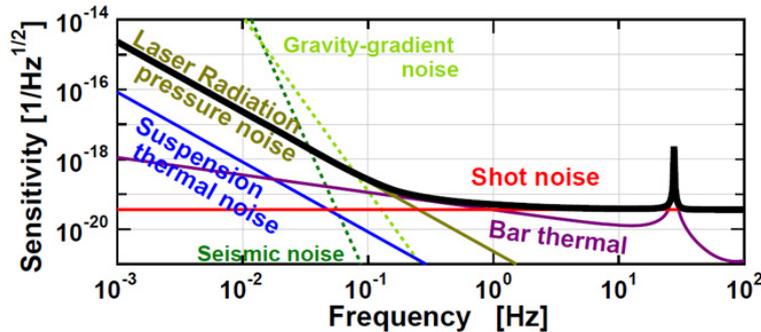


図 3.3: 大型 TOBA の感度曲線の例．黒のふと線がトータルの感度を示している．

物理量	値
振り子の腕の長さ	10 m
テストマスの重量	7600 kg
loss angle (ϕ)	10^{-7}
テストマス及び懸架系の温度 (T)	4 K
ダンピング係数 (γ)	10^{-10} Nms
慣性モーメント (I)	6.4×10^4 Nms ²
共振周波数 (f_0)	1 mHz

表 3.1: 大型 TOBA のパラメータの例

この TOBA を用いれば， $10^5 M_\odot$ 程度の質量をもつ中間質量ブラックホール合体が，約 10^4 Mpc 先まで観測可能となる．これは巨大ブラックホール誕生の謎の解明など，銀河形成理論の発展に貢献できると考えられている．更に，TOBA2 台を用いて 1 年間同時観測を行えば，1.0 Hz 程度の低周波数帯で，背景重力波に対し理論的制限を超える上限値を与える事ができる．また，LCGT や LIGO などといった高周波数帯を狙うレーザー干渉計型重力波検出器との相補的な観測や，LISA や DECIGO などといった同じ周波数帯を狙う宇宙間重力波望遠鏡へのサイエンス的なフィードバックなども期待できる．

3.4 プロトタイプ TOBA

この節では，prototype TOBA の実験装置について説明する．TOBA の基本的な設計は安東氏，石徹白氏によって行われた [4][6] ．

prototype TOBA では、腕の長さが 20 cm、重さ約 130 g の小型ねじれ振り子をテストマスとして使用している。テストマスの写真は図 3.4 の様になっている。

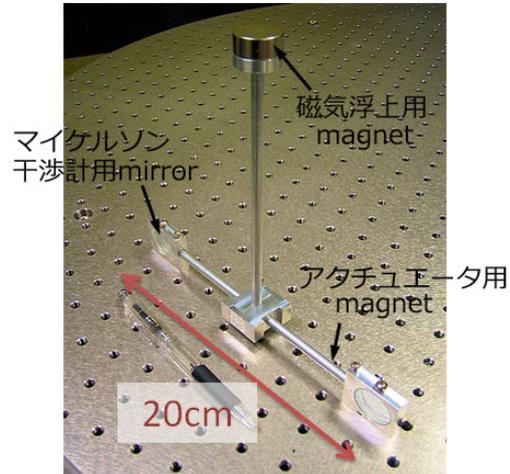


図 3.4: prototype TOBA で使用したテストマス

また、装置全体の概念図は図 3.5 に示した。

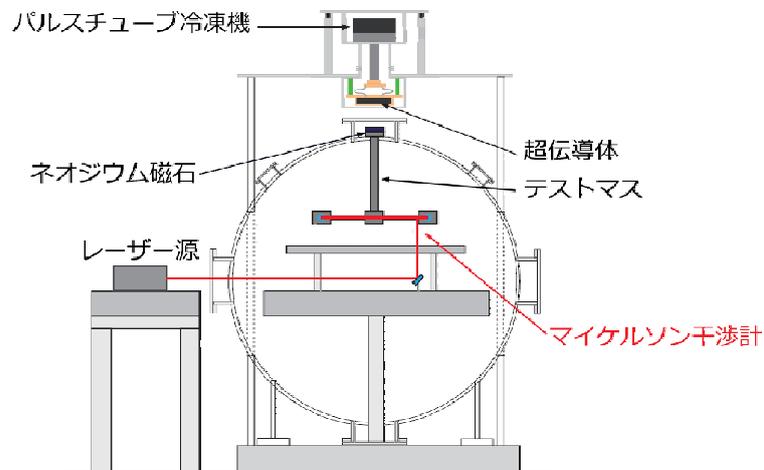


図 3.5: prototype TOBA の装置全体の概念図

真空タンク上部には超伝導体が設置されている。この超伝導体とテストマスの上部に設置された磁石の間でピン止め効果を用いる事でテストマスを浮上させ、回転方向に散逸の少ない懸架を実現している。以下では、この超伝導磁気浮上をはじめ、動作原理や回転の読み取り方法などについて説明する。

3.4.1 超伝導を用いた磁気浮上

超伝導を用いた磁気浮上は、ねじれ振り子型重力波検出器が回転方向の変動を読みとるという特色を活かした特徴的な技術である。ピン止め効果とマイスナー効果により一定の高さでテストマスを上昇させる事ができ、同時に、回転方向の散逸の少ない系を実現している。これには幾つかの利点が存在する。

まずは、ダンピング係数 γ や散逸項 κ を殆ど 0 に出来るという点である。これにより、懸架に起因する熱雑音を抑える事が出来る用になるだけでなく、共振周波数も十分下げる事が可能となる。

このように小さな γ や κ を保ったままでも、大きな浮上力を発揮できるという点も超伝導磁気浮上の大きな特色である。通常のワイヤー懸架においては、 γ や κ を小さくするには細くやわらかいワイヤーを使用しなければならない。しかし、将来的にテストマスを巨大化させた場合、細いワイヤーで巨大なテストマスを吊るすのは困難である。そこで、超伝導磁気浮上のような強い浮上力を持った懸架方法は有利となる。

一方で、磁気浮上における欠点としては、周囲の磁場とのカップリングによる雑音が生じる点がある [5]。この磁場ノイズは主に 0.1 Hz 以下の低周波において感度を制限している。

3.4.2 フィードバック制御

重力波検出器では、重力波から変位への応答を線形に保つため、テストマスの位置をフィードバック制御によって固定している。この時、テストマスを固定する為にフィードバックする力の大きさを見る事で重力波振幅 $h(t)$ を測定する仕組みになっている。

フィードバック制御システム

このプロトタイプ TOBA での制御ループのブロックダイアグラムは図 3.6 の様になっている。

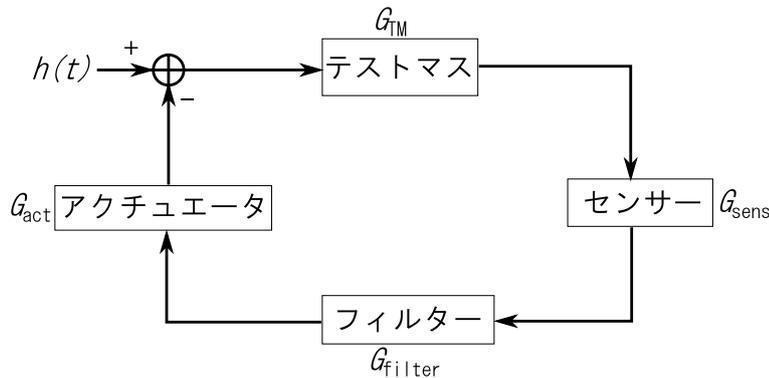


図 3.6: プロトタイプ TOBA の制御ループ

ここでのオープンループ伝達関数 G は

$$G(f) = G_{\text{TM}}(f)G_{\text{sens}}(f)G_{\text{filter}}(f)G_{\text{act}}(f) \quad (3.37)$$

といったように、フィードバックループに含まれる要素の伝達関数の積で書く事ができる。

この時重力波による力はテストマスの直前に混入するため，制御中のフィードバック信号 s_{FB} ，もしくはエラー信号 s_{ER} を用いて

$$\tilde{h}(f) = \frac{1}{1+G(f)} \frac{1}{G_{sens}(f)G_{filter}(f)} \tilde{s}_{FB}(f) = \frac{1}{1+G(f)} \frac{1}{2} G_{sens}(f) \tilde{s}_{ER}(f) \quad (3.38)$$

として重力波振幅を換算する事ができる．

3.4.3 回転読み取り系

テストマスの回転は，フォトセンサーとレーザー干渉計を用いて行われる．

レーザー干渉計はセンサー感度が高い為，重力波観測を観測する際に用いられる．しかし，レーザー干渉計は良い感度を持つダイナミックレンジが狭く，初めからレーザー干渉計を用いてテストマスを制御するのは難しい．そこで，ダイナミックレンジの広いフォトセンサーを用いて，レーザー干渉計での制御点付近まで予備的に制御を行い，その状態から回転モニターをレーザー干渉計に切り替えるのである．

フォトセンサーとレーザー干渉計の配置を図 3.7 に示した．

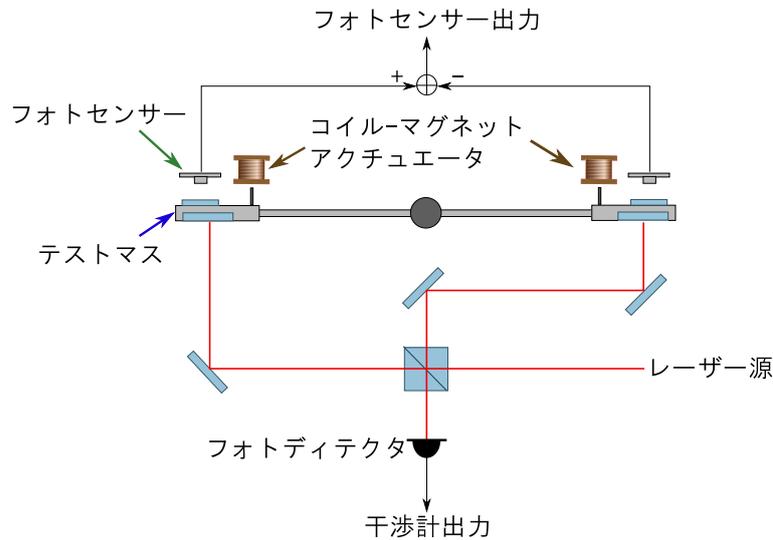


図 3.7: フォトセンサーとレーザー干渉計の，テストマスに対する配置

フォトセンサー

フォトセンサー (PS) は，光を発する LED と，鏡からの反射光をとらえるフォトディテクター (PD) からなる距離センサーである．PS の出力と，鏡までの距離の関係は図 3.8 の様になっている．

実際の制御では PS と鏡の距離がおよそ 8mm となる点で制御を行っている為，PS のゲインは

$$G_{PS} = 0.2[\text{V}/\text{mm}] \quad (3.39)$$

を用いている．

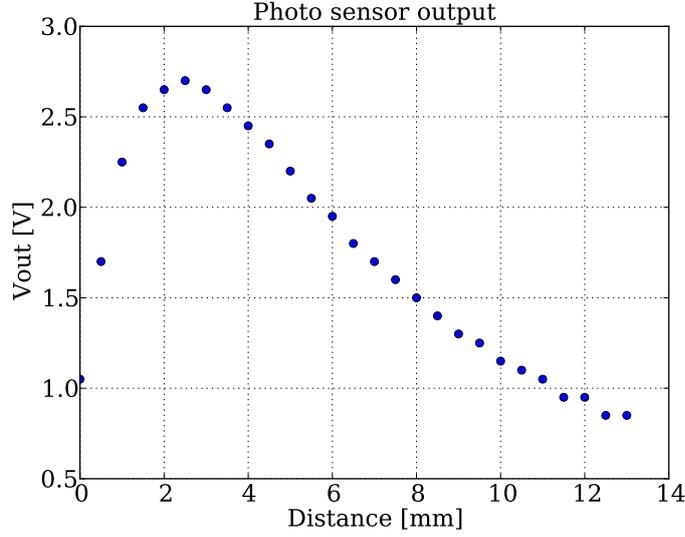


図 3.8: フォトセンサーの較正

レーザー干渉計

今、使用するレーザーの角振動数を Ω とすると、入射するレーザーの電磁場は

$$E_{\text{in}} = E_0 e^{i\Omega t} \quad (3.40)$$

と書ける．ここで、入射レーザーのパワーは $P_{\text{in}} = |E_0|^2$ で書ける．入射したレーザーはビームスプリッターで2つの腕に分けられ、テストマスの両端に設置された鏡へと向かう．それぞれの鏡で反射された光はビームスプリッターで再結合され、PD でその干渉縞をモニターする．図 3.7 のビームスプリッターから左側の鏡までの距離を ξ_1 、ビームスプリッターから右側の鏡までの距離を ξ_2 、波長を λ とすると、PD に入射する光の強度は

$$\begin{aligned} P_{\text{PD}} &= |E_{\text{PD}}|^2 \\ &= \left| E_1 e^{i(\Omega t - 4\pi\xi_1/\lambda)} - E_2 e^{i(\Omega t - 4\pi\xi_2/\lambda)} \right|^2 \\ &= \frac{P_{\text{max}} + P_{\text{min}}}{2} + \frac{P_{\text{max}} - P_{\text{min}}}{2} \cos(4\pi\Delta\xi/\lambda) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$P_{\text{max}} = (E_1 + E_2)^2 \quad (3.42)$$

$$P_{\text{min}} = (E_1 - E_2)^2 \quad (3.43)$$

となる．ただし、 $\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1$ であり、テストマスが左回りに $\Delta\theta$ だけ回転した時、 $\Delta\xi = l\Delta\theta$ となる．ここで l はテストマスの長さ（左と右のミラー間の距離）である． $\Delta\xi$ が十分小さい時、

$$\frac{\partial P_{\text{PD}}}{\partial \Delta\xi} \simeq (P_{\text{max}} - P_{\text{min}}) \frac{2\pi\Delta\xi}{\lambda} \quad (3.44)$$

より、

$$P_{\text{PD}} = \frac{P_{\text{max}} + P_{\text{min}}}{2} + (P_{\text{max}} - P_{\text{min}}) \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\xi \quad (3.45)$$

となり，レーザー干渉計の伝達関数は

$$G_{\text{IF}} = (P_{\text{max}} - P_{\text{min}}) \frac{2\pi}{\lambda} [\text{m/V}] = (P_{\text{max}} - P_{\text{min}}) \frac{2\pi l}{\lambda} [\text{rad/V}] \quad (3.46)$$

で表される．

3.4.4 アクチュエータ

プロトタイプ TOBA のアクチュエータには，コイル-マグネット アクチュエータが使用されている．テストマス側に太さ $\phi = 1\text{mm}$ のマグネットを接着し，光学台の上にコイルを設置する．このコイルにフィードバック信号に対応した電流を流し，電流が作る磁場とマグネットの磁場の相互作用によって，テストマスの制御を行っている．

このアクチュエータは線形性が良い，力が強いなどといった利点がある一方，磁場雑音と制御対象物（テストマス）に接着されたマグネットがカップリングし，テストマスに雑音を導入する原因ともなる．特にねじれ振り子の様な磁場雑音が感度を制限するような重力波検出器では，大きな問題となる．

3.4.5 感度

プロトタイプ TOBA で得られた最高感度は図 3.9 のようになっている [4]．

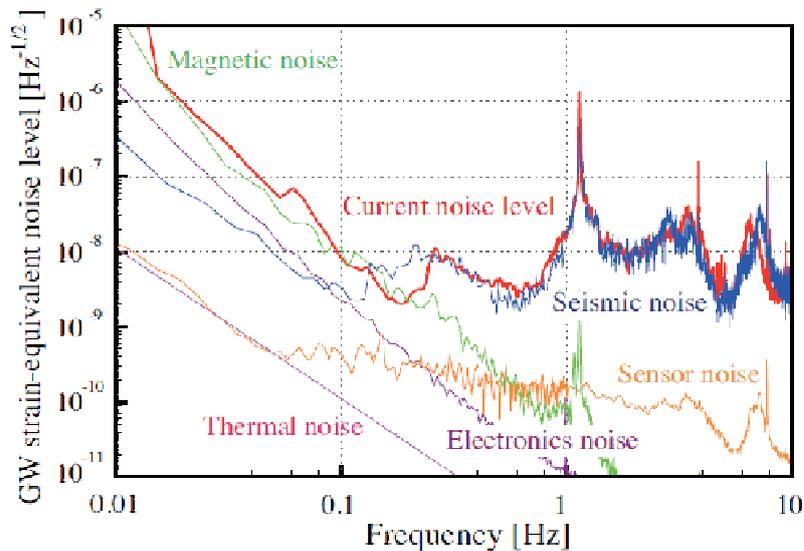


図 3.9: TOBA で得られた最高感度

この感度は，1 Hz 以下では環境磁場雑音とのカップリングで制限され，1 Hz 以上では地面振動によって制限されている．

第4章 同時観測

背景重力波は、宇宙誕生直後の空間の相転移などによって生じた重力波と、イベント毎に分離出来ない小さな振幅を持つ重力波の重ね合わせである。宇宙論的起源の背景重力波はビッグバンの直後の宇宙の情報を持ち、宇宙論の進展に大きく貢献できる非常に興味深い重力波源である。この重力波の振幅は、周波数が低い程大きくなる（重力波振幅が $f^{3/2}$ に比例する）ので、低周波における重力波の直接観測実験が重要になってくる。

3章で見たように、現在、プロトタイプ TOBA は 0.1 – 1.0 Hz の低周波数帯において、世界で最も良い感度を持つ重力波検出器である。これまでに、石徹白氏によってプロトタイプ TOBA 1 台を用いた時の重力波観測は行われており、0.2 Hz の背景重力波に対して世界で初めての上限值が設けられた [6]。しかし、重力波検出器 1 台のみでは、背景重力波を検出する事が非常に難しい。というのも、背景重力波の波形は予測不可能であり、基本的にはガウシアンのような様相を見せると考えられているため、ノイズとの判別が難しいのである。検出器 1 台で背景重力波を検出する為には、全てのノイズの寄与を考慮し、それでもノイズではない信号が乗っているという事を確かめなければならない。そこで、効率的に背景重力波検出を検出する方法として、2 台以上の検出器の同時観測データを用いた相関解析が用いられる。相関解析とは、同じ時間に得られた観測データの相関をとる事で、2 つの検出器に同様に影響を及ぼした重力波の信号を効率的に拾い出す事ができるものである。

今回我々は、プロトタイプ TOBA を用いて、背景重力波を観測ターゲットとし、同時観測及び相関解析を行った。この章では、同時観測の概要と、観測データのデータクオリティについて説明する。

4.1 東京・京都における同時観測

プロトタイプが設置されている場所は、東京大学（本郷キャンパス）と、京都大学（吉田キャンパス）の 2 箇所である。我々はこの 2 台を用いて 2011 年 10 月 29 日 21:37 – 翌 7:34 の約 10 時間、同時観測を行った。

東京大学内の TOBA の位置は北緯 35.71° 、東経 139.76° 、京都大学内の TOBA の位置は北緯 35.03° 、東経 135.78° である。この 2 地点の距離は約 370 km である。また、2 つのテストマスは双方とも南北の方向に向いており、重力波に対する応答はほぼ等しくなっている¹。

本観測の信号取得にはデータロガーを用い、500 Hz サンプリングでデータを記録した。記録した信号は、エラー信号やフィードバック信号、時刻合わせに用いる GPS 信号、環境モニター信号である。

GPS 信号には、時刻情報を表すシリアル信号と、1 秒に 1 回パルスが立ちあがる 1pps 信号がある。シリアル信号は高周波サンプリングで記録しないと正しい情報が得られないため、本観測中は取得しない。ただし、観測の直前と直後にシリアル信号を取得し、データロガーの時刻を合わせている。本観測中は 1pps 信号のみを取得し、時刻合わせを行っている。

また、環境モニターとして、レーザーの強度、真空度、地面振動、環境磁場などを同時にモニターしている。

¹詳細は 5 章、もしくは補遺 C を参照の事。

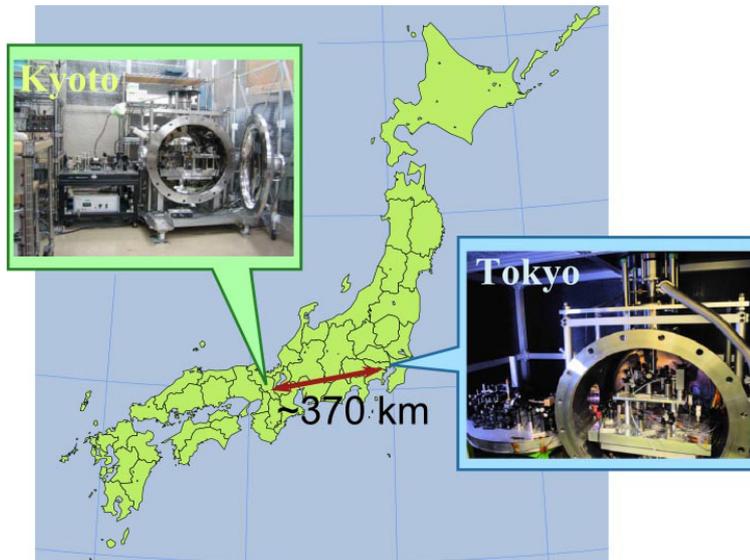


図 4.1: 東京と京都における同時観測

4.2 観測データ

4.2.1 時系列データ

観測時間帯の時系列データは図 4.2 に示す通りである。

これより、目に見えて大きなグリッジ（パルス状のノイズ）は存在せず、10 時間の間は安定に観測運転が出来ている事が確認できる。

4.2.2 ノイズレベル

東京、京都における全観測時間での重力波振幅等価雑音（Strain）を重ねて表示したのが、それぞれ図 4.3, 4.4 である。1 つの strain を算出するのに、200sec の時間幅でフーリエ変換（FFT）を行っており、太線は全 strain の平均値である。これより、京都ではほとんど定常的なノイズレベルが維持できているのが確認できるが、東京での観測レベルでは、何度かノイズレベルが極端に大きくなる時間帯が存在する事が見てとれる。

また、東京と京都でのそれぞれの全スペクトルの平均値を比較したのが図 4.5 である。これより、京都のノイズレベルの方が 2 倍程良くなっている事がわかる。但し、東京の観測データの中には明らかに重力波信号ではない雑音信号によってスペクトルの値が大きくなっている時間帯があるため、データの選定を行う必要があると考えられる。

また、ノイズレベルの時間変動の指標として、0.03 Hz, 0.1 Hz, 0.3 Hz における strain の値の時間変動を示したものが図 4.6, 4.7, スペクトログラムが図 4.8 ~ 4.11 である。スペクトログラムの単位は Strain $[1/\text{Hz}^{1/2}]$ である。

これらを見ても、京都の観測データはほぼ安定である事がわかる。一方東京の観測データには、短時間だけノイズレベルが悪化する時間帯が何度かある事がわかる。また、東京のデータの中でも 0.3 Hz でのノイズレベルは観測時間全体でほぼ一定であるのに対し、0.03 Hz と 0.1 Hz のノイズレベルは、4:00 am - 6:30 am の時間帯で若干の改善が見られる。これは、この時間帯に電車が運行していないなどと

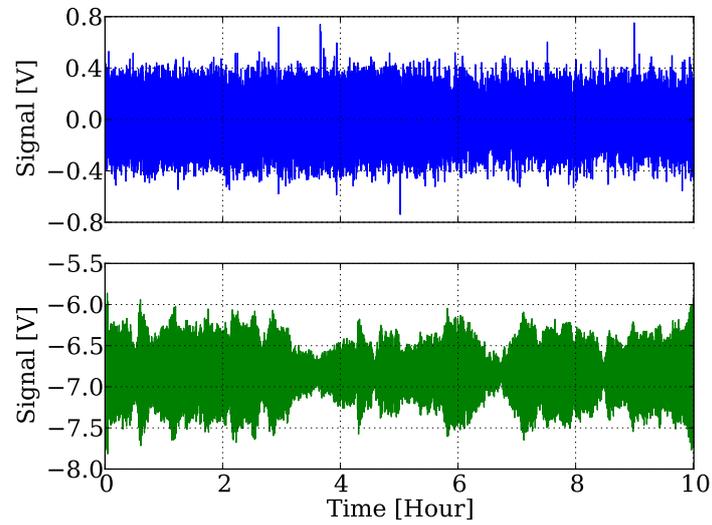


図 4.2: 時系列データ．上図の青線が東京のフィードバック信号，下図の緑線が京都のフィードバック信号である．

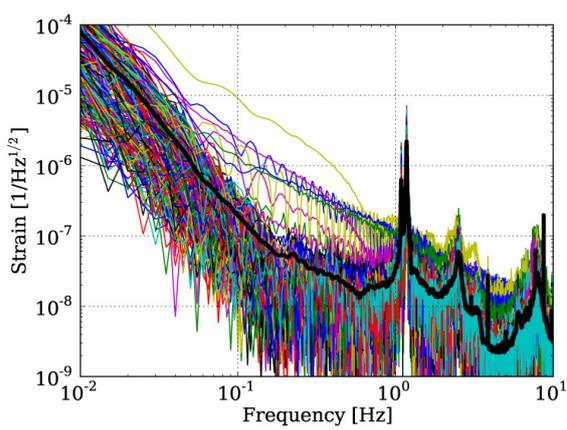


図 4.3: 東京でのノイズスペクトル．黒い太線は全時間平均

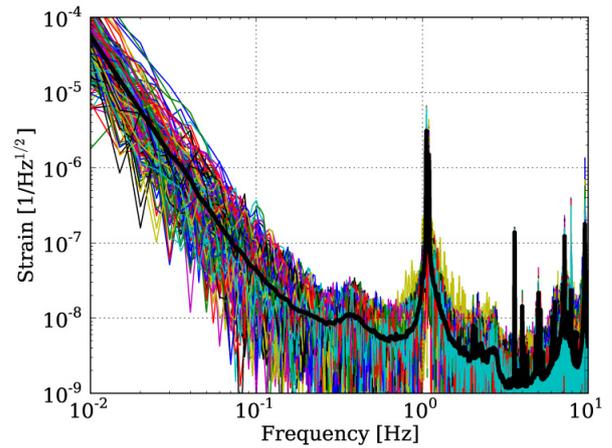


図 4.4: 京都でのノイズスペクトル．黒い太線は全時間平均

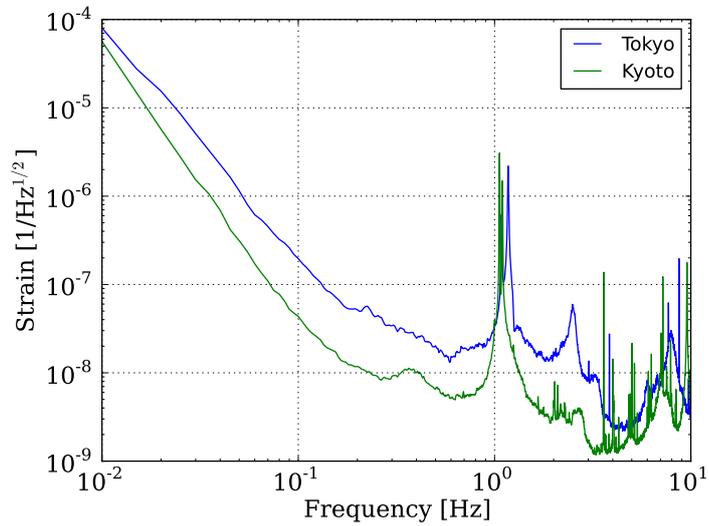


図 4.5: ノイズスペクトルの全時間平均．青線が東京，緑線が京都のデータである．

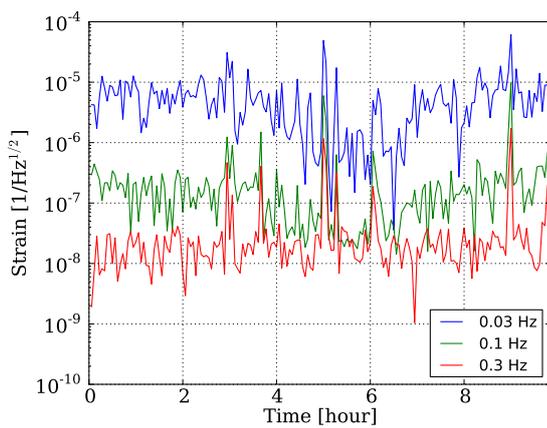


図 4.6: 東京のデータのノイズの時間推移

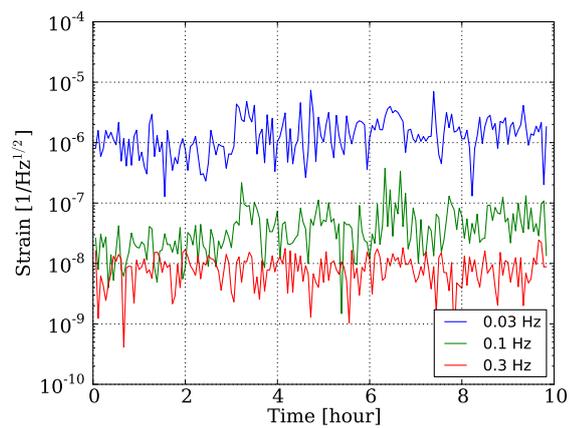


図 4.7: 京都のデータのノイズの時間推移

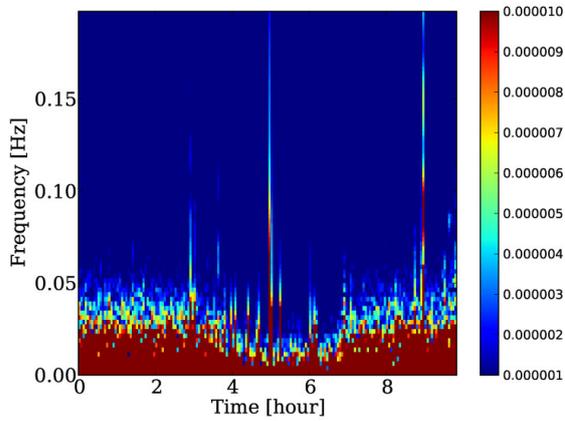


図 4.8: DC - 0.2 Hz における東京のデータのスペクトログラム

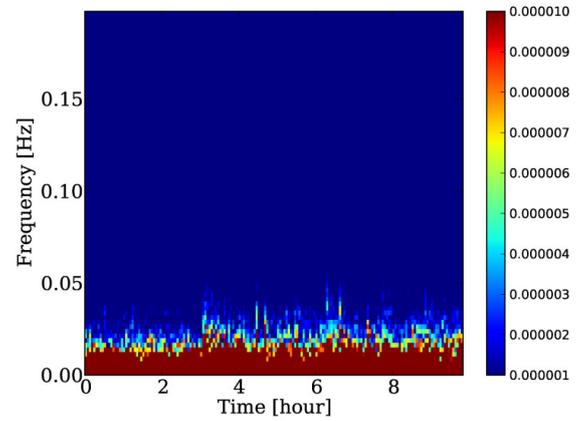


図 4.9: DC - 0.2 Hz における京都のデータのスペクトログラム

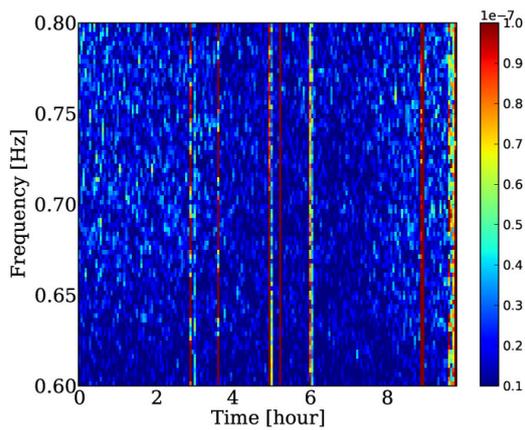


図 4.10: 0.6 - 0.8 Hz における東京のデータのスペクトログラム

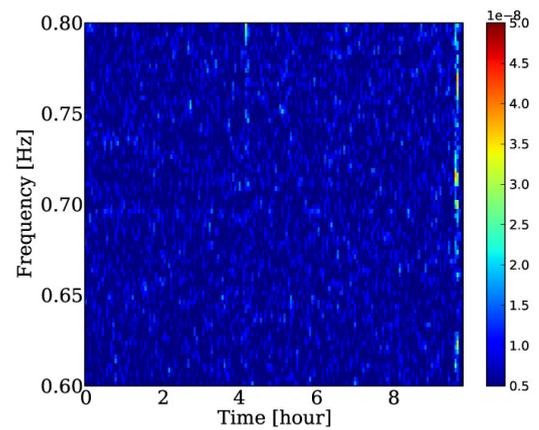


図 4.11: 0.6 - 0.8 Hz における京都のデータのスペクトログラム

いった理由で環境磁場ノイズが低減したためではないかと考えられる。一方京都では、周辺を通る電車が少ない為、この影響は受けていないものと考えられる。

第5章 背景重力波探査

前述の同時観測のデータを用い、背景重力波をターゲットに相関解析を行った。相関解析とは、効率的に重力波信号を検出する解析手法のひとつである。この章では、相関解析の理論と、実際の信号処理の手法を説明した後、解析結果について述べる。

5.1 背景重力波

5.1.1 背景重力波のスペクトル

背景重力波は、宇宙論的な起源の重力波と、天文学的な起源の重力波の重ね合わせで表される。背景重力波の波形は予想する事ができないが、背景重力波に対して幾つかの仮定を置く事とする。ここでは、

- 平均振幅は一定である
- 無偏波である
- 等方である。
- 波形はほぼガウシアンである

を仮定とした。

では、背景重力波の振幅はどのように表されるのであろうか。背景重力波の power spectrum density (PSD) $S_{\text{gw}}(f)$ は、

$$\langle \tilde{h}_A^*(f, \hat{n}) \tilde{h}'_A(f', \hat{n}') \rangle = \delta(f - f') \frac{\delta^2(\hat{n}, \hat{n}')}{4\pi} \delta_{AA'} \frac{1}{2} S_{\text{gw}}(f) \quad (5.1)$$

で定義される。但し、この PSD は片側 PSD であり、 $S_{\text{gw}}(f) = S_{\text{gw}}(-f)$ を満たす事に注意されたい。この背景重力波の大きさを特徴づけるパラメータとして、

$$\Omega_{\text{gw}}(f) = \frac{f}{\rho_c} \frac{d\rho_{\text{gw}}}{df} \quad (5.2)$$

を用いる。ここで、 ρ_c は宇宙の臨界エネルギー密度

$$\rho_c = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}, \quad (5.3)$$

ρ_{gw} は重力波のエネルギー密度

$$\rho_{\text{gw}} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij} \dot{h}^{ij} \rangle \quad (5.4)$$

である。この Ω_{gw} を用いれば、背景重力波の PSD は

$$S_{\text{gw}}(f) = \frac{3H_0^2}{4\pi^2} f^{-3} \Omega_{\text{gw}}(f) \quad (5.5)$$

と書ける。ただし、 H_0 はハッブル定数であり、今回は $H_0 = 72$ [km/sec/Mpc] の値を用いた [17]。

これを観測データと比較する為, strain 振幅に書きなおすと,

$$S_{\text{gw}}^{1/2}(f) = 8.9 \times 10^{-19} h_0 \sqrt{\Omega_0} \left(\frac{1\text{Hz}}{f} \right)^{3/2} \text{Hz}^{1/2} \quad (5.6)$$

となる. ただし, 解析周波数帯は十分狭く $\Omega_{\text{gw}}(f)$ に周波数依存性はないと仮定し,

$$\Omega_{\text{gw}}(f) = \Omega_0 = \text{const.} \quad (5.7)$$

とした. また, h_0 は規格化されたハッブル定数

$$h_0 = \frac{H_0}{100 \text{ km/sec/Mpc}} \quad (5.8)$$

である. これを今回の観測データと比較すれば, 図 5.1 のようになる. これより, この感度の TOBA 1 台での観測では, $h_0^2 \Omega_0 = 1 \times 10^{18}$ のオーダーでしか上限値を与えられない事がわかる.

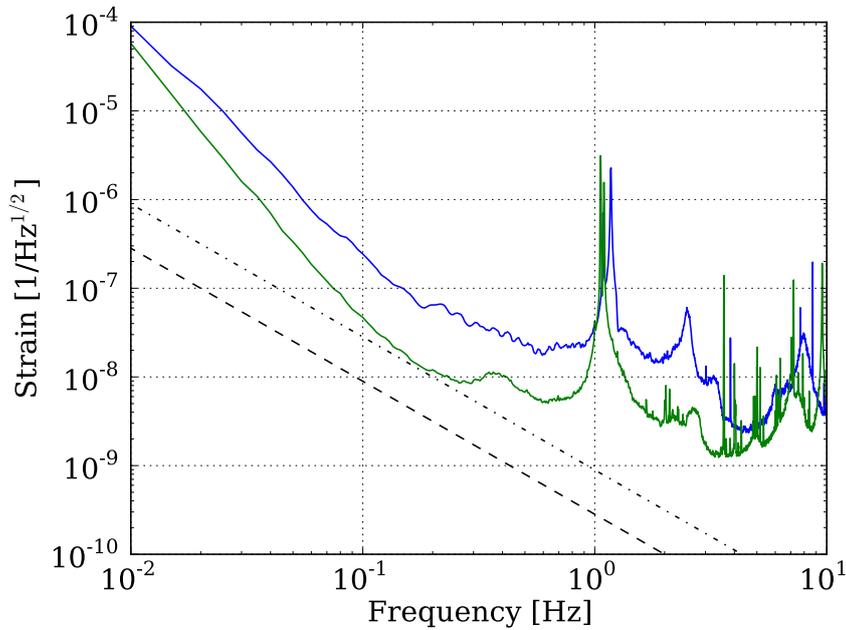


図 5.1: 観測データと背景重力波振幅との比較. 破線が $h_0^2 \Omega_0 = 1 \times 10^{17}$ の時の, 鎖線が $h_0^2 \Omega_0 = 1 \times 10^{18}$ の時の平均背景重力波振幅

背景重力波探査では, このパラメータ $h_0^2 \Omega_0$ の値を求める, もしくはその上限値を設定する事を目標とする.

5.1.2 過去の観測と理論的上限值

ここでは, 理論的に求められる $h_0^2 \Omega_0$ への上限值, 及び過去に行われた背景重力波探査とその結果について紹介する.

理論的上限值 (BBN)

宇宙初期、ビッグバンにおける核合成 (Big Bang Nucleosynthesis) によって、宇宙に軽い元素 (^3He や ^4He) が大量につくられた。ここで生成された軽い元素の量から鑑みれば、エネルギー保存の観点より背景重力波に制限を付ける事ができる [18]。その上限値は

$$h_0^2 \int d(\ln f) \Omega_{\text{gw}}(f) < 5 \times 10^{-6} \quad (5.9)$$

となる。この理論では全周波数帯の積分値しか予言する事は出来ず、 $\Omega_{\text{gw}}(f)$ の周波数依存性を予言する事はできない。また、ここでは天文学的起源のビッグバンの後に作られた背景重力波は考慮に入っていないため、この上限値を上回る背景重力波が存在する可能性もある。

CMB

宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の観測からも、背景重力波に対して制限をつける事ができる。宇宙初期に発生した背景重力波が存在すると、CMB の光子に対し、ランダムな赤方偏移を与える。この効果を考慮して導かれた上限値は

$$h_0^2 \Omega_{\text{gw}} < 10^{-13} \left(\frac{19^{-16\text{Hz}}}{f} \right) \quad (3 \times 10^{-18} \text{ Hz} < f < 10^{-16} \text{ Hz}) \quad (5.10)$$

である [19]。

Pulsar timing

パルサータイミングは 2 章でも紹介した重力波検出方法の一種である。PSR B1855+09 の観測によって得られた上限値は

$$h_0^2 \Omega_{\text{gw}} < 4.8 \times 10^{-9} \left(\frac{f}{4.4 \times 10^{-9} \text{ Hz}} \right)^2 \quad (4.4 \times 10^{-9} \text{ Hz} < f <) \quad (5.11)$$

である [18]。

Doppler tracking

土星探査衛星 Cassini を用いてのドップラートラッキングでも、背景重力波に対する上限値が与えられている。この上限値は

$$h_0^2 \Omega_{\text{gw}}(f) < 0.025 \times 10^{-2} \quad (f = 1.2 \times 10^{-6} \text{ Hz}) \quad (5.12)$$

である [20]。

共振型重力波検出器

1994 年頃から、共振型重力波検出器を用いた背景重力波の探査も行われている。1999 年に行われた低温共振器 Explorer と Nautilus の同時観測では、重力波振幅 h にして

$$h < 2.5 \times 10^{-18}, \quad (5.13)$$

つまり,

$$h_0^2 \Omega_{\text{gw}}(f) < 1.5 \times 10^{10} \quad (f = 907\text{Hz}) \quad (5.14)$$

という上限値が与えられている [21].

レーザー干渉計

大型レーザー干渉計を用いた背景重力波探査では, LIGO と Virgo による同時観測によっても 100 Hz 付近に上限値が与えられている. この上限値は

$$h_0^2 \Omega_{\text{gw}}(f) < 3.4 \times 10^{-7} \quad (f \sim 100\text{Hz}) \quad (5.15)$$

である [22].

また, 共振器長が 75 cm の干渉計 2 台を用いて 100 MHz という高周波にも

$$h_0^2 \Omega_{\text{gw}}(f) < 6 \times 10^{25} \quad (f \sim 100\text{MHz}) \quad (5.16)$$

という上限値が設けられている [23].

TOBA

今回扱ったプロトタイプ TOBA 1 台による解析によっても, 背景重力波に対する上限値が与えられている. この上限値は

$$h_0^2 \Omega_{\text{gw}}(f) < 8.1 \times 10^{17} \quad (f = 0.2\text{Hz}) \quad (5.17)$$

である [6][4].

5.2 相関解析の原理

5.2.1 相関値 Y

相関解析では, 2 つの検出器から得られたデータの相関をとる. 重力波が存在するか否かを判断する信号は, この相関値であると考えられる. ここではまず, その相関値がどのような値になるかを導出する.

2 つの検出器で得られたデータを $s_i(t)$, ($i = 1, 2$) とすると, データには重力波信号 $h_i(t)$ とノイズ $n_i(t)$ が含まれており,

$$s_i(t) = h_i(t) + n_i(t) \quad (5.18)$$

とかける. ただし, ここで定義される重力波信号 $h_i(t)$ は式 3.23 で表されるものとする. ここで, 2 つの検出器の信号間で相関値は, 一般に

$$Y = \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int_{-T/2}^{T/2} dt_2 s_1(t_1) Q(t_1 - t_2) s_2(t_2) \quad (5.19)$$

と書ける. T は観測時間, $Q(t)$ は重みづけの実数関数である. この被積分関数をディラックのデルタ関数

$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i2\pi ft} dt = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \quad (5.20)$$

を用いてフーリエ変換すれば，

$$Y = \int_{-\infty}^{+\infty} df \int_{-\infty}^{+\infty} df' \int_{-\infty}^{+\infty} df'' \delta(f-f') \delta(f''-f') \tilde{s}_1^*(f) \tilde{Q}(f') \tilde{s}_2(f'') \quad (5.21)$$

$$\sim \int_{-\infty}^{+\infty} df \tilde{s}_1^*(f) \tilde{Q}(f) \tilde{s}_2(f) \quad (5.22)$$

となる．ただし， $Q(t)$ は t が大きいところで十分早く 0 に収束するよう設定し，観測時間 T は十分に長く $T/2 \rightarrow +\infty$ と近似できるとした．この Y が，相関解析で得られる信号である．

5.2.2 Optimal filter と Signal-to-noise ratio

この解析では，より効率的に重力波信号 Y を得る為に，重み付け関数 \tilde{Q} を signal-to-noise ratio (S/N) が最大となるように設定する．ここで signal-to-noise ratio のシグナル S は背景重力波が存在する時の Y のアンサンブル平均，ノイズ N は背景重力波が無い時の Y の root mean square (RMS) である．

この signal-to-noise ratio S/N を最大化する $\tilde{Q}(f)$ は，プロトタイプ TOBA の場合，

$$\tilde{Q}(f) = \mathcal{N} \frac{\gamma(f)}{f^3 S_{n,1}(f) S_{n,2}(f)} \quad (5.23)$$

と書ける．ここで $\Gamma(f)$ は overlap reduction function, $S_{n,i}(f)$ は i 番目の検出器のノイズの PSD である．この overlap reduction function は 2 つの検出器での重力波に対する応答の違いを表す関数であるが，詳細は補遺 C.2 に記した．また， \mathcal{N} は規格化定数で，

$$\mathcal{N} = \frac{20\pi^2}{3H_{100}^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} df \frac{\gamma^2(f)}{f^6 S_{n,1}(f) S_{n,2}(f)} \right]^{-1} \quad (5.24)$$

とすると，シグナルが $S = \langle Y \rangle = \Omega_0 h_0^2 T$ と書ける．この optimal filter の導出は，補遺 C を参照されたい．

また，この時の signal-to-noise ratio は

$$\frac{S}{N} = \left[\frac{8}{25} T \int_0^{+\infty} df \frac{\gamma^2(f) S_{\text{gw}}^2(f)}{S_{n,1}(f) S_{n,2}(f)} \right]^{1/2} \quad (5.25)$$

となる．

5.2.3 1 台での感度との比較

ここでは，1 台の検出器での観測と比較して，どの程度 signal-to-noise ratio が良くなるのかを考える．式 5.25 をオーダーで評価すると

$$\frac{S}{N} \sim \left(\frac{8}{25} T \Delta f \right) \gamma_{\text{rms}}^2 \frac{S_{\text{gw}}^2}{S_{n,1}(f) S_{n,2}(f)} \quad (5.26)$$

である．ただし， Δf は積分を行う周波数，つまり解析周波数帯であり¹， Γ_{rms} は解析周波数帯における overlap reduction function の RMS とした．1 台での signal-to-noise ratio は $S_{\text{gw}}(f)/S_{n,i}(f)$ とほぼ等しいので，相関解析を行った時の signal-to-noise ratio は $\sqrt{(8/25)T\Delta f} \gamma_{\text{rms}}$ のオーダーで良くなる事となる．

今回の解析では， $T \sim 3 \times 10^4$ sec, $\Delta f \sim 0.8$ Hz, $\gamma_{\text{rms}} \sim 1$ より，signal-to-noise ratio はおよそ 70 倍良くなるものと期待される．

¹実際の解析では全周波数帯に及んで積分を行う事はせず，一番感度の良い周波数帯でのみ積分を行う．つまり，解析周波数帯を限定する．詳しくは次節を参照．

5.3 信号処理

実際に値を求める際は、主に以下の点に注意して解析を行わなければならない。

- Y の「アンサンブル平均」を求める為、 Y のサンプルを複数集めなければならない。
- 実際のノイズは非定常であるため、データを選定する必要がある。
- 解析周波数は無限大までとる事が出来ないので、ある限られた周波数領域でのみ解析を行う。

この様な点を踏まえ、信号解析を行う。

今回行った信号解析の手順は、主に

- キャリブレーション
- データセレクション
- 相関値の計算
- 信号の検出・非検出決定
- 上限値の設定

の 5 段階にわかれる。この後の節では、これらについて説明していく事にする。

5.3.1 キャリブレーション

我々が最初に得られるデータは、フィードバック信号、もしくはエラー信号である。そこで、これを重力波等価振幅に換算しなければならない。この変換は周波数領域で行う為、時系列データにフーリエ変換 (FFT) を施す。

まず、時系列データを 1 区間あたり T_{seg} の長さを持つ区間に分割する。この区間をセグメントと呼ぶ。データのサンプリング周波数を f_{samp} とすると、1 セグメントあたりのデータポイントの数は $N = T_{\text{seg}}/f_{\text{samp}}$ となり、このデータ列にフーリエ変換を施すと

$$\tilde{d}_{iI}(f_i) = \sum_{k=1}^N \delta t w(k) d_{iI}(k\delta t) e^{-i2\pi k l/N} \quad (5.27)$$

となる。但し、 i は検出器のインデックス、 I はセグメントのインデックスを表し、 $\delta t = 1/f_{\text{samp}}$ はサンプリング時間である。また、 $\delta f = 1/T_{\text{seg}}$ をフーリエ変換における周波数分解能として、離散周波数 $f_i \equiv l\delta f$ を定義した。更に、 $w(k)$ はフーリエ変換における窓関数である。今回はハニング窓を用いた。このハニング窓は N 個のデータ列の最初と最後は 0 になってしまい情報が失われてしまう為、隣り合うセグメントに 50% のオーバーラップを持たせている。

次にこのデータを式 3.38 を用いて strain に変換し、

$$\tilde{s}_{iI}(f_i) = \frac{1}{1 + G(f_i)} \frac{1}{G_{\text{sens}}(f_i) G_{\text{filter}}(f_i)} \tilde{d}_{\text{FB}}(f_i) \quad (5.28)$$

が求まる。但し、今回はフィードバック信号を用いて解析を行っている。

5.3.2 データセクション

検出器から得られたデータのノイズレベルは、全ての時間で一定ではない。4章で見たように、一時的にノイズレベルが悪化する時間帯が存在する。このようなデータをそのまま解析に使用すると、解析結果を悪化させる可能性があるため、ノイズレベルの悪い時間帯を削除して解析を行う事が効率的であると考えられる。今回、ノイズレベルの判断には $\tilde{s}_{iI}(f_l)$ の RMS (Root Mean Square) を用いた。

この $\tilde{s}_{iI}(f_l)$ について、RMS

$$X_{iI} = \sqrt{\sum_{l=l_1}^{l_2} |\tilde{s}_{iI}(f_l)|^2} \quad (5.29)$$

を計算する。しかし、単純にこれを計算すると、スペクトルに共振ピークなどといった $\tilde{s}_{iI}(f_l)$ の値が大きい l が存在した場合、

$$X_{iI} \sim |\tilde{s}_{iI}(f_l)| \quad (5.30)$$

となってしまう、全体のノイズフロアの上下はほとんど見る事が出来なくなる。そこで、 \tilde{s}_{iI} にホワイトニングを施してから RMS を計算する。ホワイトニングとは、各セグメントの値 \tilde{s}_{iI} を、全セグメントでの平均値 $|\overline{\tilde{s}_i}|$ で規格化する事でピークを均す操作である。つまり、ホワイトニングされた重力波等価振幅を用いた RMS は

$$X_{iI,whitened} = \sqrt{\sum_{l=l_1}^{l_2} \left(\frac{|\tilde{s}_{iI}(f_l)|}{|\overline{\tilde{s}_i}(f_l)|} \right)^2} \quad (5.31)$$

但し、

$$|\overline{\tilde{s}_i}(f_l)| = \frac{1}{N} \sum_{I=1}^N |\tilde{s}_{iI}(f_l)| \quad (5.32)$$

で計算する事ができる。

ここで注意しなければならないのは、この周波数帯は相関解析の時に用いる周波数帯と同じ周波数を用いてはならないという事である。もしセグメントに十分大きく非定常な背景重力波信号が検出器に入ってきていた場合、そのセグメントの RMS も大きくなっている。ここで、解析を行う周波数帯で RMS の大きくなっているセグメントを削除してしまうという事は、背景重力波信号を含むセグメントを自然と削除してしまう状態になり、恣意的に重力波信号の検出を排除する解析となってしまう。そのため、RMS の計算には、相関解析では使用しない周波数帯を用いなければならない。

今回、解析に主に使用する周波数帯は、最も感度の良い周波数帯：0.1 – 1.0 Hz が中心である為、データセクションには、磁場ノイズが大きく影響する DC – 0.1 Hz での RMS と、地面振動が大きく影響する 2.0 – 2.1 Hz の RMS の和を用いた。つまり、

$$X_{iI,whitened} = \sqrt{\sum_{f_l=0}^{0.1} \left(\frac{|\tilde{s}_{iI}(f_l)|}{|\overline{\tilde{s}_i}(f_l)|} \right)^2 + \sum_{f_l=2.0}^{2.1} \left(\frac{|\tilde{s}_{iI}(f_l)|}{|\overline{\tilde{s}_i}(f_l)|} \right)^2} \quad (5.33)$$

がデータセクションの指標となる。(図 5.2)

この指標 $X_{iI,whitened}$ が大きいセグメントを、東京、京都のデータでそれぞれ取り除き、双方のデータが残ったセグメントを用いて相関値の計算を行うのである。

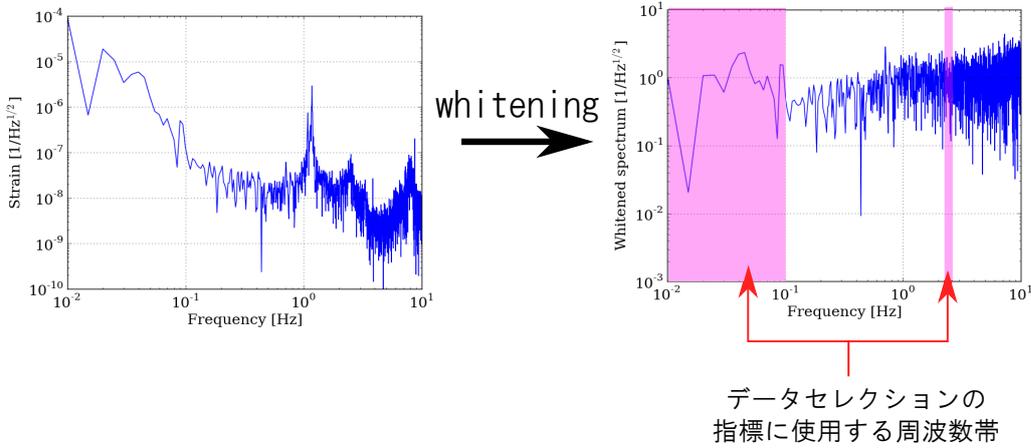


図 5.2: ホワイトニングしたスペクトルと、データセレクションの指標に用いた周波数帯

5.3.3 相関値の計算

データセレクションによってノイズの大きいセグメントが削除できたら、残りのセグメントで相関値を計算する。離散データにおける各セグメントの相関値 Y_I は

$$Y_I = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{l=l_{\min}}^{l_{\max}} df s_{1I}(l) s_{2I}^*(l) \tilde{Q}_I(f) \delta f \right] \quad (5.34)$$

で書ける。ここで、optimal filter $\tilde{Q}(f)$ は

$$\tilde{Q}_I(f) \equiv N_I \frac{\gamma(f)}{P_{1I}(f) P_{2I}(f) f_i^3} \quad (5.35)$$

$$N_I \equiv \frac{20\pi^2}{3} \left[\sum_{l=l_{\min}}^{l_{\max}} \delta f \frac{\gamma^2(f)}{P_{1I}(f) P_{2I}(f) f_i^6} \right]^{-1} \quad (5.36)$$

で定義される。但し、 $P_{iI}(f)$ は、 I 番目のセグメントの前後 10 セグメントにおける PSD の平均値である。

Overlap Reduction Function

今回の観測状況の場合、overlap reduction function $\gamma(f)$ は図 5.3 のようになる。これより、1 Hz 以下において、2 つのプロトタイプ TOBA での重力波に対する応答はほぼ等しい事がわかる。

Optimal Filter

overlap reduction function を用いて、Optimal filter $\tilde{Q}(f)$ も計算する事ができる。今回の観測では、 $\tilde{Q}(f)$ は例えば図 5.4 の様になる。

また、相関解析に用いる周波数領域も Optimal filter を用いて決定した。背景重力波に対しての感度が良いほど $\tilde{Q}(f)$ の値は大きくなる。つまり、Optimal filter の値が大きい方から解析に用いる周波数領域を選んでいけば最も効率が良い事になる。従って、使用する周波数領域は、例えば図 5.4 の赤色の点の様に決定できるのである。

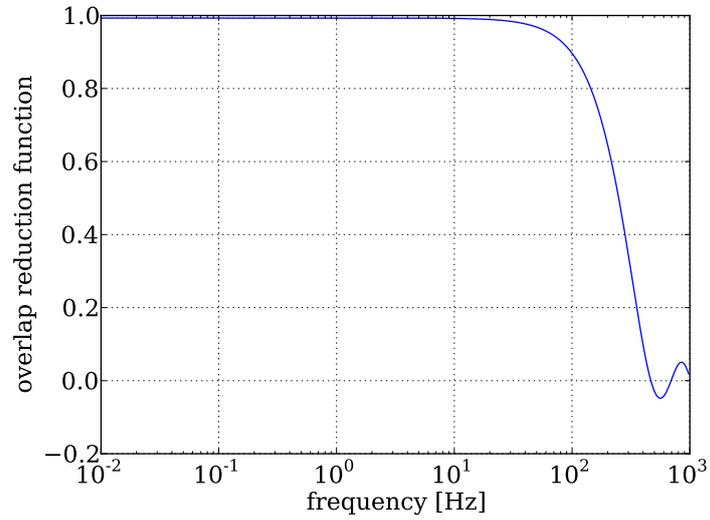


図 5.3: 東京・京都での観測における overlap reduction function

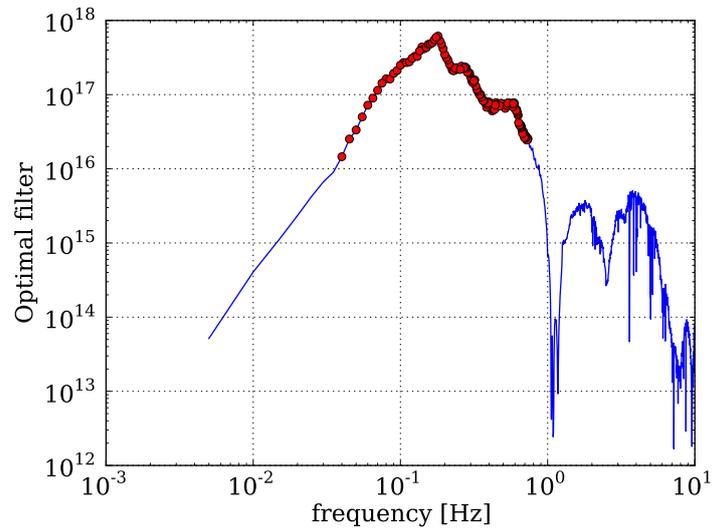


図 5.4: 今回の観測データによる Optimal filter . 解析に使用する周波数領域は、赤色の点で表せるように値の大きい方から選んでいく .

5.3.4 信号の検出・非検出決定

観測データから相関値が得られた時,

- 背景重力波が存在するかどうか
- 存在するとしたら, その振幅はいくつか

を決定しなければならない. ここでは, これらを frequentist approach を用いて決定する.

帰無仮説

今, 与えられたデータを用いて, 我々は背景重力波に対して以下のどちらかの仮説が選択できるとする:

- 帰無仮説 H_0 : 背景重力波の信号は存在しない.
- 対立仮説 H_+ : 平均振幅 $\mu > 0$ の背景重力波が存在する.

このとき, 得られたデータセット \mathbf{y} (得られた各セグメントにおける相関値 Y_I の集合) の確率分布は,

- $p(\mathbf{y}|0)$: 背景重力波が存在しない時の, \mathbf{y} の従う確率分布
- $p(\mathbf{y}|\mu)$: 平均振幅 $\mu > 0$ を持った背景重力波が存在する時の, \mathbf{y} の従う確率分布

のいずれかで書く事ができる. この確率分布は, 相関値 Y_I のサンプル数が十分大きい時, 中心極限定理よりガウシアンに近づくので,

$$p(\mathbf{y}|0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left[- \sum_{i=0}^n \frac{Y_i^2}{2\sigma^2} \right] \quad (5.37)$$

$$p(\mathbf{y}|\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left[- \sum_{i=0}^n \frac{(Y_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (5.38)$$

とかける. ただし, σ はサンプル Y_I の分散 $\sigma = \sqrt{\langle Y_I^2 - \langle Y \rangle^2}$ である. これは, もし重力波信号が十分小さくノイズに埋もれている時, Y_I の分布は相関を持たないノイズにのみ依存するため, Y_I は 0 を中心とした正規分布となる事を意味する. 一方, この Y_I の分布の中心が有意にプラスの値を持っている時は, 背景重力波が検出されていると判断する事ができるのである.

一様強力検定法による検定

では, Y_I の分布の中心値が, どれだけ大きな値を持っていれば背景重力波が存在したと判断して良いのだろうか. ここでは, 背景重力波の有無を決める具体的な値 (detection threshold) の決定方法について議論する.

ここで, 我々は互いに素な 2 つの領域 R_0 と R_1 を用意し, 得られたデータセット \mathbf{y} が $\mathbf{y} \in R_0$ なら仮説 H_0 を, $\mathbf{y} \in R_1$ なら仮説 H_+ を採用するとする.

R_0, R_1 が決定された時, それに伴う「誤り」が発生する. H_0 が真実であるにも関わらず H_+ を選択してしまう事を「第 I 種誤り」(false alarm) と言い, H_+ が真実であるにも関わらず H_0 を選択してしまう事を「第 II 種誤り」(false dismissal) と言う.

false alarm rate α と false dismissal rate β はそれぞれ,

$$\alpha \equiv \int_{R_1} d\mathbf{y} p(\mathbf{y}|0) \quad (5.39)$$

$$\beta \equiv \int_{R_0} d\mathbf{y} p(\mathbf{y}|\mu) \quad (5.40)$$

となる.

この誤りは極力少なくしたいのであるが, false alarm rate α と false dismissal rate β は同時に小さくする事ができない. そこで, ある一定の α の下で β を最小にする検定法 (一様最強力検定: uniformly most powerful test) を採用する.

この場合, Neyman-Pearson の基本定理に従えば, 検定方法は

- $\langle Y \rangle / T_{\text{seg}} < z_\alpha$ ならば H_0
- $\langle Y \rangle / T_{\text{seg}} \geq z_\alpha$ ならば H_+

と定める事ができる. 但し, z_α は

$$\alpha = \int_{z_\alpha}^{+\infty} p(y|0) dy \quad (5.41)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{z_\alpha}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy \quad (5.42)$$

を満たす値である. つまり, 相関値のアンサンブル平均 $\langle Y \rangle / T_{\text{seg}}$ が z_α より大きければ重力波信号が存在し, 小さければ重力波信号無しと判断するのである.

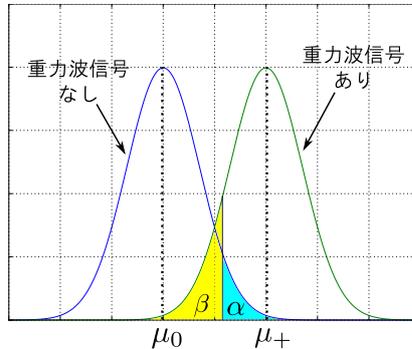


図 5.5: 重力波信号の検出・非検出の決定基準: 信号がノイズに埋もれている場合は Y_I の中心 μ_0 は 0 付近になる. 信号が存在する場合は, Y_I の分布の中心 μ_+ は有意にプラスの値を持つ. ここで, $R_0 = \{\mathbf{y} | \langle Y \rangle / T_{\text{seg}} < z_\alpha\}$, $R_1 = \{\mathbf{y} | \langle Y \rangle / T_{\text{seg}} > z_\alpha\}$ とした時, α, β の値はそれぞれ, 図の水色と黄色の面積で表す事ができる.

平均重力波振幅の推定

この z_α に従い信号の有無を判定し, 信号が存在すると判断された場合は, その背景重力波の平均振幅を決定する. 同様の確率分布に従えば, 重力波振幅の値として $1 - \alpha$ の信頼度を持つ区間は

$$z_{1-\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}. \quad (5.43)$$

つまり,

$$I_\alpha = [\langle Y \rangle - z_{1-\alpha/2}, \langle Y \rangle + z_{\alpha/2}] \quad (5.44)$$

が $\langle Y \rangle = T_{\text{seg}} \Omega_{\text{gw}} h_0^2$ のとる値の $1 - \alpha$ の信頼区間である。(図 5.6)

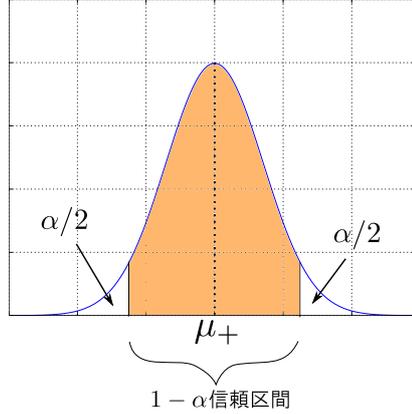


図 5.6: $1 - \alpha$ の信頼度を持つ区間．両側の $\alpha/2$ の面積を除いた区間と等しい．

5.3.5 上限値の設定

以上の検定方法によって背景重力波信号が検出されなかった場合，上限値の設定を行う．ここでの上限値とは、「もし同等の観測条件で測定を行った場合，どの程度振幅の大きな背景重力波ならばこの検出器で検出可能であるか」を求めるものである．

手順としては，以下の様に行う．

1. ある平均振幅をもった背景重力波の模擬信号を生成し，観測データに注入する．
2. 疑似重力波信号を注入したデータで検出解析を行う．
3. 1, 2 を複数回繰り返す，背景重力波を検出できた割合 (Detection efficiency) を算出する．
4. 1, 2, 3 の手順を，異なる平均振幅をもった背景重力波の模擬信号を用いて繰り返す．

ここで用いた背景重力波の模擬信号は，

$$S_{\text{gw}}(f) = \frac{3h_0^2}{10\pi^2} f^{-3} \Omega_0 \quad (5.45)$$

の PSD をもつガウシアンを用いた．生成の手順としては，まず正規分布に従う乱数列を生成し，それと同じサンプリング周波数をもった時系列データ $s_{\text{mock0}}(t)$ とみなす．これに FFT を施し周波数ドメインのデータ $\tilde{s}_{\text{mock0}}(f)$ を計算する．これを

$$\tilde{s}_{\text{mock}}(f) = \sqrt{\frac{3h_0^2 \Omega_0}{10\pi^2}} f^{-3/2} \frac{\tilde{s}_{\text{mock0}}(f)}{\tilde{s}_{\text{mock0}}(f)} \quad (5.46)$$

として振幅を調整し， $f^{-3/2}$ の周波数依存性を持たせる．この模擬信号は図 5.7 のようになる．

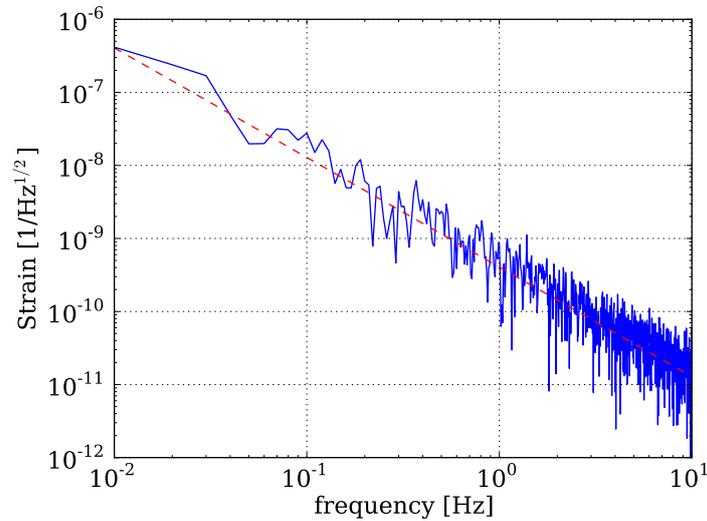


図 5.7: 背景重力波の模擬信号

これを観測データ $\tilde{s}(f)$ に足し算する事で、疑似重力波信号を含んだデータ

$$\tilde{s}_{\text{injected}}(f) = \tilde{s}_{\text{mock}}(f) + \tilde{s}(f)$$

を生成する。

これを用いて計算された detection efficiency をプロットしたものが図 5.8 の様になり、detection efficiency が $x\%$ となる疑似重力波信号の振幅の値が $x\%$ 信頼度の上限値となる。ただし、detection efficiency が $x\%$ となる値を決める際には、計算値をエラー関数で最小二乗フィッティングして算出している。

5.3.6 パラメータチューニング

以上のような手順で背景重力波の信号探査、および上限値設定を行うが、この中にはデータクオリティに依存する幾つかのパラメータが存在する。そのパラメータは以下の 3 つである。

- セグメントの長さ T_{seg}
- データセレクションにおける削除量
- 解析周波数帯の幅 Δf

これらのパラメータを決定する為、本解析の前に予備解析としてパラメータチューニングを行う。パラメータチューニングでは、タイムシフトしたデータを用いて本解析と同じ手順を用いて上限値の解析を行う。タイムシフトしたデータを用いた解析では背景重力波の信号を検出する事はないとして、ここで恣意性を排除している。また、それぞれのパラメータについて 10 通りのタイムシフト量を用意し、パラメータチューニングを行っている。

これを様々なパラメータについて行い、最も上限値が小さくなる様なパラメータを探査する。これによって最も小さい上限値を設けたパラメータを、本解析に使用するパラメータとして決定するのである。

つまり、解析全体のフローチャートを示すと図 5.9 のようになる。

以上の様な手順によって、同時観測のデータから背景重力波探査を行った。

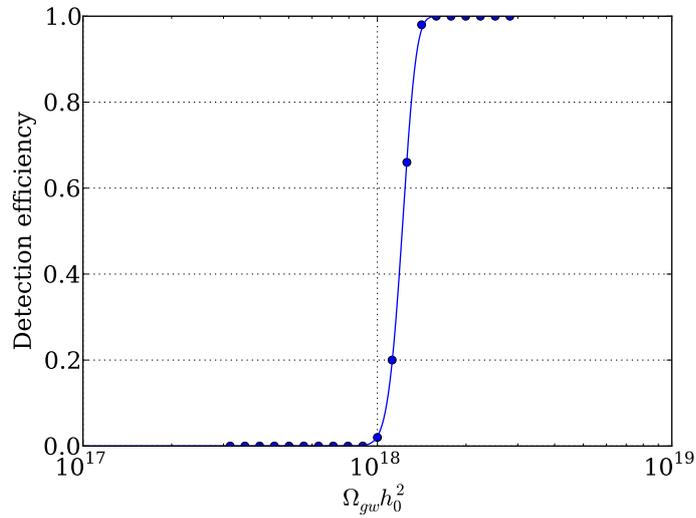


図 5.8: Detection efficiency . ドットが計算値で , 実線がエラー関数でフィッティングしたものである .

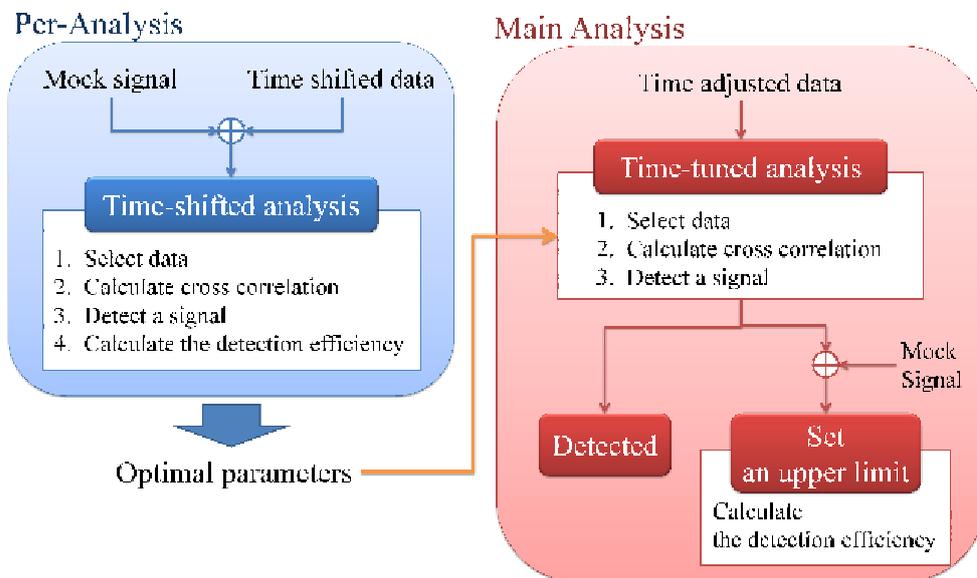


図 5.9: 解析のフローチャート

5.4 解析結果

前章で説明した解析手段に従い、10/30～10/31 に取得された TOBA による同時重力波観測データを用いて背景重力波を探査した。この節では、その解析結果について説明する。

5.4.1 解析パラメータ

解析パラメータと上限値の傾向

ここでは、パラメータチューニングの過程で見えた、解析パラメータと上限値の関係について説明する。まず、セグメントの長さを変えてパラメータチューニングを行うと、上限値は図 5.10 のようになった。但し、この他の解析パラメータは、データの削除率が 10 %、解析周波数幅が 0.8 Hz となっている。これより、上限値はセグメント長が 200 秒の時を最小として、セグメント長が長い程上限値が概ね大きくなっている事がわかる。これは、セグメント長を長くしてしまうと、東京の観測データで多くみられたような短時間に現れる大きなノイズが効率的に削除できなくなるためだと考えられる。

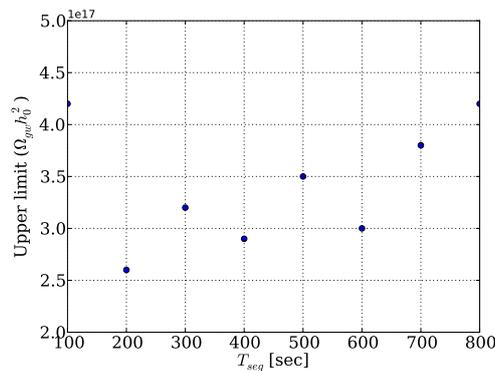


図 5.10: セグメント長と上限値の関係

次に、セグメント長を 200 秒として、データセレクションにおけるデータの削除率を変更すると、上限値は図 5.11 のように変化する。ここでも解析周波数帯の幅は 0.8 Hz としてある。これより、全くデータを削除しない解析では上限値が大きくなってしまいが、削除率は 10 % 程度で十分である事がわかる。

また、セグメント長が 200 秒、データの削除率が 10 % という条件の下で、解析周波数幅を変更すると、上限値は図 5.12 のようになる。これより、解析周波数幅を変更しても上限値はほぼ一定である事がわかる²。そこで今回は、1 Hz 以下の中で最も広く幅をとり、解析周波数幅を 0.8 Hz とした。

また、以上で見たような上限値とパラメータの傾向は、チューニングしていない他のパラメータにほとんど依らない。つまり、例えばセグメント長や解析周波数幅を他の値に変更しても、データの削除率は 10 % 付近で上限値が最小になるという事である。

採用したパラメータ

以上のようなパラメータチューニングの結果、本解析で使用したパラメータは表 5.1 の様である。

²この解析結果では上限値が約 10 % 程度の割合で変動しているが、上限値解析における疑似信号生成にガウス乱数を用いているため、同じ条件でも 10 % 程度の解析結果の変動は十分起こり得るものである。

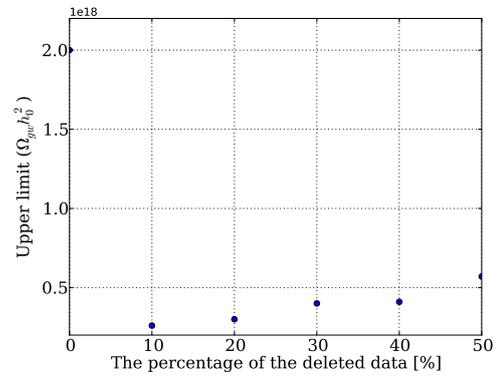


図 5.11: データの削除率と上限値の関係

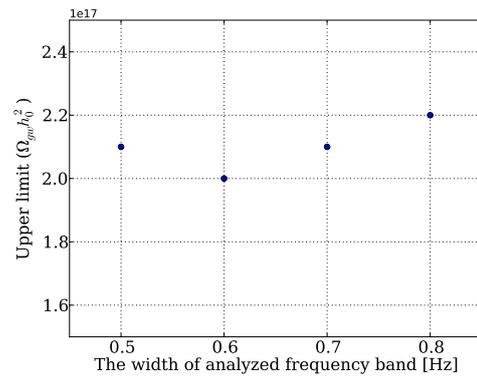


図 5.12: 解析周波数幅と上限値の関係

セグメント長 (T_{seg})	200 sec
データの削除量	10 %
解析周波数幅 (Δf)	0.8 Hz

表 5.1: 採用した解析パラメータ

これにより、周波数分解能は $\delta f = 0.05\text{Hz}$ となった。また、データセクションの指標に用いた RMS の値と削除したセグメントの位置は図 5.13 のようになっている。

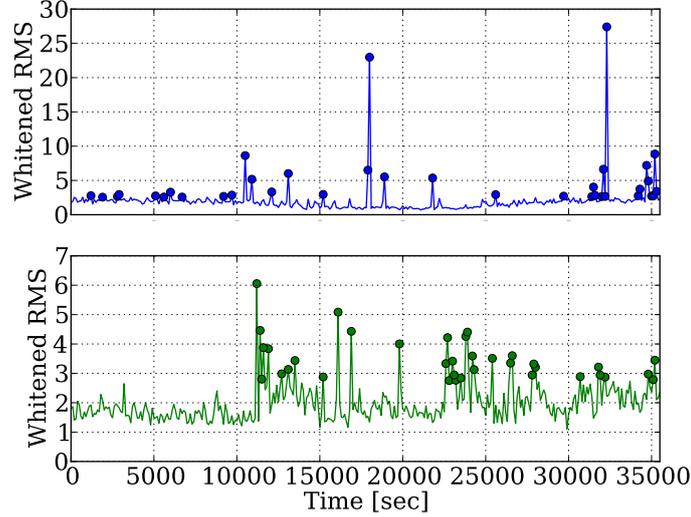


図 5.13: データセクションの指標に用いた RMS の値と削除したセグメント。ドットで示されているのが削除したセグメントである。

また、この時の Optimal filter と、これによって決定される解析周波数は図 5.14 のようになり、 $0.035 \sim 0.83 \text{ Hz}$ を解析周波数帯として用いた。

これによって得られたヒストグラムは図 5.15 であり、これより、false alarm rate $\alpha = 5\%$ の $\Omega_{\text{gw}} h_0^2$ に対する detection threshold $z_{0.05}$ は

$$z_{0.05} = 1.3 \times 10^{17} \quad (5.47)$$

となった。

5.4.2 相関値と上限値

以上のパラメータを用い、時刻合わせをしたデータによって本解析を行ったところ、相関値 $\langle Y \rangle$ は

$$\langle Y \rangle = -1.2 \times 10^{19} \quad (5.48)$$

これから算出される背景重力波のエネルギー $\Omega_{\text{gw}} h_0^2$ は、負の値はとる事ができない事に注意して、

$$\Omega_{\text{gw}} h_0^2 = \max [-5.9 \times 10^{16}, 0] = 0 < z_{0.95} \quad (5.49)$$

となった。従って、この観測データにおいて重力波信号は検出されなかった。

また、上限値解析による Detection efficiency は図 5.16 のようになった。

これより、95% 信頼度の上限値は、

$$\Omega_{\text{gw}} h_0^2 < 1.9 \times 10^{17} \quad (5.50)$$

という結果になった。

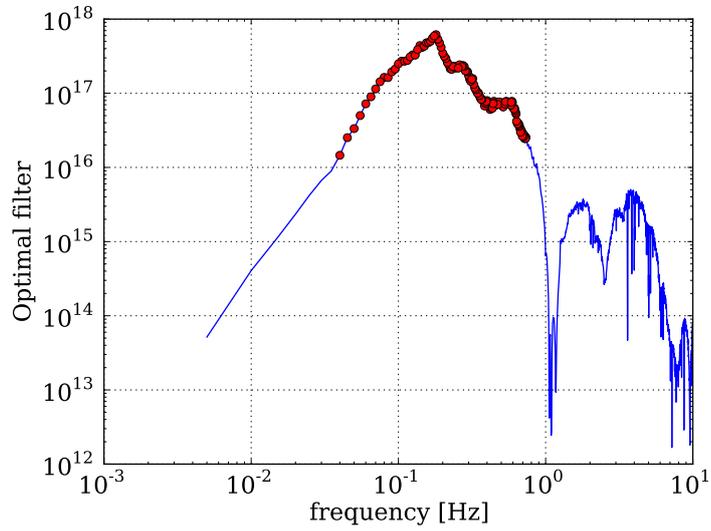


図 5.14: 本解析における Optimal filter と解析周波数帯

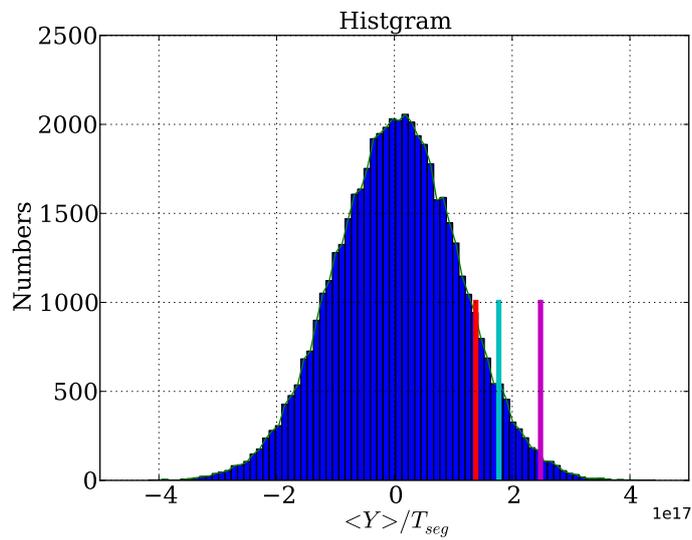


図 5.15: タイムシフトしたデータでの解析によって得られた相関値のヒストグラム．赤色，水色，朱色の線はそれぞれ 10 %, 5 %, 1 % false alarm rate の detection threshold を示している．

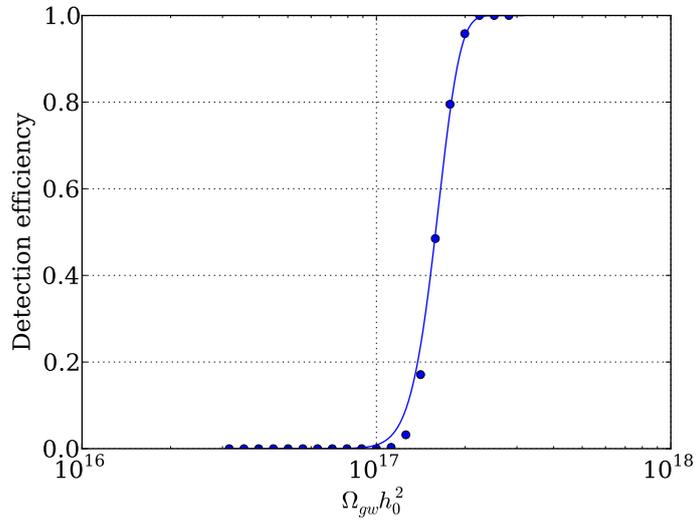


図 5.16: 時刻合わせしたデータによる Detection efficiency

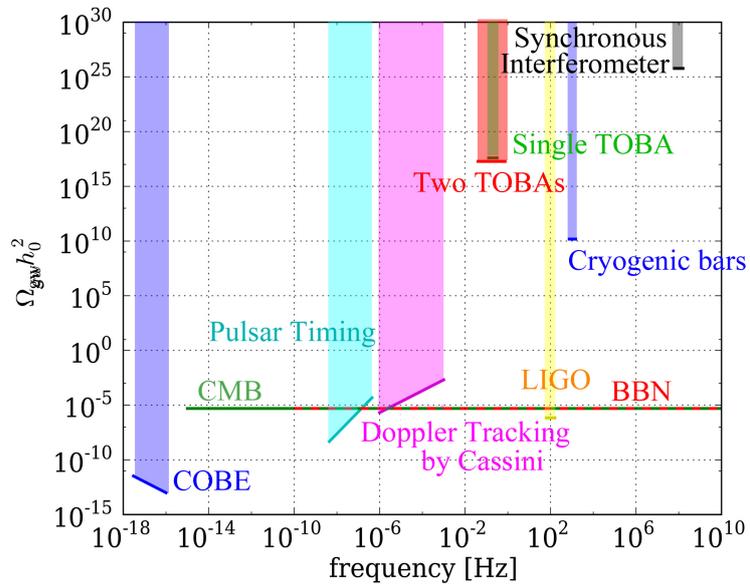


図 5.17: 過去の観測による上限値と、今回の観測による上限値

これは、TOBA1 台による上限値よりも 4 倍程度良いのものである。過去の観測による上限値と今回の上限値の値の比較を図 5.17 に示す。

相関解析では、1 台の観測よりも $\sqrt{T\Delta f}$ だけ良い結果が得られると期待されていたが、今回はそこまでの結果は得られなかった。これは、石徹白氏による観測データは、今回の観測データよりも 0.2 Hz 付近で感度が 5 倍程良いものである事に起因すると考えられる。

しかし、この結果は 0.035 – 0.850 Hz という広い周波数帯に世界で初めて設定された上限値である。この周波数帯は、DECIGO の観測周波数帯だけでなく、LISA の観測周波数帯もカバーするものであり、今後の更なる感度向上によって双方へのサイエンス的なフィードバックが期待できるものとなった。

5.5 今後の展望

今回はプロトタイプ TOBA での観測を行ったが、今後はその感度向上に向けて研究をすすめる予定である。特に、将来的に 3.3 節で述べたような大型 TOBA が完成すれば、背景重力波に対し BBN の上限値を超える制限をつけることができる。

例えば、3.3 節で挙げたようなパラメータを用いて、重力波振幅等価雑音が 1 Hz で $1 \times 10^{-19} [1/\text{Hz}^{1/2}]$ といった感度を達成できれば、この大型 TOBA 2 台で 1 年間同時観測を行うことで、 $h_0^2 \Omega_{\text{gw}} \sim 10^{-8}$ という上限値を設定できる (図 5.18)。

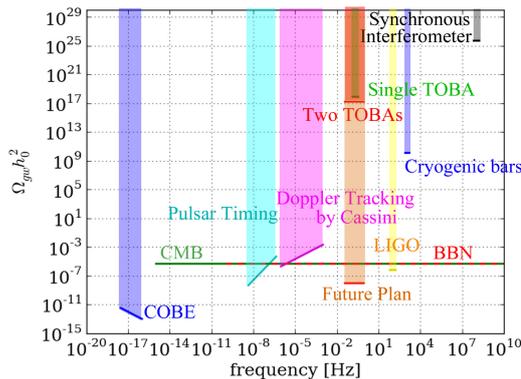


図 5.18: 過去の観測結果と、大型 TOBA の

しかし、この大型 TOBA の目標感度に到達するためには、様々な雑音対策を行わなければならない。特に現在のプロトタイプ TOBA で問題になっているのは、磁場雑音である。環境磁場の雑音が約 0.1 Hz 以下の低周波数帯の感度を制限しているのである。環境磁場雑音は、磁気浮上による懸架系や、コイル-マグネット アクチュエータから導入されてしまうとされている。そこで、今後は懸架系の改善や、マグネットを使用しない新たなアクチュエータの検討が必要となる。

第6章 コイル-コイル アクチュエータの開発

これまでに、既に開発されているプロトタイプ TOBA での観測・解析を行ったが、今後地上での背景重力波の検出を目指すためには、大型 TOBA による感度向上が必要となる。しかし、現在のプロトタイプでは磁場雑音を実証された様に、TOBA は環境磁場雑音の影響を受けやすく、低周波数帯の感度が悪化してしまう事がわかっている。この磁場雑音は、超伝導による磁気浮上のみならず、コイル-マグネット アクチュエータから導入されるものだと考えられている。コイル-マグネット アクチュエータを使用する際には、テストマスに永久磁石を設置するため、この磁石と磁場雑音がカップルするのである。従って、大型 TOBA で磁場雑音の影響を低減させるためには、コイル-マグネット アクチュエータに代わる新たなアクチュエータが必要となる。

そこで、我々は今回、将来的に TOBA などといった低周波重力波検出器に使用する為の新型アクチュエータ：コイル-コイル アクチュエータを開発した。これはコイルに流す交流電流による磁氣的相互作用を用いたアクチュエータであり、比較的強い駆動力を持ちながら磁氣的なノイズ対策がとりやすいという利点を持つ。これまでにその理論構築、特性評価、更にはコイル-コイル アクチュエータを用いたプロトタイプ TOBA の制御に成功している。ここでは、コイル-コイル アクチュエータの概要について述べた後、その原理について説明する。その後、実験で行った特性評価と、コイル-コイル アクチュエータを用いたプロトタイプ TOBA の制御について述べ、雑音源や問題点、今後の展望についても説明する。

6.1 目的と概要

重力波観測においては、自由質点とみなせるテストマスを設置し、フィードバック制御によって一定の位置に維持する事が不可欠である。つまり、テストマス为非接触に動かす事ができるアクチュエータが必要となる。現在、重力波観測において使用されているアクチュエータは主に以下のコイル-マグネット アクチュエータと静電型アクチュエータである。この二つのアクチュエータの特徴を以下にまとめた。

コイル-マグネット アクチュエータ

永久磁石と、それを覆うコイルの作る磁場による相互作用を利用したアクチュエータである。コイルに流す電流に比例した力が発生する。

比較的強い駆動力を持ち、駆動効率が良い。一方、テストマスに永久磁石を設置しなければならず、外部磁場の変化や環境磁場、減磁や温度変化などといった、磁石に起因したノイズが問題となる事もある。

このアクチュエータは主に、地上の干渉計型重力波検出器 (LIGO, Virgo, TAMA300 など) の鏡の制御に用いられている。

静電型アクチュエータ

2つの極板を向かい合わせて設置し、極板間電圧による電氣的引力を用いたアクチュエータである。極板間電圧の2乗に比例した引力が発生する。そこで、テストマスを両側から極板で挟み込んで両側から引力を働かせ、2つの引力のバランスによって制御を行う。

構成が単純で、制御対象物に磁石などを設置する必要が無いのが利点である。一方、駆動力が弱く、高電圧を必要とする点、引力しか発生しない為、線形制御にはバイアス電圧が必要であるという点、ダイナミックレンジが狭い、などといった欠点が存在する。

このアクチュエータはLISA パスファインダーやDECIGO パスファインダーといった衛星ミッションや、地上の干渉型重力波検出器 (GEO) に用いられている。その他にも精密計測実験に用いられる事も多い。

現在、プロトタイプ TOBA の低周波数帯の感度は環境磁場雑音で制限されている。従って、今後開発予定の大型 TOBA では、コイル-マグネット アクチュエータを使用するのは難しい事がわかる。しかし、静電型アクチュエータではバイアス電圧や駆動力の弱さなどといった問題も残る。つまり、磁場からの雑音混入が少なく、比較的強い駆動力を持った新たな非接触型アクチュエータが必要となるのである。

そこで我々は、従来のアクチュエータに代わる新たなアクチュエータ：コイル-コイル アクチュエータを開発した。このアクチュエータは、基本的には向かい合う2つのコイルで構成される(図 1.1)。2つのコイルに電流を流す事によって磁場を発生させ、その磁場の相互作用を用いて制御対象物を動かす装置である。

鍵となるのは、コイルには交流電流を流す点である。これによって、環境磁場の影響による雑音を低減する事ができると考える。また、永久磁石を用いていないため、減磁や温度変化による磁場変化の影響を受けにくいという利点が挙げられる。

6.2 動作原理

先に述べた様なコンセプトのもと、これまでに基本型、2コイル浮上型、3コイル浮上型の3タイプのアクチュエータを開発した。この先では、そのそれぞれの動作原理について説明していく。

6.2.1 基本型

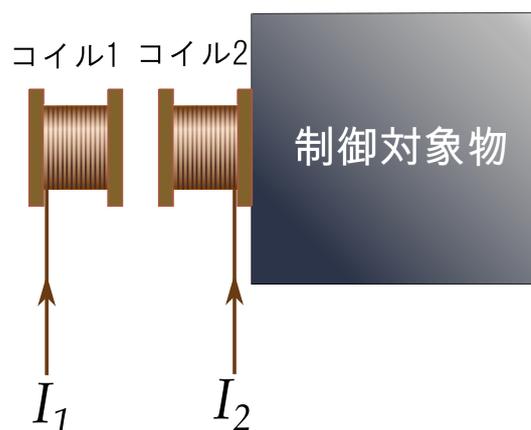


図 6.1: 基本型コイル-コイルアクチュエータの構成

基本型では，図 1.1 の様に，実験室側と制御対象物に 2 つのコイルを設置する．向かい合うコイルの双方に交流電流を流して磁場を発生させ，この磁場の相互作用によって 2 つのコイルの間に引力や斥力を生じさせるものである．

図 1.2 の様にコイル 2 つを配置し，ドライブ周波数 $f_d = \omega_d/2\pi$ を持った交流電流を流す事を考える．但し， f_d は制御帯域より十分高いとする．コイル 1 に実効電流 i_{e1} を持った交流電流 $I_1 = i_{e1}e^{i\omega_d t}$ を，コイル 2 に実効電流 i_{e2} を持った交流電流 $I_2 = i_{e2}e^{i(\omega_d t + \varphi)}$ を流す時¹，2 つのコイルに蓄えられるエネルギーの時間平均は

$$\bar{T} = \frac{1}{2}L_1 |I_1|^2 + \frac{1}{2}L_2 |I_2|^2 + M \operatorname{Re} [I_1 I_2^*] \quad (6.1)$$

$$= \frac{L_1}{2} i_{e1}^2 + \frac{L_2}{2} i_{e2}^2 + M i_{e1} i_{e2} \cos \varphi \quad (6.2)$$

となる．ただし， $L_k (k = 1, 2)$ はコイル k の自己インダクタンス， M は 2 つのコイル間の相互インダクタンスである．これより，このアクチュエータに働く力は，

$$F = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dM}{dx} i_{e1} i_{e2} \cos \varphi \quad (6.3)$$

と書ける．従って， $i_k (k = 1, 2)$ または位相差 φ を変動させればコイルにかかる力が変化し，更にこの力は引力にも斥力にもなる事がわかる．

この基本形は最もシンプルで使いやすい設計となっているが，制御対象物側に設置されたコイルにも電流を流す為，実験室側から制御対象物に導線を渡さなければならない．従って，このアクチュエータを用いる際にはテストマス（振り子）の共振周波数の変化，懸架系の Q 値の低下などといった現象が起こると予想される．これより，重力波検出器に基本型アクチュエータを導入する際には，懸架系の熱雑音の増加などを考慮しなければならない．

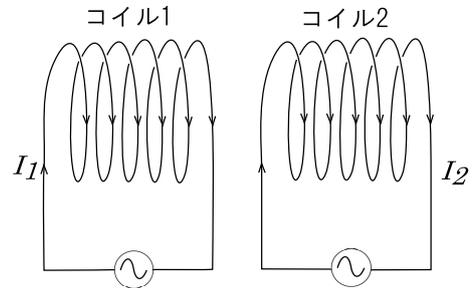


図 6.2: 基本型コイル-コイル アクチュエータの概念図

6.2.2 2 コイル浮上型

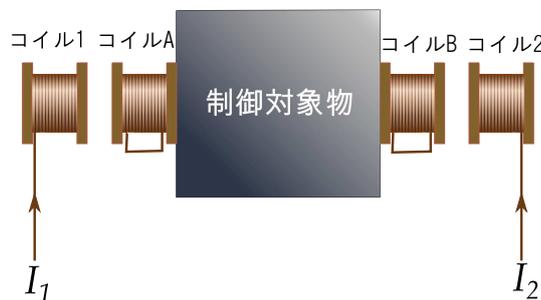


図 6.3: 2 コイル浮上型コイル-コイルアクチュエータの構成

¹ここでは定電流電源を用いて電流を流しており，コイル 1, 2 に誘導電流は流れないものとする．誘導電流の効果を考慮した結果は補遺 B を参照の事．

基本形での制御対象物に導線を渡さなければいけないという欠点を克服するために考えられたのが、2コイル浮上型コイル-コイル アクチュエータである。ここでは、制御対象物側のコイルはショートさせる。この時、ショートコイル側には誘導起電力による電流が流れ、実験室側のコイルの作る磁場と、誘導電流が作る磁場との相互作用によって制御対象物をアクチュエートする。ただし、この時に2つのコイルの間に働く力は斥力のみとなるため、制御対象物の両側にこのアクチュエータを配置し、斥力のバランスを取る事で対象物を一定の位置に制御する。

ここでは、駆動力の大きさと同時に、バネ定数や散逸項も求める為、ラグランジュ方程式を用いて考える事とする。まず、電流を流すコイル1とショートしたコイル0の1組のみを用いた系でのラグランジュ方程式を解く。基本形と同様、ドライブ周波数 $f_d = \omega_d/2\pi$ 、実効電流 i_{e1} をもつ交流電流 $I_1 = i_{e1}e^{i\omega_d t}$ をコイル1に流すとき、ラグランジアン \mathcal{L} と散逸関数 \mathcal{D} は

$$\mathcal{L} = \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 - \omega_m^2 \theta^2) + \frac{1}{2} L_0 I_0^2 + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_0 I_1 \quad (6.4)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} I \frac{\omega_m}{Q_m} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} R_0 I_0^2 \quad (6.5)$$

となる。ここで I_k, R_k, L_k, M をそれぞれコイル k に流れる電流、コイル k の抵抗、自己インダクタンス、及び2つのコイルの間の相互インダクタンスとした。また、 I は振り子の回転方向の慣性モーメント、 ω_m, Q_m は機械系の共振周波数とQ値である。但し、ここでは電流のドライブに定電流電源を用いている、つまりコイル1側の入力インピーダンスが無限大であるため、コイル1の抵抗での散逸は無視できるものとした。

ここで、相互インダクタンス M を

$$M = M_0 + \mu\theta \quad (6.6)$$

と近似すると、ラグランジュ方程式は、

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_0} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial I_0} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} I \left(\ddot{\theta} + \frac{\omega_m}{Q_m} \dot{\theta} + \omega_m^2 \theta \right) - \mu I_0 I_1 = 0 \\ R_0 I_0 + L_0 \dot{I}_0 + M_0 \dot{I}_1 + \mu \dot{\theta} I_1 + \mu \theta \dot{I}_1 = 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

$$(6.8)$$

となる。ここで、 $I_0 = i_0(t)e^{i\omega_d t}$ と考えて式 1.25 をフーリエ変換すると、

$$[R_0 + i(\omega + \omega_d)L_0] \tilde{i}_0(\omega) = -i\omega_d M_0 i_1 - i(\omega + \omega_d) \mu \tilde{\theta}(\omega) i_1 \quad (6.9)$$

$$\therefore \tilde{i}_0(\omega) = \frac{-i\omega_d M_0 - i(\omega + \omega_d) \mu \tilde{\theta}(\omega)}{R_0 + i(\omega + \omega_d)L_0} i_1 \quad (6.10)$$

となり、誘導電流 i_0 が求まる。

従って、アクチュエータからの力を表す項 $K = -\mu I_0 I_1$ の時間平均 \bar{K} は

$$\bar{K} = -\mu \operatorname{Re} \left[\frac{-i\omega_d M_0 - i(\omega + \omega_d) \mu \tilde{\theta}(\omega)}{R_0 + i(\omega + \omega_d)L_0} i_1^2 \right] \quad (6.11)$$

このうち $\tilde{\theta}$ に依らない項は

$$\bar{K}_0 \sim \mu i_1^2 \operatorname{Re} \left[\frac{-i\omega_d M_0}{R_0 + i\omega_d L_0} \right] \quad (6.12)$$

$$= \mu i_1^2 \frac{\omega_d^2 L_0}{R_0^2 + \omega_d^2 L_0^2} \quad (6.13)$$

となる。ただし、 $\omega \ll \omega_d$ とした。この $-\bar{K}_0$ がアクチュエータの駆動力となる。また、コイルが互いに近づく方向を θ の正の回転方向と取れば、 $\mu > 0$ となる事から、 $-\bar{K}_0 < 0$ となる。つまり、この力は斥力である。従って、このアクチュエータでテストマスを制御する場合は、制御方向の反対側にも同じアクチュエータを配置し、その2つの力の差によって制御を行う事になる。このような制御の方法は、2つの極板間では引力しか生じない静電型アクチュエータと類似したものである。

また、 $\tilde{\theta}$ に比例する項は

$$\bar{K}_\theta = -\mu^2 i_1^2 \operatorname{Re} \left[-\frac{i\omega_d \tilde{\theta}}{R_0 + i\omega_d L_0} \right] \quad (6.14)$$

より、 θ についての複素インピーダンスは

$$Z = \mu^2 i_1^2 \frac{i\omega_d (R_0 - i\omega_d L_0)}{R_0^2 + \omega_d^2 L_0^2} \quad (6.15)$$

となる。従って、アクチュエータによって生じるバネ定数 κ_{act} と loss angle ϕ_{act} は

$$\kappa_{\text{act}} = \mu^2 i_1^2 \frac{\omega_d^2 L_0}{R_0^2 + \omega_d^2 L_0^2} \quad (6.16)$$

$$\phi_{\text{act}} = \frac{R_0}{\omega_d L_0} \quad (6.17)$$

と求まる。

これより、この系の共振角振動数 ω'_0 は

$$\omega_0'^2 = \omega_m^2 \left[1 + \beta \frac{\omega_d^2 L_0^2}{R_0^2 + \omega_d^2 L_0^2} \right] \quad (6.18)$$

$$\beta = \frac{\mu^2 i_1^2}{I \omega_m^2 L_0} \quad (6.19)$$

となる。つまり、このアクチュエータには stiffness が存在し、共振周波数が機械系の共振周波数より上がってしまう事がわかる。この stiffness が存在する点に関しても、静電アクチュエータと同様である²。このように、この2コイル浮上型コイル-コイル アクチュエータは、静電アクチュエータと類似した挙動を示す事がわかる。

6.2.3 3コイル浮上型

2コイル浮上型では、2つのコイルの間に電流の2乗に比例した斥力しか生じ無い事がわかった。そこで、線形で、引力にも斥力にもなる駆動力を得る為に考えられたのが3コイル浮上型である。3コイル浮上型の構成は2コイル浮上型のものと同様だが、両側のコイルを互いに接続する点異なる。このように構成する事で、中心のコイルには両側の双方のコイルからの誘導電流が生じる。これによって間接的に外側の2つの電流の作る磁場が相互作用を及ぼし合う事ができる。

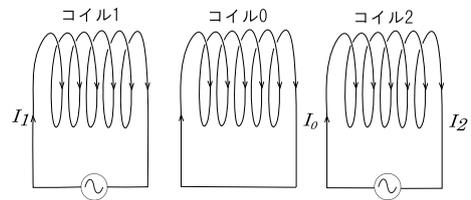


図 6.5: 3コイル浮上型コイル-コイル アクチュエータの概念図

²但し、静電アクチュエータにおける stiffness は反バネの効果によるもので、共振周波数は機械系の共振周波数より下がる。

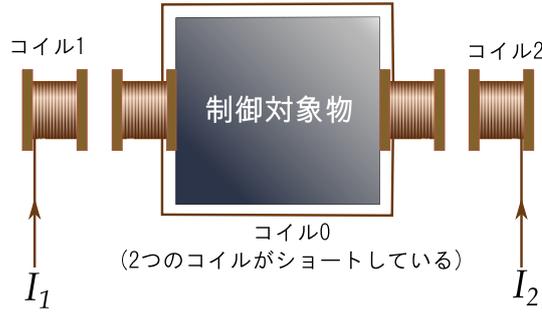


図 6.4: 3 コイル浮上型コイル-コイルアクチュエータの構成

今, 2 コイル浮上型と同様, ラグランジュ方程式を解いて理論式を求める. 右図において, コイル 1 に流す電流を $I_1 = i_1 e^{i\omega t}$, コイル 2 に流す電流を $I_2 = i_2 e^{i(\omega t + \varphi)}$ とすると, ラグランジアンと散逸関数は

$$\mathcal{L} = \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 - \omega_m \theta^2) + \frac{1}{2} L_0 I_0^2 + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_1 I_0 I_1 + M_2 I_0 I_2 \quad (6.20)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} I \frac{\omega_m}{Q_m} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} R_0 I_0^2 \quad (6.21)$$

である. ここで M_1, M_2 はそれぞれコイル 1, コイル 2 とコイル 0 の間の相互インダクタンスである. 今, コイル 1 とコイル 2 は対称だとすると

$$M_1 = M_0 + \mu\theta \quad (6.22)$$

$$M_2 = M_0 - \mu\theta \quad (6.23)$$

と近似できる. 従ってラグランジュ方程式は

$$\begin{cases} I \left(\ddot{\theta} + \frac{\omega_m}{Q_m} \dot{\theta} + \omega_m^2 \theta \right) - \mu I_0 I_1 + \mu I_0 I_2 = 0 \end{cases} \quad (6.24)$$

$$\begin{cases} R_0 I_0 + L_0 \dot{I}_0 + M_0 \dot{I}_1 + \mu \dot{\theta} I_1 + \mu \dot{\theta} I_1 + M_0 \dot{I}_2 - \mu \dot{\theta} I_2 - \mu x \dot{I}_2 = 0 \end{cases} \quad (6.25)$$

となる. 2 コイル浮上型と同様にして解くと,

$$I_0 = \frac{i\omega_d}{R_0 + i\omega_d L_0} [M_0 (i_1 + i_2 e^{i\varphi}) + \mu\theta (i_1 - i_2 e^{i\varphi})] e^{i\omega_d t} \quad (6.26)$$

となる. 但し, $\omega \ll \omega_d$ の範囲のみを考えているとして近似している.

アクチュエータの影響を表す項 $K = -\mu I_0 I_1 + \mu I_0 I_2$ の時間平均 \bar{K} は

$$\bar{K} = -\mu \operatorname{Re} \left[\frac{i\omega_d}{R_0 + i\omega_d L_0} \left\{ M_0 i_1 i_2 (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) + M_0 (i_1^2 - i_2^2) + \mu\theta (i_1^2 + i_2^2) - \mu\theta i_1 i_2 (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \right\} \right] \quad (6.27)$$

このうち $\tilde{\theta}$ に依らない項は

$$\begin{aligned} \bar{K}_0 &= -\mu \operatorname{Re} \left[\frac{i\omega_d}{R_0 + i\omega_d L_0} \left\{ i_1 i_2 M_0 (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) + M_0 (i_1^2 - i_2^2) \right\} \right] \\ &\sim \mu M_0 \frac{2\omega_d^2 L_0}{R_0^2 + \omega_d^2 L_0^2} i_1 i_2 \sin \varphi \end{aligned} \quad (6.28)$$

である。ただし、 $i_1 \sim i_2$ を仮定した。つまり、 i_1 (もしくは i_2) に比例した線形な力を得る事ができ、この力は引力にも斥力にもなる。更には、 $\sin \varphi$ に比例する事から、位相差 φ による制御も可能である。

また、 $\tilde{\theta}$ に比例する項は

$$\bar{K}_\theta = -\mu^2 \operatorname{Re} \left[\frac{i\omega_d}{R_0 + i\omega_d L_0} \{ (i_1^2 + i_2^2) - i_1 i_2 (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \} \right] \quad (6.29)$$

より、 θ の複素インピーダンスは

$$Z = \mu^2 (i_1^2 + i_2^2 - 2i_1 i_2 \cos \varphi) \frac{i\omega_d (R_0 - i\omega_d L_0)}{R_0^2 + \omega_d^2 L_0^2} \quad (6.30)$$

となる。従って、アクチュエータによって生じるバネ定数と loss angle は

$$\kappa_{\text{act}} = \mu^2 (i_1^2 + i_2^2 - 2i_1 i_2 \cos \varphi) \frac{\omega_d^2 L_0}{R_0^2 + \omega_d^2 L_0^2} \quad (6.31)$$

$$\phi_{\text{act}} = \frac{R_0}{\omega_d L_0} \quad (6.32)$$

と求まる。これらは、 $\cos \varphi = 0$ の時、2 コイル浮上型と同じ値になる事に注意されたい。

これより、この系の共振角振動数 ω'_0 は

$$\omega_0'^2 = \omega_m^2 \left[1 + \beta \frac{\omega_d^2 L_0^2}{R_0^2 + \omega_d^2 L_0^2} \right] \quad (6.33)$$

$$\beta = \frac{\mu^2}{I \omega_m^2 L_0} (i_1^2 + i_2^2 - 2i_1 i_2 \cos \varphi) \quad (6.34)$$

となる。

6.3 特性評価

ここでは、メトラー (電子天秤) を用いてこのアクチュエータに働く力を測定した。実験セットアップの概念図は図 1.6 のようになっており、メトラーに一方のコイルを乗せ、その上にもう一つのコイルを設置する。この状態でコイルに電流を流し、2 つのコイルの間に働く力をメトラーの示す重量の値の変化によって測定した。

なお、コイルのインピーダンスや相互インダクタンスなどといった情報は補遺 A を参照されたい³。

6.3.1 基本型での特性

まず、上下のコイル双方に電流を流す基本形での特性評価を行った。ここではそれぞれ、位相差、電流振幅、ドライブ周波数に対する力の依存性を評価した。

位相差と駆動力の関係

まず、位相差と力の関係を示したのが図 1.7 である。 I_1 と I_2 の位相差 φ を変化させたときの力の変動は図 1.7 のようになった。

ただし、交流電流の振幅は $i_1 = i_2 = 0.1 \text{ A}$ 、ドライブ周波数は $f_d = 1 \text{ kHz}$ を用いた。

これより、アクチュエータが出力する力は確かに $\cos \varphi$ に比例しており、理論値と良く一致する事がわかる。

³メトラーでの特性評価には、いずれも大コイルを使用している。

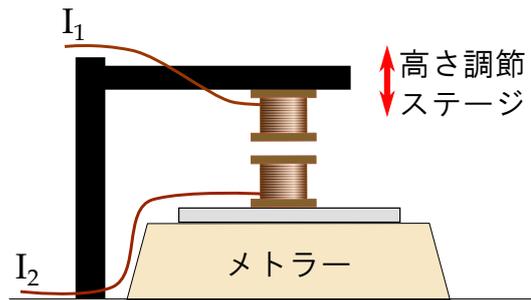
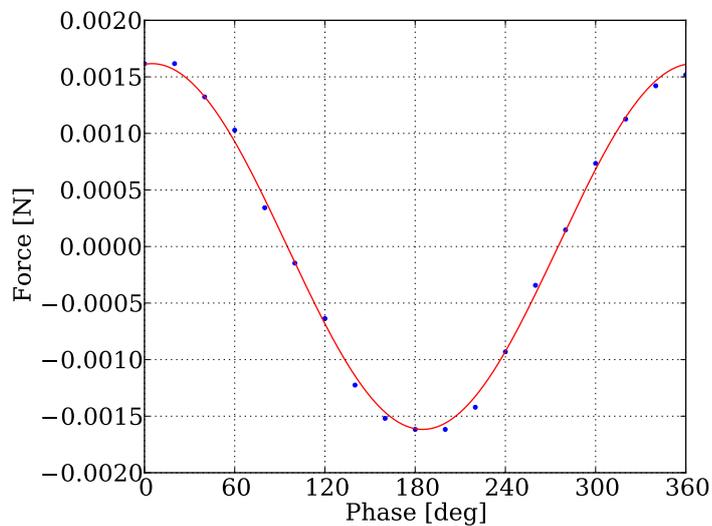


図 6.6: 特性評価のための実験セットアップの概念図

図 6.7: 位相差 φ と力の関係

電流振幅と駆動力の関係

次に、コイル 1 とコイル 2 に流す電流の振幅 i_1, i_2 を変化させた時の力の変動は図 1.8 のようになった。但し、 $\varphi = 0 \text{ deg}$, $f_d = 1 \text{ kHz}$ とした。

これより、アクチュエータが出力する力は十分な線形性を持っている事がわかる。また、この直線の傾きと理論式 1.3 より、

$$\frac{1}{2} \frac{dM}{dx} \sim 0.24 \text{ H/m} \quad (6.35)$$

$$\therefore \frac{dM}{dx} \sim 0.48 \text{ H/m} \quad (6.36)$$

が求められる。この値は補遺 A.2 で誘導起電力の大きさから求めた値とほぼ一致しており、整合性のとれた結果と言える。

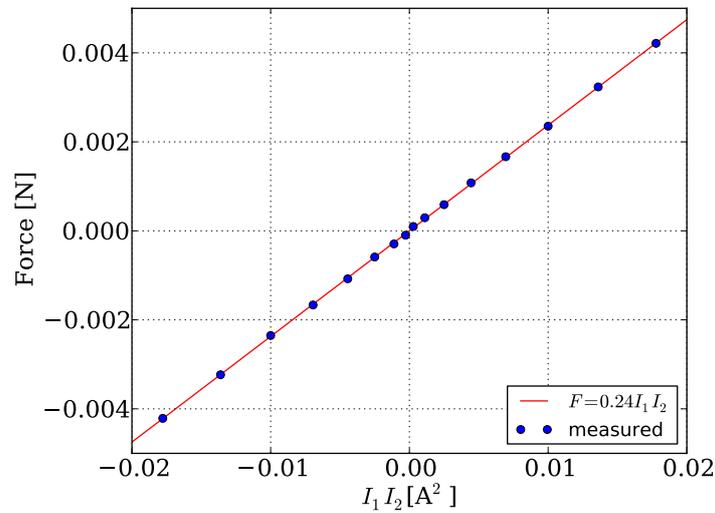


図 6.8: 2つのコイルに流す電流と力の関係。

ドライブ周波数と駆動力の関係

また，ドライブ周波数と駆動力の依存性を示したのが図 1.9 である．駆動力を $F_{\text{coil}} = F_0 \cos \varphi + F_{\text{offset}}$ としたときの F_0 を青点， F_{offset} を赤点で示してある．但し，コイルに流した電流の振幅は $i_1 = i_2 = 0.1$ A である．

これより，駆動力に周波数依存性はなく，十分高い周波数を持つ交流電流での駆動も可能である事がわかる．

2 コイル浮上型での特性

ここでは，2 コイル浮上型における力の特性を調べた．この実験セットアップでは，図 1.6 の下方のコイルをショートさせ，上方のコイルに流す電流による駆動力をメトラで測定した．

上方のコイルに流す電流と駆動力の関係は図 1.10 のようになった．青点が測定値，緑の直線が理論値である．ここでの理論値の計算には，補遺 A.2 の値を用いている．ただし，この場合にかかる力は基本型と比べて非常に弱く，メトラの測定誤差が大きくなっている．ここでは，それぞれ ± 0.01 gw の測定誤差があるとしてエラーバーを設けた．

これより，この測定結果は誤差の範囲でほぼ理論値と一致する事が見てとれる．

6.4 伝達関数

我々は，このアクチュエータを用いたプロトタイプ TOBA の制御にも成功した．ここでは，プロトタイプ TOBA の制御によって得られたオープンループ伝達関数から，コイル-コイル アクチュエータの伝達関数を求めた．

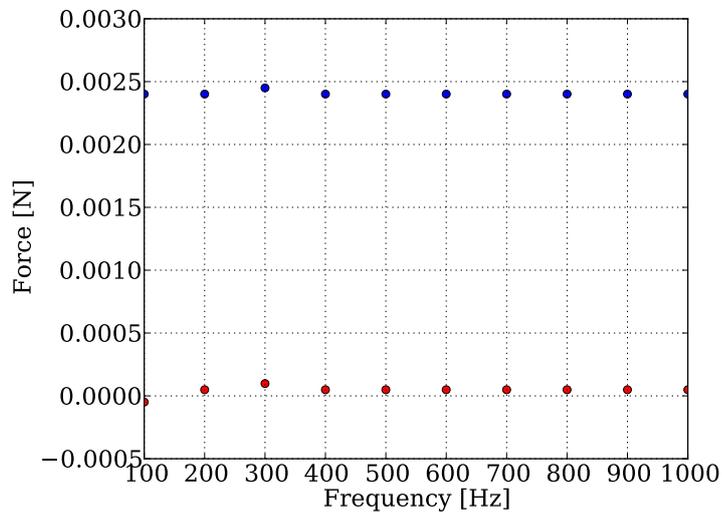


図 6.9: 交流電流の周波数と力の関係

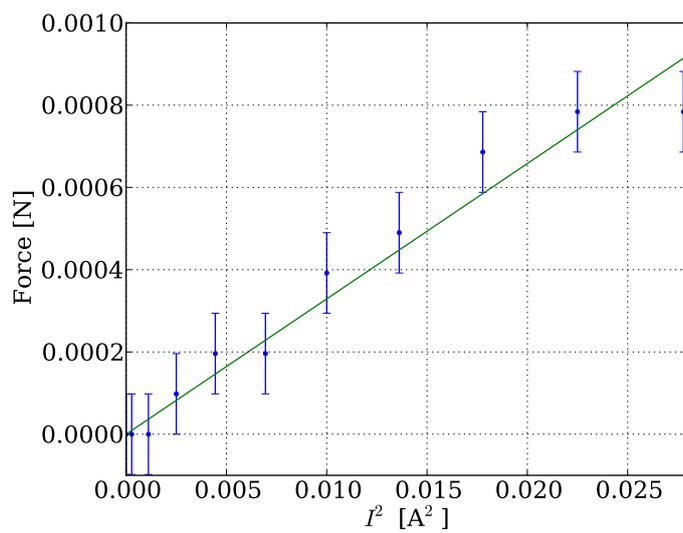


図 6.10: 2 コイル浮上型でのコイルに流す電流と力の関係

6.4.1 基本型アクチュエータ

コイル-コイルアクチュエータを使用した際のテストマスやアクチュエータの配置図を図 1.11 に示した．また，実験に用いたテストマスの写真が図 1.12 である．

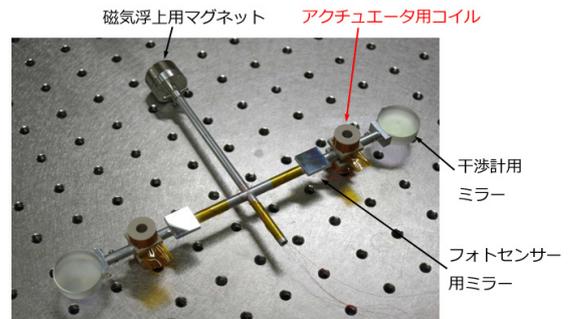
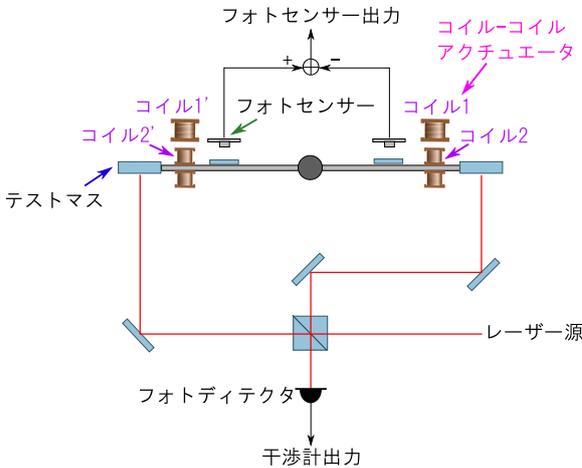


図 6.12: 使用したテストマス

図 6.11: アクチュエータの配置図

実際にアクチュエータとして使用するのは4つのコイルのうち2つだけだが，バランス保持のため，軸対象に2つのコイルを追加して設置した．この4つのコイルは，前節までで使用したコイルより小さいものを使用している⁴．テストマス側のコイルに電流を導入する為の導線は，地面振動をなるべく導入しないよう細い導線を使用し，ねじれ振り子の軸から垂直に遊びを持たせて下ろしてある．また，懸架系，回転読み取り系，制御回路は3.4節で説明したものと同様のものを使用している．

今回は，コイルに流す電流の振幅を制御する事でテストマスの制御を行った．実験室系に固定されたコイル1とコイル1'にはフィードバック信号に応じた振幅の電流を流し，テストマスに固定されたコイル2とコイル2'には一定振幅の交流電流を流した．コイル1と1'に流す交流電流の振幅変調には variable gain amplifier (VGA) を使用し， $I_1 = -I_{1'} = G_{vga} V_{FB} I_0$ の振幅を持った電流がコイルに流れるようになっていた．ここで， G_{vga} はVGAの伝達関数， V_{FB} はフィードバック信号， I_0 は変調をかけない時に発振器から出力される交流電流の振幅である．フィードバック制御のブロックダイアグラムは図 1.13 に示す．

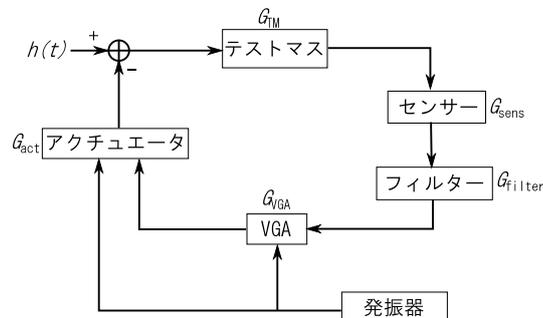


図 6.13: 電流振幅制御における制御ループのブロックダイアグラム

⁴このコイルの抵抗や自己インダクタンスの値は補遺 A を参照の事

この制御で得られた伝達関数は図 1.14 ~ 1.17 である．それぞれ，フォトセンサーとマイケルソン干渉計でテストマス変位をモニターした時のオープンループ伝達関数と，それから換算したアクチュエータの伝達関数である．但し，アクチュエータの伝達関数とは，フィードバック信号からアクチュエータの駆動力までの伝達関数をさす．

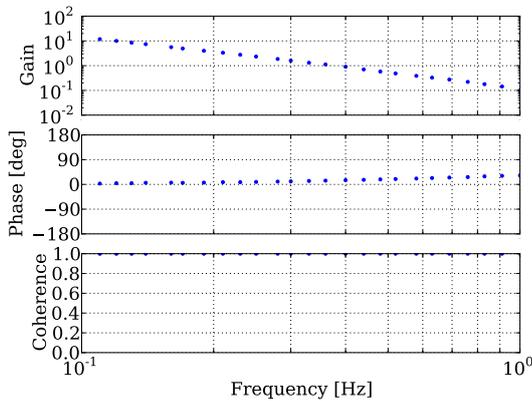


図 6.14: 振幅制御でのオープンループ伝達関数 (回転モニタ : Photo sensor)

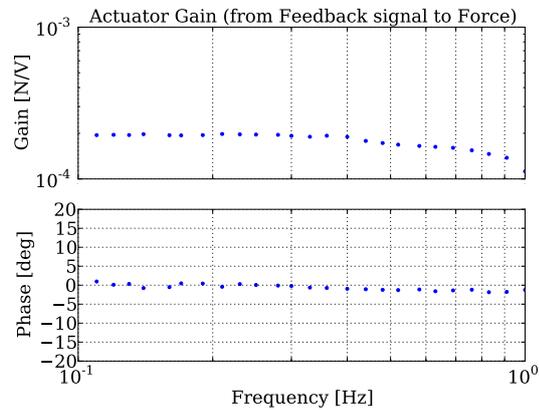


図 6.15: 振幅制御でのコイル-コイル アクチュエータの伝達関数 (回転モニタ : Photo sensor)

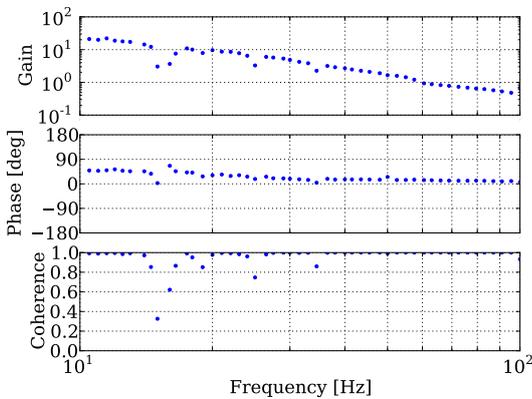


図 6.16: オープンループ伝達関数 (回転モニタ : 干渉計)

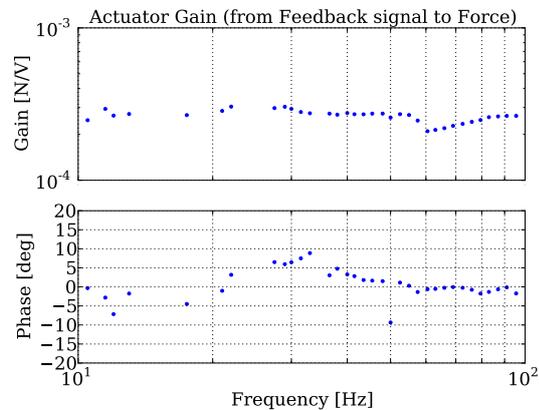


図 6.17: アクチュエータの伝達関数 (回転モニタ : 干渉計)

アクチュエータの伝達関数を計算する際は，共振周波数は十分低いとし，

$$G_{\text{TM}}(\omega) \sim -\frac{1}{I\omega^2\theta} \quad (6.37)$$

とした．ここで I は回転方向の慣性モーメントである．

これらの結果より，基本型コイル-コイル アクチュエータの伝達関数のゲインはほぼ一定であり，位相遅れなども殆ど見られない事がわかる．

6.4.2 2 コイル浮上型アクチュエータの伝達関数

2 コイル浮上型アクチュエータを用いた制御においても，テストマスは基本型の時と同様のものを使用した．ただし，テストマス側のコイルはそれぞれショートさせている．また，ドライブ周波数は1 kHzである．テストマスとアクチュエータの配置図は図 1.18 のようになっている．コイル1，コイル2'には一定の交流電流を流し，コイル2，コイル1'にはフィードバック信号に応じて電流振幅を変調した交流電流を流した．また，このアクチュエータを用いた制御ループも，基本型で用いたのと同様のものを使用している．

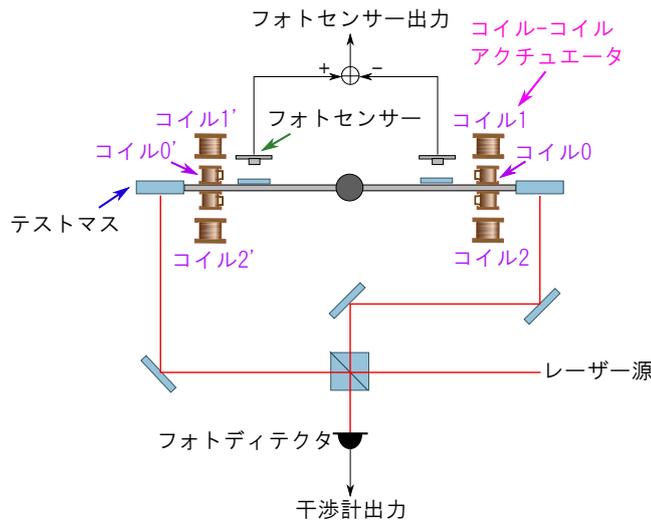


図 6.18: 完全非接触型コイル-コイル アクチュエータの配置図

この制御で得られた伝達関数は図 1.19 ~ 1.22 である．それぞれ，フォトセンサーとマイケルソン干渉計でテストマス変位をモニターした時のオープンループ伝達関数と，それから換算したアクチュエータの伝達関数である．

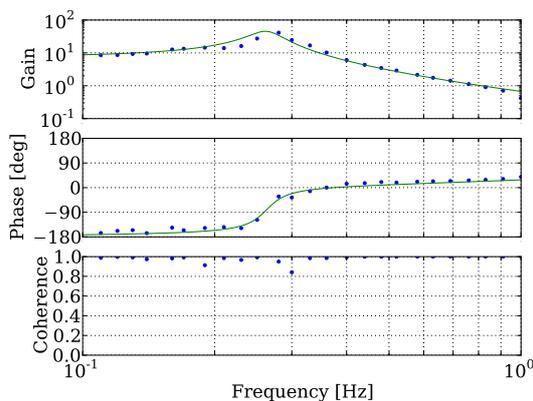


図 6.19: オープンループ伝達関数 (回転モニタ : Photo sensor)

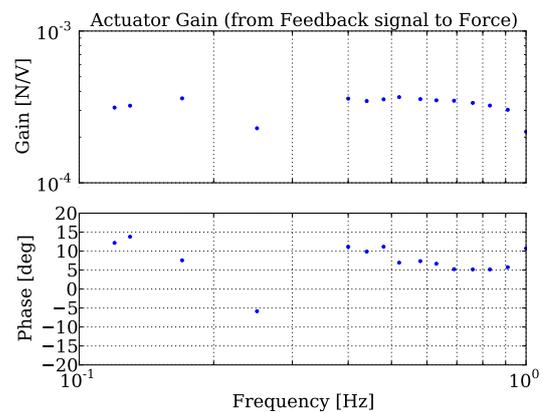


図 6.20: コイル-コイル アクチュエータの伝達関数 (回転モニタ : Photo sensor)

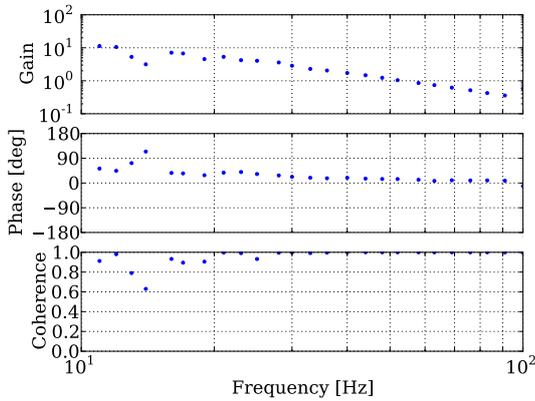


図 6.21: オープンループ伝達関数 (回転モニタ：干渉計)

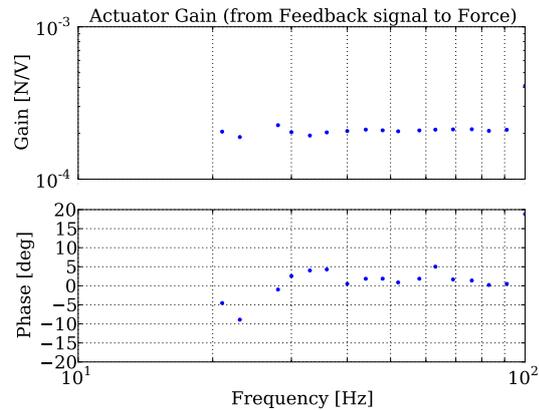


図 6.22: コイル-コイル アクチュエータの伝達関数 (回転モニタ：干渉計)

図 1.19 より, 0.25 Hz 付近に共振周波数が存在するのが見てとれる. これは stiffness による共振周波数の変化の影響である.

また, 図 1.20 でのコイルの伝達関数を計算する際は, テストマスの伝達関数を

$$G_{TM}(\omega) = \frac{1}{I(-\omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2)} \quad (6.38)$$

とし, オープンループ伝達関数から共振周波数と Q 値を求める. これによって求められた共振周波数と Q 値を用いてテストマスの伝達関数を計算している.

このように, 2 コイル浮上型アクチュエータでも有意に周波数依存性の存在しない伝達関数が得られた.

3 コイル浮上型アクチュエータの伝達関数

ここでも基本型, 及び 2 コイル浮上型と同様のセットアップを用いている. 但し, テストマスの片腕についている 2 つのコイルは巻き方向が等しくなるように接続し, 一体型コイルとして扱っている. 実験室側に設置されている両側のコイルに流す交流電流の位相差は $\varphi = \pi/2$ で一定とし, 振幅変調を行う事で制御を行った.

この時のテストマスとアクチュエータの配置, 及び制御のブロックダイアグラムは 2 コイル浮上型と同様のものを用いている. また, 制御系のブロックダイアグラムは, 殆ど基本型と 2 コイル浮上型と同様であるが, 位相差 φ を得る為に, 片方のコイルに流す電流信号の手前に位相器を設置している (図 1.23).

この実験で得られたオープンループ伝達関数, 及びアクチュエータの伝達関数は図 1.24 ~ 1.27 のようになっている. ただし, アクチュエータの伝達関数は 2 コイル浮上型と同様の方法で算出している.

ここでも, 2 コイル浮上型アクチュエータによる制御と同様, stiffness による共振周波数の変化がみられる. また, 3 コイル浮上型アクチュエータの伝達関数にも有意な周波数依存性は見られない事が確認できた.

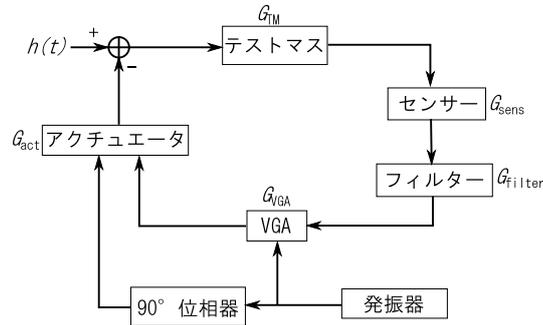


図 6.23: 3 コイル浮上型アクチュエータを用いた時の制御ループのブロックダイアグラム

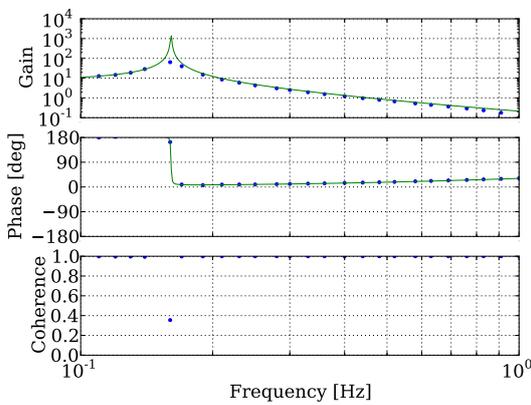


図 6.24: オープンループ伝達関数 (回転モニタ : Photo sensor)

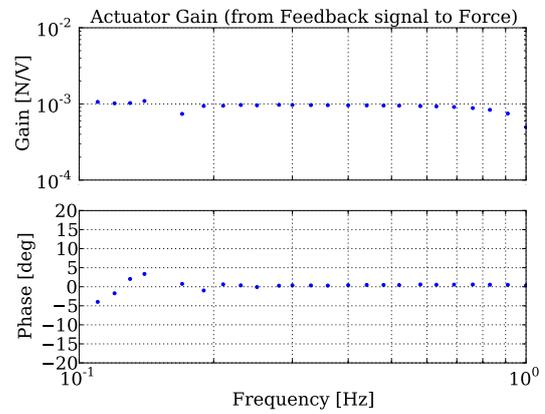


図 6.25: コイル-コイル アクチュエータの伝達関数 (回転モニタ : Photo sensor)

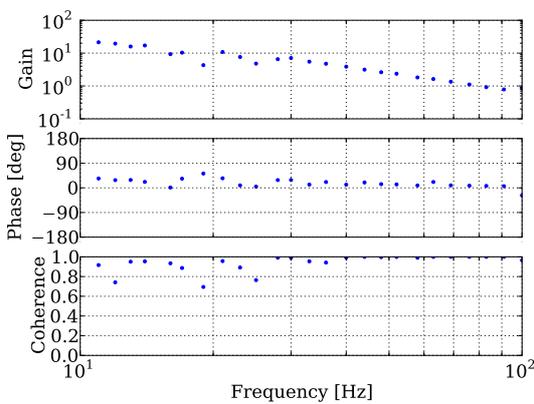


図 6.26: オープンループ伝達関数 (回転モニタ : 干渉計)

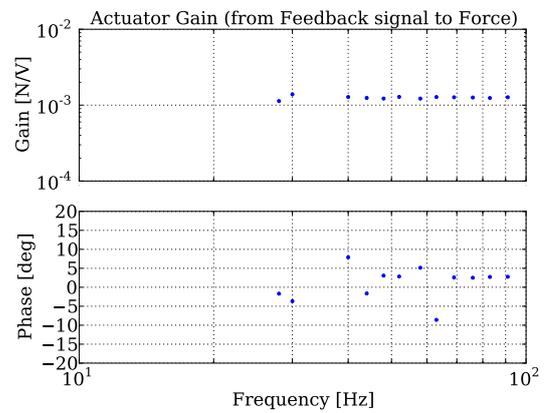


図 6.27: コイル-コイル アクチュエータの伝達関数 (回転モニタ : 干渉計)

6.5 共振周波数の測定

伝達関数測定では、2 コイル浮上型と3 コイル浮上型で共振周波数の変化をみる事ができた。そこで、ここではコイルに流す交流電流の振幅 i_1, i_2 と共振周波数の依存性を調べた。

実験セットアップは2 コイル浮上型での制御と同様のものを用い、実験室側のコイル全てに等しい振幅 I の電流を流した。この時の共振周波数の変化は図 1.28 のようになった。

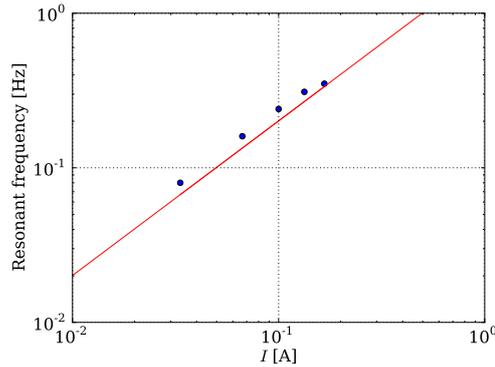


図 6.28: 駆動電流 i と共振周波数の関係。青丸が測定値、赤線が理論値である。

これより、確かに共振周波数は駆動電流に比例し、理論値ともほぼ一致する事がわかった。また、3 コイル浮上型においても同様の共振周波数依存性が見られている。

6.6 雑音源

6.6.1 磁場ノイズ

コイル-コイルアクチュエータは、低周波の磁場雑音の影響は受けにくいと考えられるものの、高周波の磁場雑音の影響は受ける。今、磁場雑音を

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(f) e^{2\pi i f t} df \quad (6.39)$$

と書いたときにテストマス側のコイルが受ける力を考える。基本型でも浮上型でも、ドライブ周波数を f_d とすれば、コイルには $\cos(2\pi f_d t)$ に比例する電流が流れているので、

$$\begin{aligned} F_{\text{mag}} \propto I \Phi &\propto \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(f) \cos(2\pi f_d t) e^{2\pi i f t} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(f) \left(e^{2\pi i (f+f_d) t} + e^{2\pi i (f-f_d) t} \right) df \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(f' - f_d) e^{2\pi i f' t} df' + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(f'' + f_d) e^{2\pi i f'' t} df'' \right] \end{aligned} \quad (6.40)$$

が、テストマスに働く力となる。従って、 $f \sim 1$ Hz 程度の低周波数帯でテストマスに働く力は $\phi(f - f_d) \sim \phi(f + f_d) \sim \phi(f_d)$ に比例する。このアクチュエータを用いると、ドライブ周波数近辺の磁場雑音成分がダウンコンバートされて現れるという事を示している。

この雑音の対策としては、磁場シールドが考えられる。ドライブ周波数のような高周波数帯では、磁場シールドによる遮蔽の効果が大きくなるため、コイル-マグネット アクチュエータに比べて低周波数帯の磁場雑音対策は容易であると期待される。

6.6.2 熱雑音

抵抗に電流が流れると熱雑音が発生する事が知られているが [14]、アクチュエータやセンサーに電気的な構成を用いた時にも同様に熱雑音が生じる。例えば、共振型重力波検出器などで使用されていた静電型トランスデューサー [15] や、コイル-マグネット アクチュエータ [16] でも熱雑音が増加する事がわかっている。これは、テストマスとアクチュエータ（センサー）の間の距離が変動する事により回路内に電流が発生し、その電流が抵抗で散逸を生じさせるという仕組みである。

基本型コイル-コイル アクチュエータでは、電流源として入力インピーダンスの高い定電流回路を用いている限り、テストマスとアクチュエータの距離変動による誘導電流は発生しないので、熱雑音は問題にならない。しかし、浮上型コイル-コイル アクチュエータでは、テストマス側のショートしたコイルにおいて熱雑音が発生する。

このアクチュエータの熱雑音は、1.2.2, 1.2.3 節で導いたパネ定数 κ_{act} と loss angle ϕ_{act} に依存する。loss angle ϕ_{act} が存在した時の熱雑音は

$$\tilde{N}_{\text{thermal}}(f) = \sqrt{4k_{\text{B}}T \frac{\phi_{\text{act}}^2}{2\pi f I}} \quad (6.41)$$

で与えられる。今回の場合は浮上型コイル-コイル アクチュエータの場合は、

$$\tilde{N}_{\text{thermal}}(f) = \mu^2 (i_1^2 + i_2^2) \frac{\omega_d^2 L_0}{R_0^2 + \omega_d^2 L_0^2} \sqrt{4k_{\text{B}}T \frac{R_0}{2\pi f I \omega_d L_0}} \quad (6.42)$$

となる⁵。

6.6.3 ノイズスペクトル

3 コイル浮上型アクチュエータでの制御時に得られたプロトタイプ TOBA の感度は図 1.29 の様になっている。

この感度は、コイル-マグネット アクチュエータを用いた時より悪化しているが、図 1.30 より、VGA のノイズが原因である事がわかる。

6.7 今後の展望

これまでに、大型 TOBA に使用するための新型アクチュエータとして、コイル-コイル アクチュエータを開発した。このアクチュエータは比較的強い駆動力を持ちながら、コイル-マグネット アクチュエータで問題となっていた磁場雑音の影響を低減させる事ができる。そのコンフィギュレーションには基本形と 2 コイル浮上型、3 コイル浮上型の 3 種類のを考案した。それぞれについてその動作確認、特性評価、及びプロトタイプ TOBA の制御に成功しており、重力波検出器の制御に十分使用可能な特性を持っている事が確認できている。

⁵3 コイル浮上型の場合は、 $\cos \varphi = 0$ を仮定している。

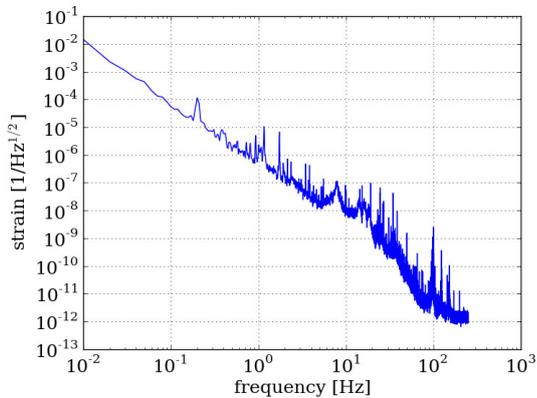


図 6.29: 3 コイル浮上型アクチュエータを用いた時のプロトタイプ TOBA の感度

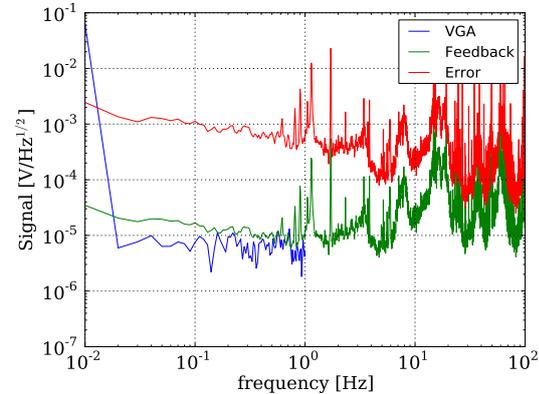


図 6.30: フィードバック信号とエラー信号, VGA からフィードバック信号へのノイズの寄与を示したスペクトル

しかし, 現在のアクチュエータでは, VGA 回路による雑音が非常に大きくなってしまっており, プロトタイプ TOBA の感度を汚してしまっている. 従って次章以降で述べる同時観測にはこのアクチュエータは使用できなかったが, 今後の研究によりノイズの改善が求められる. 改善策としては, VGA の IC からミキサーなどを使ったアンプに切り替える, デジタル制御に切り替える, などといった対策が考えられる.

小さいコイルを
大きいコイルの
中に入れる

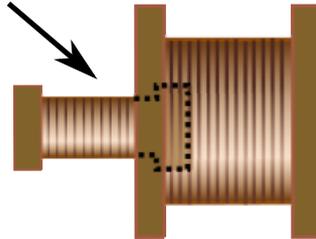


図 6.31: $\frac{dM}{dx}$ を小さく, M を大きくするコイルの配置例

加えて, 現在の非接触型を TOBA で使用する際に問題となるであろう stiffness については, M を比較的大きくしたまま dM/dx を小さくするようなコイルの配置を考える事で, 十分影響しないレベルに設計できると期待される. 例えば, 大きいコイルと小さいコイルを用意し, 小さいコイルを大きいコイルの円筒の中に入れ込む形でセットアップすれば, dM/dx は小さくなるが M の値は大きくなる. (図 1.31) 更に, 超伝導コイルを用いる事で M は大きくなると期待されるため, stiffness を小さくしたままより大きな力を得る事が出来るのではないかと考えられる. このコイルの配置については, 数値解析などを用いて具体的な最適値の見積もりを行う必要があると考えられる.

また, 重力波検出器に使用する際に問題となるのが, 熱雑音である. しかし, これも超伝導コイルを用いる事によって解決可能であると考えられる. 超伝導コイルの抵抗値はほとんど 0 と考えてよい為, ここ

で散逸が生じる事はない．特に TOBA の将来計画のように，テストマスを極低温に冷却する場合には，超伝導コイルは非常に有用であると考える．

以上の様に，コイル-コイル アクチュエータは現在まだ開発段階であるが，様々な工夫により将来的には DECIGO や大型 TOBA において感度を向上させる可能性を持った新型アクチュエータである．今後は更なる特性評価を重ね，実際の熱雑音の評価なども行ったうえで，図 1.31 のような構成のアクチュエータの開発や，超伝導コイルを用いたアクチュエータの開発などを行う予定である．

第7章 まとめ

今回、地上における低周波重力波検出器 TOBA のプロトタイプを用いて、相関解析による背景重力波探査、及び新型アクチュエータの開発を行った。

7.1 背景重力波探査

我々は、プロトタイプ TOBA2 台を用いて背景重力波探査を行った。東京大学と京都大学の 2ヶ所に設置されているプロトタイプ TOBA を用い、2011 年 10 月 30 日深夜から未明にかけて、約 10 時間の同時観測を行い、背景重力波を観測ターゲットとした相関解析を行った。

相関解析は、背景重力波探査において非常に重要な解析手法である。この相関解析の過程において、データセレクションや模擬信号の導入による上限値の設定方法など、相関解析の一連の手順を確立した。解析の結果、背景重力波の信号は検出されず、false alarm rate を 5 % と設定した条件の下、95 % 信頼度の上限値として、0.035 – 0.830 Hz で

$$\Omega_0 h_0^2 < 1.9 \times 10^{19} \quad (7.1)$$

を設けた。この値は石徹白氏によって得られた 1 台での解析結果より 4 倍程厳しい値である。しかし、0.3 Hz 以下での現在の感度が以前より悪化している事によって、期待される程は上限値を更新する事ができなかった。但し、この上限値は 0.035 – 0.850 Hz という広い周波数領域では世界で初めて設けられた上限値である。また、今回用いた解析手法は将来開発予定の大型 TOBA でも使用可能なもので、これによって TOBA を用いた相関解析のデモンストレーションに成功した。これは、今後開発予定の大型 TOBA による背景重力波検出の可能性を示唆するものである。

今後、大型 TOBA の開発によって、背景重力波に対して更に厳しい上限値を設定できるであろう。例えば、3 章で例に挙げた大型 TOBA の感度が達成できれば、1 年間の同時観測によって理論的上限値 (BBN limit) を超える事ができると期待されている。また、今回設定した上限値の周波数領域は宇宙間重力波検出器 NGO, DECIGO 双方の観測周波数帯に及ぶものであり、TOBA の観測によってこれらのミッションにサイエンス的なフィードバックが可能であるとも考えられる。

このように、今回の同時観測・相関解析の結果は、今後建設予定の大型 TOBA による背景重力波検出の可能性だけでなく、他の重力波検出器との共同解析によっても有意義な結果が得られるであろう事を示すものとなった。

7.2 コイル-コイル アクチュエータの開発

今後の TOBA の感度向上のため、新たなアクチュエータ：コイル-コイル アクチュエータを開発した。コイル-コイル アクチュエータは、コイル-マグネット アクチュエータよりも磁場雑音の影響を受けにくく、静電型アクチュエータより強い駆動力を持つという利点がある。

これは、2つ以上のコイルによって構成される。このコイルに交流電流を流し、その磁氣的相互作用を用いて制御対象物を駆動する。このアクチュエータは、比較的強い駆動力を維持しながら環境磁場雑音などの雑音の影響を受けにくいという利点を持つ。また、実験室側とテストマス側に設置された2つのコイルに電流を流す方法のものと、テストマス側にはショートしたコイルを用いて誘導起電力による磁力を用いる方法のもの2種類の計3種類のコイル-コイル アクチュエータを開発した。

現在までに、この3種類の方法における制御の理論構築及び動作確認を行い、世界で初めて、重力波検出器（プロトタイプ TOBA）の制御に成功した。

テストマス側にも電流を流す方法では、制御力は交流電流の振幅に比例した力を得る事ができる。この制御力はコイルに流す交流電流の周波数にも依存しない。また、プロトタイプ TOBA の制御実験から、伝達関数に有意な周波数依存性は認められない事が確認できた。但し、この方法は、テストマス側のコイルに電流を流さなければならないという問題点がある。そのためテストマスに導線を渡さなければならない、地面振動の導入や懸架系の熱雑音の増加を招く恐れがある。

そこで、テストマス側にはショートしたコイルを用い、テストマスへの電流の導入が不必要な方法でのアクチュエータの駆動にも成功した。これには2種類の方法があり、1つは実験室側に設置された電流を流すコイルと、ショートしたコイルとの間に働く斥力を用いるものである。これによる駆動力は電流の2乗に比例する。もう1つの方法はテストマス側には1つの（もしくは一体化した）コイルを設置し、このコイルを挟み込むように実験室側に電流を流すコイルを設置する。するとテストマス側のコイルには実験室側の双方の電流による誘導電流が生じる為、1つのコイルが媒介となって実験室側の2つのコイルに流れる電流が互いに相互作用しあうというものである。これによる駆動力はコイルに流す電流振幅に比例する。これによって浮上型においても線形制御が可能となった。これまでに、双方の方法でプロトタイプ TOBA の制御に成功しており、これらの方法でもアクチュエータの伝達関数に有意な周波数依存性は見られない事が確認できている。しかし、これらの方法にはバネの効果や loss angle が存在し、共振周波数の上昇や、熱雑音の増加が懸念される。

この様に、このアクチュエータは磁場雑音に強く、かつ駆動力の大きいアクチュエータとして十分な動作をする事が確認できたが、共振周波数の上昇といった問題も存在する事がわかった。また、loss angle による熱雑音も問題となるが、これは将来的には超伝導コイルを使用する事で回避できると考えられる。今後は、通常のコイルでの熱雑音の評価や、超伝導コイルの可能性などを検討し、実用化に向けて更に研究を進め、将来的には大型 TOBA に使用する予定である。

補遺 A コイルの特性

今回コイル-コイル アクチュエータに使用したコイルは、大きなコイルと小さなコイルの 2 種類がある。アクチュエータの特性評価 (1.3 節) では大コイル 2 つを使用し、プロトタイプ TOBA の制御の際には、実験室側に固定するコイルには大きなコイルを、テストマス側には小さなコイルを用いた。



図 A.1: コイル-コイル アクチュエータに使用したコイル

A.1 コイルの抵抗値と自己インダクタンス

これらのコイルの抵抗値，及び自己インダクタンスの値は表 A.1 のようになっている。

	抵抗値 R	自己インダクタンス L
大コイル	36 Ω	16 mH
小コイル	11 Ω	0.14 mH

表 A.1: 使用したコイルの特性

A.2 相互インダクタンス

ここでは、実測した相互インダクタンス M の値、及び相互インダクタンスの距離依存性 dM/dx の値について述べる。

実験では、2つのコイルを接近させ、片方のコイルに交流電流を流す。これによって他方のコイルに生じる誘導起電力の大きさをオシロスコープでモニターし、相互インダクタンス M を求めた。また、2つのコイルの距離をマイクロメータで変化させながら相互インダクタンスを測定する事によって、その距離依存性 dM/dx も求めた。

大コイル2つの間の相互インダクタンスは図 A.2、大コイルと小コイルの間の相互インダクタンスは図 A.3 のようになった。これより、制御で用いるダイナミックレンジ内では M はほとんど線形で、 $M = M_0 + \mu x$ と書いて良い事がわかる。

また、このグラフの傾きから得られた $\frac{dM}{dx}$ は、大コイル2つの間では

$$\frac{dM}{dx} \sim 0.41 \text{ H/m} \quad (\text{A.1})$$

大コイルと小コイルの間では

$$\frac{dM}{dx} \sim 0.15 \text{ H/m} \quad (\text{A.2})$$

となっている。

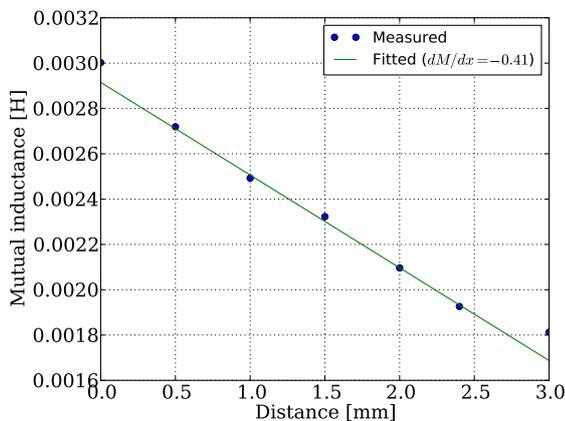


図 A.2: 大コイル2つの間の相互インダクタンス

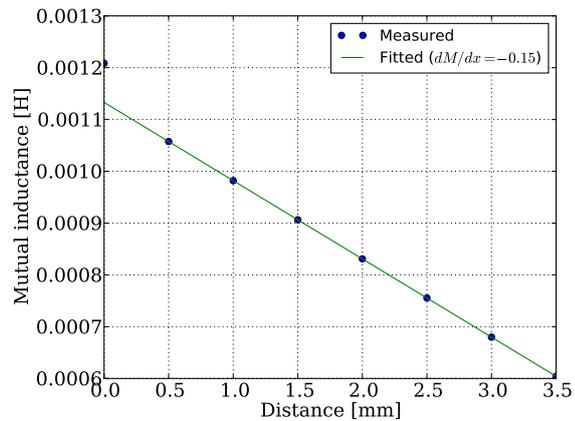


図 A.3: 大コイルと小コイルの間の相互インダクタンス

補遺 B 定電圧ドライバでのコイル-コイル アクチュエータの応答

1.2.1 節では、振幅 $i_k (k = 1, 2)$ をもった交流電流を流す事によって制御対象物をアクチュエートする時について考えた。しかし、電流振幅を一定に保つ場合は定電流電源を用いなければならない。では、定電圧電源を用いた場合はどのような挙動を見せるのだろうか。ここでは、定電圧電源を用いる際に生じる誘導電流を考慮しながら、その駆動について議論する。

B.1 理論値

コイル 1 にかかる電圧を $V_1 = v_1 e^{i\omega t}$ 、コイル 2 にかかる電圧を $V_2 = v_2 e^{i(\omega t + \varphi)}$ とする。また、 R, L をそれぞれコイルの抵抗とインダクタンスとし、以下では簡易化の為、2 つのコイルは同じであると仮定する。ドライブ周波数は $f_d = \omega_d / 2\pi$ である。この時コイル 1 に流れる電流 I_1 はドライブ電流 i_{1d} と誘導電流 i_{1i} の和、 $I_1 = i_{1d} + i_{1i}$ で書く事ができ、 i_{1d} と i_{1i} はそれぞれ

$$i_{1d} = \frac{v_1}{R + i\omega L} e^{i\omega t} \quad (\text{B.1})$$

$$i_{1i} = \frac{1}{R + i\omega L} \left(-M \frac{di_{2d}}{dt} \right), \quad (\text{B.2})$$

同様にコイル 2 に流れる電流 $I_2 = i_{2d} + i_{2i}$ も

$$i_{2d} = \frac{v_2}{R + i\omega L} e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (\text{B.3})$$

$$i_{2i} = \frac{1}{R + i\omega L} \left(-M \frac{di_{1d}}{dt} \right), \quad (\text{B.4})$$

と書ける。以上より、

$$I_1 = \frac{v_1}{R + i\omega L} e^{i\omega t} + \frac{i\omega M v_2}{(R + i\omega L)^2} e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (\text{B.5})$$

$$I_2 = \frac{v_2}{R + i\omega L} e^{i(\omega t + \varphi)} + \frac{i\omega M v_1}{(R + i\omega L)^2} e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (\text{B.6})$$

$$(\text{B.7})$$

である。この電流を用いて、1.2.1 節と同様にエネルギーを求めると、

$$T = \frac{L}{2} I_1^2 + \frac{L}{2} I_2^2 + M I_1 I_2 \quad (\text{B.8})$$

$$(\text{B.9})$$

従ってこの系に働く力は

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dM}{dx} \text{Re} [I_1 I_2^*] \\ &= \frac{1}{2} \frac{dM}{dx} \left[\left(\frac{v_1 v_2}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{\omega^2 M^2 v_1 v_2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} \right) \cos \phi - \frac{\omega^2 M L (v_1^2 + v_2^2)}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

となる。

B.1.1 特性評価

特性評価は 1.3 節と同様の実験セットアップによって行った。

位相変化と力の関係

V_1 と V_2 の位相差 ϕ を変化させたときの力の変動は図 B.1 のようになった。ただし、 $v_1 = v_2 = 3.0 \text{ V}$, $f_d = \omega_d/2\pi = 1 \text{ kHz}$ である。

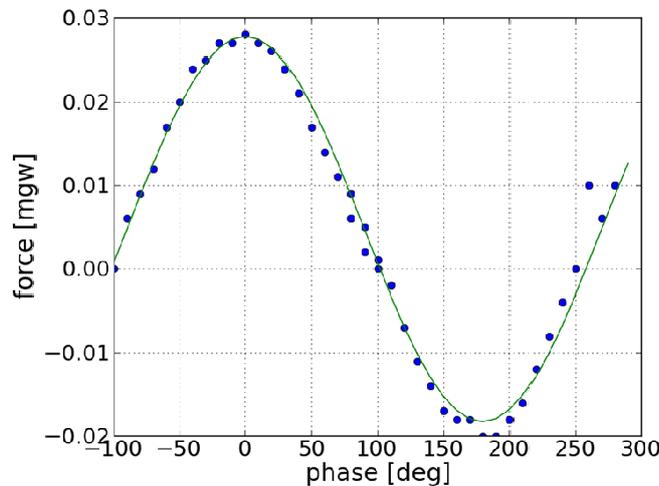


図 B.1: 位相差 ϕ とアクチュエータにかかる力の関係

これより、理論値と同様、 $\cos \phi$ に比例した力が発生する事がわかるが、力に DC のオフセットが乗っている事がみとれる。

力のドライブ周波数依存性

交流電圧の角振動数 ω_d と駆動力の依存性を図 B.2 に示す。但し、グラフの上図は $F_{\text{coil}} = F_0 \cos \phi + F_{\text{offset}}$ としたときの F_0 、下図は F_{offset} である。また、 $v_1 = v_2 = 3.0 \text{ V}$ を用いた。

ただし、グラフの I_1, I_2 の微分の項（緑色と黄色の直線）は、力がエネルギーの x についての全微分ではなく偏微分である事がわかる様、比較の為に示した。“total” は力がエネルギーの全微分であったときの計算値の合計の値である。この結果から、測定結果は式 B.10 とよく一致する事が確認できる。

これより、高周波になると駆動力の振幅 F_0 が低下し、高周波数の交流電圧による駆動は難しい。つまり、2つのコイルを用いたアクチュエータの場合、コイル-マグネット アクチュエータなどで一般的に用いられる定電圧ドライバではなく、定電流ドライバの使用が必要である事がわかる。

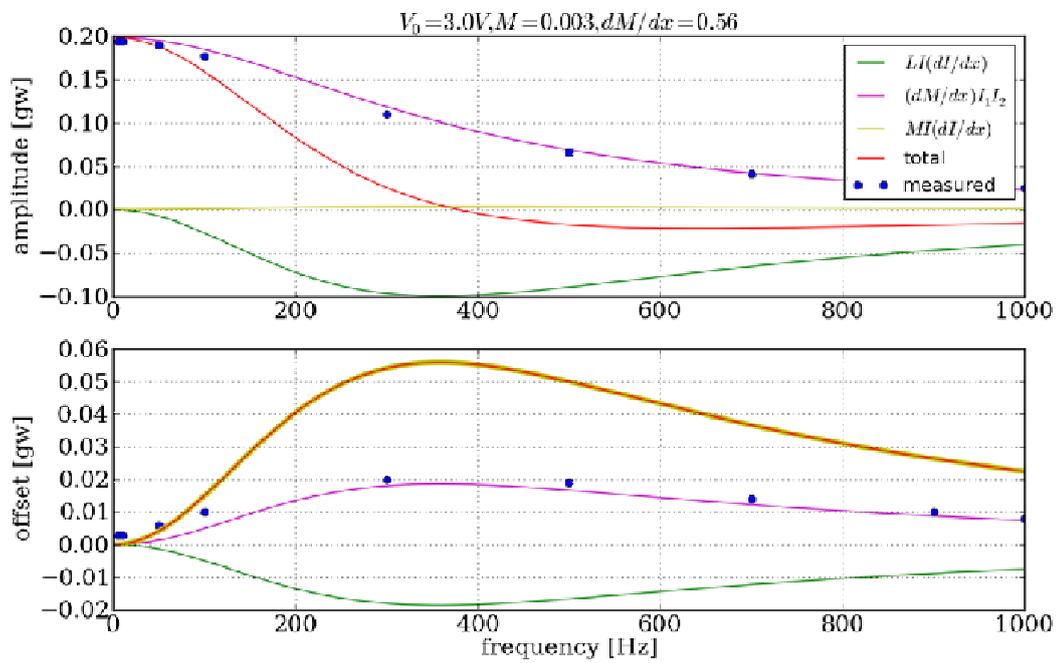


図 B.2: 交流電圧の周波数と力の関係

補遺 C Optimal filter と Overlap reduction function

C.1 Optimal filter の導出

ここでは, optimal filter を導出する .
式 5.21 より ,

$$Y = \int_{-\infty}^{+\infty} df \tilde{s}_1^*(f) \tilde{Q}(f) \tilde{s}_2(f) \quad (\text{C.1})$$

の様に Y が導かれたが, ここまででは $\tilde{Q}(f)$ は任意の実数関数である . そこで, より効率的に重力波信号 Y を得る為に, この signal-to-noise ratio (S/N) が最大になるように $\tilde{Q}(f)$ を設定する . ここで, signal-to-noise ratio の S は背景重力波が存在するときの Y のアンサンブル平均, N は背景重力波が無い時の Y の RMS (root mean square) であった .

まず, S はどのように書けるのか考える . 2 つの検出器のノイズ同士, 及びノイズと背景重力波に相関が存在しないと仮定すると,

$$S = \langle Y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{h}_1^*(f) \tilde{h}_2(f)) \tilde{Q}(f) \quad (\text{C.2})$$

となる . ここに重力波信号

$$\tilde{h}_i(f) = \sum_{A=+, \times} \int d^3 \hat{\mathbf{n}} \tilde{h}_A e^{-i2\pi f \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}_i / c} F_i^A(\hat{\mathbf{n}}) \quad (\text{C.3})$$

を代入すれば

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} df \sum_{A, A'} \int d^3 \hat{\mathbf{n}} d^3 \hat{\mathbf{n}}' \int \frac{d\phi}{2\pi} e^{-i2\pi f (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{x}_2) / c} \times F_1^A(\hat{\mathbf{n}}, \phi) F_2^{A'}(\hat{\mathbf{n}}', \phi) \langle h_A(f, \hat{\mathbf{n}}) h_{A'}(f, \hat{\mathbf{n}}') \rangle \tilde{Q}(f) \quad (\text{C.4})$$

となる . ただし, $F_i^A(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ は pattern function である (3.1.3 節参照) 更に背景重力波の power spectrum density (PSD) の定義式 5.1 を用いて

$$S = \frac{T}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} df S_h(f) \Gamma(f) \tilde{Q}(f) \quad (\text{C.5})$$

となる . ただし, 偏波角 ϕ について積分してある . ここで $\Gamma(f)$ は

$$\Gamma(f) \equiv \int \frac{d^3 \hat{\mathbf{n}}}{4\pi} \int \frac{d\phi}{2\pi} \left[\sum_A F_1^A(\hat{\mathbf{n}}) F_2^A(\hat{\mathbf{n}}) \right] e^{i2\pi f \hat{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{x} / c} \quad (\text{C.6})$$

で定義され, これを規格化した

$$\gamma(f) = \frac{\Gamma(f)}{F_{12}} \quad (\text{C.7})$$

が” (規格化された) overlap reduction function” とよばれる . ただし

$$F_{12} \equiv \int \frac{d^3 \hat{n}}{4\pi} \int \frac{d\phi}{2\pi} \sum_A F_1^A(\hat{n}) F_2^A(\hat{n}) \Big|_{\text{aligned}} \quad (\text{C.8})$$

である . ”aligned” の添え字は , 2 つの検出器を同じ場所に , 同じ方向を向けて設置したという事 を表して あり , これが $\Gamma(f)$ の最大値となる . つまり , $\gamma(f)$ は 2 つの検出器での同じ重力波に対する 応答の 違いを表して あり , $-1 \leq \gamma(f) \leq 1$ の値をとる . 応答が同じであれば $\gamma(f) = 1$ となり , 逆相の 応答を示す 場合は $\gamma(f) = -1$ となる .

さて , 次に S/N の N を考える . N は背景重力波が存在しない時の Y の rms (root mean square) で 定義され ,

$$N^2 = [\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2] \quad (\text{C.9})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} df \int_{-\infty}^{+\infty} df' [\langle \tilde{n}_1^*(f) \tilde{n}_2(f) \tilde{n}_1(f') \tilde{n}_2^*(f') \rangle - \langle \tilde{n}_1^*(f) \tilde{n}_2(f) \rangle \langle \tilde{n}_1(f') \tilde{n}_2^*(f') \rangle] \tilde{Q}(f) \tilde{Q}^*(f') \quad (\text{C.10})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} df \int_{-\infty}^{+\infty} df' \langle \tilde{n}_1^*(f) \tilde{n}_2(f) \tilde{n}_1(f') \tilde{n}_2^*(f') \rangle \tilde{Q}(f) \tilde{Q}^*(f') \quad (\text{C.11})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} df \int_{-\infty}^{+\infty} df' \langle \tilde{n}_1^*(f) \tilde{n}_1(f') \rangle \langle \tilde{n}_2(f) \tilde{n}_2^*(f') \rangle \tilde{Q}(f) \tilde{Q}^*(f') \quad (\text{C.12})$$

$$= \frac{T}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} df |\tilde{Q}(f)|^2 S_{n,1}(f) S_{n,2}(f) \quad (\text{C.13})$$

となる . ここでのノイズの PSD $S_{n,i}(f)$ も , 背景重力波と同様の定義 $\langle \tilde{n}_i(f) \tilde{n}_i^*(f') \rangle \equiv \delta(f-f') S_{n,i}(f)/2$ を用いた . ここで合成ノイズ PSD

$$S_n(f) \equiv \sqrt{S_{n,1}(f) S_{n,2}(f)} \quad (\text{C.14})$$

を用いれば

$$N^2 = \frac{T}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} df |\tilde{Q}(f)|^2 S_n^2(f) \quad (\text{C.15})$$

となる .

以上より , signal-to-noise ratio は

$$\frac{S}{N} = \sqrt{T} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} df S_h(f) \Gamma(f) \tilde{Q}(f)}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} df |\tilde{Q}(f)|^2 S_n^2(f) \right]^{1/2}} \quad (\text{C.16})$$

となる . ここで , 任意の 2 つの関数 $A(f)$ と $B(f)$ の内積

$$(A, B) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} df A^*(f) B(f) S_n^2(f) \quad (\text{C.17})$$

を定義すれば , S/N は

$$\frac{S}{N} = \sqrt{T} \frac{(\tilde{Q}, \Gamma S_h / S_n^2)}{(\tilde{Q}, \tilde{Q})^{1/2}} \quad (\text{C.18})$$

$$\sqrt{T} (\tilde{q}, \Gamma S_h / S_n^2) \quad (\text{C.19})$$

と書き直せる．但し $\tilde{q}(f)$ は $\tilde{Q}(f)$ の規格化関数

$$\tilde{q}(f) = \frac{\tilde{Q}(f)}{(Q, Q)^{1/2}} \quad (\text{C.20})$$

である．これより， $\tilde{q}(f)$ は規格化されている為， $\tilde{Q}(f)$ の絶対値と S/N は無相関であるり， $(\tilde{q}, \Gamma S_h/S_n^2)$ を最大にする $\tilde{q}(f)$ を求めれば良い事がわかる．関数の内積はベクトルの内積と同様に考える事ができるため，この内積を最大にするのは $\tilde{q}(f)$ が $\Gamma S_h/S_n^2$ と並行，つまり

$$\tilde{Q}(f) \propto \frac{\Gamma(f)S_h(f)}{S_n^2(f)}, \quad (\text{C.21})$$

$$\begin{aligned} \frac{S}{N} &= \sqrt{T} \left(\frac{\Gamma S_h}{S_n^2}, \frac{\Gamma S_h}{S_n^2} \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{T} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} df \frac{\Gamma^2(f)S_n^2(f)}{S_n^2(f)} \right]^{1/2} \\ &= \left[2T \int_0^{+\infty} df \frac{\Gamma^2(f)S_h^2(f)}{S_n^2(f)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

の時である．ここで注意しなければならないのが，我々は $S_h(f)$ の絶対値を知らない事である．しかし， S/N を最大にする $\tilde{Q}(f)$ は，これと並行，つまり周波数依存性が同じであれば良い． $\Omega_{\text{gw}}(f) = \Omega_0 = \text{const.}$ であると仮定すれば， $S_h(f) \propto f^{-3}$ なので，

$$\tilde{Q}(f) \propto \frac{\Gamma(f)}{f^3 S_n^2(f)} \quad (\text{C.23})$$

を用いれば良い事になる．

更に，便宜上 $\langle Y \rangle = h_0^2 \Omega_0 T$ となるように $\tilde{Q}(f)$ を規格化する．

$$\tilde{Q}(f) = \mathcal{N} \frac{\Gamma(f)}{f^3 S_n^2(f)} \quad (\text{C.24})$$

とおくと，

$$\langle Y \rangle = \frac{T\mathcal{N}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} df \frac{3H_0^2 \Omega_0}{4\pi^2} \frac{\Gamma^2(f)}{f^6 S_n^2(f)} \quad (\text{C.25})$$

$$= \mathcal{N} \cdot \Omega_0 h_0^2 T \cdot \frac{3H_{100}^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} df \frac{\Gamma^2(f)}{f^6 S_n^2(f)}. \quad (\text{C.26})$$

従って，

$$\mathcal{N} = \frac{8\pi^2}{3H_{100}^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} df \frac{\Gamma^2(f)}{f^6 S_n^2(f)} \right]^{-1} \quad (\text{C.27})$$

の時に $\langle Y \rangle = h_0^2 \Omega_0 T$ が満たされる事となる．

以上を規格化された overlap reduction function $\gamma(f)$ で書きなおせば，TOBA や干渉計の場合， $F_{12} = 2/5$ であるため，

$$\tilde{Q}(f) = \mathcal{N}' \frac{\gamma(f)}{f^3 S_n^2(f)} \quad (\text{C.28})$$

$$\mathcal{N}' = \frac{20\pi^2}{3H_{100}^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} df \frac{\gamma^2(f)}{f^6 S_n^2(f)} \right]^{-1} \quad (\text{C.29})$$

となる．

C.2 Overlap reduction function の計算

これまでの導出の中で, overlap reduction function は式 C.6 で定義される事を示した. ここでは, この overlap reduction function の具体的な計算方法について説明する [25][29].

まず, 簡単の為に

$$\delta \mathbf{x} \equiv d \hat{\mathbf{s}} \quad (\text{C.30})$$

$$\alpha \equiv \frac{2\pi f d}{c} \quad (\text{C.31})$$

を定義しておく. すると, pattern function の定義式 3.23 より, detector tensor D_k^{ab} (k は検出器のインデックス) と polarization tensor $e_{ab}^A(\hat{\mathbf{n}})$ を用いて

$$\Gamma(f) = D_1^{ab} D_2^{cd} \Gamma'_{abcd}(\alpha, \hat{\mathbf{s}}) \quad (\text{C.32})$$

$$\Gamma'_{abcd}(\alpha, \hat{\mathbf{s}}) = \frac{1}{4\pi} \sum_A \int d^3 \hat{\mathbf{n}} e^{i\alpha \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}} e_{ab}^A(\hat{\mathbf{n}}) e_{cd}^A(\hat{\mathbf{n}}) \quad (\text{C.33})$$

と書き直せる. $\Gamma'_{abcd}(f)$ は, a と b, c と d , ab と cd の間で対称であり, ab と cd のペアに対して traceless である. この点に注意すれば, このテンソルは一般的に

$$\begin{aligned} \Gamma'_{abcd}(\alpha, \hat{\mathbf{s}}) = & A(\alpha) \delta_{ab} \delta_{cd} + B(\alpha) (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{bc} \delta_{ad}) + C(\alpha) (\delta_{ab} s_c s_d + \delta_{cd} s_a s_b) \\ & + D(\alpha) (\delta_{ac} s_b s_d + \delta_{ad} s_b s_c + \delta_{bc} s_a s_d + \delta_{bd} s_a s_c) + E(\alpha) s_a s_b s_c s_d \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

と書き直す事ができる.

更にここで

$$p(\alpha) \equiv \Gamma'_{abcd}(\alpha, \hat{\mathbf{s}}) \delta^{ab} \delta^{cd} \quad (\text{C.35})$$

$$q(\alpha) \equiv \Gamma'_{abcd}(\alpha, \hat{\mathbf{s}}) (\delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{bc} \delta^{ad}) \quad (\text{C.36})$$

$$r(\alpha) \equiv \Gamma'_{abcd}(\alpha, \hat{\mathbf{s}}) (\delta^{ab} s^c s^d + \delta^{cd} s^a s^b) \quad (\text{C.37})$$

$$s(\alpha) \equiv \Gamma'_{abcd}(\alpha, \hat{\mathbf{s}}) (\delta^{ac} s^b s^d + \delta^{ad} s^b s^c + \delta_{bc} s^a s^d + \delta_{bd} s^a s^c) \quad (\text{C.38})$$

$$t(\alpha) \equiv \Gamma'_{abcd}(\alpha, \hat{\mathbf{s}}) s^a s^b s^c s^d \quad (\text{C.39})$$

を定義すると,

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix}(\alpha) = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 & 4 & 1 \\ 6 & 24 & 4 & 16 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 8 & 2 \\ 4 & 16 & 8 & 24 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix}(\alpha) \quad (\text{C.40})$$

となる. この $p(\alpha), \dots, t(\alpha)$ を積分から計算する事で $A(\alpha), \dots, E(\alpha)$ を求めていく.

さて, 積分を実行するにあたり, z 軸方向が $\hat{\mathbf{s}}$ と平行になるような座標系を選ぶと,

$$p(\alpha) = 0 \quad (\text{C.41})$$

$$q(\alpha) = \frac{8}{4\pi} \int_0^\pi 2\pi \sin \theta d\theta e^{i\alpha \cos \theta} = 4 \int_{-1}^1 dx e^{i\alpha x} = 8j_0(\alpha) \quad (\text{C.42})$$

$$r(\alpha) = 0 \quad (\text{C.43})$$

$$s(\alpha) = \frac{8}{4\pi} \int_0^\pi 2\pi \sin \theta d\theta e^{i\alpha \cos \theta} \sin^2 \theta = 4 \int_{-1}^1 dx e^{i\alpha x} (1-x^2) = \frac{16}{\alpha} j_1(\alpha) \quad (\text{C.44})$$

$$t(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi 2\pi \sin \theta d\theta e^{i\alpha \cos \theta} \sin^4 \theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx e^{i\alpha x} (1-x^2)^2 = \frac{8}{\alpha^2} j_2(\alpha) \quad (\text{C.45})$$

となる．ここで， $j_0(\alpha), j_1(\alpha), j_2(\alpha)$ は第 1 種球ベッセル関数である．これを用いて行列式 C.40 を解くと，

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix}(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 2\alpha & 1 \\ \alpha^2 & -2\alpha & 1 \\ \alpha^2 & -2\alpha & -5 \\ -\alpha^2 & 4\alpha & -5 \\ \alpha^2 & -10\alpha & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_0 \\ j_1 \\ j_2 \end{pmatrix}(\alpha) \quad (\text{C.46})$$

となり， $A(\alpha), \dots, E(\alpha)$ が求められた．

今，式 C.32 と式 C.34 より

$$\Gamma(f) = 2B(\alpha)D_1^{ab}D_{2ab} + 4D(\alpha)D_1^{ab}D_{2a}^c s_b s_c + E(\alpha)D_1^{ab}D_2^{cd} s_a s_b s_c s_d \quad (\text{C.47})$$

となるので，これに式 C.46 を代入する事によって，overlap reduction function を求める事ができる．これによって計算した overlap reduction function のグラフが図 5.3 である．

補遺 D 電気回路

実験で使用した回路のうち、重要なものを以下に示す。

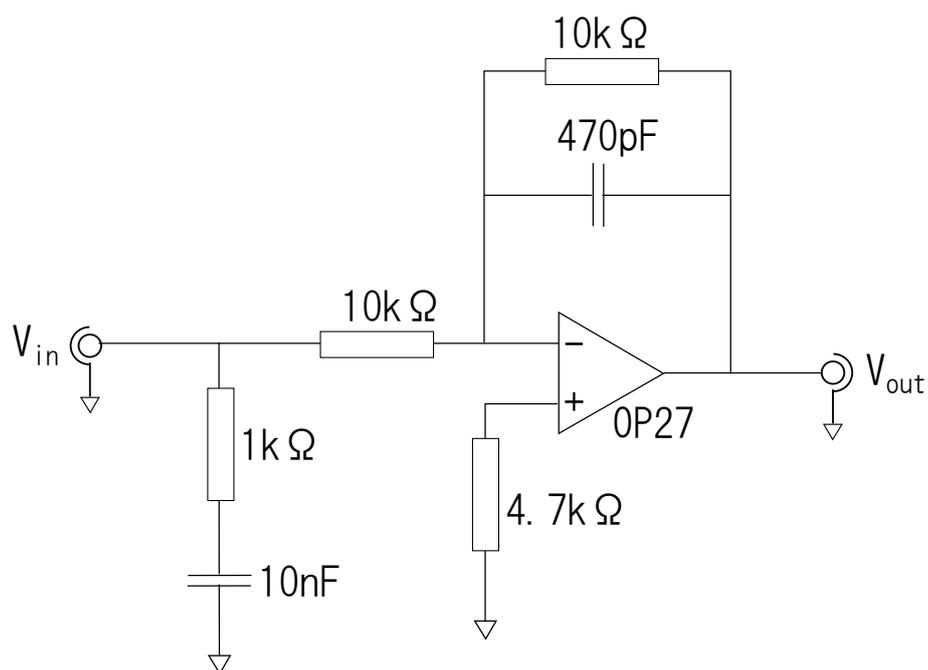


図 D.1: 東京のプロトタイプ TOBA で使用した制御回路

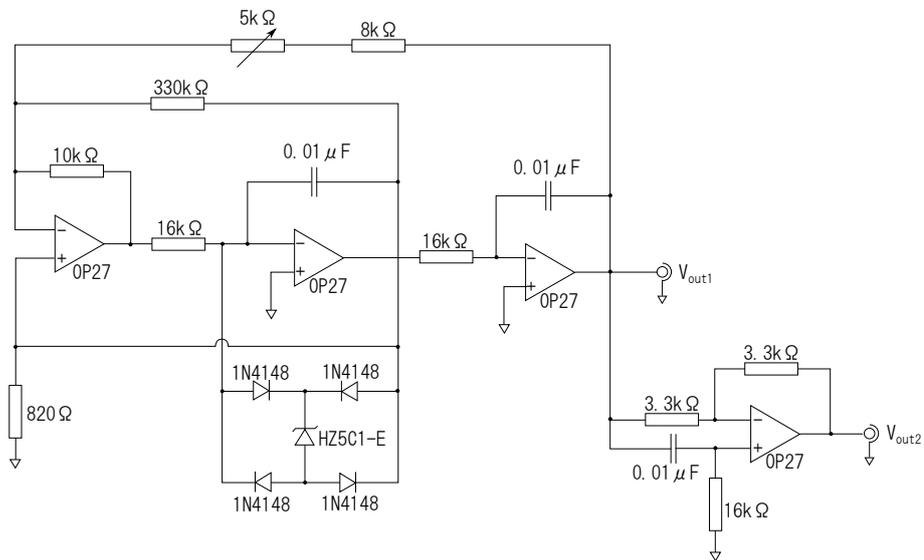


図 D.2: 1 kHz 発振器

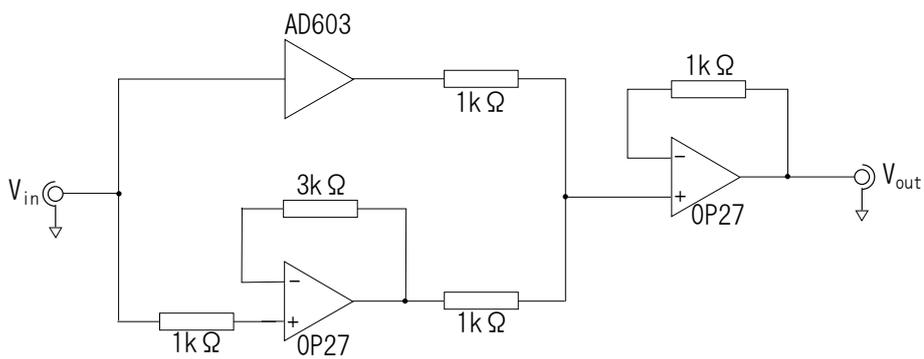


図 D.3: Variable Gain Amplifier

参考文献

- [1] A. Einstein and N. Rosen, “On gravitational waves,” *Journal of the Franklin Institute* **223**, 43–54 (1937).
- [2] J.H. Taylor and JM Weisberg, “Further experimental tests of relativistic gravity using the binary pulsar PSR 1913+ 16,” *The Astrophysical Journal* **345**, 434–450 (1989).
- [3] M. Ando, K. Ishidoshiro, K. Yamamoto, K. Yagi, W. Kokuyama, K. Tsubono, and A. Takamori, “Torsion-Bar Antenna for Low-Frequency Gravitational-Wave Observations,” *Physical review letters* **105**, 161101 (2010).
- [4] 石徹白晃治, “Search for low-frequency gravitational waves using a superconducting magnetically-levitated torsion antenna,” (2009).
- [5] 岡田建志, “低周波重力波探査のための超伝導磁気浮上型ねじれ振り子の研究,” (2009).
- [6] K. Ishidoshiro, M. Ando, A. Takamori, H. Takahashi, K. Okada, N. Matsumoto, W. Kokuyama, N. Kanda, Y. Aso, and K. Tsubono, “Upper Limit on Gravitational Wave Backgrounds at 0.2 Hz with a Torsion-Bar Antenna,” *Physical Review Letters* **106**, 161101 (2011).
- [7] J. Weber, “Detection and generation of gravitational waves,” *Physical Review* **117**, 306 (1960).
- [8] B.C. Barish and R. Weiss, “LIGO and the detection of gravitational waves,” *Physics Today* **52**, 44 (1999).
- [9] C. Bradaschia, R. Del Fabbro, A. Di Virgilio, A. Giazotto, H. Kautzky, V. Montelatici, D. Passuello, A. Brilliet, O. Cregut, P. Hello, *et al.*, “The VIRGO project: a wide band antenna for gravitational wave detection,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* **289**, 518–525 (1990).
- [10] K. Kuroda, “Status of LCGT,” *Classical and Quantum Gravity* **27**, 084004 (2010).
- [11] K. Danzmann *et al.*, “LISA: Laser interferometer space antenna for gravitational wave measurements,” *Classical and Quantum Gravity* **13**, A247 (1996).
- [12] S. Kawamura, T. Nakamura, M. Ando, N. Seto, K. Tsubono, K. Numata, R. Takahashi, S. Nagano, T. Ishikawa, M. Musha, *et al.*, “The Japanese space gravitational wave antenna: DECIGO,” *Classical and Quantum Gravity* **23**, S125 (2006).
- [13] VB Braginskii, Y.B. Zel’Dovich, and VN Rudenko, “Reception of Gravitational Radiation of Extraterrestrial Origin,” *ZhETF Pis ma Redaktsiiu* **10**, 437 (1969).
- [14] H. Nyquist, “Thermal agitation of electric charge in conductors,” *Physical Review* **32**, 110–113 (1928).

- [15] K. NARIHARA and H. HIRAKAWA, “Gravitational radiation detectors at 145 Hz,” *Japanese Journal of Applied Physics* **15**, 833–842 (1976).
- [16] K. Agatsuma, T. Uchiyama, K. Yamamoto, M. Ohashi, S. Kawamura, S. Miyoki, O. Miyakawa, S. Telada, and K. Kuroda, “Direct Measurement of Thermal Fluctuation of High-Q Pendulum,” *Physical review letters* **104**, 40602 (2010).
- [17] D.N. Spergel, L. Verde, H.V. Peiris, E. Komatsu, MR Nolta, CL Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, *et al.*, “First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: determination of cosmological parameters,” *The Astrophysical Journal Supplement Series* **148**, 175 (2003).
- [18] M. Maggiore, “Gravitational wave experiments and early universe cosmology,” *Physics Reports* **331**, 283–367 (2000).
- [19] T.L. Smith, E. Pierpaoli, and M. Kamionkowski, “New cosmic microwave background constraint to primordial gravitational waves,” *Physical review letters* **97**, 21301 (2006).
- [20] JW Armstrong, L. Iess, P. Tortora, and B. Bertotti, “Stochastic Gravitational Wave Background: Upper Limits in the 10–6 to 10–3 Hz Band,” *The Astrophysical Journal* **599**, 806 (2003).
- [21] P. Astone, M. Bassan, P. Bonifazi, P. Carelli, C. Cosmelli, E. Coccia, V. Fafone, S. Frasca, A. Marini, Y. Minenkov, *et al.*, “Crosscorrelation measurement of stochastic gravitational waves with two resonant gravitational wave detectors,” *Astronomy and Astrophysics* **351**, 811–814 (1999).
- [22] BP Abbott, R. Abbott, F. Acernese, R. Adhikari, P. Ajith, B. Allen, G. Allen, M. Alshourbagy, RS Amin, SB Anderson, *et al.*, “An upper limit on the stochastic gravitational-wave background of cosmological origin,” *Nature* **460**, 990–994 (2009).
- [23] T. Akutsu, S. Kawamura, A. Nishizawa, K. Arai, K. Yamamoto, D. Tatsumi, S. Nagano, E. Nishida, T. Chiba, R. Takahashi, *et al.*, “Search for a stochastic background of 100-MHz gravitational waves with laser interferometers,” *Physical review letters* **101**, 101101 (2008).
- [24] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健, *重力波をとらえる: 存在の証明から検出へ* (京都大学学術出版会, 1998).
- [25] E.E. Flanagan, “Sensitivity of the Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory to a stochastic background, and its dependence on the detector orientations,” *Physical Review D* **48**, 2389 (1993).
- [26] B. Abbott, R. Abbott, R. Adhikari, A. Ageev, B. Allen, R. Amin, SB Anderson, WG Anderson, M. Araya, H. Armandula, *et al.*, “Analysis of first LIGO science data for stochastic gravitational waves,” *Physical Review D* **69**, 122004 (2004).
- [27] Michele Maggiore, *Gravitational Waves: Theory and experiments* (Oxford University Press, 2007).

- [28] B. Willke, P. Aufmuth, C. Aulbert, S. Babak, R. Balasubramanian, BW Barr, S. Berukoff, S. Bose, G. Cagnoli, M.M. Casey, *et al.*, “The GEO 600 gravitational wave detector,” *Classical and Quantum Gravity* **19**, 1377 (2002).
- [29] B. Allen and J.D. Romano, “Detecting a stochastic background of gravitational radiation: Signal processing strategies and sensitivities,” *Physical Review D* **59**, 102001 (1999).
- [30] B. Allen, “The stochastic gravity-wave background: sources and detection,” Arxiv preprint gr-qc/9604033(1996).

謝辞

本論文を執筆するにあたり，多くの方々にお世話になりました．

指導教官である坪野公夫教授は，重力波の直接検出という非常に興味深い研究テーマに迎えて下さいました．研究にあたっては，実験内容についてのアドバイスを与えて下さるだけでなく，理論値の計算などにおいても私が行き詰った時に一緒になって考えて下さいました．また，研究の面だけでなく，普段の生活などについても気にかけて下さったり相談に乗って下さるなど，まるで父親の様に私の面倒を見て下さり，非常に頼もしい存在でした．

坪野研究室助教の麻生洋一氏には，学部4年生の頃から実験の基礎をご指導頂いただけでなく，データ解析の手法などについても様々なアドバイスを頂きました．氏の助言はいつもの確なもので，ご指導のおかげで基礎的な研究知識を身につける事ができました．

また，京都大学准教授の安東正樹氏には，本論文の実験内容だけでなく，本当に様々な面で助けて頂きました．2011年3月11日に起こった東日本大震災の際には，私達を京都大学の研究室へ迎え入れて下さり，研究を続けるサポートをして下さいました．ここではコイル-コイル アクチュエータの実験をさせて頂き，大震災というたいへん悲しい出来事の中でも研究に没頭できる環境を作って下さって，気持ちの面でも大きな助けとなりました．また，TOBAの観測やデータ解析の際にも，データ解析の知識が殆ど皆無な私に様々なアドバイス与えて下さり，また同時に我慢強く見守って下さいました．

現在 KEK 素核研研究員の石徹白晃治氏にも，データ解析の点などで非常にお世話になりました．解析のクロスチェックや，プロトタイプ TOBA の特徴を理解していらっしゃるからこそ的確なご指摘には何度も助けられました．

坪野研究室博士課程の穀山渉氏には，学部4年生で坪野研で実験を学び初めた一番最初の時期に，院生であるにも関わらず私達の指導をして下さいました．それだけではなく，日々の議論の中で様々なご指摘を下さり，時には私の初歩的なミスにも気付いて下さるなど，多くの点で助けて頂きました．

博士課程の岡田建志氏には，プロトタイプ TOBA の扱い方の基本的な部分を丁寧に教えて頂きました．覚えが悪い私にも根気強く教えて下さいました．

博士課程の松本伸之氏，修士課程の牛場崇文氏，柴田和憲氏とも，有意義な議論を交わす中でたくさんのお話を学ぶ事が出来ました．修士課程2年で同期の道村雄太氏とは，学部4年生の頃から共同実験を行う中で様々な点で助けられてきたと同時に，優秀な氏の姿に大きな刺激を受けてきました．氏とは，今後とも切磋琢磨しながら研究を続けて行きたいと願っております．

また，東京大学理学部物理学科試作室の大塚茂巳氏には，プロトタイプ TOBA のテストマスの製作をして頂きました．私の至らない製図にも関わらず，迅速に製作をして下さり，非常にスムーズに実験を進める事ができました．

本論文は，ここで述べた方々を含め多くの方々を支えられて初めて書く事が出来たものであり，ここで深くお礼を申し上げます．ありがとうございました．