

修士論文

結合光共振器の制御

1994 年 1 月

物理学専門課程 白土昌孝

目次

1	Introduction	3
2	レーザー干渉計による重力波検出の原理	5
2.1	重力波について	5
2.1.1	一般相対性理論の線形化	5
2.1.2	重力波	6
2.1.3	重力波の質点に対する影響	7
2.2	レーザー干渉計重力波検出器の感度	7
2.2.1	位相変化の受け易さ	8
2.2.2	Vinet の方法による考察	10
2.2.3	重力波に対する応答が大きくなる条件	16
2.2.4	3 枚鏡光共振器との関連	20
3	3 枚鏡光共振器について	22
3.1	まず、2 枚鏡の場合 (Fabry-Perot cavity) の計算	22
3.2	3 枚鏡の反射、透過率の計算	25
3.3	鏡の反射率の選び方	28
3.3.1	望ましい反射率とロックポイント	28
3.3.2	af 機械変調でロック可能である条件	29
3.3.3	望ましいロックポイントでの透過光強度の振舞い	29
3.3.4	ビームスプリッターの透過によるロス	34
4	実験 その 1	36
4.1	実験の動機	36
4.2	実験計画	37
4.2.1	検討	37
4.2.2	鏡の反射率の選び方	38
4.3	実験	38
4.4	実験結果	40
4.4.1	実験の準備	40
4.4.2	3 枚鏡光共振器のロック	41

4.4.3	積分器の出力の観測	41
4.4.4	透過光と反射光の関係	44
4.4.5	Δ_1 の情報を取り出すことについて	44
5	2つのサーボループの結合について	46
5.1	3枚鏡の反射率強度曲線と2次曲線近似	46
5.2	サーボループの結合による影響	48
5.3	手前の cavity の情報を取り出すことについて	51
5.3.1	なぜ困難か?	51
6	実験 その2	55
7	手前の cavity は検出器の感度にどのくらい影響を与えるか	61
7.1	感度を与える影響の計算	61
7.1.1	リサイクリングキャビティー長のふらつき	61
7.1.2	ダークフリンジ制御	61
7.1.3	3枚鏡共振器の制御との関連	62
7.1.4	感度の計算	63
8	af 機械変調の有望性 (あとがき)	66
A	変調について	68
A.1	位相変調	68
A.1.1	位相変調、側波帯	68
A.1.2	変調周波数が共振幅より十分大きい場合 (rf 変調)	69
A.1.3	変調周波数が共振幅より小さい場合	69
A.1.4	Fabry-Perot cavity に rf 変調を掛けた場合	70
A.1.5	位相変調と周波数変調の違い	70
A.2	機械変調の場合	71
B	実験に使用した回路	73
C	実験装置の写真	80

Chapter 1

Introduction

1916 年に A.Einstein によって一般相対性理論 [1] が世に出され、その理論から、弱い重力場のもとで光速で伝播するメトリックの波動解、つまり重力波の解があることが明らかになった。しかし重力波は、物質との相互作用が非常に弱いので、80 年近くたった今でも、世界中で確かにこれを直接観測したという人はいない。

重力波を観測することの意義は主に二つある。一つは一般相対性理論の直接的立証になること。もう一つは天文学に全く新しい強力な観測手段を与えることである。

天文学において普通観測手段といえば、望遠鏡や電波天文台など、ほとんど全て、電磁波を見ることによるものであるが、重力波を見ることが出来れば世界は大きく広がることになる。

重力波は相互作用が弱いので、発生させたり検出したりするのが難しいのであるが、逆にこの相互作用の弱さは利点ともなり得る。重力波は一旦発生すればその相互作用の弱さゆえ途中の物質の影響をほとんど受けずに情報を伝達することが出来る。また、中性子星などの比重の高い星の内部まで、まるでガラス玉が透き通って見えるように透けて見えるので、星の内部構造や宇宙の進化の研究にとってはまさに夢のような観測手段と言える。

現在までに重力波検出器として開発されてきたものには 2 種類ある。一つは「共振質量型検出器」と呼ばれる、アルミ等の弾性体の共振を用いたもので、特定の周波数の信号に対して大きな感度を持つ。

もう一つは、「レーザー干渉計を用いた自由質量型検出器（干渉計型検出器）」と呼ばれるもので、重力波が四重極モードで振動することを利用し、Michelson レーザー干渉計によって空間の伸び縮みを干渉縞の形で検出するものである。この形のものは、共振型のものに比べて測定帯域が広く、波形観測なども出来るという特徴がある。

現在日本や世界で数キロメートルの規模のレーザー干渉計型重力波検出器を作る計画が進行中であり、このための要素技術の開発が急ピッチで進められているところである。この研究もその中の一つである。

干渉計型の重力波検出器は Michelson の腕の長さが、1 kHz の重力波に対しては 75km あるのが最適であると言われているが [2, 3]、もっと短い長さで同じ感度をあげる方法が考えられている。一つは Delay Line 型と呼ばれるもので、3km 程度の長さの腕の中を 25 往復させれば 75km の腕の中を往復したのと同じような効果が得られるというものである。

もう一つは Fabry-Perot 型と呼ばれるもので、Michelson 干渉計の腕の中に Fabry-Perot 共振器を組み込んだような形のことで、75km を往復するのにかかる時間とおなじくらいの時間だけ光子を Fabry-Perot 共振器の中に滞在させてやれば、75km の腕の中を往復させたのと同等の効果が得られるというものである。

両者一長一短あるが、この論文では Fabry-Perot 型の方に焦点を当てて考えることにする。

更なる感度の向上のためには、さらに光子のショットノイズによる雑音を減らすために干渉計に用いるレーザー光のパワーを大きくしてやらなければならない。しかし、このために要求されるパワーは現在可能な限界を遥かに越えたものである。よってこのギャップを埋めるために、レーザー光のパワーリサイクリングと呼ばれる技法を用いることが検討されている。

通常、重力波を検出するためのマイケルソン干渉計は出力側が暗縞 (dark fringe) となるようにロックするために、レーザーからの入射光はほとんど元の方向に反射されて戻って来る。よって、もう一枚余分な鏡をレーザーと干渉計の間に置くことによってこの光を反射してやり、もう一度干渉計内に打ち込みパワーを稼ごう、というのがパワーリサイクリングの考え方である。

干渉計の腕の実効長を延ばすため Fabry-Perot cavity を用いた干渉計においては、レーザーの側から見て、リサイクリングミラー、Fabry-Perot のニアミラー、同じくエンドミラーと3枚の鏡があり、この3枚の鏡を同時にロックしなくてはならない [4]。こういったことから、重力波検出器を実際に制御し、動作させるためには3枚鏡の制御の技術が不可欠であるが、このような試みに成功したという報告はまだなされていないようである。

3枚鏡共振器をロックするためには、レーザー光に rf 変調、または、鏡に機械変調を掛け、エンドミラーからの透過光、または、リサイクリングミラーでの反射光を見る、といった方法が考えられる。ここでは、技術的に難しいと考えられている機械変調のみによるロックに主眼を置き、3枚鏡の光共振器 (Optical cavity) について述べる。

Chapter 2

レーザー干渉計による重力波検出の原理

2.1 重力波について

2.1.1 一般相対性理論の線形化

一般相対性理論によると、時空の曲がりや計量テンソルによって表せる。Einstein の一般相対性理論では、メトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ により、異なる時空の2点 x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ の距離（固有距離） ds が、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

で与えられるとする。すると、この $g_{\mu\nu}$ は Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

に従う ($R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$)。 $R_{\mu\nu}$ は

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\rho}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \quad (2.3)$$

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} \right) \quad (2.4)$$

である。 $R_{\mu\nu}$ はリッチテンソル、 $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ はクリストッフェル記号と呼ばれる。よって、Einstein 方程式は、 $g_{\mu\nu}$ の複雑な（非線形）2階偏微分方程式である。

Einstein 方程式で、真空、即ち $T_{\mu\nu} = 0$ を考えよう。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (2.5)$$

一般相対性理論は、特殊相対性理論を含むので、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

つまり平らな時空である Minkowski 空間は、上の方程式の解である。

ここで、時空 $\eta_{\mu\nu}$ からのずれ $h_{\mu\nu}$ つまり Minkowski 空間の摂動を考えてみよう。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

$h_{\mu\nu}$ の満たすべき式は、 $h_{\mu\nu}$ について一次の量のみ残すと、

$$\Phi_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h_{\rho}{}^{\rho} \quad (2.8)$$

として

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}(\partial_{\nu}\partial_{\alpha}\Phi_{\mu}^{\alpha} + \partial_{\mu}\partial_{\alpha}\Phi_{\nu}^{\alpha} - \square\Phi_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}\Phi^{\alpha\beta}) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} = 0 \quad (2.9)$$

である。

2.1.2 重力波

一般相対性理論は任意の座標変換に対し共変的なので、適当な座標条件を置いてよいので、[1, 5]¹ ここで、

$$\partial^{\sigma}\Phi_{\sigma\mu} = 0 \quad (2.10)$$

という gauge 条件 (Lorentz gauge) をとる。すると、上式は

$$\square\Phi_{\mu\nu} = 0 \quad (2.11)$$

この式は波動方程式であり、即ち、 $\Phi_{\mu\nu}$ という Minkowski 空間の摂動が光速で伝播することが分かる。この波動を重力波と言う。

z 方向に伝わる重力波 (平面波) を考えた場合、式 (2.11) の解は、 $k_{\mu}k^{\mu} = 0$ となる k_{μ} を用いて、

$$\Phi_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}} \quad (2.12)$$

という形の式の重ね合わせで表現できる。但し、Lorentz gauge のため、 $A_{\mu\nu}k^{\nu} = 0$ も満たす必要がある。

さらに適当な座標条件 (Transverse Traceless gauge)²を行なうことにより、

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{+} & h_{\times} & 0 \\ 0 & h_{\times} & -h_{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

¹微小な基準系の任意変換 $x'_{\mu} = x_{\mu} + \xi_{\mu}$ により、メトリックが $g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}$ に変換されるとすると、 $\|\xi\|^2$ 以下の項を無視して、 h は、

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial\xi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\xi_{\nu}}{\partial x^{\mu}}$$

と変換される。 $\Phi_{\mu\nu}$ も同様に変換される。

² $\Phi_{\mu 0} = 0$, $\Phi^{\mu}{}_{\mu} = 0$ を満たすように変換する。

と書ける。

h_+ と h_x は $t-z$ の任意関数であり、重力波は横波で、この2つの自由度を持っていることが分かる。

2.1.3 重力波の質点に対する影響

重力以外の力を何も受けていない自由粒子は、測地線方程式

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0 \quad (2.14)$$

を満たす。ここで、 $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ は式 (2.4) と、 $\partial_\alpha \eta_{\mu\nu} = 0$ より³、

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\rho h_{\sigma\nu} + \partial_\sigma h_{\rho\nu} - \partial_\nu h_{\rho\sigma}) \quad (2.15)$$

である。前節により、 $h_{0\sigma} = 0$ であったので、恒に $\Gamma_{00}^\mu = 0$ である。よって、明らかに $\frac{dx^\mu}{ds} = (1, 0, 0, 0)$ は上式を満たす。このことは、「ある瞬間に座標に対し静止していた自由粒子は重力波によって座標の値は変わらない」ということを意味している。

しかし、重力波が来た時にある座標に対し静止している2つの自由粒子の間を光を往復させると変化が見られることになる。つまり、座標値は変化しないが2点間の固有距離が変化するのである。

例えば、重力波の進む向きを z 軸方向として、重力波は $+$ 偏光の成分のみを持つという場合を考えてみる。つまり式 (2.13) の中で

$$h_x = 0, \quad h_+ = h \sin \Omega t \quad (2.16)$$

となっているものとする。

この重力波を観測するために、 x 方向と y 方向に直交する腕を持つ Michelson 干渉計を考える。

重力波が入射してきた時に各腕に沿って光を往復させた場合、光子の世界線に沿って

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1 + h_+) dx^2 + (1 - h_+) dy^2 + dz^2 = 0 \quad (2.17)$$

という式が成り立つので、往復にかかる時間が重力波によって変化しないとした場合には Michelson 干渉計の腕の長さは、 x 軸沿いの場合は $c^2 dt^2 = (1 + h_+(t)) dx^2$ 、 y 軸沿いの場合は $c^2 dt^2 = (1 - h_+(t)) dy^2$ という式を積分することによって計算することが出来る。

ここで、2つの式の h_+ は逆符号で入っているので、片方の腕の長さが伸びた場合はもう片方の腕の長さは縮むということになる。

詳しくは、後述の§2.2.2に述べる。

2.2 レーザ干渉計重力波検出器の感度

³ ∂_α は $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ のことである。

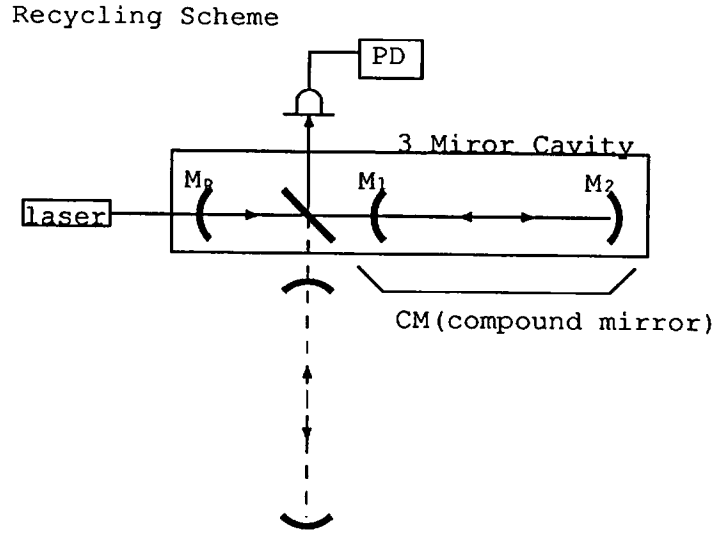


図 2.1: Recycling Scheme

2.2.1 位相変化の受け易さ

レーザー干渉計型重力波検出器は Michelson 干渉計の 2 つの腕の中に Fabry-Perot cavity を埋め込み (arm cavity とも言う。上の図の CM に当たる)、ここを往復するレーザー光が重力波による位相変化を受けることによって、重力波を検出する。レーザー光の角振動数を ω , CM の共振器長を l として、 $\Delta_2 = \omega l/c$ と置く。

§3 の Fabry-Perot cavity (FP と略記) による反射の式 (3.2))

$$r(\Delta_2) = i r_1 + \frac{i r_2 t_1^2 e^{2i\Delta_2}}{1 + r_1 r_2 e^{2i\Delta_2}} \quad (2.18)$$

の 2 つの項のうち、重力波の影響を受けているのは、共振器内からの洩れ出し成分である第 2 項の部分のみである。(ここでは単体の鏡の反射率は正の純虚数になるような convention を用いている。)

直観的に考えると、「位相変化がどのくらい掛かり易いか」ということと、「位相変化を受ける光がどのくらいあるか」ということが、感度と大きな関係があると思われる。

位相変化の受け易さ

「 Δ_2 の変化に対する $\arg(\frac{i r_2 t_1^2 e^{2i\Delta_2}}{1 + r_1 r_2 e^{2i\Delta_2}})$ の変化の大きさ」が大きいと、arm cavity の共振器長がわずかに変化しただけでレーザー光に大きな位相変化が掛かるので、感度がよくなるはずである。

$$\phi = \arg \frac{i r_2 t_1^2 e^{2i\Delta_2}}{1 + r_1 r_2 e^{2i\Delta_2}} \quad (2.19)$$

と置くと、

$$\left\| \frac{d\phi}{d\Delta_2} \right\| = \frac{2(1 + r_1 r_2 \cos 2\Delta_2)}{1 + (r_1 r_2)^2 + 2r_1 r_2 \cos 2\Delta_2} \quad (2.20)$$

となるので、位相変化の受け易さは $\cos 2\Delta_2 = -1$ つまり $\Delta_2 = \pi/2$ の時に最大値

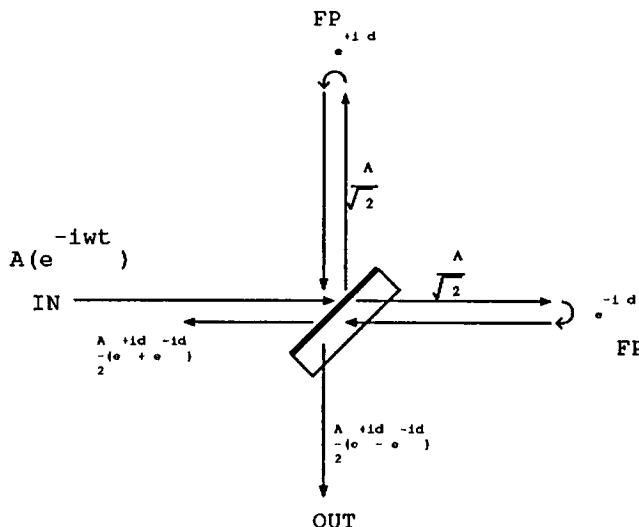
$$\frac{d\phi}{d\Delta_2} = \frac{2}{1 - r_1 r_2} \approx \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \quad (2.21)$$

をとる。この時、 Δ_2 に対する式 (3.2) の第 2 項の強度変化は最小になる。

重力波に対する感度について

FP cavity の位相変化の受け易さが分かったので、更に、重力波検出器の感度がどのようなものになるはずであるかを考えてみる。

FP 型 Michelson 干渉計を dark fringe、つまり光検出器の置いてある出力ポートに光が出てこないような位置にロックする場合、ビームスプリッターから FP の end mirror までの光の往復により位相変化 $e^{i\delta}$ を受けるとすると、リサイクリングを考えない場合、入射光振幅 A に対し出力側からは下図の様に $\frac{1}{2}(Ae^{+i\delta} - Ae^{-i\delta}) = iA \sin \delta \approx i\delta A$ が得られる。



依って、出力ポートには、おおよそ、光の振幅と、FP の反射光の位相変化の受け易さの積に比例した大きさの信号が現れるであろうということが予想される。

この2つのうち、FP の反射光の位相変化の受け易さは、常に、FP の共振器長が共振状態になっている時に最大になるのに対し、後に述べる様に光の振幅は、FP の手前にもう一枚リサイクリングミラーを置いた場合、必ずしも FP が共振状態の時に最大になるとは限らない。共振器中の光の振幅が最大になる点が大きく共振点からずれている時には、重力波に対する感度が最大になる点もそれにつられて共振点からずれることがある。

2.2.2 Vinet の方法による考察

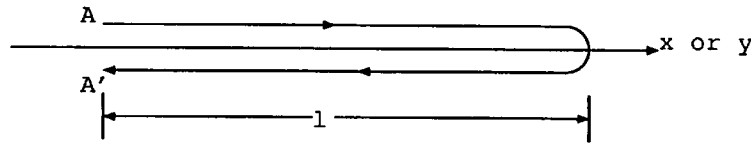
以上のような考察により、直観的に重力波に対する感度がどのようにならなくてはならないかが分かった。ここでは、もっと厳密に、光に対する重力波の影響を Vinet の行列を用いた定式化 [6, 7] を用いて論ずる。

Round Trip で重力波が光に与える影響

重力波による変調を受けた光を

$$A(t) \cong (A_0 + \frac{h}{2}e^{i(\Omega t + \varphi)}A_1 + \frac{h}{2}e^{-i(\Omega t + \varphi)}A_2)e^{-i\omega t} \quad (2.22)$$

と、 h の 1 次まで近似する。そして、 A_0, A_1, A_2 を、 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ と、ベクトル表記する。
重力波の来ている空間を光が Round Trip すると、



このベクトル $\mathbf{A}$ は、以下の一次変換 D により $\mathbf{A}'$ に変換される。

$$\mathbf{A}' = D\mathbf{A} \quad (2.23)$$

$$D = e^{2i\frac{\omega l}{c}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i\epsilon\frac{\omega l}{c}\frac{\sin\frac{\Omega l}{c}}{\frac{\Omega}{c}}e^{-i\Omega l/c} & e^{-2i\frac{\Omega l}{c}} & 0 \\ i\epsilon\frac{\omega l}{c}\frac{\sin\frac{\Omega l}{c}}{\frac{\Omega}{c}}e^{+i\Omega l/c} & 0 & e^{+2i\frac{\Omega l}{c}} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

ただし、

$\Omega = 2\pi\nu_g$: 重力波の振動数

ω : レーザー光の振動数

$\epsilon = \pm 1$ (x 軸方向に往復した場合は +1, y 軸方向の場合は -1) である。

D の導出

時刻 t に距離 l を往復して帰って来た光は、時刻 t_r に出発したとすると、

$$\int_{t_r}^t \frac{dt'}{\sqrt{1+h(t')}} = \frac{2l}{c} \quad (2.25)$$

という関係がある。ただし、重力波によって、メトリックは

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1 + h(t))dx^2 + (1 - h(t))dy^2 + dz^2 \quad (2.26)$$

というように影響を受けるとする。

ここで、 $h(t) = h \cos \phi(t)$ (但し、 $\phi(t) = \Omega t + \varphi$) と置き、 h の 1 次で近似する。すると、

$$\begin{aligned} \int_{t_r}^t \frac{dt'}{\sqrt{1 + h(t')}} &\cong \int_{t_r}^t \left(1 - \frac{1}{2}h(t')\right) dt' \\ &= t - t_r - \frac{1}{2} \int_{t_r}^t h(t') dt' \\ &= t - t_r - \frac{h}{2} \int_{t_r}^t \cos(\Omega t' + \varphi) dt' \\ &= t - t_r - \frac{h}{2} \frac{\sin(\Omega t + \varphi) - \sin(\Omega t_r + \varphi)}{\Omega} \\ &\cong t - t_r - \frac{h}{2} \frac{l \sin \phi - \sin(\phi - 2\eta)}{c} \\ &= t - t_r - h \frac{l \sin \eta}{c} \cos(\phi - \eta) = \frac{2l}{c} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\eta \equiv \Omega l/c$ である。 y 軸沿いに往復する時は、 dy^2 の係数が $(1 - h)$ なので、 h の符号を逆転させる。

さて、ここで、

$$A(t_r) \cong (A_0 + \frac{h}{2} e^{i(\Omega t_r + \varphi)} A_1 + \frac{h}{2} e^{-i(\Omega t_r + \varphi)} A_2) e^{-i\omega t_r} \quad (2.27)$$

に、今求めた t_r

$$t_r = t - \frac{2l}{c} - \epsilon h \frac{l \sin \eta}{c} \cos(\phi - \eta) \quad (2.28)$$

(但し、 x 軸沿い: $\epsilon = +1$, y 軸沿い: $\epsilon = -1$) を代入して、 h の 1 次までの近似をすることにする。

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \frac{\omega l}{c} \\ X &\equiv e^{2i\xi} \\ Y &\equiv e^{2i\eta} \end{aligned}$$

と置くと、

$$\begin{aligned} e^{-i\omega t_r} &= e^{-i\omega t} e^{i\omega \frac{l}{c} (2 + \epsilon h \frac{\sin \eta}{\eta} \cos(\phi - \eta))} \\ &= e^{-i\omega t} e^{2i\xi} e^{\epsilon i \xi h \frac{\sin \eta}{\eta} \cos(\phi - \eta)} \\ &\cong e^{-i\omega t} X \left(1 + i \epsilon \xi h \frac{\sin \eta}{\eta} \cos(\phi - \eta)\right) + \mathcal{O}(h^2) \\ e^{i(\Omega t_r + \varphi)} &\cong e^{i(\Omega t + \varphi - 2\Omega l/c)} \\ &= e^{i(\phi - 2\eta)} + \mathcal{O}(h^1) \end{aligned}$$

となるので、 $A(t_r)$ は

$$\begin{aligned}
A(t_r) &= X \left\{ A_0 + \frac{h}{2} e^{i\phi} e^{-i2\eta} A_1 + \frac{h}{2} e^{-i\phi} e^{+i2\eta} A_2 \right\} \\
&\quad \times \left(1 + i\epsilon\xi h \frac{\sin \eta}{\eta} \cos(\phi - \eta) \right) e^{-i\omega t} \\
&= X \left\{ A_0 + \frac{h}{2} e^{i\phi} e^{-i2\eta} A_1 + \frac{h}{2} e^{-i\phi} e^{+i2\eta} A_2 + i\epsilon\xi h \frac{\sin \eta}{\eta} \cos(\phi - \eta) A_0 \right\} e^{-i\omega t} \\
&= X \left\{ A_0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{h}{2} e^{i\phi} \left(e^{-i2\eta} A_1 + i\epsilon\xi \frac{\sin \eta}{\eta} e^{-i\eta} A_0 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{h}{2} e^{-i\phi} \left(e^{+i2\eta} A_2 + i\epsilon\xi \frac{\sin \eta}{\eta} e^{i\eta} A_0 \right) \right\} e^{-i\omega t} \\
&\equiv (A'_0 + \frac{h}{2} e^{i\phi} A'_1 + \frac{h}{2} e^{-i\phi} A'_2) e^{-i\omega t}
\end{aligned}$$

という形に変形できる。よって、 A'_0, A'_1, A'_2 は、

$$\begin{aligned}
A'_0 &= X A_0 \\
A'_1 &= X (Y^* A_1 + i\epsilon\xi \frac{\sin \eta}{\eta} e^{-i\eta} A_0) \\
A'_2 &= X (Y A_2 + i\epsilon\xi \frac{\sin \eta}{\eta} e^{i\eta} A_0)
\end{aligned}$$

となることが分かる。これより、行列 D が前述のようになることが分かる。

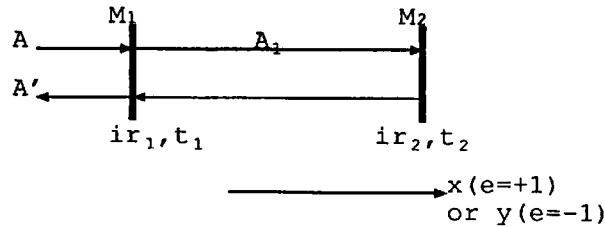
重力波が Fabry-Perot の反射光に与える影響

この記法を用いると、下図の様な、光源側の鏡の反射率、透過率が ir_1, t_1 、光源に遠い側が ir_2, t_2 の Fabry-Perot cavity の重力波に対する応答は、

$$A' = F A \quad (2.29)$$

という一次変換行列 F によって表され、 F は

Fabry-Perot Cavity



$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = D i r_2 i r_1 \mathbf{A}_1 + t_1 \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' = D i r_2 t_1 \mathbf{A}_1 + i r_1 \mathbf{A} \end{cases} \quad (2.30)$$

という連立方程式を解くことにより、⁴

$$F = i(r_1 + r_2(r_1^2 + t_1^2)D)(1 + r_1 r_2 D)^{-1} \quad (2.31)$$

$$= i \begin{pmatrix} \frac{(r_1^2 + t_1^2)r_2 e^{2i\omega l/c} + r_1}{1 + r_1 r_2 e^{2i\omega l/c}} & 0 & 0 \\ \frac{ict_1^2 r_2 \frac{\omega}{\Omega} \sin(\Omega l/c) e^{i(2\omega - \Omega)l/c}}{(1 + r_1 r_2 e^{2i\omega l/c})(1 + r_1 r_2 e^{2i(\omega - \Omega)l/c})} & \frac{(r_1^2 + t_1^2)r_2 e^{2i(\omega - \Omega)l/c} + r_1}{1 + r_1 r_2 e^{2i(\omega - \Omega)l/c}} & 0 \\ \frac{ict_1^2 r_2 \frac{\omega}{\Omega} \sin(\Omega l/c) e^{i(2\omega + \Omega)l/c}}{(1 + r_1 r_2 e^{2i\omega l/c})(1 + r_1 r_2 e^{2i(\omega + \Omega)l/c})} & 0 & \frac{(r_1^2 + t_1^2)r_2 e^{2i(\omega + \Omega)l/c} + r_1}{1 + r_1 r_2 e^{2i(\omega + \Omega)l/c}} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

$$= i \begin{pmatrix} r\left(\frac{\omega l}{c}\right) & 0 & 0 \\ i\epsilon \frac{r_2}{t_2^2} \frac{\omega}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega l}{c}\right) t\left(\frac{\omega l}{c}\right) t\left(\frac{(\omega - \Omega)l}{c}\right) & r\left(\frac{(\omega - \Omega)l}{c}\right) & 0 \\ i\epsilon \frac{r_2}{t_2^2} \frac{\omega}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega l}{c}\right) t\left(\frac{\omega l}{c}\right) t\left(\frac{(\omega + \Omega)l}{c}\right) & 0 & r\left(\frac{(\omega + \Omega)l}{c}\right) \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

のような形であることが分かる。ただし、ここで

$$r(\Delta) = \frac{r_1 + r_2(1)e^{2i\Delta}}{1 + r_1 r_2 e^{2i\Delta}} \quad (2.34)$$

$$t(\Delta) = \frac{t_1 t_2 e^{i\Delta}}{1 + r_1 r_2 e^{2i\Delta}} \quad (2.35)$$

$$(1) \equiv r_1^2 + t_1^2 \quad (2.36)$$

と置いた。

Recycling の場合

ここで最後に、レーザー干渉計型重力波検出器の応答を計算する。重力波検出器は、Michelson 干渉計の両腕の中に Fabry-Perot 光共振器を組み込み、干渉計と光源の間にもう一枚、リサイクリングミラー (recycling mirror) と呼ばれる鏡を置いた形をしている。実験の模式図を図 2.2 に示す。⁵

recycling mirror の反射率、透過率を ir_R, t_R とし、 x 軸沿いの FP cavity の鏡の反射率、透過率を光源に近い方から ir'_1, t'_1 また ir'_2, t'_2 とする。 y 軸沿いも、 x 軸沿いの記号から “'” を取り除いた記号、つまり ir_1, t_1, ir_2, t_2 で表す。更に、 $(1) \equiv r_1^2 + t_1^2$, $(1') \equiv r_1'^2 + t_1'^2$ とする。recycling mirror から x 軸 arm cavity の光源側の鏡 (near mirror) までの光路長を d' , x 軸 arm cavity の共振器長を l' , y 軸についても各々 d, l とする。

ここでは、ビームスプリッターの反射率⁶は上側が r_S , 下側が $-r_S$ と実数にとり、その他の鏡の反射率は正の純虚数にとることにする。

⁴ $\begin{pmatrix} S_{00} & 0 \\ S_{10} & S_{11} \end{pmatrix}$ の部分行列のみ考えると計算が楽である。 $\omega \rightarrow \omega - \Omega$ で $G_{00} \rightarrow G_{11}$, $\Omega \rightarrow -\Omega$ で $G_{11} \rightarrow G_{22}$, $G_{10} \rightarrow G_{20}$ となる。

⁵ この章では、3 枚の鏡が、 M_R, M_1, M_2 と表記する。

⁶ 強度反射率ではなく、振幅反射率

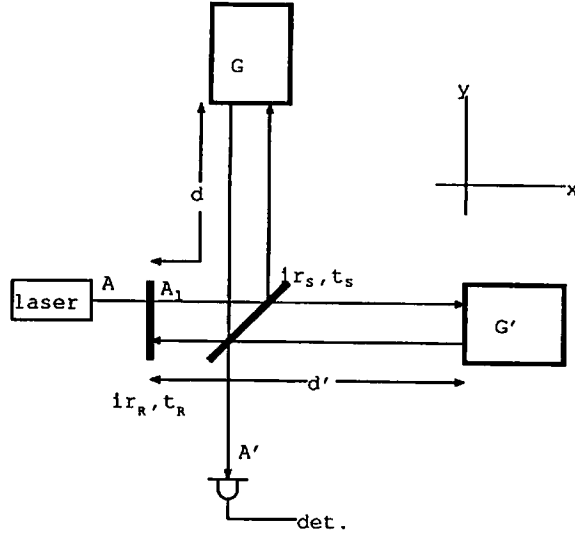


図 2.2: 重力波検出器

$$\begin{cases} A_1 = +ir_R r_S^2 e^{2i\frac{\omega d}{c}} G A_1 \\ \quad + ir_R t_S^2 e^{2i\frac{\omega d'}{c}} G' A_1 + t_R A \\ A' = -r_S t_S e^{2i\frac{\omega d'}{c}} G' A_1 \\ \quad + r_S t_S e^{2i\frac{\omega d}{c}} G A_1 \end{cases} \quad (2.37)$$

$$G' = F(\epsilon = +1, \text{x-axis cavity}) \quad (2.38)$$

$$G = F(\epsilon = -1, \text{y-axis cavity}) \quad (2.39)$$

$$A' = S A \quad (2.40)$$

前節と同様に連立方程式を解くと、結局、重力波に対する応答は、

$$S = r_S t_S t_R (e^{2i\frac{\omega d}{c}} G - e^{2i\frac{\omega d'}{c}} G') \{1 - ir_R (r_S^2 e^{2i\frac{\omega d}{c}} G + t_S^2 e^{2i\frac{\omega d'}{c}} G')\}^{-1} \quad (2.41)$$

要素ごとに表すと⁷、

$$S_{00} = r_S t_S t_R \frac{A_{00} - A'_{00}}{1 - ir_R (r_S^2 A_{00} + t_S^2 A'_{00})} \quad (2.42)$$

⁷この形の行列の逆行列は、

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ -d/ab & 1/b & 0 \\ -e/ac & 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

となり、行列の形(0でない要素の位置)は変わらない。

$$S_{11} = r_S t_S t_R \frac{A_{11} - A'_{11}}{1 - ir_R(r_S^2 A_{11} + t_S^2 A'_{11})} \quad (2.43)$$

$$S_{10} = r_S t_S t_R \left\{ \frac{A_{10} - A'_{10}}{1 - ir_R(r_S^2 A_{00} + t_S^2 A'_{00})} + \frac{ir_R(r_S^2 A_{10} + t_S^2 A'_{10})(A_{11} - A'_{11})}{\{1 - ir_R(r_S^2 A_{00} + t_S^2 A'_{00})\}\{1 - ir_R(r_S^2 A_{11} + t_S^2 A'_{11})\}} \right\} \quad (2.44)$$

etc.

ただし、

$$A_{00} = ie^{2i\omega d/c} r(\omega l/c)$$

$$A_{11} = ie^{2i\omega d/c} r((\omega - \Omega)l/c)$$

$$A_{10} = -\epsilon r_2 e^{2i\omega d/c} \omega \frac{\sin(\Omega l/c)}{\Omega} \frac{1}{t_2^2} t(\omega l/c) t((\omega - \Omega)l/c)$$

$$A \rightarrow A' \Rightarrow (r_1, r_2, t_1, (1), l, d \text{ に } (') \text{ をつける。})$$

また、 $\epsilon = -1 \rightarrow \epsilon = +1$ と変わる。

という式⁸で表されることが分かった。

感度

以上の計算により重力波検出器の重力波に対する応答が求まった。式 (2.22) において、 $(A_0, A_1, A_2) = (1, 0, 0)$ という光を重力波検出器に入射した場合 $(A_0, A_1, A_2) = (S_{00}, S_{10}, S_{20})$ という光が出力ポートから出てくる。この出力光に対してフォトディテクターは

$$|(A_0 + \frac{h}{2} e^{i(\Omega t + \varphi)} A_1 + \frac{h}{2} e^{-i(\Omega t + \varphi)} A_2) e^{-i\omega t}|^2 \quad (2.45)$$

$$= |A_0|^2 + h \Re[e^{i(\Omega t + \varphi)} (A_1 A_0^* + A_2^* A_0)] + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.46)$$

という信号を出力する。shot noise は $\sqrt{|A_0|^2} = |A_0|$ に比例するので S/N は

$$A_1 \frac{A_0^*}{|A_0|} + A_2^* \frac{A_0}{|A_0|} \quad (2.47)$$

に比例する。特に問題のない場合は $A_1 = S_{10}$ のみを用いて感度を議論することにする。

ダークフリンジ条件の場合

ここで、 A' がダークフリンジ (dark fringe, zero fringe) 条件 $S_{00} = 0$ を満たし、更に、cavity としての G と G' は全く同じものであり、向き、つまり ϵ の符号のみ異なる、という条件をつけると、 $G_{00} = G'_{00}$ 、よって $e^{2i\omega d'/c} - e^{2i\omega d/c} = 0$ 、また $G_{10} = -G'_{10}$ 、などとなる。よって、

$$S_{00} = S_{11} = S_{22} = 0 \quad (2.48)$$

⁸結果の式の中には t_2 は現れない。

$$S_{10} = \frac{2t_s r_s t_R e^{2i\omega d/c} G_{10}}{1 - ir_R(r_s^2 + t_s^2)e^{2i\omega d/c} G_{00}} \quad (2.49)$$

$$S_{20} = \frac{2t_s r_s t_R e^{2i\omega d/c} G_{20}}{1 - ir_R(r_s^2 + t_s^2)e^{2i\omega d/c} G_{00}} \quad (2.50)$$

この場合、応答信号を大きくするためには、 $\|S_{10}\|$ (または $\|S_{20}\|$)、つまり

$$\|S_{10}\| = \frac{2t_s r_s t_R \|G_{10}\|}{\|1 - ir_R(r_s^2 + t_s^2)e^{2i\omega d/c} G_{00}\|} \quad (2.51)$$

を大きくするように、 l, d を選ぶということになる。 $(\Delta_1 = \omega d'/c, \Delta_2 = \omega l/c$ で、 $e^{2i\omega d'/c} = e^{2i\omega d/c}$ である。) 2つの FP 共振器が全く同等でない場合は更に複雑な式になる。

2.2.3 重力波に対する応答が大きくなる条件

さて、重力波検出器の感度の式が求まったので、どのように設計すれば、つまり、どのようにパラメータを選べば最も感度を上げることが出来るかを考える。

FM ノイズに対する感度が無くなるようにする条件

S_{11} 要素が 0 でない場合は、レーザー光に FM ノイズが含まれていた場合それがそのまま重力波と区別できない形で出力ポートに現れる。(式 (2.22) および式 (2.40) 参照)

完全な単一周波数の理想的なレーザーが手に入る場合には問題はないが、装置に対する要求がかなり厳しい現状では出来るだけ装置に対する要求を緩和するため、FM ノイズに対する感度が無くなるように設計するのが望ましいと思われる。

FM ノイズに対する感度が 0 になるためには $S_{11} = 0$ 即ち $A_{11} = A'_{11}$ となれば良い。

まず、 $|A_{11}| = |A'_{11}|$ が Ω の恒等式として成り立つことより、

$$\left| \frac{r_1 + r_2(1)e^{2i(\omega-\Omega)l/c}}{1 + r_1 r_2 e^{2i(\omega-\Omega)l/c}} \right| = \left| \frac{r'_1 + r'_2(1')e^{2i(\omega-\Omega)l'/c}}{1 + r'_1 r'_2 e^{2i(\omega-\Omega)l'/c}} \right|$$

両辺とも、周期関数となるので、 $r_2(1)/r_1 = r_1 r_2$ ⁹とでもなっていない限り、両辺は Ω に対し周期的。よって、両辺とも同じ周期になっていなくてはならないため、 $l = l'$ が成り立つ。

すると、 $e^{2i(\omega-\Omega)l/c} = +1$ となるような Ω を考えることにより、直ちに $e^{2i\omega d/c} = e^{2i\omega d'/c}$ が分かる。

よって、ここで $\Delta \equiv (\omega - \Omega)l/c$ と置き、 $A_{11} = A'_{11}$ の式を通分すると、(両辺に $e^{-2i\Delta}$ を掛けて、)

$$r_1 e^{-2i\Delta} + r'_1 r'_2 r_2(1) e^{2i\Delta} + r_2(1) + r_1 r'_1 r'_2 = r'_1 e^{-2i\Delta} + r_1 r_2 r'_2(1') e^{2i\Delta} + r'_2(1') + r'_1 r_1 r_2$$

⁹これは、重力波を実際に感じ取る部分であるはずの FP 共振器が存在しないことを意味する。

これより、虚数部を考えることにより、

$$r_1 - r'_1 r'_2 r_2(1) = r'_1 - r_1 r_2 r'_2(1') \quad (2.52)$$

また、 $e^{2i\Delta} = \pm 1$ の2つの場合を考えることにより、

$$r_1 + r'_1 r'_2 r_2(1) = r'_1 + r_1 r_2 r'_2(1') \quad (2.53)$$

$$r_2(1) + r_1 r'_1 r'_2 = r'_2(1') + r'_1 r_1 r_2 \quad (2.54)$$

式(2.52)と式(2.54)より、

$$\begin{aligned} r_1 &= r'_1 \\ r'_1 r'_2 r_2(1) &= r_1 r_2 r'_2(1') \rightarrow (1) = (1') \rightarrow t_1 = t'_1 \end{aligned}$$

すると、式(2.54)より、 $(r_2 - r'_2)t_1^2 = 0$ となるが、 $t_1 \neq 0$ なので、 $r_2 = r'_2$ が必要となる。

これによって、 $l = l'$ 、 $e^{2i\omega d/c} = e^{2i\omega d'/c}$ 、 $r_1 = r'_1$ 、 $r_2 = r'_2$ 、 $t_1 = t'_1$ が得られるので、X 軸方向の光共振器と Y 軸方向の光共振器とは対称でなくてはならないことが分かる。

干渉計型重力波検出器の最適な設計と動作点

dark fringe で動作している、XY が対称な時の検出器の重力波に対する応答は、前節で求めたように、

$$S = r_S t_S t_R (e^{2i\frac{\omega d}{c}} G - e^{2i\frac{\omega d'}{c}} G') \{1 - i r_R (r_S^2 e^{2i\frac{\omega d}{c}} G + t_S^2 e^{2i\frac{\omega d'}{c}} G')\}^{-1} \quad (2.55)$$

の S_{10} (又は S_{20}) 成分の絶対値 (式(2.56))

$$\|S_{10}\| = \frac{2t_S r_S t_R \|G_{10}\|}{\|1 - i r_R (S) e^{2i\omega d/c} G_{00}\|} \quad (2.56)$$

で表すことができる。ただし、 G は FP cavity の Vinet 行列、 $(S) \equiv r_S^2 + t_S^2$ である。

まず、 d を決める

d を含むのは分母の第2項だけなので、

$$i r_R (S) e^{2i\omega d/c} G_{00} = r_R (S) \|G_{00}\|$$

となるように自由に d を選ぶことができ、この時 $\|S_{10}\|$ は最大である。

この時、

$$\|S_{10}\| = \frac{2t_S r_S t_R \|G_{10}\|}{1 - r_R (S) \|G_{00}\|} \quad (2.57)$$

書き換え

さて、ここで、 $t(\Delta)$, $r(\Delta)$ を

$$r(\Delta) = \frac{r_1 + r_2(1)e^{2i\Delta}}{1 + r_1r_2e^{2i\Delta}} \quad (2.58)$$

$$t(\Delta) = \frac{t_1t_2e^{i\Delta}}{1 + r_1r_2e^{2i\Delta}} \quad (2.59)$$

とする。これらは FP cavity の反射、透過率である。すると、

$$\|S_{10}\| = \left\| \frac{2t_S r_S t_R \frac{r_2}{t_2^2} \frac{\omega}{\Omega} \sin(\frac{\Omega l}{c}) t(\frac{\omega l}{c}) t(\frac{(\omega - \Omega)l}{c})}{1 - r_R(S) \|r(\frac{\omega l}{c})\|} \right\| \quad (2.60)$$

となる。

r_R の最適値は?

上式は、分子は t_R に比例、分母は r_R が $1 - r_R \times (\dots)$ という形で入っている。よって、

$$r_R = (R)(S) \left\| r(\frac{\omega l}{c}) \right\| \quad (2.61)$$

の時に、 $\|S_{10}\|$ は最大。ただし $(R) \equiv r_R^2 + t_R^2$ である。このとき、

$$\|S_{10}\| = \left\| \frac{2t_S r_S (R)^{1/2} \frac{r_2}{t_2^2} \frac{\omega}{\Omega} \sin(\frac{\Omega l}{c}) t(\frac{\omega l}{c}) t(\frac{(\omega - \Omega)l}{c})}{\{1 - (R)(S)^2 \|r(\frac{\omega l}{c})\|^2\}^{1/2}} \right\| \quad (2.62)$$

である。

最適な $r_S : t_S$ は?

$(S) = \text{const}$ とすると、上式 ($\|S_{10}\|$) は、 $t_S r_S$ に比例。 $t_S^2 + r_S^2 = (S) = \text{const}$ より、 $t_S r_S$ の最大値は、

$$t_S r_S \leq \frac{(S)}{2} \quad @ \quad r_S = t_S = \sqrt{\frac{(S)}{2}} \quad (2.63)$$

すると、

$$\|S_{10}\| = \left\| (S)(R)^{1/2} \frac{r_2}{t_2^2} \frac{\omega}{\Omega} \sin(\frac{\Omega l}{c}) t(\frac{\omega l}{c}) t(\frac{(\omega - \Omega)l}{c}) \right\| \quad (2.64)$$

$\omega l/c$ の最適値は?

ここで、

$$\frac{\Omega}{2\pi} < \frac{\Delta f_{FSR}}{\mathcal{F}} = \Delta f_{FWHM} \quad (2.65)$$

の時の近似を行なう。この時、 $\frac{\omega}{\Omega} \sin(\frac{\Omega l}{c}) \approx \frac{\omega l}{c}$, $\omega + \Omega \approx \omega$ が成り立つので、

$$\|S_{10}\| = (S)(R)^{1/2} \frac{r_2}{t_2^2} \frac{\frac{\omega l}{c} \|t(\frac{\omega l}{c})\|^2}{\{1 - (R)(S)^2 \|r(\frac{\omega l}{c})\|^2\}^{1/2}} \quad (2.66)$$

となる。

なお、 l が光の 1 波長分変化したところで、 $\omega l/c$ は、ほとんど変化したとは言えないので、ここでは $\omega l/c$ は const と考える。

よって、 $\frac{\|t(\frac{\omega l}{c})\|^2}{\sqrt{1 - (R)(S)^2 \|r(\frac{\omega l}{c})\|^2}}$ が、最大になるような $\omega l/c$ の値を見つければ良いということになる。

これは、 $e^{2i\omega l/c} = -1$ (arm cavity が共振) が極大値を与える。

recycling cavity length d

すると、recycling cavity は、 $ie^{2i\omega d/c} G_{00} = \|G_{00}\|$, つまり $\arg(e^{2i\omega d/c} r(\omega l/c)) = \pi$ を満たす。ここで

$$G_{00} = ir\left(\frac{\omega l}{c}\right) = i \frac{r_1 + r_2(1)e^{2i\omega l/c}}{1 + r_1 r_2 e^{2i\omega l/c}} = i \frac{r_1 - r_2(1)}{1 - r_1 r_2}$$

である。よって、

$$\begin{cases} r_1 > r_2(1) & \text{なら、共振 } (e^{2i\omega d/c} = -1) \\ r_1 < r_2(1) & \text{なら、反共振 } (e^{2i\omega d/c} = +1) \end{cases} \quad (2.67)$$

となる。

r_2 の最適値は?

これまでの議論により、

$$\|S_{10}\| = \sqrt{(R)(S)} \frac{\omega l}{c} \frac{r_2}{t_2^2} \left(\frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (R)(S)^2 \left(\frac{r_1 - r_2(1)}{1 - r_1 r_2} \right)^2}} \quad (2.68)$$

$$= \sqrt{(R)(S)} \frac{\omega l}{c} r_2 t_1^2 \frac{1}{1 - r_1 r_2} \frac{1}{\sqrt{(1 - r_1 r_2)^2 - (R)(S)^2 (r_1 - r_2(1))^2}} \quad (2.69)$$

となっている。

ここで r_1 と $r_2(1)$ のどちらが大きいかによって 2 つの場合に分けると、

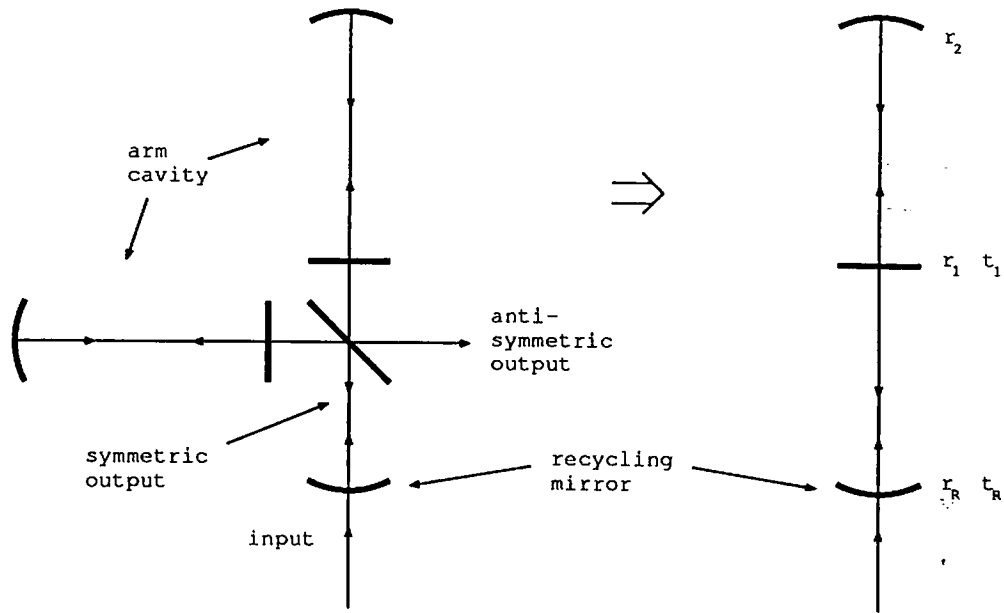


図 2.3: 干渉計型重力波検出器と 3 枚鏡共振器

○ $r_1 < r_2(1)$ の場合、この式は明らかに r_2 が大きい ($\rightarrow 1$) ほど大きくなる。

$$\rightarrow \sqrt{(R)(S)} \frac{\omega l}{c} \frac{t_1^2}{1 - r_1} \frac{1}{\sqrt{(1 - r_1)^2 - (R)(S)^2(r_1 - (1))^2}}$$

○ $r_1 > r_2(1)$ の場合でも、 r_2 が大きいほどこの式は大きくなると思われる。
よって、 r_2 は 1 に近いほど良い。

また、 $(R), (S)$ も大きいほど ($\rightarrow 1$) 感度が良くなるのは、式から明らか。また、式より、感度は l にダイレクトに比例する。

2.2.4 3 枚鏡光共振器との関連

3 枚鏡光共振器の位置づけ

Recycled Michelson 干渉計が dark fringe にロックしている場合、 x 方向と y 方向の腕のビームは recycling mirror に戻ってきたときに位相が揃っているため、両者を区別することが出来ない。と言うことは、重力波の影響を考えない場合、この重力波検出器は 3 枚鏡の結合共振器 (3-mirror cavity) と等価である、と考えることが出来る。よって、cavity をロックするときなどは 3-Mirror Cavity (3 枚鏡光共振器) が独立に 2 つあると考えることが出来る [4](図 2.3)。

重力波による影響を考えない場合、共振器内のレーザー光は carrier(搬送波) のみとなるため、「干渉計型重力波検出器 (FP 型リサイクリング付きの Michelson)」は、「3 Mirror

Cavity(3枚鏡光共振器)」と全く等価と考えられる。

よって、重力波に対する感度の計算は、「干渉計型重力波検出器」のモデルを用いて行ない、共振器のロックに関することは「3枚鏡光共振器」を用いて議論すると、議論が単純化されて良いと考えられる。

重力波に対する感度が最大となるようにした時に、第1、第2 cavity が反共振、共振ではなく、中途半端な位置にある場合は、重力波に対する感度最大の点と透過光最大点是一致的しないためロックは難しい。

Chapter 3

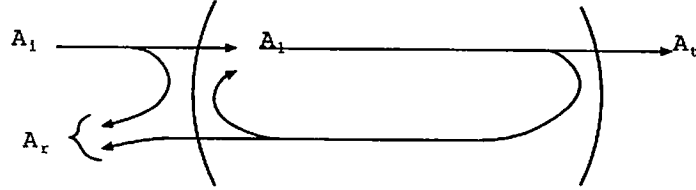
3 枚鏡光共振器について

3 枚鏡の反射、透過率の計算を行なう。

3.1 まず、2 枚鏡の場合 (Fabry-Perot cavity) の計算

振幅の反射、透過率の計算

Fabry-Perot cavity の反射、透過率は振幅、位相については、



$\Delta \equiv \frac{\omega l}{c}$ 、 $A_r = ir_c A_i$ 、 $A_t = t_c A_i$ として、

$$\begin{cases} A_1 &= t_1 A_i + ir_{2+} ir_{1+} e^{2i\Delta} A_1 \\ A_t &= t_2 e^{i\Delta} A_1 \\ A_r &= ir_{1-} A_i + ir_{2+} t_1 e^{2i\Delta} A_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

を解くことにより、

$$ir_c = ir_{1-} + \frac{ir_{2+} t_1^2 e^{2i\Delta}}{1 + r_{1+} r_{2+} e^{2i\Delta}} \quad (3.2)$$

$$= \frac{ir_{1-} + ir_{2+} (r_{1+}^2 + t_1^2) e^{2i\Delta}}{1 + r_{1+} r_{2+} e^{2i\Delta}} \quad (3.3)$$

$$t_c = \frac{t_1 t_2 e^{i\Delta}}{1 + r_{1+} r_{2+} e^{2i\Delta}} \quad (3.4)$$

となる¹。以下、 $(1) \equiv (r_1^2 + t_1^2)$, $(2) \equiv (r_2^2 + t_2^2)$ という記号を使うことにする。式 (3.2) の第 1 項は入射側鏡による直接反射波 (direct reflected) で、第 2 項は共振器内から洩れ出した光 (leakage) である。

強度の反射、透過率の計算と、その極値

強度に直した場合の透過率は、前節の結果の絶対値の自乗をとり、

$$\left\| \frac{A_t}{A_i} \right\|^2 = \frac{(t_1 t_2)^2}{1 + R^2 + 2R \cos 2\Delta} \quad (3.5)$$

$$= \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 4R \cos^2 \Delta} \quad (3.6)$$

$$= \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + F^2 \cos^2 \Delta} \quad (3.7)$$

ただし、 $T = t_1 t_2$, $R = r_1 + r_2$, $F = \frac{2\sqrt{R}}{1-R} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi}$ 。よって、 I_t/I_i は $e^{+2i\Delta} = -1$ で極大 (共振条件) (Round Trip Phase path が 2π の整数倍)、 $+1$ で極小 (反共振) ($\text{RTP} = \pi \pmod{2\pi}$) となる。

反射光強度はおおよそ $1 - (\text{透過光強度})$ なので、 $e^{2i\Delta} = +1$ で極大、 -1 で極小。反射光強度の表式は、

$$\left\| \frac{A_r}{A_i} \right\|^2 = \frac{(r_1 - r_2(r_1^2 + t_1^2))^2 + 4r_1 r_2 (r_1^2 + t_1^2) \cos^2 \Delta}{(1 - R)^2 + 4R \cos^2 \Delta} \quad (3.8)$$

$$= \frac{\left(\frac{r_1 - r_2(1)}{1 - r_1 r_2} \right)^2 + F^2(1) \cos^2 \Delta}{1 + F^2 \cos^2 \Delta} \quad (3.9)$$

この式は、 $\cos^2 \Delta = 0$ つまり共振状態で極小かつ最小、 $\cos^2 \Delta = 1$ つまり反共振状態で極大かつ最大。また、 $2\Delta = n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 以外には、極値はない。

注意: 共振条件について。

表面での反射率と裏面での反射率が等しく書き表せるように、反射率を ir_1 等と純虚数のように定義すると、一回の反射につき、 $\pi/2$ 位相がずれることになる。

共振器内の 1 round trip では、2 回反射して位相が π ずれることになるので、光が $2l$ 走ることにより位相が $(2n+1)\pi$ ずれば、合計で、1 回につき $2(n+1)\pi$ ずれることになり、光が強めあうことになる。従って、共振条件は、共振器の位相長を Δ とすれば、 $\Delta = \pi/2$ となる。

こうして強めあった光は、割合 t_2^2 で、透過光として現れるので、「透過光の強度は、共振器内の光の強度に比例する」ことも明らかである。

¹この式中で r_{1+} , r_{2+} は cavity の内側の面での反射率、 r_{1-} , r_{2-} は外側の面での反射率であり、 $r_{1+-} \equiv r_{1+}r_{1-}$ である。普通は、 $r_{1+} = r_{1-}$, $r_{2+} = r_{2-}$ と考える。

Finesse と Storage Time について

finesse

透過光強度の式 (3.6) は、

$$|t_c|^2 = \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \cos^2 \Delta} \quad (3.10)$$

と書ける。ただし、

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \quad (3.11)$$

である。 $2\mathcal{F}/\pi$ は、Delay Line における折り返し回数 N に相当する。

式 (3.10) の極大は $\Delta = \pi/2$ のとき、極小は $\Delta = 0, \pi$ のときである。上式より、共振幅は、

$$\Delta_{FWHM} = 2 \sin^{-1} \frac{\pi}{2\mathcal{F}} \approx \frac{\pi}{\mathcal{F}} \quad (\mathcal{F} \gg \frac{\pi}{2}) \quad (3.12)$$

よって、 $2\pi \Delta_{FWHM} l / c \cong \pi / \mathcal{F}$ より、透過帯域幅は

$$\Delta f_{FWHM} = \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{c}{2l} = \frac{\Delta f_{FSR}}{\mathcal{F}} \quad (3.13)$$

つまり、

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta f_{FSR}}{\Delta f_{FWHM}} \quad (3.14)$$

ということになる。

ここで、 $\Delta f_{FSR} \equiv \frac{c}{2l}$ (Free Spectral Range) は、共振条件が満たされる周波数間隔である。

Storage Time

共振器の Q 値は、レーザー光の波長、発振周波数を λ, Ω として、

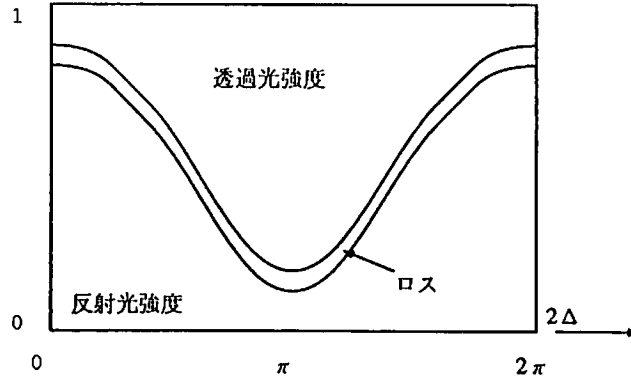
$$Q = \Omega \frac{\tau_s}{2} = \frac{2l}{\lambda / \mathcal{F}} = \frac{\Omega / 2\pi}{\Delta f_{FWHM}} \quad (3.15)$$

と表せ、光共振器の storage time は

$$\tau_s = \frac{2l\mathcal{F}}{\pi c} \cong \frac{Nl}{c} = \frac{\mathcal{F}}{\pi \Delta f_{FSR}} = \frac{1}{\pi \Delta f_{FWHM}} \quad (3.16)$$

と表せる。光子は共振器内に入射した後、平均しておよそ τ_s 秒間共振器内に留まった後、共振器の外に出て行くか、又はロスとして消える。

透過光が最大になるような鏡の反射率の選び方



共振時 ($\Delta = \pi/2$) において、透過光が最大になるような、 r_1, t_1, r_2, t_2 の選び方について考える。

$$\begin{cases} |r_{reso}|^2 &= \left(\frac{r_1 - r_2(1)}{1 - r_1 r_2} \right)^2 \\ |t_{reso}|^2 &= \left(\frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2} \right)^2 = \frac{((1) - r_1^2)((2) - r_2^2)}{(1 - r_1 r_2)^2} \end{cases} \quad (3.17)$$

(1),(2)=const. とする²。すると、

$$\frac{\partial |t_{reso}|^2}{\partial r_1} = 0 \leftarrow r_1 = r_2(1)$$

つまり、 $|r_{reso}|^2 = 0$ のとき、 r_1 に対し、透過光は最大。

$$\frac{\partial |t_{reso}|^2}{\partial r_2} = 0 \leftarrow r_2 = r_1(2)$$

つまり、 M_2 側から見た反射率=0 のとき、 r_2 に対し、透過光最大。

この二つが両立するためには、(1)(2) = 1 でなくてはならない。 $loss > 0$ のときは、この二つは両立しない。

$r_2, (1), (2)$ が与えられた時、 r_1 に対して透過光が最大、つまり共振器内のパワーが最大になるためには $r_1 = r_2(1)$ 、つまり、反射光が0になるように r_1 を選ばばよい。

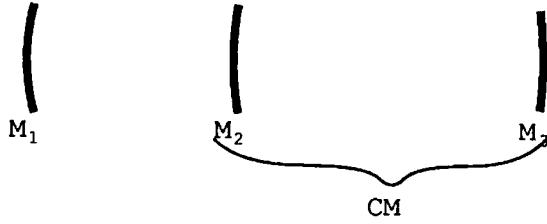
3.2 3枚鏡の反射、透過率の計算

振幅に対する反射、透過率の計算

3枚の鏡を並べた場合の、入射光 $A_i e^{-i\omega t}$ に対する透過光 $A_t e^{-i\omega t}$ 反射光 $A_r e^{-i\omega t}$ の計算は、前節の結果を用いて計算することができる。

ここで3枚の鏡を、光源に近い方から M_1, M_2, M_3 と名付ける。反射、透過率も各々 $ir_1, ir_2, ir_3, t_1, t_2, t_3$ とする。

²(1) $\equiv r_1^2 + t_1^2$, (2) $\equiv r_2^2 + t_2^2$ である。



M_2 と M_3 は Fabry-Perot cavity を構成するが、この2枚の鏡を、「反射率 ir_{CM} 、透過率 t_{CM} という複素数の反射、透過率を持った1枚の M_{CM} という鏡」とみなすことにする。

すると3枚鏡光共振器は、 M_1 と M_{CM} という2枚の鏡によって構成される Fabry-Perot cavity とみなすことができる。

M_{CM} の反射、透過率は、前節の結果(cf. 式(3.2))より

$$ir_{CM} = ir_{2-} + \frac{ir_{3+}t_2^2e^{2i\Delta_2}}{1 + r_{2+}r_{3+}e^{2i\Delta_2}} \quad (3.18)$$

$$= \frac{ir_{2-} + ir_{3+}(r_{2+}^2 + t_2^2)e^{2i\Delta_2}}{1 + r_{2+}r_{3+}e^{2i\Delta_2}} \quad (3.19)$$

$$t_{CM} = \frac{t_2t_3e^{i\Delta_2}}{1 + r_{2+}r_{3+}e^{2i\Delta_2}} \quad (3.20)$$

と表せる³。よって、これを更に式(3.2)に代入することにより、3枚鏡光共振器の透過率 t_c と反射率 r_c も以下のように計算することができる。

$$ir_c = \frac{ir_{1-} + ir_{CM+}(r_{1+}^2 + t_1^2)e^{2i\Delta_1}}{1 + r_{1+}r_{CM+}e^{2i\Delta_1}} \quad (3.21)$$

$$= \frac{ir_{1-} + \frac{ir_{2-} + ir_{3+}(r_{2+}^2 + t_2^2)e^{2i\Delta_2}}{1 + r_{2+}r_{3+}e^{2i\Delta_2}}(r_{1+}^2 + t_1^2)e^{2i\Delta_1}}{1 + r_{1+}\frac{r_{2-} + r_{3+}(r_{2+}^2 + t_2^2)e^{2i\Delta_2}}{1 + r_{2+}r_{3+}e^{2i\Delta_2}}e^{2i\Delta_1}} \quad (3.22)$$

$$= i \frac{r_1 + r_1r_2r_3e^{2i\Delta_2} + r_2(r_1^2 + t_1^2)e^{2i\Delta_1} + r_3(r_1^2 + t_1^2)(r_2^2 + t_2^2)e^{2i(\Delta_1+\Delta_2)}}{1 + r_{1+}r_{2-}e^{2i\Delta_1} + r_{2+}r_{3+}e^{2i\Delta_2} + r_{1+}r_{3+}(r_{2+}r_{2-} + t_2^2)e^{2i(\Delta_1+\Delta_2)}} \quad (3.23)$$

$$= ir_{1-} + \frac{ir_{2-} + ir_{3+}(r_{2+}r_{2-} + t_2^2)e^{2i\Delta_2}}{\text{上の分母と同じ}} t_1^2 e^{2i\Delta_1} \quad (3.24)$$

$$t_c = \frac{t_1t_{CM}e^{i\Delta_1}}{1 + r_{1+}r_{CM+}e^{2i\Delta_1}} \quad (3.25)$$

$$= \frac{t_0 \frac{t_2t_3e^{i\Delta_2}}{1 + r_{2+}r_{3+}e^{2i\Delta_2}} e^{i\Delta_1}}{1 + r_{1+} \frac{ir_{2-} + ir_{3+}(r_{2+}^2 + t_2^2)e^{2i\Delta_2}}{1 + r_{2+}r_{3+}e^{2i\Delta_2}} e^{2i\Delta_1}} \quad (3.26)$$

³ $ir_{1+}, ir_{2+}, ir_{3+}$ は CM の内側を向いている面での反射率、 $ir_{1-}, ir_{2-}, ir_{3-}$ はその裏面での反射率。通常、この両者は等しいとして考える。

$$= \frac{t_1 t_2 t_3 e^{i(\Delta_1 + \Delta_2)}}{(1 + r_1 + r_2 - e^{2i\Delta_1})(1 + r_2 + r_3 + e^{2i\Delta_2}) + r_1 + r_3 + t_2^2 e^{2i(\Delta_1 + \Delta_2)}} \quad (3.27)$$

ここで、 r_c と t_c の分母は等しい。

透過光強度に付いて

3 枚鏡光共振器の透過光強度（強度透過率）は、

$$\frac{I_t}{I_i} = \left\| \frac{A_t}{A_i} \right\|^2 = \frac{T}{(\text{分母})} \quad (3.28)$$

ここで、 $T = (t_1 t_2 t_3)^2$ 、

$$\begin{aligned} (\text{分母}) = & (1 + (r_1^2 + r_3^2)r_2^2 + r_1^2(r_2^2 + t_2^2)^2 r_3^2) \\ & + (2r_1 r_2 (1 + (r_2^2 + t_2^2)r_3^2) \cos(2\Delta_1) + 2r_2 r_3 (1 + (r_2^2 + t_2^2)r_1^2) \cos(2\Delta_2)) \\ & + 2r_1 r_2^2 r_3 \cos(2(\Delta_1 - \Delta_2)) \\ & + 2r_1 (r_2^2 + t_2^2) r_3 \cos(2(\Delta_1 + \Delta_2)) \end{aligned} \quad (3.29)$$

である。

上式に対し、 $r_1 \longleftrightarrow r_3$, $t_1 \longleftrightarrow t_3$, $\Delta_1 \longleftrightarrow \Delta_2$, $l_1 \longleftrightarrow l_2$ の入れ替えをしてもこの式の形は変化しない。

透過光強度がピーク、又は鞍点になる点を調べるため、以下の微分係数を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\text{分母})}{\partial \Delta_2} &= -4r_3 \{ -r_1 r_2^2 \sin 2(\Delta_1 - \Delta_2) \\ &\quad + r_2 (1 + r_1^2 (r_2^2 + t_2^2)) \sin 2\Delta_2 + r_1 (r_2^2 + t_2^2) \sin 2(\Delta_1 + \Delta_2) \} \\ \frac{\partial^2(\text{分母})}{\partial \Delta_2^2} &= -8r_3 \{ r_1 r_2^2 \cos 2(\Delta_1 - \Delta_2) \\ &\quad + r_2 (1 + r_1^2 (r_2^2 + t_2^2)) \cos 2\Delta_2 + r_1 (r_2^2 + t_2^2) \cos 2(\Delta_1 + \Delta_2) \} \\ \frac{\partial^2(\text{分母})}{\partial \Delta_1 \partial \Delta_2} &= 8r_1 r_3 \{ r_2^2 \cos 2(\Delta_1 - \Delta_2) - (r_2^2 + t_2^2) \cos 2(\Delta_1 + \Delta_2) \} \end{aligned} \quad (3.30)$$

etc.

一般に関数 $f(x, y)$ に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2B, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2C,$$

と置いた場合、

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \det \begin{vmatrix} 2A & 2B \\ 2B & 2C \end{vmatrix} &> 0 \rightarrow (\text{ピーク型, 極大点, 山形 または極小点, 窪みの底}) \\ &< 0 \rightarrow (\text{鞍型}) \\ &= 0 \rightarrow (\text{かまぼこ型, 紙の山折り型 または谷折り型}) \end{aligned}$$

を計算することによって、一階微分が 0 になるような点について $f(x, y)$ が山形であるか鞍型であるかを判定することが出来る。

この計算は以下の節で行なう。

反射光強度について

表式は

$$\left| \frac{A_r}{A_i} \right|^2 = \frac{(\text{分子})}{(\text{分母})}$$

$$\begin{aligned} (\text{分子}) = & \{r_1 + r_2(1) \cos 2\Delta_1 + r_1 r_2 r_3 \cos 2\Delta_2 + \\ & r_3(1)(2) \cos 2(\Delta_1 + \Delta_2)\}^2 \\ & + \{r_2(1) \sin 2\Delta_1 + r_1 r_2 r_3 \sin 2\Delta_2 \\ & + r_3(1)(2) \sin 2(\Delta_1 + \Delta_2)\}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{分母}) = & \{1 + r_1 r_2 \cos 2\Delta_1 + r_2 r_3 \cos 2\Delta_2 \\ & + r_1 r_3(2) \cos 2(\Delta_1 + \Delta_2)\}^2 \\ & + \{r_1 r_2 \sin 2\Delta_1 + r_2 r_3 \sin 2\Delta_2 \\ & + r_1 r_3(2) \sin 2(\Delta_1 + \Delta_2)\}^2 \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} (\text{分子}) \rightarrow & r_1^2 + r_2^2(1)^2 + (r_1 r_2 r_3)^2 + r_3^2(1)^2(2)^2 \\ & + 2r_1 r_2(1)(1 + r_3^2(2)) \cos 2\Delta_1 \\ & + 2r_2 r_3(r_1^2 + (1)^2(2)) \cos 2\Delta_2 \\ & + 2r_1 r_3(1)(2) \cos 2(\Delta_1 + \Delta_2) \\ & + 2r_1 r_2^2 r_3(1) \cos 2(\Delta_1 - \Delta_2) \\ (\text{分母}) \rightarrow & 1 + r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_3^2(2)^2 \\ & + 2r_1 r_2(1 + r_3^2(2)) \cos 2\Delta_1 \\ & + 2r_2 r_3(1 + r_1^2(2)) \cos 2\Delta_2 \\ & + 2r_1 r_3(2) \cos 2(\Delta_1 + \Delta_2) \\ & + 2r_1 r_2^2 r_3 \cos 2(\Delta_1 - \Delta_2) \end{aligned}$$

ここで、この分母は、透過光の（分母）と同じである。

3.3 鏡の反射率の選び方

3.3.1 望ましい反射率とロックポイント

重力波に対する感度、および、どのような反射率の鏡を使えば重力波検出器の感度が最大にできるかということについては前章で議論した。

そこでの結論は以下のようなものであった。即ち、arm cavity の Fabry-Perot cavity (FP) の光源から遠い方の鏡 (end mirror) には、非常に高い反射率の鏡を使い、光源に近い方の

鏡 (near mirror) にも、arm cavity のフィネスを高くするために高い反射率の鏡を使う。ただし、FP arm cavity 全体の反射率は高い方が良いので、あまり near mirror の反射率を高くし過ぎてはいけない。recycling mirror の反射率は FP arm cavity 全体の反射率と大体同じくらいのもの (式 (2.61) を参照) が一番望ましい。

また、その様に鏡の反射率を選び、arm cavity と recycling cavity (near mirror と recycling mirror とで成される共振器) をそれぞれ共振、反共振状態にロックすれば最大の感度が得られるということであった。

3.3.2 af 機械変調でロック可能である条件

さて、それではその様な点に果たしてロックすることが可能であるのか、という問題になるのだが、これ以降は問題を簡略化して3枚鏡の光共振器で考えていくことにする。

3枚鏡光共振器をロックする場合色々な方法が考えられるが、ここでは af^4 の機械変調によってロックを掛けることを考える。つまり、鏡を af の正弦波で小さく前後に振動させることにより反射光、透過光に変調を掛け、それを復調して共振器長の誤差信号を得てフィードバックを掛けるのである。この場合、3枚鏡光共振器を構成する2つの共振器の共振器位相長さ Δ_1 と Δ_2 に対して反射光または透過光強度の3次元グラフを描いた場合に、極値を取るような点にはロックすることが出来ると考えられる (Appendix A 参照)。それ以外の点にロックするのは非常に難しいと考えられるので、この論文では扱わない。

ここでもう一度前章での議論を思い出すと、2つの共振器の共振器長 Δ_1 , Δ_2 が共振、または反共振の時に透過光強度が最大になる場合には、最適動作点、つまり重力波に対する感度が最大になるような動作点も透過光強度の極大になる点と一致するが、それ以外の時には一致しない、ということであった。

よって、重力波検出器の感度が最大になるような鏡の反射率を選んだとき、その反射率の共振器の透過光強度が Δ_1 と Δ_2 に対して極大になるか、ならないかということには、非常に興味がある。また、鏡の反射率が少し変化した場合、またはアラインメントが少し崩れて実効的に鏡の反射率が少し下がったりした場合にどのくらいクリティカルに状況が変化するかということにも興味がある。

それでは、その辺りの問題について、計算によって調べてみることにする。

3.3.3 望ましいロックポイントでの透過光強度の振舞い

干渉計型重力波検出器を3枚鏡と同等とみなすためには、両腕の光が互いに干渉し合わない方が考え易い。また、上に述べたような問題もあるので、ここでは望ましいロックポイントとして2つの共振器が手前から順に (共振、共振) の場合と、(反共振、共振) の場合を考える。式 (3.30) より、 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ を計算すれば、ピーク型になっているか鞍型かが判別できる。

⁴audio frequency, ここでは 10Hz から数十 kHz 程度の周波数を指す

$\Delta = (\text{共振} | \text{共振})$ の場合

$\Delta \equiv (\Delta_1, \Delta_2) = (\pi/2, \pi/2)$ の場合を考える。

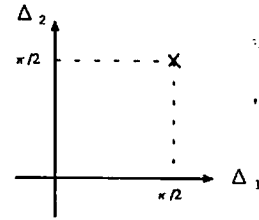
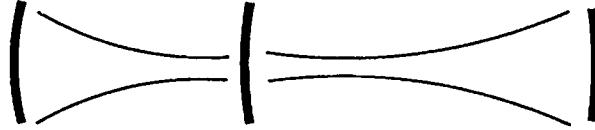
なお、ここでは単体の鏡の反射率は、表裏共に純虚数となるように表現している。

arm cavity が共振状態になっている時は、arm cavity 内からの洩れてくる光は near mirror の裏側 (recycling mirror の方を向いている面) ですぐ反射される光に比べ、位相が 180° 反転している。よって、どちらの光が強いかによって Δ_1 の望ましい値が変わってくる。

near mirror での反射光の方が強い場合 ($r_2 > r_3(r_2^2 + t_2^2)$) は、recycling cavity も共振状態である時に共振器内のパワーは大きくなる。

しかし、重力波は arm cavity に作用するので、near mirror での反射光の方が大きいという状況は重力波の検出のためには余り良い状況ではないかも知れない。この辺りの議論は、前章を参照のこと。

$\Delta = (\pi/2, \pi/2)$



ここで、前節で計算した微分係数を用いて行列式を計算して、ピークになっているか鞍型かを調べてみる。

微分係数は、

$$2C = -8r_3(1 - r_2r_1)\{r_1(r_2^2 + t_2^2) - r_2\} \quad (3.31)$$

$$2A = -8r_1(1 - r_2r_3)\{r_3(r_2^2 + t_2^2) - r_2\} \quad (3.32)$$

$$2B = -8r_1r_3t_2^2 \quad (3.33)$$

のようになるので

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \frac{1}{64} \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} &= r_1r_2r_3(1 - r_2r_1 - r_2r_3 + r_1r_3(r_2^2 + t_2^2)) \\ &\quad \times (r_2 - (r_1 + r_3 - r_1r_2r_3)(r_2^2 + t_2^2)) \end{aligned} \quad (3.34)$$

が正か負かを調べれば良い。

前章でも計算した通り、Under Coupled ($r_2 > r_3(r_2^2 + t_2^2)$) の時は、 $\Delta = (0, \pi/2)$ よりも $\Delta = (\pi/2, \pi/2)$ のほうが感度がよく、逆もまた成り立つ。

よって、Under coupled の場合を考えると、

$$r_1 < \frac{r_2 - r_3(2)}{(1 - r_2r_3)(2)}$$

のときに⁵、透過光のグラフは $\Delta = (\pi/2, \pi/2)$ で極大となる。

⁵(2) $\equiv t_2^2 + r_2^2$

また、 $\Delta = (\pi/2, \pi/2)$ で 反射光 = 0 の条件は、

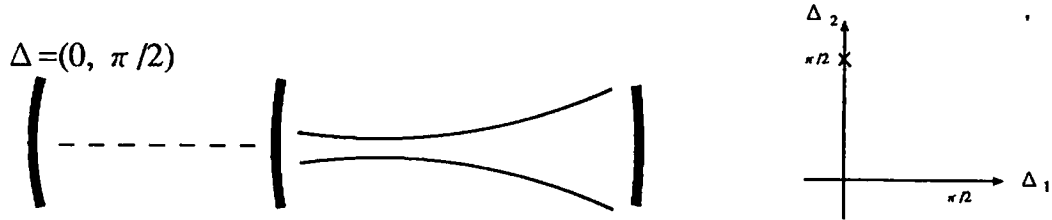
$$r_3 = \frac{r_2(r_1^2 + t_1^2) - r_1}{(r_1^2 + t_1^2)(r_2^2 + t_2^2) - r_1 r_2} \quad (3.35)$$

$loss = 0$ では、これは、上の図の領域の境界線と一致する。 $loss > 0$ では、(3.35) の曲線が上の図の斜線内にあるためには、 $1 > (r_1^2 + t_1^2)(r_2^2 + t_2^2) > r_1 r_2$ という条件を満たすことが必要であることが計算によって分かる。

$\Delta = (\text{反共振} | \text{共振})$ の場合

$\Delta = (0, \pi/2)$ の場合を考える。

前節の場合とは逆に、arm cavity 内からの洩れ成分の方が near mirror での直接反射光より大きい場合 ($r_2 < r_3(r_2^2 + t_2^2)$) は recycling cavity は反共振になっていないと、共振器内のパワーは最大にならない。



全く同様に計算することにより、Over Coupled ($r_2 < r_3(r_2^2 + t_2^2)$) の時は、

$$r_1 < \frac{-r_2 + r_3(2)}{(1 - r_2 r_3)(2)} \leftrightarrow r_3 > \frac{r_2 + r_1(2)}{(1 + r_1 r_2)(2)} \quad (3.36)$$

であれば⁶、 $|T(\Delta_1, \Delta_2)|$ のグラフは $\Delta = (0, \pi/2)$ で極大となることが分かる。

また、 $\Delta = (0, \pi/2)$ で反射光がなくなる条件は、

$$r_3 = \frac{r_2(r_1^2 + t_1^2) + r_1}{(r_1^2 + t_1^2)(r_2^2 + t_2^2) + r_1 r_2} \quad (3.37)$$

$loss = 0$ では、これは、上の図の領域の境界線と一致する。

ここで重要なのが、 $loss > 0$ 、つまり $(r_1^2 + t_1^2) < 1$ or $(r_2^2 + t_2^2) < 1$ の場合、式 (3.37) の曲線は式 (3.36) を満たす、ということである。

図 3.1-3.3 は 3 枚鏡共振器の反射率強度 (を 1 から引いたもの) を、2 つの結合している共振器の長さをレーザーの波長で割ったパラメータ (Δ_1 と Δ_2) で 3 次元プロットしたものである。図中、左下辺が Δ_1 軸、右下辺が Δ_2 軸である。

一番上の図 3.1 は、鏡の反射率が光源に近い方から 72.8%, 90%, 99.17% でロスがない場合の図である。ピークの点は丁度 1 である。この場合、ピークの点は丁度山形から鞍型に移り変わる境目にあり、ピークの点の周りで 2 方向に機械変調を掛けても独立なデータは得られない。ピークの近傍では、グラフはカマボコ型とも言えるが、むしろ 1 枚の紙を 2 つに山折りしたような形になっている。

⁶(2) $\equiv (r_2^2 + t_2^2)$

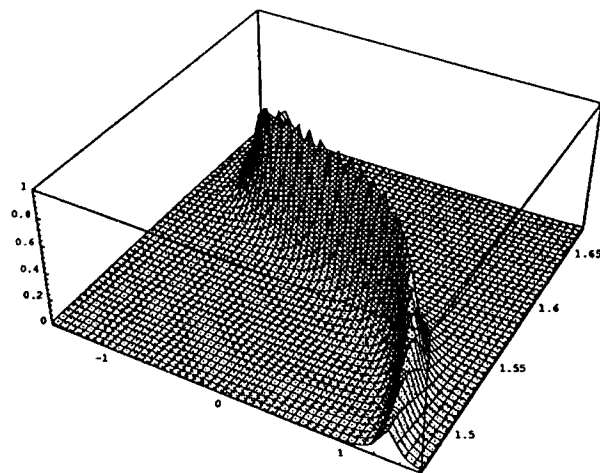


図 3.1: ロス無し

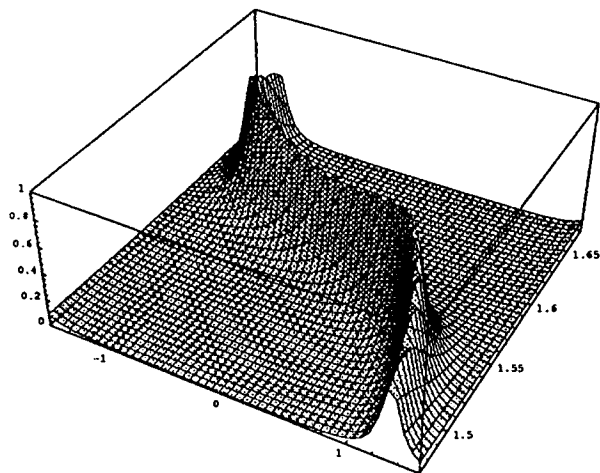


図 3.2: リサイクリング鏡が高反射率

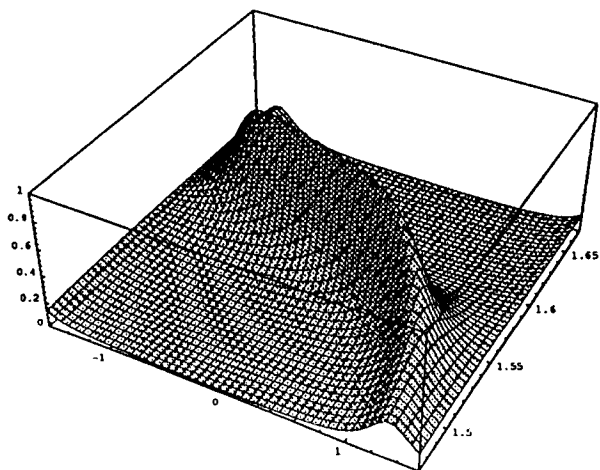


図 3.3: ロス有り

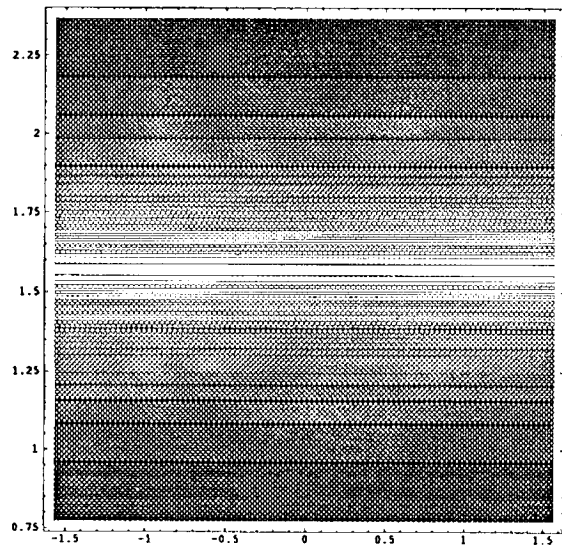


図 3.4: $r_1^2 = 0\%$ (M_1 なし)

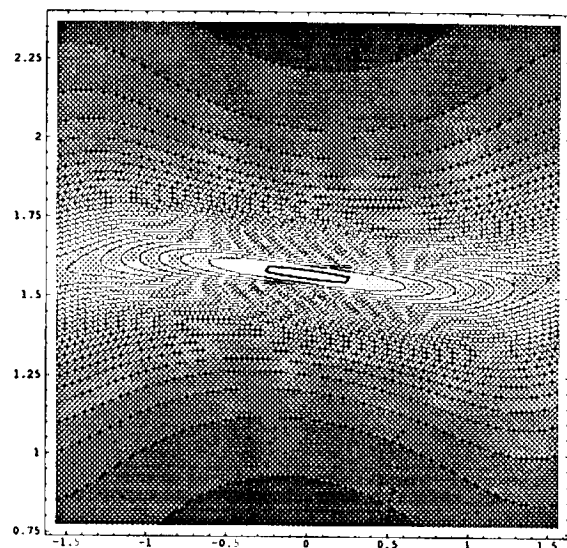


図 3.5: $r_1^2 = 4\%$ (低め)

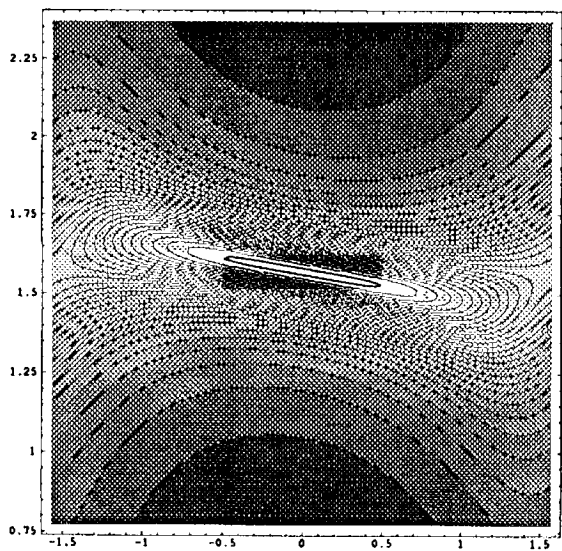


図 3.6: $r_1^2 = 12.75\%$ (戻り光 0)

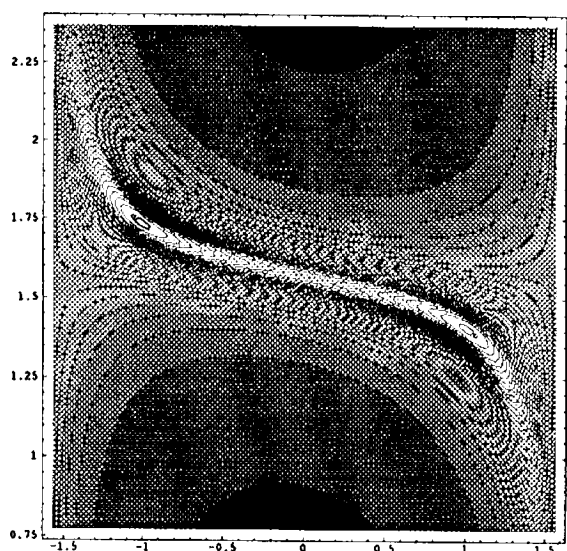


図 3.7: $r_1^2 = 56.25\%$ (高め)

$r_2^2 = 64\%$, $r_3^2 = 81\%$ 透過率 plot

一番下の図 3.3 は、反射率 45.3%, 90%, 99.17% でロスが各 1%, 1%, 0% の場合の図である。この場合もピークの値は丁度 1、つまり反射率 0 である。ピークの点の周りは左上のグラフに比べてかなり丸みを持っており、2 方向に機械変調を掛ければ理論的には 2 自由度の情報が得られる。このように、奥の共振器が over-coupling で、一番手前の鏡 (recycling mirror) の反射率を奥の共振器の反射率に合わせた場合には、少しでもロスがあれば、理論的には機械変調でロック可能である。

真ん中の図 3.2 は、反射率 72.8%, 90%, 99.17% でロスが各 1%, 1%, 0% の場合の図である。奥の（光源から遠い方の）共振器の反射率は 45.3% で、一番手前の鏡の反射率はそれより高い 72.8% である。この場合、ピークは 2 つに分裂してしまい、望ましいロックポイントは鞍型になってしまう。

全く同様の図を図 3.4-3.7 に示す。これらの図では、ロスは 0 として計算してある。図 3.6 においてはピークの周りで変調を掛けても独立したデータは得られない。しかし、ロスがあれば、反射光が 0 となる様に r_1 を選んだ時でも、わずかながら独立した 2 つのデータが得られる。

大抵の場合、一番手前の鏡の反射率は、奥の共振器の反射率より低い方が安全性は高い。

結論

以上の議論からいえることは、要約すれば、quality の高い共振器ほど、機械変調によるロックは難しいということである。

3 枚鏡共振器においては、レーザー光のロスを防ぐために、recycling mirror の反射率を 3 枚鏡全体の反射率が 0 になるような最適な値に選び、鏡のロスを減らせば減らすほど、独立した 2 自由度の情報を含む復調信号を得るのは難しくなる。当然、共振器の状態はそういう自由度の方向にふらつくようになる。

また、recycling mirror の反射率を最適な値より低く選ぶか、鏡のロスを増やせば、ロックは容易になるが、その様なことは共振器の quality を下げることになり、重力波検出器としての感度を下げることになる。

従って、高品質の 3 枚鏡光共振器に機械変調によってロックを掛けるのにはかなりの技術が必要となることが予想される。

3.3.4 ビームスプリッターの透過によるロス

3 連鏡で、M1 と M2 の間に入ったビームスプリッターの透過によるロスを考えた場合の $\Delta = (0, \pi/2)$ の場合のロックの容易さを考える（図 3.8 の 1）。

一旦、M1 の両側に等量の減衰物質がついている場合を考える（図 3.8 の 2）。これは、単に鏡のロスが増えたのと同じことであり、鏡は、表面でも裏面でも、同じ反射率であると考えられる。

つまり、単に M1 の反射率、透過率がある一定割合少々下がった、というのと同じことである。

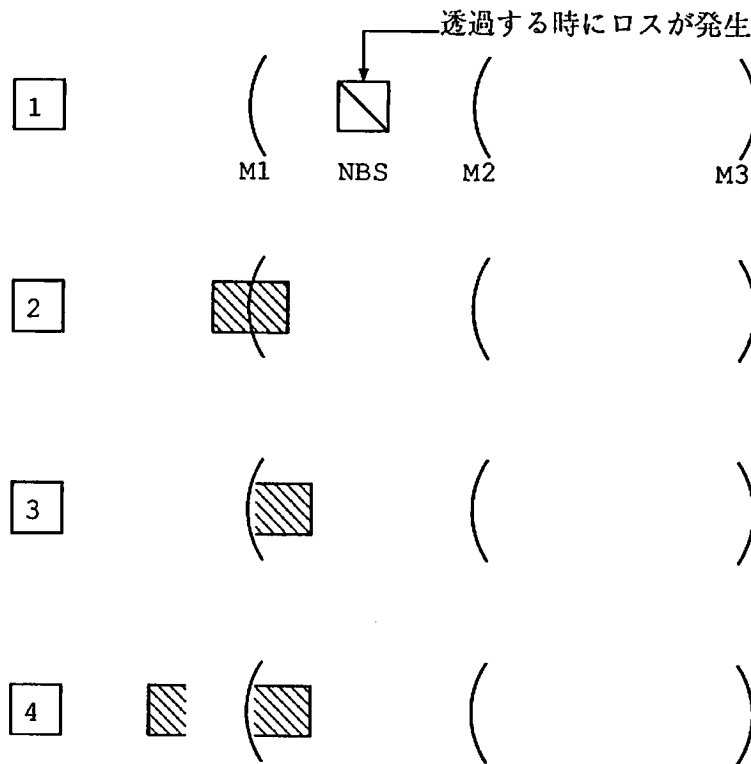


図 3.8: ビームスプリッター透過によるロス

元々この減衰物質がついていたとして、外側の減衰物質をはがしたとする（図 3.8 の 3）。これは、ビームスプリッターの透過による減衰と同じ状況である。図 3.8 の 2 と図 3.8 の 3 は、図 3.8 の 4 の様に考えれば、「図 3.8 の 3 の手前に減衰物質がもう一つ置いてある」と、「図 3.8 の 2」は同じことである、ということが分かる。

よって、図 3.8 の 1 の状況は図 3.8 の 2 で考えてもほとんど同じことである。（透過光、反射光が一定倍率減衰されるのみ）つまり、「BS の透過によるロス」は、「M1 の反射、透過率 (r_1^2 など) の低下」と同じ意味を持つ。ロックの容易さは M1 のロスが増えることにより、より容易になる。（式 (3.37) 参照）

Chapter 4

実験 その1

3枚鏡の共振器をロックさせた時の様子について。

4.1 実験の動機

自由質量型干渉計型重力波検出器の感度を上げるために、

- o arm の実効長を伸ばすため、arm に FP cavity を組み込む。
- o 干渉計内の光パワーを増大させるため、recycling mirror を付ける。

といったことが考えられている。干渉計型重力波検出器 (recycled Michelson interferometer with Fabry-Perot cavities) は、反対称出力ポートにおいて dark fringe になるように動作させるのが photo detector の許容パワーの限界から考えても良いと言われているが、そのように動作している状態は、一直線上に3つの鏡がある coupled cavity と等価である。

そこで、重力波検出器を組み上げるために、3 mirror cavity (coupled cavity) の制御技術が必須であると考えられる。

しかし、これまでこのような cavity を制御するのに cavity 内の光を一部取り出して制御を行った例はあるが、この coupled cavity を透過光や反射光だけで制御を行った例はない。今後検出器の感度を極限まで上げるためには少しのパワーのロスも許されないなので、是非とも透過光、反射光のみで制御することが必要である。

透過光、反射光のみで制御するためには、今のところ、2つの方法が検討されている。つまり、

- 1 レーザー光に rf-変調 をかけ、さらに、一つの鏡に af の機械変調をかける。
- 2 af の機械変調のみで制御する。

といった方法が考えられるが、後者の機械変調法は、後で検討するような理由により、非常に難しいのではないかと考えられている。しかし、

rf-変調 ビーム経路中に EO-modulator を入れねばならず、ビームが攪乱される恐れがある。

機械変調 af で鏡を振るため、ビーム経路中には何も置かない。

と言った理由で、なるべくなら後者でやりたい。

「本当に機械変調は無理なのか？」と言うことで、機械変調の可能性を検討してみる目的で実験を行なうことにした。

4.2 実験計画

4.2.1 検討

まず、変調を掛けた場合の応答について考えた。

機械変調法の場合、主に鏡をピエゾ (PZT) などにより振って光共振器の cavity 長を変化させることにより変調を掛けるので、あまり高い周波数で変調を掛けることは出来ない。よって、変調周波数は十数 kHz からせいぜい 100 kHz の af (audio frequency) 帯となる。これはテーブルトップでの実験に於ける光共振器の FSR(free spectral range) や共振幅¹より十分小さい周波数であり、普通、共振器の応答はこの位離れた2つの周波数ではたいして変化がない。

レーザー光に変調を掛ける場合は、レーザー光をポッケルスセル等の EOM(electro-optical modulator) を通して変調を掛けるため、数十から数百 MHz とした rf の高い周波数で変調を掛けることが可能である。共振器の応答はこの位離れた2つの周波数ではかなり変化する。

よって、af 変調による応答は単に透過 (反射) 光強度の微分を考えれば得られることになるが、rf 変調に対する応答はかなり変化に富んだものになる。(Appendix A 参照)

rf 変調により coupled cavity を制御する場合は、変調周波数を適当に選ぶことにより、独立な2つの信号を得ることも可能なことが分かっており、二つの共振器をかなり独立に制御することが可能であり、そのような事の出来ない af 変調に比べて技術的に容易であると考えられる。

af 変調により制御を行う場合は、透過 (反射) 光強度のピークの点にロックが掛かるので、望ましいロックポイント ($\Delta = (0, \pi/2)$), つまり recycling cavity が反共振で arm cavity が共振状態になっている状態の点が透過 (反射) 光強度のピークと一致している事が望ましく、その他に余計なピークが無い方がよい。

よって、 $\Delta = (0, \pi/2)$ で透過 (反射) 光強度がピークになっている様な反射率の鏡の組を選ぶ必要があり、しかもそれが、感度最大のための条件と矛盾しないことも検討しなければならない。

¹FSR = $\frac{c}{2l}$. 30cm で 500MHz, 3km で 50kHz. FP cavity の透過光のピークは FSR ずつ離れていて、1つのピークは、FSR/ $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ は cavity の finesse) の幅を持つ。

4.2.2 鏡の反射率の選び方

重力波の感度を上げるためには arm cavity の finesse は検出器の帯域やロスが問題にならない範囲内では出来るだけ高くした方がよい。また arm cavity 内部からビームスプリッターの方へ漏れ出して戻っていく光の量は出来るだけ多い方がよい。

これらのことより奥の鏡の反射率は出来るだけ高くして recycling mirror の反射率は干渉計からレーザーへの戻り光が 0 になるように選ぶのがよいと考えられる。

さらに当然のことながら鏡のロス出来るだけ少ない方がよい。

このような quality の高い cavity の場合、制御が非常に難しくなることが前章までの議論から予想される。

今回の実験においては 3 枚鏡 cavity の振る舞いを調べる目的から、ロックが確実に掛かるようにかなり安全マージンを取って以下のような指針によって実験に用いる鏡を決めた。

- $\Delta = (0, \pi/2)$, つまり recycling cavity が反共振、arm cavity が共振とすると、これは感度の点から over coupling, つまり arm cavity について $r_2(r_1^2 + t_1^2) > r_1$ となっている必要がある。このとき、この点は、recycling mirror の反射率を 3 枚鏡共振器全体の反射率 (つまりレーザーへの戻り光) が 0 になるように選んだとしても、ロックポイントは山形 (極大点) になっている。
- 普通考えられる、レーザーへの戻り光が 0 になるような設定で、しかもエンドミラーの反射率がほとんど 1 に近いような設定では、ほんのちょっとのミラーのロスがあれば、 $r_2(r_1^2 + t_1^2) > r_1$ つまり over coupling となり、ロックは可能となる。recycling mirror の反射率はこのような最適値よりもやや低めの方が安全ではある。しかし、ロックの容易さという点ではまだまだ疑問の余地がある。
- 今回の実験では、感度の高い条件より、ロックの容易さを重視して、3 つの鏡の反射率を 65-90-99% 及び 48-90-99% と低めに、しかも全体としてやや over coupling 気味に設定して、また、ロスも、0.2% というあまり低くない値の鏡を使用した。これにより、ロックを掛けるのに成功すれば、感度を重視して設定した反射率の coupled cavity においても、同じようにロックを掛ける事が可能である、と言う事が出来る。

4.3 実験

実験は図 4.1 の様な装置により行なった。

Δ_1, Δ_2 に対する $|T(\Delta_1, \Delta_2)|^2, 1 - |R(\Delta_1, \Delta_2)|^2$ のグラフを見ると、両者ともほとんど同じ形をしていて、透過光強度の方がロスの分だけ縮小されている様に見える。

また、 $(0, \pi/2)$ を中心に、 $(0, 0)$ の辺りから $(0, \pi)$ にかけて、非常に薄い壁のような、強度の大きい領域ができており、このことから、 Δ_1 方向の制御を行なうことが非常に難しいことが考えられる。

特に困難な点として、次のようなことが考えられる。

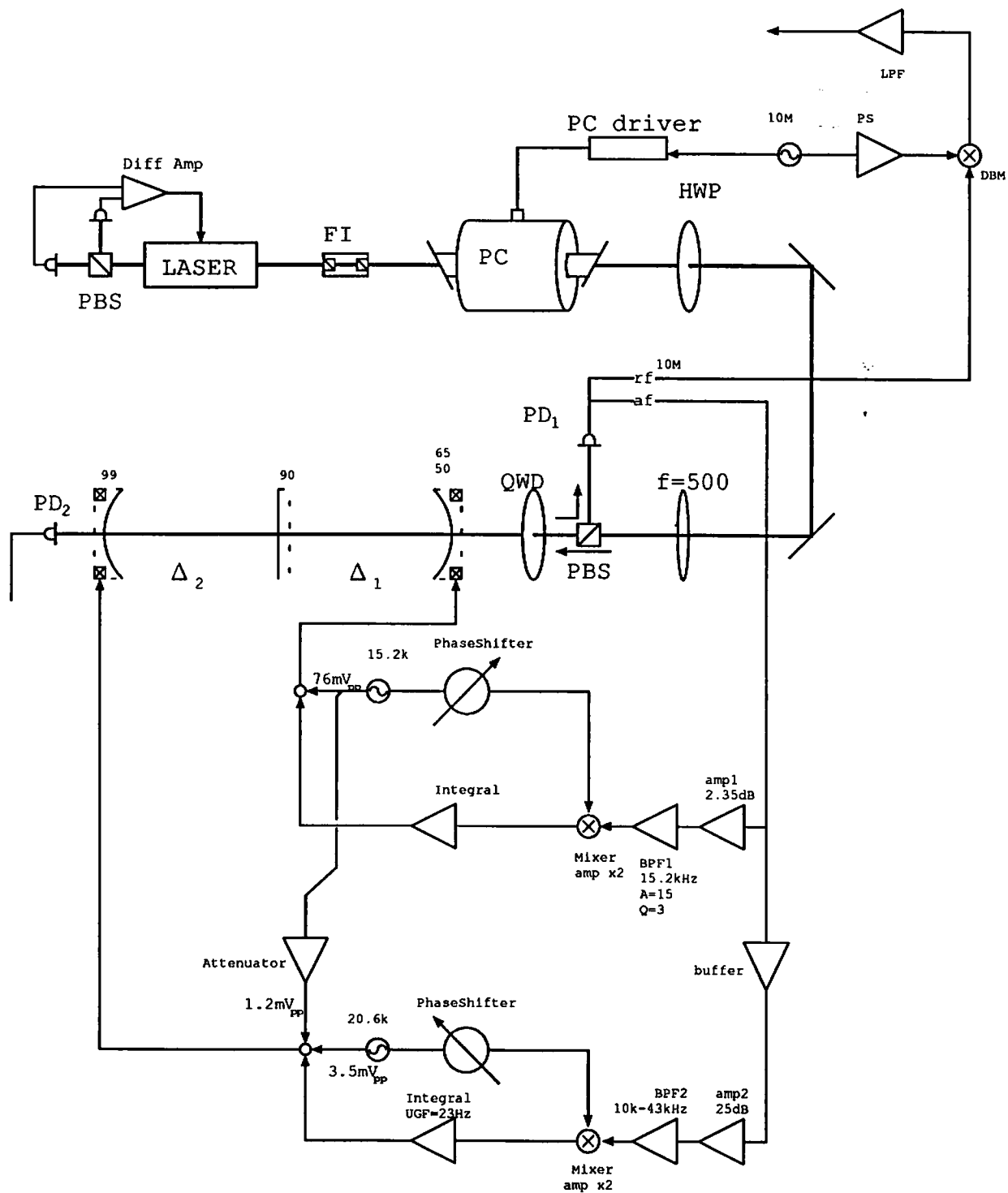


图 4.1: 实验装置

- Δ_1 の状態により、 Δ_2 のループの状態が変わってしまう。つまり Δ_1 が変化すると δ_2 の伝達関数が変化してしまう。
- Δ_1 がロックしているかどうかの判断が難しい。

実験成果を見るに当たっても、 Δ_1 方向の制御がどの位うまくいっているのかをみるためのエラーシグナルが、単にリサイクリングミラーを振って復調するだけでは得られない可能性があるので、レーザー光に rf 変調を掛けることや、リサイクリングキャビティー内から一部光線を取り出すことも検討したのだが、今回の実験ではこれらは行なわなかった。

4.4 実験結果

4.4.1 実験の準備

まず、最初に使用するレーザーのビームパラメーターを測定した。それにより、実験に用いる鏡とレンズの配置を決定した。

鏡は、曲率半径 500mm のものが手近にあったのでそれを用いることにした。

まず、反射率 99.17%、曲率半径 500mm の鏡と、反射率 90% の平面鏡で Fabry-Perot 共振器を組んで、反射率と透過率、それに finesse を測定した。(図 4.2)

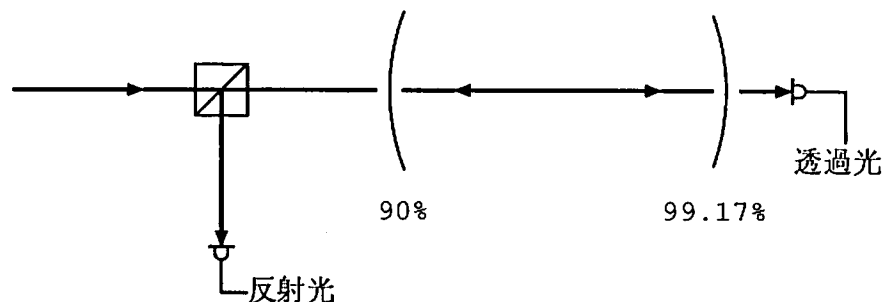


図 4.2: arm cavity の測定

2 枚の鏡の反射率を 90.0%, 99.17%, ロスをそれぞれ 0.2% とすると、Fabry-Perot cavity の共振時の反射率、透過率は各々 69.7%, 23.7% となるはずである。実際に測定した結果は各々 68.6% 20.9% であった。これにより、各鏡の反射率と透過率が大体正しいことが確認された。多少値がずれているのは、アラインメントが完全に合っていないためであると考えられる [8, 9]。

この結果から、この実験に用いる arm cavity の反射率が分かったので、それを元に、今回の実験に用いる一番手前の鏡 (recycling mirror) の反射率を決めた。今回の実験では、最適値に近い値として 65%, 安全値として 50% と 2 種類の鏡を用いて実験を行なうことにした。

4.4.2 3枚鏡光共振器のロック

まず最初は、50%の鏡を用いてロックを掛けてみた。loop filter として、単なる積分器を用いて制御を掛けてみた。ロックが掛かったので、次に65%の鏡を用いてロックを掛けてみた。これも全く同じ回路でロックを掛けることが出来た。

4.4.3 積分器の出力の観測

end mirror (Δ_2) 制御用の積分器の出力と near mirror(Δ_1) 制御用の積分器の出力をオシロスコープの x-y plot 機能を用いて観察してみた。

積分器の出力は変調用の小振幅、高周波数(15,20kHz)の正弦波を足し合わせてそのままピエゾに加えているので、これを見れば鏡の動きが大体掴めるのではないかと思ったのである。

ここでは、反射率 65,90,99.17% の鏡を用いて結合光共振器を組んだ。

観察した結果、オシロの輝点は図4.3の様な直線を描いた。ただし、ここでの観察において信号の dc 成分は切り落としてある。

制御ループの結合がない場合、2つの共振器の長さは独立にふらつくとする、(Δ_1, Δ_2) の x-y plot は、ロックポイントを中心とするある半径の円、又は楕円の中を塗りつぶすようなランダムウォークの様な図形になるはずである。

しかし、この共振器の透過光、反射光強度のグラフは鋭い尾根を持ち、そしてその尾根の稜線の高さが一定なので、初めこの実験結果の直線は反射光強度グラフの尾根を表しているのではないかと思った。

ところが、更に、 Δ_2, Δ_1 のゲインを変化させたところ、図4.4-4.5の様な結果になった。つまり、グラフの傾きが変化したのである。しかも、 Δ_2 のゲインを上げるとグラフは、 Δ_2 方向に若干縮まったものの、 Δ_2 方向に細長い形に変化し、 Δ_1 のゲインを上げると、 Δ_1 方向の制御が強くなって Δ_1 方向に縮まるのではなく、逆に Δ_1 方向に伸びてしまった。

これは最初私にとって意外な結果であったが、復調信号に尾根方向(Δ'_1 軸方向)の情報がほとんど含まれていない、ということ思い出すと、納得のいく説明を得ることが出来る。

図4.6(その1)の様に、2つの共振器長が Δ_2 を保ったまま Δ_1 が変化したとする。また、ここで (Δ_1, Δ_2) の座標系を、 Δ_1 軸と尾根方向が重なるように回転させた座標系を (Δ'_1, Δ'_2) の座標系とする。すると、変調法により Δ'_2 方向にどれだけずれたかは分かるが Δ'_1 方向にはどれだけずれたかが分からない場合、 Δ_1 ループも Δ_2 ループもどちらも Δ'_2 の情報を元に制御を掛けざるを得なくなる。

言い換えると、 Δ_1 ループは本来 Δ_2 の情報を元に制御を掛けなくてはならないにもかかわらず、復調信号に Δ_1 より Δ_2 の情報の方が多く含まれているので、 Δ_2 に従って制御信号を返してしまう。

こういった状況では、積分器の出力を x-y plot しても直線のグラフしか得られない。つまり、この x-y plot が直線になるという現象は、復調信号が1次元の自由度の情報しか持たないということを意味するのではないかと考えられるのである。

つまり、この状態では Δ_1 ループは制御できていないと言える。

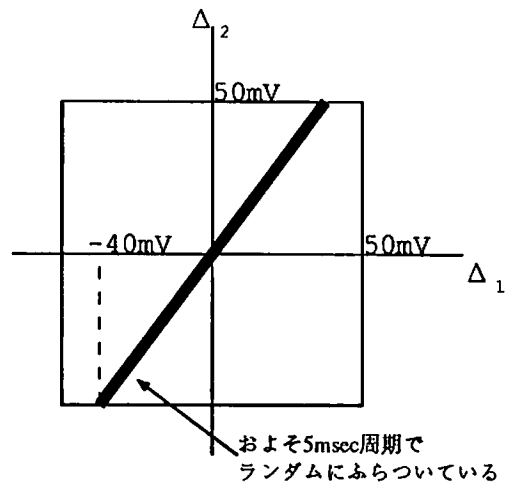


図 4.3: 積分器の出力 x-y plot

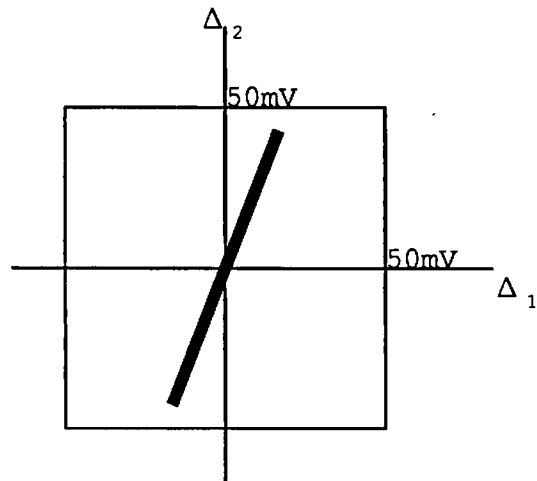


図 4.4: Δ_2 ループのゲインを上げた場合

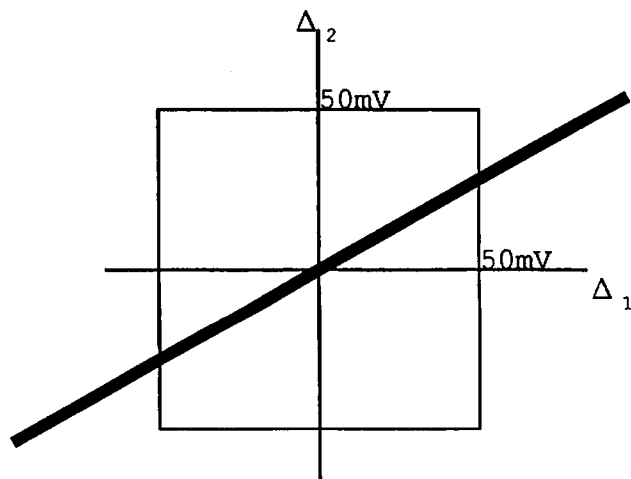


図 4.5: Δ_1 ループのゲインを上げた場合

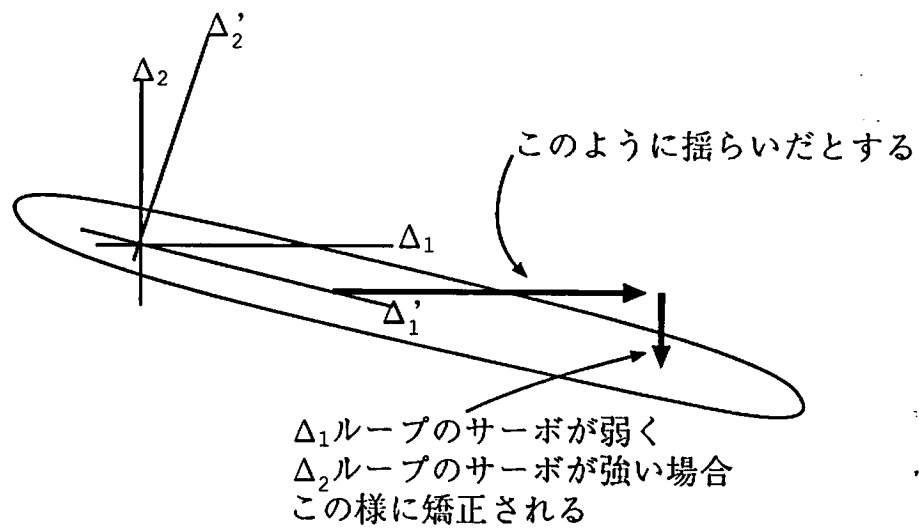


図 4.6: 制御の図(その1)

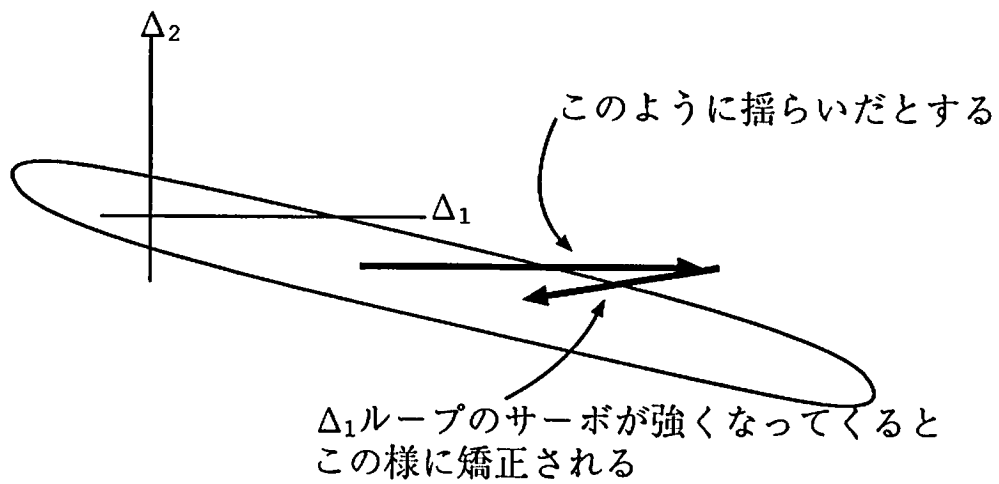


図 4.7: 制御の図(その2)

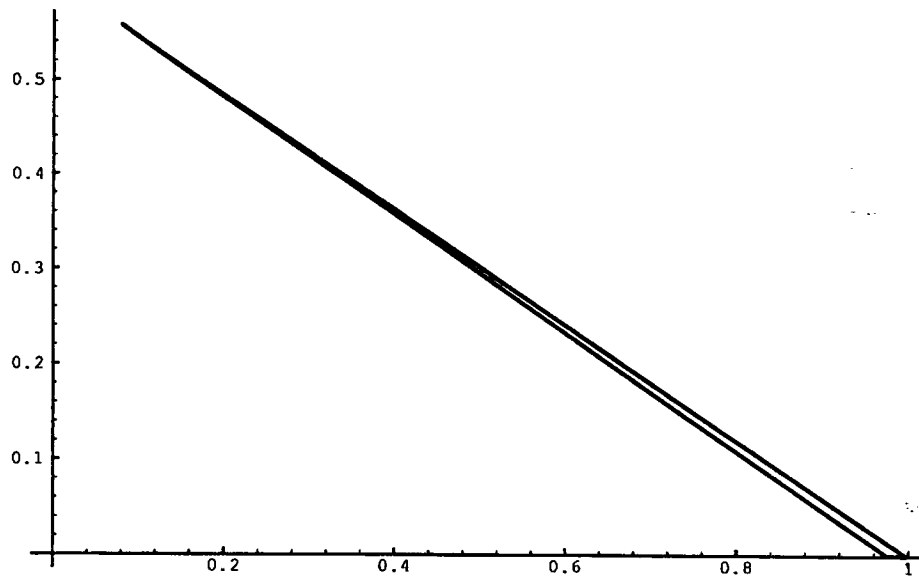


図 4.8: 反射光 (横軸)、透過光 (縦軸) x-y plot

4.4.4 透過光と反射光の関係

反射光と透過光をフォトディテクターで受けてそれをオシロスコープの x-y プロット機能を用いて図形を描かせてみると、輝点はある直線上を動くように見えた。そこで、 Δ_1 と Δ_2 がそれぞれ自由に变化した場合の、この、反射光強度と透過光強度を x-y にプロットした点の位置の動ける範囲を計算で求めてみた。

ここでは、反射率 48,90,99.17% の鏡を用いたとして計算してある。

Δ_1 と Δ_2 の 2 つのパラメータがあるので、本来はある面積の中を動き回るはずであるが、計算の結果、これは、正確には直線上ではないものの、今回の実験に用いた鏡の反射率の組合せ (48,90,99%) においては図 4.8 の様になり、ほとんど直線上しか動けないということが分かった。この図の中で、横軸は反射率を表し、縦軸は透過率を表す。ロックポイントはこの (図中で三角形に見える領域の) 一番左上の点であり、実験中ロックが掛かっている状態においても、この領域の左上 3 分の 1 ぐらいの領域を動き回っている。

この図形がほとんど直線のような領域しか動けないということから、 (Δ_1, Δ_2) に対する透過光強度のグラフと反射光強度 (を 1 から引いたもの) のグラフがほとんど同じ形をしているということが言える。よって、透過光強度と反射光強度は独立した情報をほんのわずかしき持ち合わせていないということが言える。

4.4.5 Δ_1 の情報を取り出すことについて

今回の実験では、手前の共振器 (recycling cavity) の長さ Δ_1 の情報が確実に取り出せる方法を用いることが出来なかった。今回用いた機械変調と復調によっても、上に述べた観

察から、結局 Δ_1 の情報は取り出せていないことが推察される。

この実験の Δ_1 方向の制御の結果を評価するために、当初 rf(radio frequency, 数 MHz 以上の周波数) でレーザー光に位相変調を掛けることも検討したが、今回用いた実験装置においては rf 変調によっても Δ_1 のみの情報を取り出すことは出来ないということが分かったため、この方法は断念した。

また、その他の方法、例えば共振器内の光を一部取り出して見る、といった方法は、ただでさえ不安定でフィネスの低い共振器を更に悪い状態に追い込むことになるので、結局、今回の実験を評価するために純粋な Δ_1 の信号を確実に測定することは出来なかった。

Chapter 5

2つのサーボループの結合について

5.1 3枚鏡の反射率強度曲線と2次曲線近似

3枚鏡の反射光強度は、それに含まれる2つの cavity の位相長さ Δ_1, Δ_2 に対して、図 5.1 のような振舞いを示す。ここで、色の濃い所が反射率の高い所であり、縦軸が Δ_2 、横軸が Δ_1 である。また、反射率の組は手前から 48, 90, 99.17% で各鏡のロスが 0.2% である。

このグラフは縦軸方向に大きく拡大してある。反射率の低いところが標高が高いと考えると、左右に山脈の尾根が走っているようなグラフであると言える。

反射光の 3 D プロットグラフは 2 次曲面

$$f(\Delta_1, \Delta_2) = a\Delta_1^2 + (b+c)\Delta_1\Delta_2 + d\Delta_2^2 \quad (5.1)$$

(但し、 $b=c$) で近似することが出来る。

このグラフが図 5.2 のようなグラフであれば、 Δ_1 と Δ_2 方向に振ってやることにより独立な情報を得ることが出来るが、今回の実験では、反射率の組が手前から 48, 90, 99.17% で各鏡のロスが 0.2% という条件から、 $a = 22.0983$, $b = c = 864.038$, $d = 34563.0$ となる。これは、座標を $\theta = -0.025\text{rad}$ 回転させることにより

$$f(\Delta'_1, \Delta'_2) = a'\Delta'^2_1 + d'\Delta'^2_2 \quad (5.2)$$

$a' = 0.5$, $d' = 34584.7$ と変換される。ここで θ は

$$\tan \frac{\theta}{2} = -\frac{b+d}{d-a} \quad (5.3)$$

で決まる。グラフは図 5.3 の様になる (このグラフは Δ_2 軸方向に 15 倍に拡大されている)。これは、尾根方向に関して、ほとんど真っ平な、カマボコ型になっている。

更に一番手前の鏡 (recycling mirror) の反射率が 65% の場合には、 $a = 45.1929$, $b = c = 1767.03$, $d = 69173.6$ となり、これは変換すると $a' = 0.05$, $d' = 69218.7$ となるので、更に尾根方向に真っ平になる。

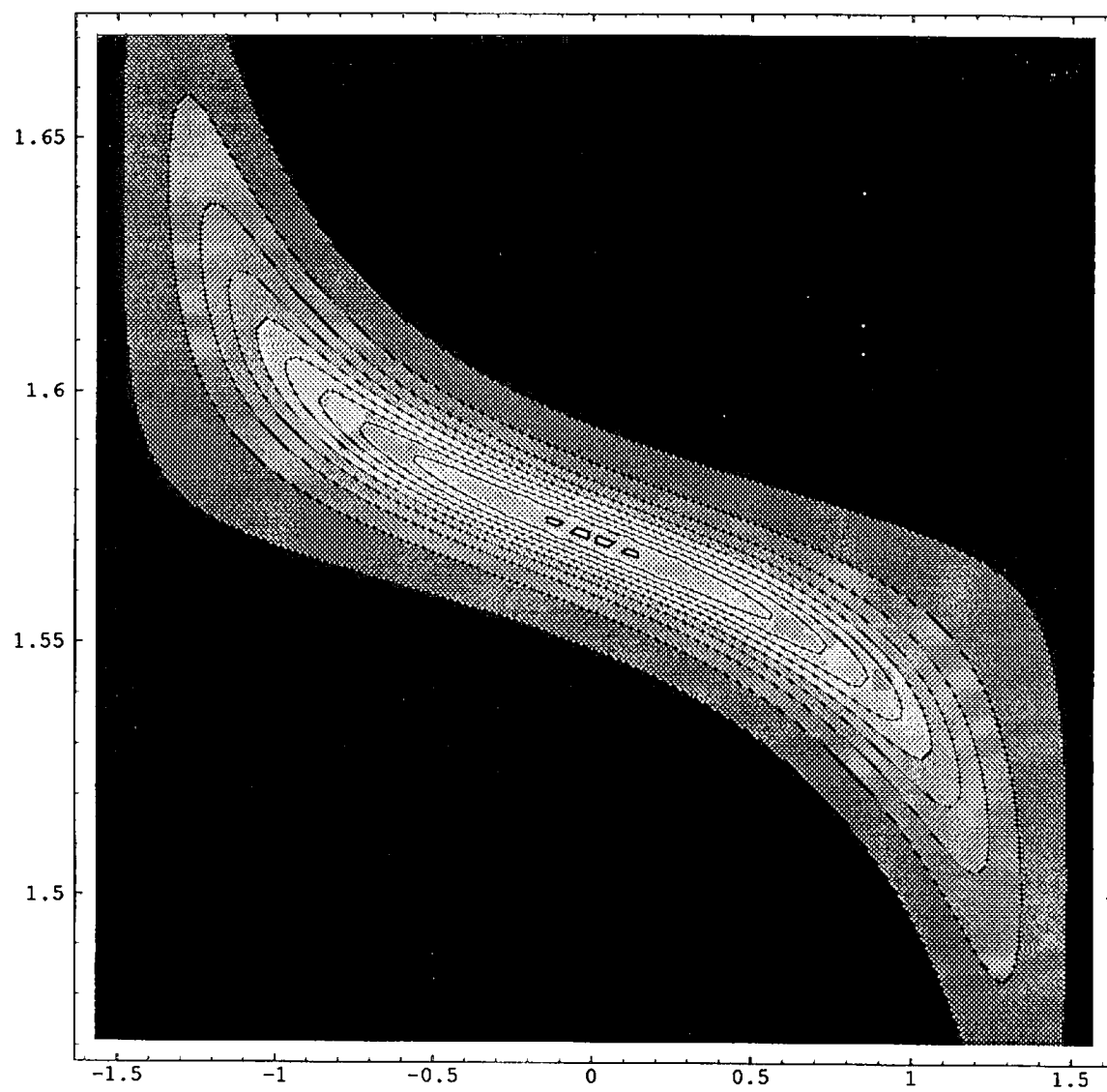


图 5.1: 48,90,99%, loss=0.2%

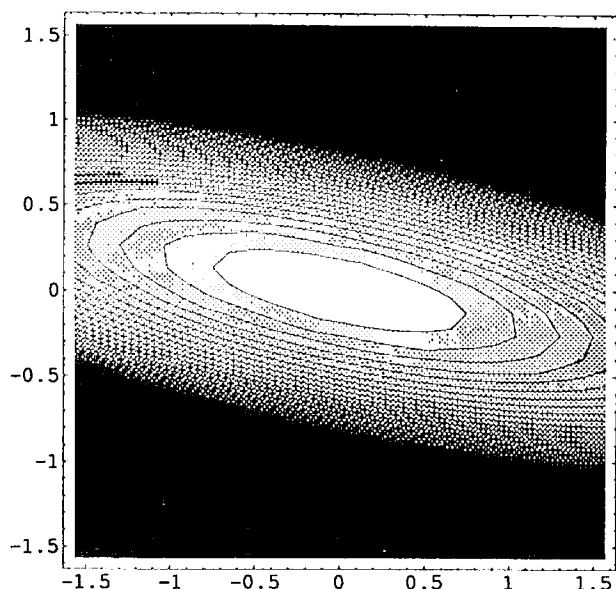


図 5.2: 独立な情報が取り出せる場合

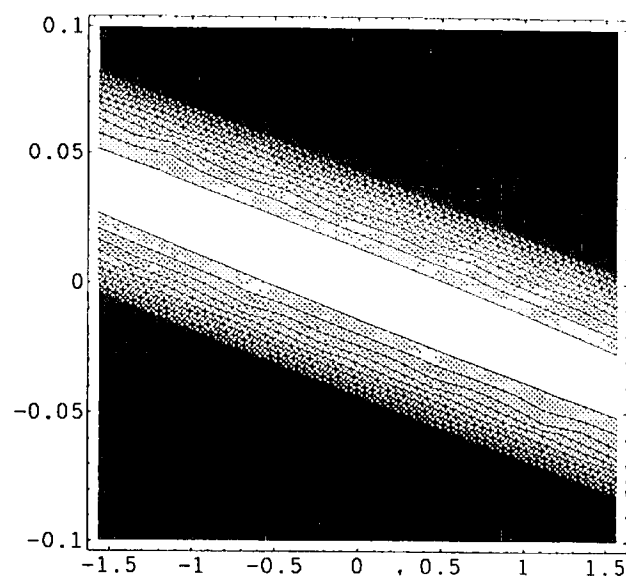


図 5.3: 今回の実験の場合

このことから、尾根方向に変調を掛けてもほとんど復調信号が得られず、尾根方向の座標値に関する情報を得るのが非常に難しいことが予想される。

復調出力のいずれからも、尾根に直交する方向の座標値の情報が多く含まれ、尾根方向の情報はほとんど含まれていないか、雑音に埋もれている。これを少しでも改善できなくてはきちんと制御を掛けることは出来ない。

5.2 サーボループの結合による影響

ここで、2ループのサーボ系を考える。つまり、2つの入力に対して2つの出力があり、その2つの出力が小さくなるように2つの入力に対して制御信号を加える、という制御系を考える。ここでは、これらの入力と出力は、ロックする点の周りでは線形な関係にあるとして考える。

実験装置は図 5.4 のようなものであるとする。加えた信号により共振器長 Δ_1 , Δ_2 が変化する割合を H_1 , H_2 とする。共振器長に対して、復調して得られる信号は、1 次変換の形に表される。復調して得られる信号にサーボフィルターを通してフィードバックを掛ける。このサーボフィルターの入出力信号の比 (伝達関数) を G_1 , G_2 とする。

ロックすべき点 $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ とした場合、その点からのずれ Δ_1 , Δ_2 が微小な時に、復調されて得られる信号の組 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ は、

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

と、線形に近似して書けるとする。ここで、 a, b, c, d は §5.1 の a, b, c, d である。

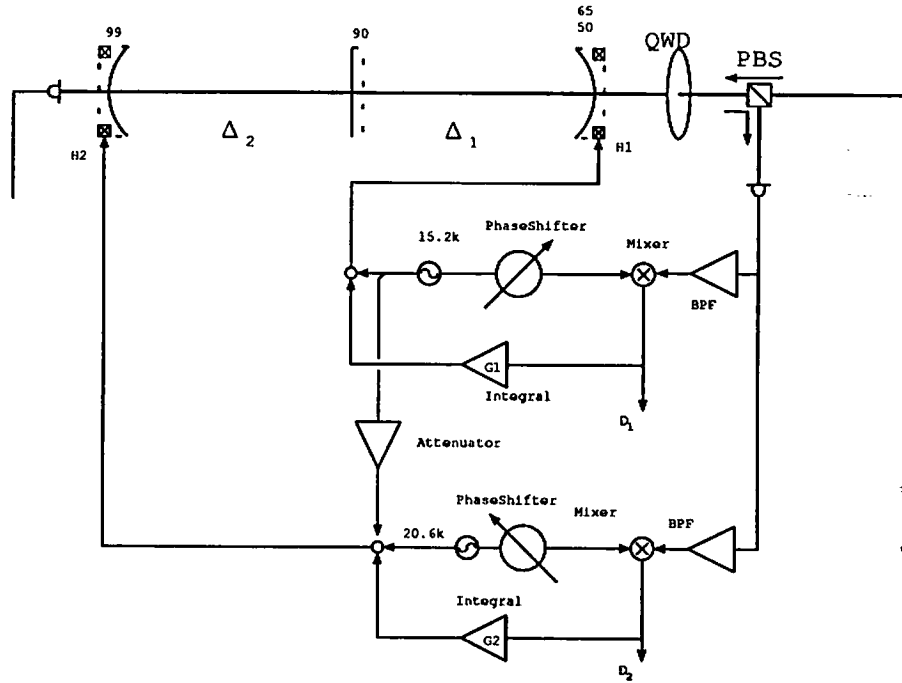


図 5.4: 実験装置

すると、open loop 伝達関数は、
 Δ_1 ループで、

$$G_1 H_1 \frac{a + (ad - bc)G_2 H_2}{1 + dG_2 H_2} = aG_1 H_1 \frac{1 + (1 - \frac{bc}{ad})dG_2 H_2}{1 + dG_2 H_2} \quad (5.5)$$

Δ_2 ループで、

$$G_2 H_2 \frac{d + (ad - bc)G_1 H_1}{1 + aG_1 H_1} = dG_2 H_2 \frac{1 + (1 - \frac{bc}{ad})aG_1 H_1}{1 + aG_1 H_1} \quad (5.6)$$

となる。

H_1, H_2 はピエゾに加えた電圧に対する Δ_1, Δ_2 の変位 (Laplace 変換したもの) なので、ほとんど定数と考えられる。 G_1, G_2 は積分器のようなものを想定し、 $aG_1 H_1 = A/s$, $dG_2 H_2 = B/s$ (但し、 $s = i\omega$) と置く。更に、 $1 - \frac{bc}{ad} \equiv \gamma$ と置くと、open loop 伝達関数は

Δ_1 ループで

$$\frac{A s + \gamma B}{s s + B} \quad (5.7)$$

Δ_2 ループで、

$$\frac{B s + \gamma A}{s s + A} \quad (5.8)$$

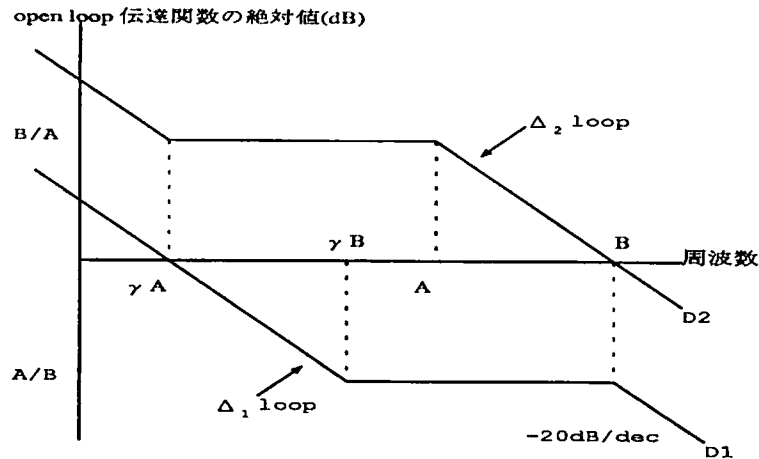


図 5.5: オープンループ伝達関数

と表され、そのグラフを周波数と絶対値について描くと、横軸を $\log$ でとって、縦軸は dB 単位で表した場合、図 5.5 の様な、平らな部分のあるグラフが得られる。この平らな部分の周波数帯域の広さは、上の式の γ で決まる。 γ は 2 つのループの結合の強さを表すパラメータとしても使え、この値が小さいほど結合が強く、2 つの復調出力から独立な情報を得ることが難しくなる。

特に $G_1 H_1$, $G_2 H_2$ を積分形と考えない場合においても、 $F_1 \equiv a G_1 H_1$, $F_2 \equiv d G_2 H_2$ と置くと、open loop 伝達関数は Δ_1 ループについて、

$$F_1 \frac{1 + \gamma F_2}{1 + F_2} \quad (5.9)$$

と書ける。 Δ_2 ループについても同様である。

γ が小さい場合、この式は、

- o $|F_2| \gg 1$ の範囲では γF_1
- o $|F_2| \sim 1$ の範囲では F_1/F_2
- o $|F_2| \ll 1$ の範囲では F_1

で近似される。

$|F_1|$, $|F_2|$ が $\gg 1$, ~ 1 , $\ll 1$ の各々 $3 \times 3 = 9$ 通りの場合で両方の open loop 伝達関数が共に 0dB より大きくなる可能性があるのは、 $|F_1| \gg 1$ かつ $|F_2| \gg 1$ の場合のみである。共振があったり、位相が回ったりしてゲインがあまり上げられない場合はどちらかのループには制御が掛けられない。

$\gamma \ll 1$ のとき、 $|F_1|$, $|F_2| > \frac{1}{\gamma}$ ならこの条件を満たすが、ロックするためには更に位相も考慮しなければならない。

この様に、2 つのループの結合が強いため、片方のループのゲインを上げるともう片方のループのゲインがそれにより打ち消されるような効果が予測される。

結合を減らすには

Δ_1 と Δ_2 の2つのサーボループの結合が制御を行なう上で大きな障害となっているので、何とかこれを緩和しなくてはならない。

そのためには、 Δ_1 ループの復調出力の中に含まれる Δ_1 成分を大きくしてやるか、または Δ_2 成分を小さくしてやらねばならない。

2つの共振器が同じように揺れていても Δ_2 の情報の方が強調されて復調されるので、 Δ_2 の共振器に、より強い制御を掛けて Δ_2 の揺れを抑えるか、 Δ_1 のみを取り出す方法を考えるかのどちらかをしなくてはならない。

しかし、前節の計算によって Δ_2 に強く制御を掛けると Δ_1 ループの制御がそれにより打ち消される様な効果が生じてしまう。

復調信号に Δ_1 より Δ_2 の情報の方が多く含まれている状態で Δ_1 ループのゲイン $G_1 H_1$ を高くすると、復調された Δ_2 に大きな $G_1 H_1$ が掛け算された信号が recycling mirror (Δ_1 cavity) に加えられてしまう。これでは全く Δ_1 を制御していることにならず、 $G_1 H_1$ を大きくすると却って Δ_1 の揺れが大きくなるという結果にもなりかねない。

従って、 Δ_1 ループの復調出力の中に含まれる Δ_1 成分を大きくしてやる方法を検討せざるを得なくなるのだが、機械変調法では劇的にこのようなことを行なうのはかなり難しいのではないと思われるので、何か他の方法に頼らなければならないかも知れない。

なお、次章で、反射率強度曲面の尾根方向に沿って変調を掛けるという方法を試す。尾根方向に変調を掛けることが出来れば式 5.2 の Δ'_2 成分の影響を免れることが出来、 Δ'_1 の情報のみ取り出せることが出来るはずである。しかし、この式の a' と d' の値の大きさの比率を見ても、必ずしもこの方法がうまくいくとは限らないことが想像される。

5.3 手前の cavity の情報を取り出すことについて

手前の共振器の情報を得るためにどのような方法があるか、幾つか考えてみた。

今回の実験で用いた鏡の反射率では、透過光を見るのと反射光を見るのは、ほとんど変わらないということが分かっている。透過光強度のグラフと反射光強度 (を1から引いたもの) のグラフはほとんど同じ形をしており、これらを両方用いたからと言って独立な情報が得られるとは思えない。

また、rf 変調については、今回の実験に関しても、計算機による計算の結果、結局奥の共振器の影響を強く受けてしまい、意味を成さないということが分かった。

機械変調による制御の有効性を確かめるため、何とか手前の共振器の共振器長を測定する手段は無いかと検討を行なったが、結局これまでの実験においては手前の共振器の状態を直接検出するような良い方法が見つからなかった。

5.3.1 なぜ困難か？

3枚鏡共振器の反射率強度は、それを構成する2つの共振器の長さをレーザーの波長で割ったパラメーターを用いて ($\Delta_1 = \omega l_1/c$, $\Delta_2 = \omega l_2/c$) 図 5.6 のグラフのように表せる。

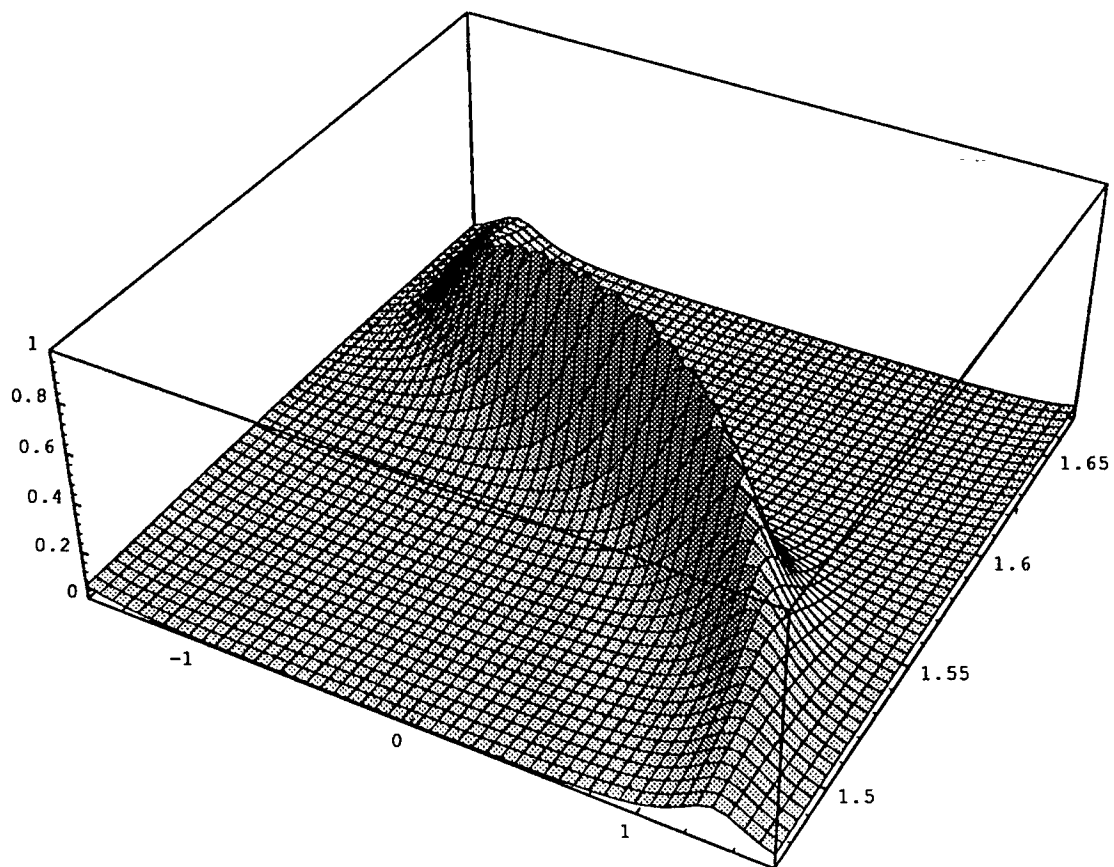


图 5.6: 48,90,99% 反射率强度

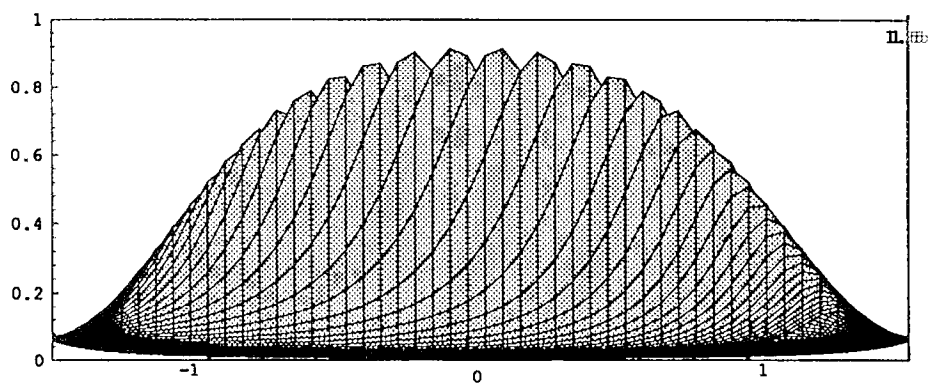


图 5.7: 48,90,99% 反射光强度 (横轴: Δ_1)

ここで、鏡の反射率は、手前から 48%, 90% 99% であり、左下辺の座標軸が Δ_1 軸、右下辺の座標軸が Δ_2 軸である。。

この図、および §5.1 の図は、 Δ_2 軸の方向に大きく拡大してあり、この山の尾根の方向が Δ_1 軸と成す角度は、実際にはこの図に現れているよりずっと小さい (約 0.025rad)。 Δ_2 軸方向から見ると、この尾根は頂上付近ではほとんど高さが一定で、尾根方向には真っ平だが、尾根方向に直交する方向には鋭いピーク型になっている。(図 5.7) このため、尾根方向に変調を掛けてもほとんどデータが得られず、 Δ_1 方向 (あるいは尾根方向から少しでも外れた方向) に変調を掛けて復調すると、 Δ_1 方向の情報より Δ_2 方向の情報の方が遥かに多く含まれており、 Δ_1 方向に制御を掛けることが、予想していた以上に、極めて難しいということが分かった。

以上、示した図は今回の実験で主に取り組んだ、反射率の組が、手前から 48, 90, 99.17 % で、鏡のロスが各 0.2% のものについて描いたものであるが、反射率が手前から 90, 99.17% で、ロスが 0.2% の FP-cavity は共振時の反射率は約 65% である。つまり、共振器内のパワーを最大限上げるためには、手前の鏡の反射率を 65% にするのが望ましい。そこで、65% にした時の共振器の振舞いがどのようなものになるか上に描かせたのと同じようなグラフを図 5.8-5.9 に描いてみた。

尾根の状態は更に真っ平になり、 Δ_1 方向の情報を得るのは更に難しくなることが分かる。

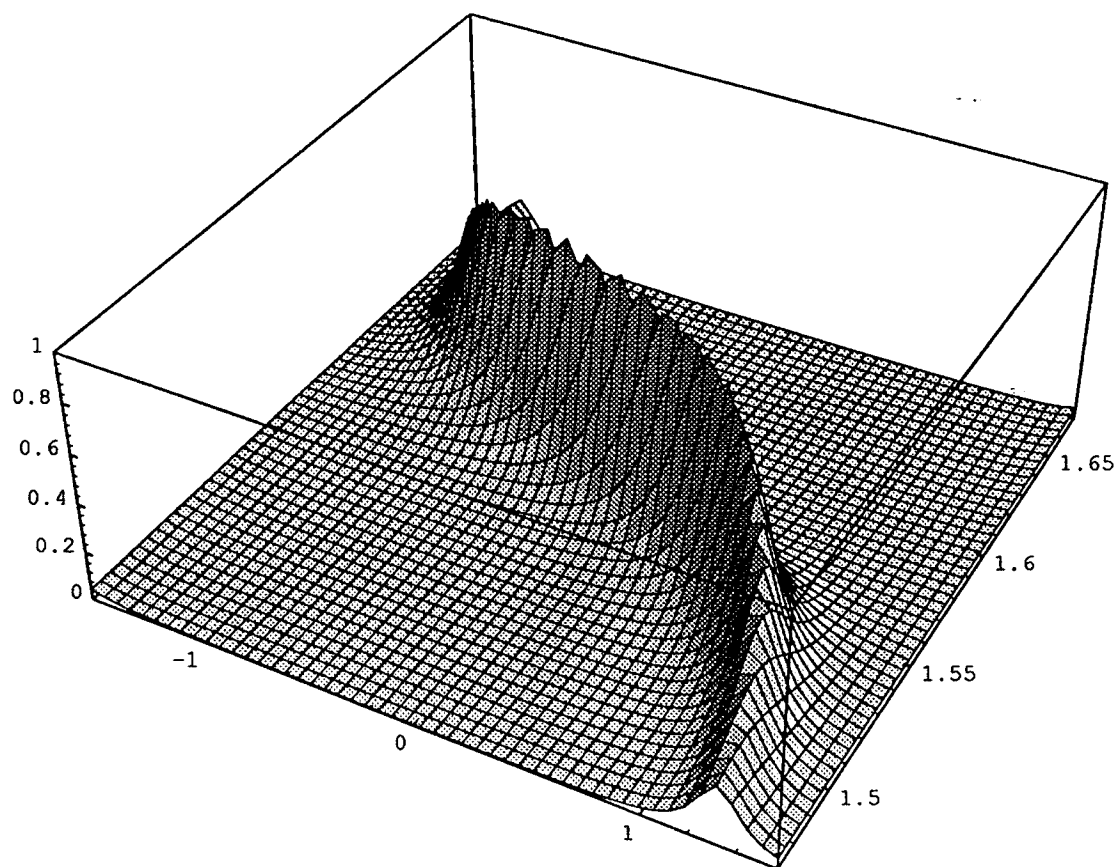


図 5.8: 65,90,99%反射率強度

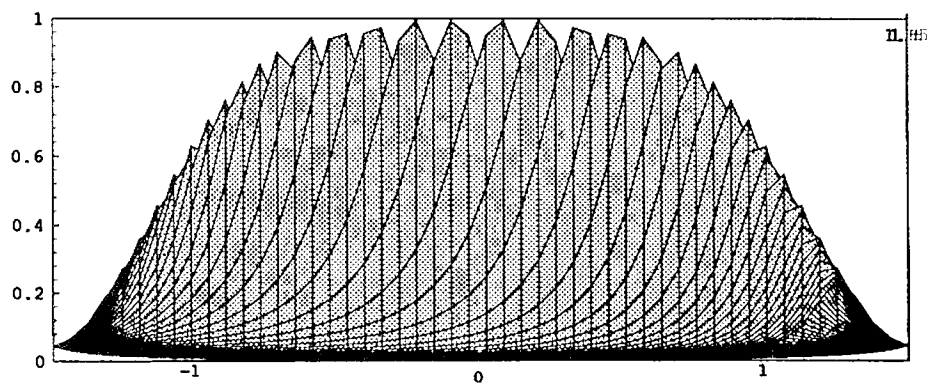


図 5.9: 65,90,99%反射率強度 (横から見た図)

Chapter 6

実験 その2

系の開ループ伝達関数を測定した。結果は以下の通りであった。

系の状態が非常に不安定であり、片方のループの伝達関数を測定している時にもう片方のループのロック状態が揺らぐと、ロックポイントが変化するため非常に大きな影響を受けて、伝達関数も異なった結果が得られる。今回の実験でも、望ましい点にロックさせ、その状態を保ちながら測定を行なうのは大変困難であった。

この様な事情により、結果のグラフは非常に汚いものとなった。また、測定できた周波数帯域もかなり限られたものとなった。しかし、取れたデータのうちコヒーレンスの良いものは、比較的信頼性のあるものであると思われる。

ここで測定した光共振器は、§4のものと同一、鏡の反射率が手前から 48%, 90%, 99.17% のものであり、2つの共振器の長さはそれぞれ 30cm である。

伝達関数の測定

まず、図 6.1-6.2 に、手前の共振器 (recycling cavity, Δ_1 -cavity) と奥の共振器 (arm cavity, Δ_2 -cavity) に、別々に変調を掛けた場合の測定を示す。

この図を見ると、大体前章で議論して予測したような傾向 (図中の太線) を示していることが分かる。 Δ_1 ループのグラフの折れ曲がる点の、周波数の高いほうは、 Δ_2 ループのゲインが 1 になる周波数 (unity gain frequency) に大体一致している。これは、前章で議論した結果と一致している。 Δ_2 ループのグラフが折れ曲がる点は測定範囲に入っていない様子で、見当たらない。前章の議論によると、1Hz より少し高い周波数のところで折れ曲がるのが予想される。 Δ_1 ループのグラフには、グラフが折れ曲がる点が 2 つあるが、この 2 つの点の間隔は前章で計算して予想した値よりかなり小さい値になっている。これは、共振器のアラインメントが少しずれていた、などの理由により共振器のロスが計算に用いた値より大きくなって反射光強度の 3 次元グラフの形が変化したため、2つのループの結合が弱まった、などの理由が考えられる。実際には今回の実験では、計算によって予想したものより、制御が掛けやすい状態であったことが分かった。

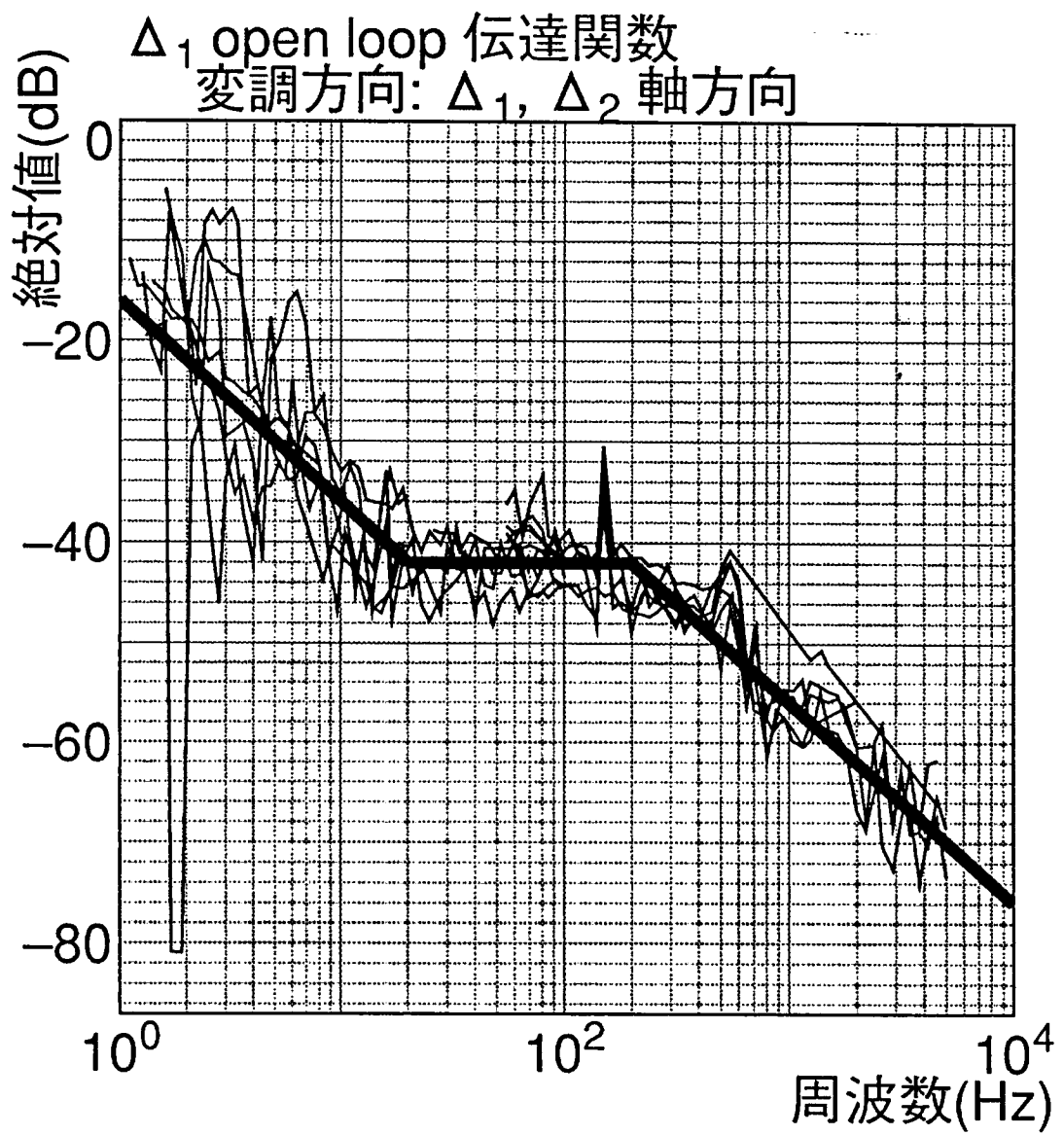


図 6.1: attenuator を外した場合 (変調方向 Δ_1)

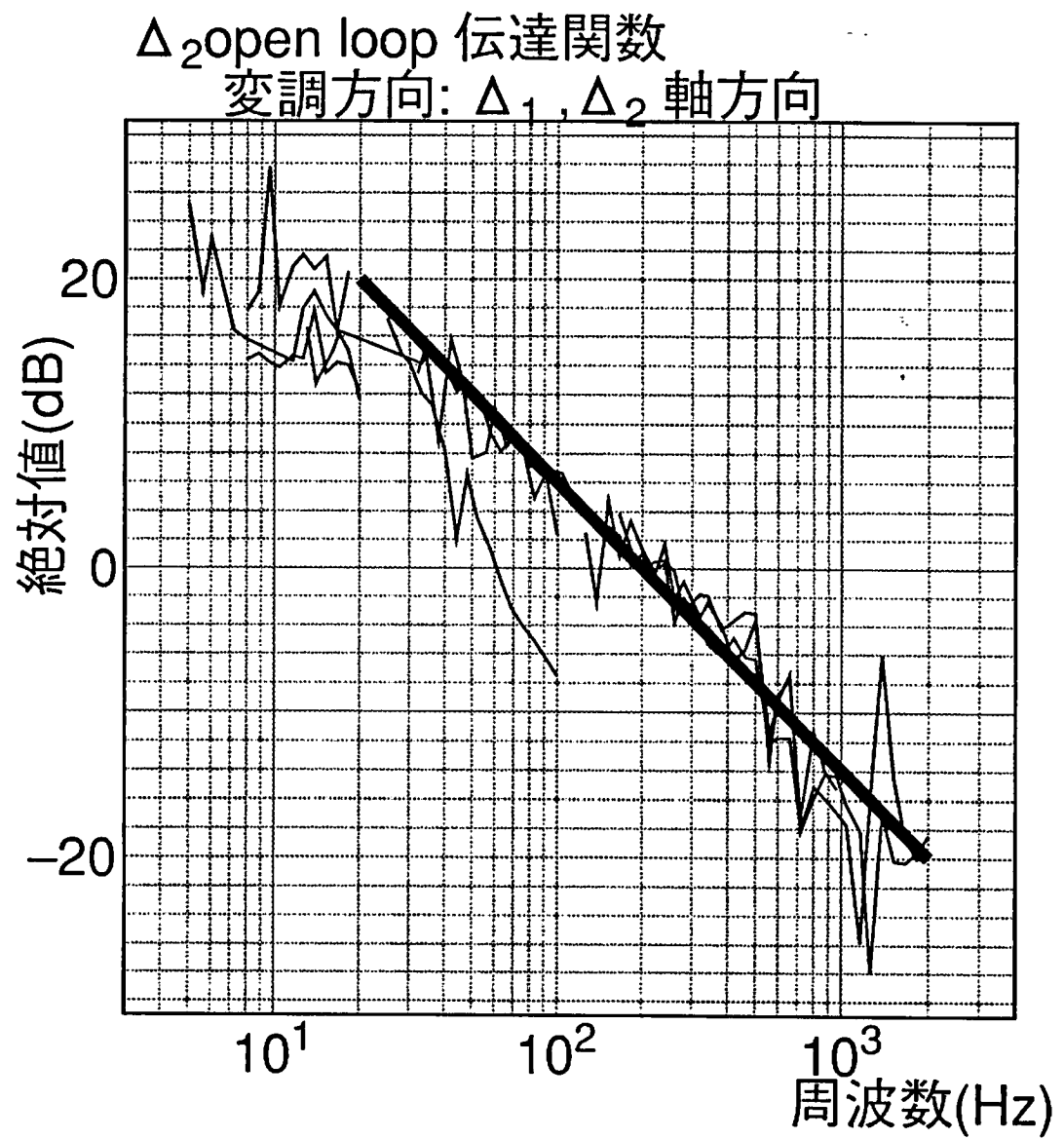


図 6.2: attenuator を外した場合 (変調方向 Δ_1)

変調が尾根方向になるようにした時の伝達関数

次に、 Δ_1 ループの変調信号を少し Δ_2 ループにも分けてやり、透過反射光強度グラフの尾根方向 (Δ'_1 方向) に変調を掛けた場合のグラフを図 6.3-6.4 に示す。

さきほどの実験では、15.2kHz, 76mV_{p-p} の信号を一番手前の鏡 (recycling mirror) に、20.6kHz, 3.5mV_{p-p} の信号を一番奥の鏡 (end mirror) にかけて変調を行っていたが、今回は、15.2kHz の信号を約 1.2mV_{p-p} に減衰させたものを更に一番奥の鏡に加えてやった。これにより、これまで Δ_1 軸方向に変調を掛けていたものを、反射率強度グラフの尾根方向、つまり Δ'_1 軸方向に掛けることによって、 Δ_1 のループの復調信号に含まれる Δ_2 の成分を少しでも減らして2つのループの結合を弱くしようと考えた。

このグラフでは、2つの折れ曲がり点の間隔は別々に変調を掛けた場合よりずっと小さくなっているように見える。これにより、2つのループの結合は少し弱められたと考えられる。

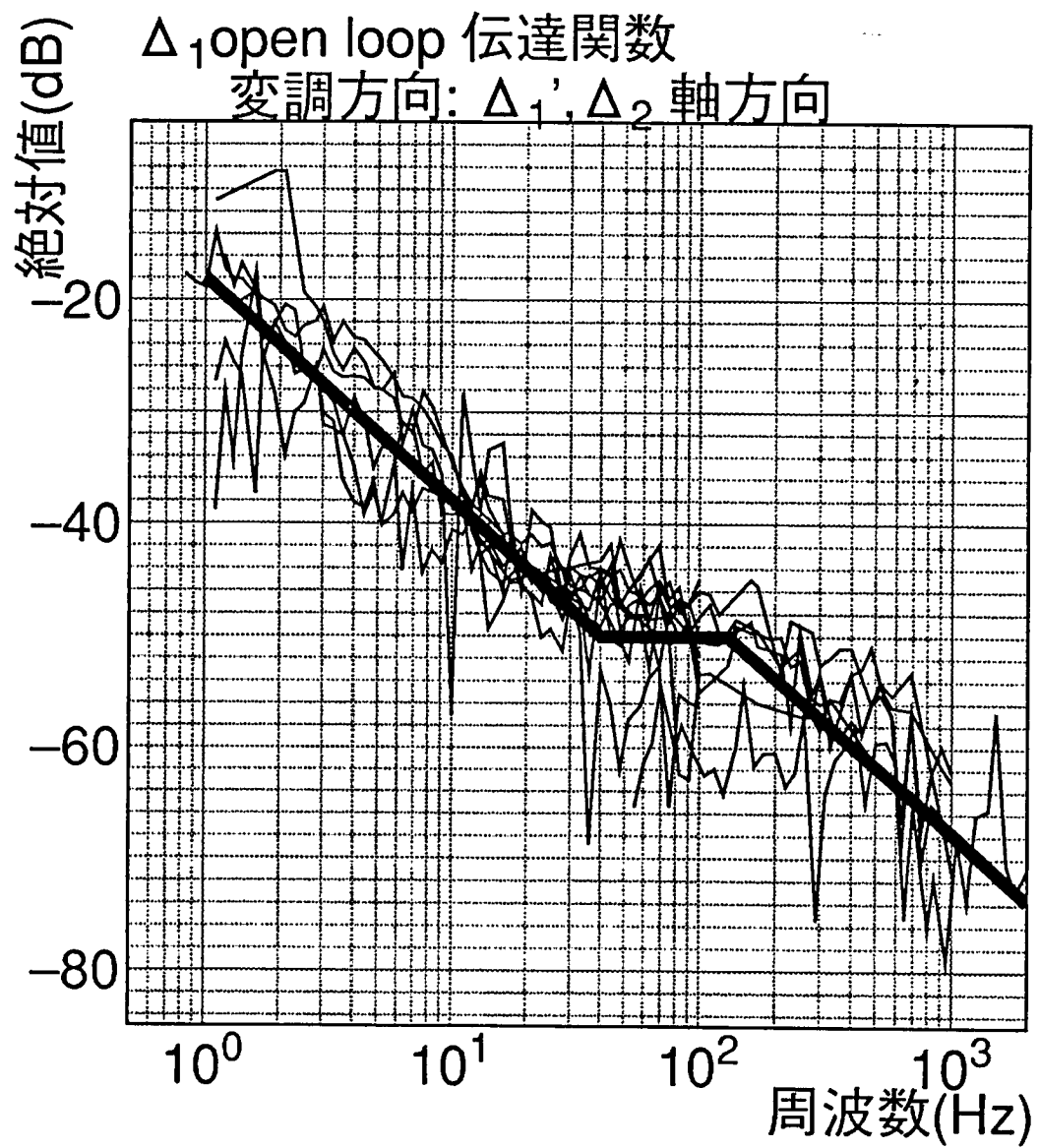


図 6.3: 尾根方向に変調を掛けた場合

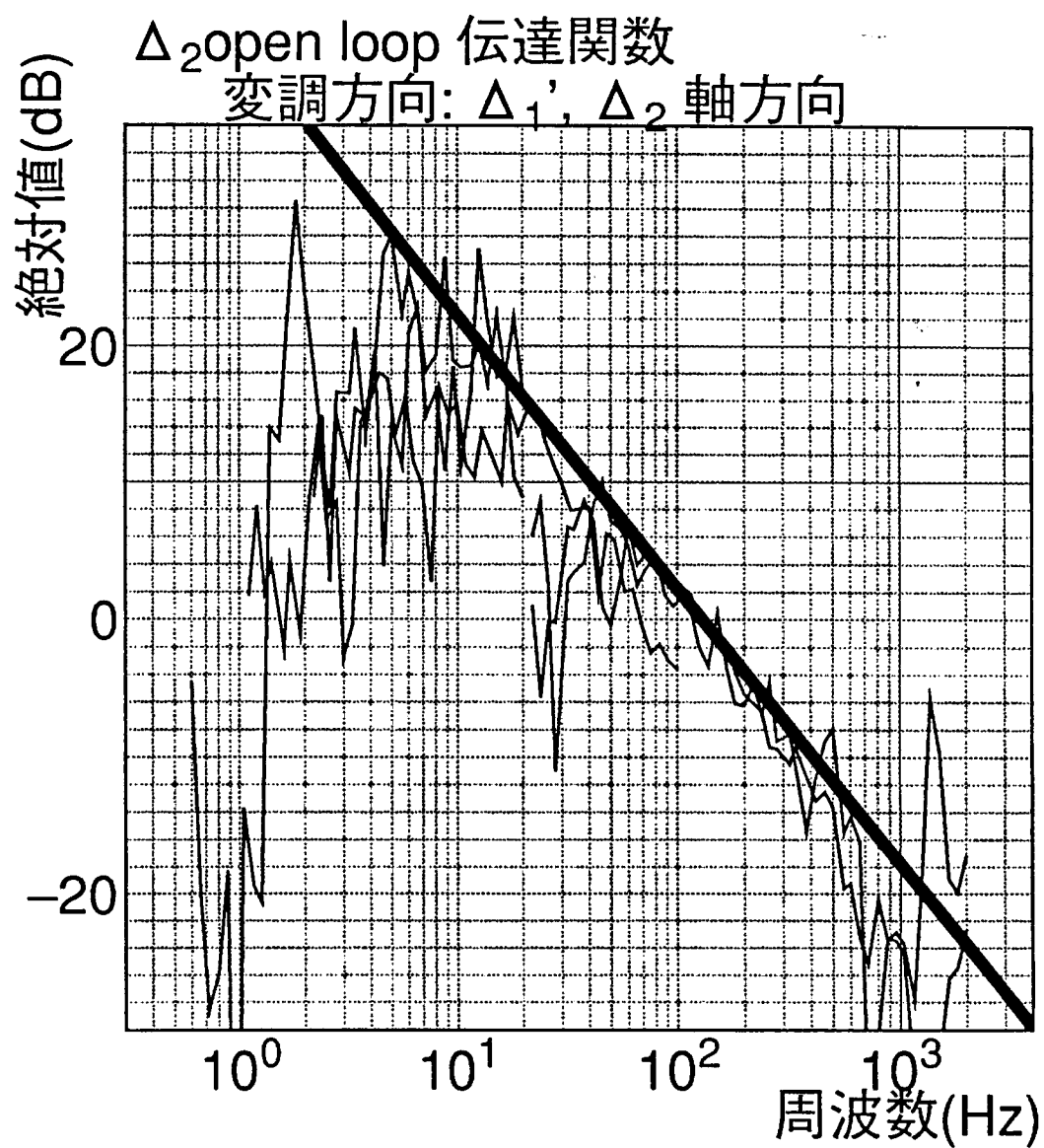


図 6.4: 尾根方向に変調を掛けた場合

Chapter 7

手前の cavity は検出器の感度にどのくらい影響を与えるか

手前の共振器長 Δ_1 を制御することが非常に難しいことが分かった。そこで、Michelson 干渉計として組んだ時に、 Δ_1 が完全に制御されずにふらつくと、どのくらいの大きな悪影響が出るかについて見てみることにする。

7.1 感度を与える影響の計算

7.1.1 リサイクリングキャビティー長のふらつき

§5でも見たように今考えている実験装置の鏡のパラメーターで3枚鏡の共振器を組んだ場合、手前の共振器 (recycling cavity) の情報を取り出すことが著しく困難なため、どうしても手前の共振器長を完全に制御できず、ふらついてしまう。

これは元々この装置自体の目的がメインの共振器 (arm cavity) の情報を取り出すことである、ということにもよるのであるが、手前の共振器のふらつきが重力波検出器の感度に悪影響を与えないかが気にかかるところである。

7.1.2 ダークフリンジ制御

§2.2でも検討した、リサイクルされた Fabry-Perot 型のマイケルソン干渉計について考えてみる。

§2.2.2の重力波検出器の感度の計算で得られた式(2.41)を用いて検討を行なうことにする。簡単のため、ここでいくつかの仮定を置くことにする。

- (1) x 軸、 y 軸の鏡のパラメータは対称であるとする。
- (2) dark fringe で動作させるとする。

条件 (1) は、 $r_1 = r'_1$, $r_2 = r'_2$, $t_1 = t'_1$, $r_S = t_S$ などを意味する。よって、arm cavity の反射率

$$r(\Delta) = \frac{r_1 + r_2(1)e^{2i\Delta}}{1 + r_1r_2e^{2i\Delta}} \quad (7.1)$$

$$t(\Delta) = \frac{t_1t_2e^{i\Delta}}{1 + r_1r_2e^{2i\Delta}} \quad (7.2)$$

の式の形は、 x , y 軸どちらの腕の cavity でも同じ式になるとする。また、この際、 $r_S = t_S = 1/\sqrt{2}$ であるとして考えることにする。

ここで、簡単のため記号を定義することにする。 $\Delta_1 = \omega d/c$, $\Delta'_1 = \omega d'/c$, $\Delta_2 = \omega l/c$, $\Delta'_2 = \omega l'/c$, $\Delta_{m2} = \Omega l/c$, $\Delta'_{m2} = \Omega l'/c$ と書くことにする。

条件 (2) は dark fringe 動作のため、出力ポートに出てくるレーザー光の搬送波成分である式 (2.41) 中の $|S_{00}|$ が最小になるように Δ_1 , Δ'_1 を選ぶ。すると、

$$S_{00} = \frac{it_R}{2} \frac{e^{2i\Delta_1}r(\Delta_2) - e^{2i\Delta'_1}r(\Delta'_2)}{1 + \frac{r_R}{2}(e^{2i\Delta_1}r(\Delta_2) + e^{2i\Delta'_1}r(\Delta'_2))} \quad (7.3)$$

という式の形から直ちに、

$$e^{2i\Delta_1}r(\Delta_2) = e^{2i\Delta'_1}r(\Delta'_2) \quad (7.4)$$

かまたは

$$\arg(e^{2i\Delta_1}r(\Delta_2)) = \arg(e^{2i\Delta'_1}r(\Delta'_2)) = 0 \quad (7.5)$$

の時に $|S_{00}|$ が最小になることが分かる。

式 (7.4) は $S_{00} = 0$ ということである。式 (7.5) は x , y 軸共振器それぞれに対する 2 つの式であり、この式からは、 x 軸共振器と y 軸共振器の結合は読みとれない。

7.1.3 3 枚鏡共振器の制御との関連

式 (7.5) は §5 で見た、3 枚鏡共振器の反射、透過率強度の 3 次元グラフの尾根を表す式にも良く似ている。3 枚鏡共振器の反射率は §3.2 で計算した通り、

$$r_{3mirrors} = \frac{r_R + r(\Delta_2)(R)e^{2i\Delta_1}}{1 + r_Rr(\Delta_2)e^{2i\Delta_1}} \quad (7.6)$$

となる (ここで、 $(R) \equiv r_R^2 + t_R^2$ であることは以前の通りである)。 $|(R)r(\Delta_2)| > r_R$ の場合、ここで Δ_1 が

$$\arg(e^{2i\Delta_1}r(\Delta_2)) = \arg(e^{2i\Delta'_1}r(\Delta'_2)) = \pi \quad (7.7)$$

を満たす時、この式は

$$r_{3mirrors} = \frac{r_R - |r(\Delta_2)|(R)}{1 - r_1|r(\Delta_2)|} \quad (7.8)$$

となり、この時、 $|r_{3\text{mirrors}}|$ は Δ_1 に関して最小である。つまり式 (7.7) は、尾根を表す式である。更に、 $\Delta_2 = \pi/2$ なら、 $|r(\Delta_2)|$ が最小になり、 $|r_{3\text{mirrors}}|$ は Δ_2 に関して最小になる。

つまり、dark fringe になるように制御すると、式 (7.4) または式 (7.5) を満たすように制御が掛かるが、3 枚鏡共振器においては、式 (7.7) を満たすように制御が掛かることになる。式 (7.5) と式 (7.7) は矛盾するので、結局両方の条件を満たすためには、

$$e^{2i\Delta_1}r(\Delta_2) = e^{2i\Delta'_1}r(\Delta'_2) = -|r(\Delta_2)| \quad (7.9)$$

となってなくてはならない。この時、 $|r(\Delta_2)| = |r(\Delta'_2)|$ より $\Delta'_2 = \Delta_2$ or $\pi - \Delta_2$ であることは明らかである。

7.1.4 感度の計算

重力波検出器の感度は式 (2.47) で表される。

$\Delta_2 = \Delta'_2$ の場合と $\Delta_2 + \Delta'_2 = \pi$ の場合に関して $\Delta_2 = \pi/2$ における $|S_{10} + S_{20}^*|$ と $|S_{10} - S_{20}^*|$ を計算することにする。

$l \approx l'$ のため、 $\Delta_{m2} \approx \Delta'_{m2}$ である。ここでは、 $\sin$ や $\exp$ の引数に入っていない場合は $\Delta_{m2} = \Delta'_{m2}$ ¹、また、入っている場合は $\sin(\Delta_{m2}) = \Delta_{m2}$ と近似する。

さて、前節の最後の結論について、 $\Delta'_2 = \Delta_2$ の場合は、完全に両腕が対称な場合であるので、 S_{10} の式は式 (2.44) より

$$S_{10} = \frac{t_R A_{10}}{1 - r_R |r(\Delta_2)|} \quad (7.10)$$

となる。ここで、

$$A_{10} = r_2 e^{2i\Delta_1} \frac{\omega l}{c} \frac{1}{t_2^2} t(\Delta_2) t(\Delta_2 - \Delta_{m2}) \quad (7.11)$$

である。すると、

$$|S_{10} - S_{20}^*| = \frac{t_R |A_{10} - A_{20}^*|}{1 - r_R |r(\Delta_2)|} \quad (7.12)$$

$$|S_{10} + S_{20}^*| = \frac{t_R |A_{10} + A_{20}^*|}{1 - r_R |r(\Delta_2)|} \quad (7.13)$$

となる。 A_{20} は A_{10} の Ω を $-\Omega$ で置き換えたものである。

次に、 $\Delta'_2 = \pi - \Delta_2$ の場合は、 $\Delta'_1 = \pi - \Delta_1$ であるので、 $|S_{10}|$ は、

$$r(\Delta'_2) = r(\Delta_2)^* \quad (7.14)$$

¹ 重力波の振動数を $\Omega = 10^4/\text{sec}$ と置き、arm cavity の長さを $l \approx 3 \times 10^3 \text{m}$ とすると、 $\Omega l/c \sim 10^{-1} \ll 1$ となるので、 $\sin(\Omega l/c)/\Omega \approx l/c$ と近似できる。装置全体の視野から見れば大体 $l \approx l'$ となっているのだが、波長オーダーでは l と l' はかなりのずれがあるはずである。

$$t(\Delta'_2) = -t(\Delta_2)^* \quad (7.15)$$

$$r(\Delta'_2 - \Delta_{m2}) = r(\Delta_2 + \Delta_{m2})^* \quad (7.16)$$

$$t(\Delta'_2 - \Delta_{m2}) = -t(\Delta_2 + \Delta_{m2})^* \quad (7.17)$$

より

$$A_{11} - A'_{11} = i\{e^{2i\Delta_1}r(\Delta_2 - \Delta_{m2}) - e^{-2i\Delta_1}r(\Delta_2 + \Delta_{m2})^*\} \quad (7.18)$$

$$A_{11} + A'_{11} = i\{e^{2i\Delta_1}r(\Delta_2 - \Delta_{m2}) + e^{-2i\Delta_1}r(\Delta_2 + \Delta_{m2})^*\} \quad (7.19)$$

$$A_{10} - A'_{10} = r_2 \frac{\omega l}{c} \frac{1}{t_2^2} \{e^{2i\Delta_1}t(\Delta_2)t(\Delta_2 - \Delta_{m2}) + e^{-2i\Delta_1}t(\Delta_2)^*t(\Delta_2 + \Delta_{m2})^*\} \quad (7.20)$$

を用いて、

$$S_{10} = \frac{t_R}{2} \frac{1}{1 - r_R|r(\Delta_2)|} \left\{ A_{10} - A'_{10} + \frac{\frac{ir_R}{2}(A_{10} + A'_{10})(A_{11} - A'_{11})}{\{1 - \frac{ir_R}{2}(A_{11} + A'_{11})\}} \right\} \quad (7.21)$$

と表される。 S_{20} についても考えると

$$A_{10} = r_2 e^{2i\Delta_1} \Delta_2 \frac{1}{t_2^2} t(\Delta_2)t(\Delta_2 - \Delta_{m2}) \quad (7.22)$$

$$A_{20}^* = -r_2 e^{-2i\Delta_1} \Delta_2 \frac{1}{t_2^2} t(\Delta_2)^*t(\Delta_2 + \Delta_{m2})^* \quad (7.23)$$

$$A_{11} = i e^{2i\Delta_1} r(\Delta_2 - \Delta_{m2}) \quad (7.24)$$

$$A_{22}^* = -i e^{-2i\Delta_1} r(\Delta_2 + \Delta_{m2})^* \quad (7.25)$$

より

$$A'_{10} = -A_{20}^* \quad (7.26)$$

$$A_{20}^* = -A_{10} \quad (7.27)$$

$$A'_{11} = -A_{22}^* \quad (7.28)$$

$$A_{22}^* = -A_{11} \quad (7.29)$$

であるので、結局 $S_{10} - S_{20}^* = 0$, $S_{10} + S_{20}^* = 2S_{10}$ となる。これらより $|S_{10} - S_{20}^*|$, $|S_{10} + S_{20}^*|$ が求まる。

ここで A_{20} は A_{10} の Ω を全て $-\Omega$ に置き換えたものである。これらより $|S_{10} - S_{20}^*|$ は 0 になる。

これらは単なる Δ_2 の関数である。ただし、式(7.7)によると、 Δ_2 がほんのわずかに変化すると、その変化の大きさにある大きな係数をかけただけ Δ_1 が変化すること、また逆も成り立つということであるので、これは単なる Δ_1 の関数であるということも出来る。この大きな係数は

$$\frac{r_2(1)}{r_2(1) - r_1} + \frac{r_1 r_2}{1 - r_1 r_2} \quad (7.30)$$

という式²で表される。

ここで $|S_{10} - S_{20}^*|$, $|S_{10} + S_{20}^*|$ の関数のグラフの1例を描かせる。 $\Delta_2 = \Delta_2'$ の場合 $|S_{10} - S_{20}^*|$, $|S_{10} + S_{20}^*|$ はそれぞれ図 7.1-7.4 のようになる。ここで横軸は全て Δ_2 である。

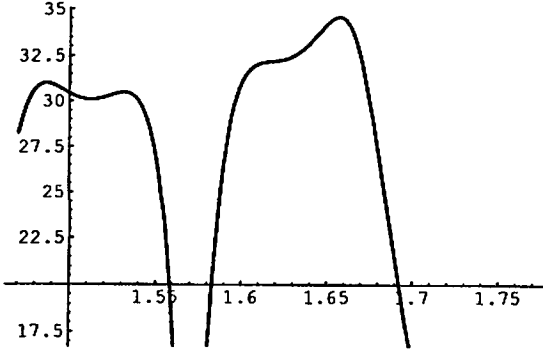


図 7.1: $\Delta_2 = \Delta_2'$ の場合の $|S_{10} - S_{20}^*|$

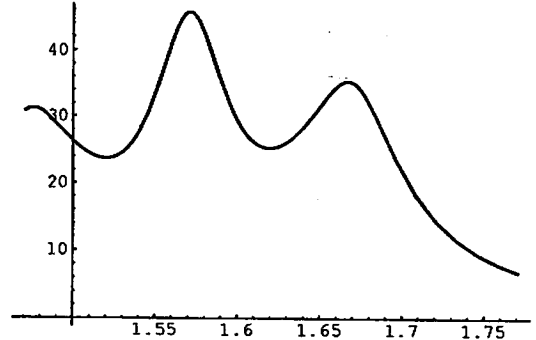


図 7.2: $\Delta_2 = \Delta_2'$ の場合の $|S_{10} + S_{20}^*|$

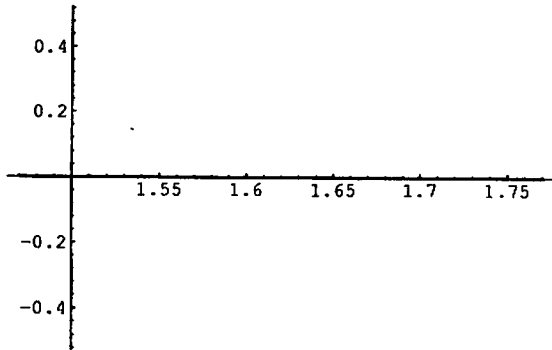


図 7.3: $\Delta_2 + \Delta_2' = \pi$ の場合の $|S_{10} - S_{20}^*|$

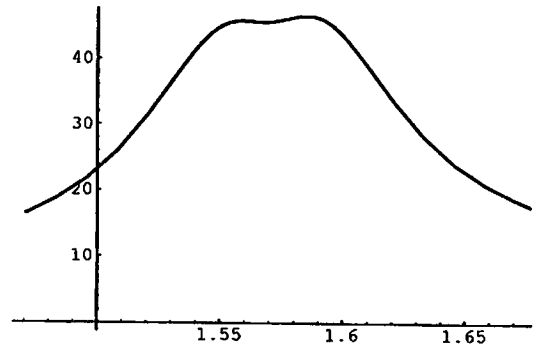


図 7.4: $\Delta_2 + \Delta_2' = \pi$ の場合の $|S_{10} + S_{20}^*|$

この計算において鏡の反射率は手前から 48%, 90%, 99.17% という値を用いている。また $\Delta_{m2} \equiv \Omega/c = 0.1$ とした。

図によると $\Delta_2 = \pi/2$ の周りでは微分係数は 0 になっているように見える。これにより、多少 Δ_1 制御に対する要求は緩やかなものになると考えられる。

Δ_1 に対する要求は元々 Δ_2 に対するものよりも式 (7.30) の比率分だけ緩いものではあるが、しかし、2つのループの結合の強さによっては Δ_1 をこの程度のレベルでさえ制御できずに Δ_2 ループ (奥の共振器) に悪影響を与えることも考えられる。特に、ロスが少なく、最適な値に反射率を選んで構成された高品質の3枚鏡共振器の場合にはこういう危険が大きいと言える。

² $d(\tan^{-1} x) = \frac{dx}{1+x^2}$ 及び $\frac{d(\arg(1 - Ae^{2i\Delta}))}{d\Delta} \Big|_{\Delta=0} = -\frac{2A}{1-A}$ より式 (3.2) のパラメータを代入すれば求まる。

Chapter 8

af 機械変調の有望性 (あとがき)

当初、この実験を始めたころは、単に2自由度あるので2方向に変調を掛ければそれでいいと思っていたが、実際にやってみると、そんなに簡単なものではなかった。

重力波検出器として設計する場合には、元々奥の共振器の長さの変化に敏感になるように設計するためか、どこに変調を加えてどこから信号を取り出しても、奥の共振器の情報ばかりが混ざってきて手前の共振器の情報はなかなか取り出せなかった。

recycling mirror を理想的な値、つまりレーザーの方に戻っていく光が完全に0となるような反射率に選んだ場合、鏡のロスが0に近付けば近付くほど反射、透過率強度曲面の尾根方向の微分は0に近付いてしまう。また、鏡のロスが0の場合は recycling mirror の反射率を段々上げていった場合、3枚鏡共振器全体の反射率が0に近付くほど、こちらもまた尾根方向の微分は0に近付く。また、メインの共振器 (arm cavity) の alignment が、少し崩れていたのがピタッと合い、arm cavity の反射率が下がった場合にも、尾根方向の微分が0になるのを通り越して、ロックポイントにおける透過反射光曲面が鞍型になってしまう。

つまり共振器を高品質なものにすればするほど制御が更に難しくなっていくということである。

しかも、尾根方向のふらつきは検出器の感度にも影響を与えないわけではない。制御ループの結合のため、尾根方向のふらつき (つまり手前の共振器のふらつき) は奥の共振器のふらつきに変換され得る。

また、奥の共振器の制御を強くしようとすると、これにより手前の共振器の制御が打ち消され、手前の共振器の制御を強くしようとすると、逆に奥の共振器の制御が打ち消されるばかりか手前の共振器のふらつきが却って大きくなってしまうという結果になった。これは両ループの制御のゲインを今回の実験の場合より何十 dB も上げることが出来れば解決できることであるが、その場合でも手前の共振器には奥の共振器に比べて遥かに小さい制御しか掛けることが出来ないであろうことが予想される。

rf 変調に比べ波面の乱れは少ないとは言うものの、機械変調で信号を取り出すために鏡をかなり大きく振らなければならないとしたら、余り意味がない。

こういったことから、今回の実験および理論的検討を行なって来た結果、重力波を検出するような高品位な共振器に関しては、単純な af 機械変調のみで3枚鏡光共振器を制御す

るのはかなり難しいという否定的な印象を受けた。

Appendix A

変調について

A.1 位相変調

A.1.1 位相変調、側波帯

変調のかかった光を共振器に入射して、透過光または反射光を見る、という場合を考えてみる。

ここで、振幅透過率に対する伝達関数を $T(\omega)$ とする。振幅反射率に対する伝達関数 $R(\omega)$ に対しても、同様の結果が当てはまると思われる。

振幅 1 の光に $\phi(t) = M \sin \omega_m t$ の位相変調が掛かっているとすると、 $M \ll 1$ として M の一次まで近似すると、¹

$$\begin{aligned} (\text{入射光}) &= \exp i(\omega t + \phi(t)) \\ &= \exp(i\omega t) \{1 + i\phi(t) + \dots\} \\ &= \exp(i\omega t) \{1 + iM \sin \omega_m t + \dots\} \\ &= e^{i\omega t} + \frac{M}{2} e^{i(\omega+\omega_m)t} - \frac{M}{2} e^{i(\omega-\omega_m)t} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

この光が 3 連ミラー cavity を透過すると、

$$(\text{透過光}) = T(\omega) e^{i\omega t} + \frac{M}{2} T(\omega + \omega_m) e^{i(\omega+\omega_m)t} - \frac{M}{2} T(\omega - \omega_m) e^{i(\omega-\omega_m)t} + \dots \quad (\text{A.2})$$

となる。強度は、 $| \quad |^2$ を考えることにより、

$$\begin{aligned} (\text{透過光強度}) &= |T(\omega) + \frac{M}{2} T(\omega + \omega_m) e^{i\omega_m t} - \frac{M}{2} T(\omega - \omega_m) e^{-i\omega_m t} + \mathcal{O}(M^2)|^2 \\ &= |T(\omega)|^2 + M \Re[\{T(\omega) T(\omega + \omega_m)^* - T(\omega)^* T(\omega - \omega_m)\} e^{-i\omega_m t}] + \mathcal{O}(M^2) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

¹ cf. $e^{im \sin \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) e^{in\omega_m t}$

となる。この中で、 t 依存項は、

$$2B_t \equiv T(\omega)T(\omega + \omega_m)^* - T(\omega)^*T(\omega - \omega_m) \quad (\text{A.4})$$

と置くと、

$$M\Re[2B_te^{-i\omega_mt}] \quad (\text{A.5})$$

となる。

これより、透過光強度は、振幅 $|2MB_t|$ 、振動数 ω_m （変調周波数）で揺らいでいることが分かる。以上の議論は $M \ll 1$ であれば ω_m の大小に関わらず成立する。

A.1.2 変調周波数が共振幅より十分大きい場合 (rf 変調)

$\omega_m\tau_s \gg 1$ の場合 (ω_m は変調周波数、 τ_s は共振器の storage time)、 ω が共振器の共振幅の中に入っていれば ($\omega = \omega_{reso} + \Delta\omega$, $\Delta\omega\tau_s \ll 1$)、透過光について、

$$2B_t = T(\omega)T(\omega + \omega_m)^* - T(\omega)^*T(\omega - \omega_m)$$

において、 $T(\omega \pm \omega_m) \approx 0$ (共振幅から外れているところでは、ほとんど透過しない) となっている場合、変調の影響は透過光にはほとんど現れない。

反射光については、

$$2B_r = R(\omega)R(\omega + \omega_m)^* - R(\omega)^*R(\omega - \omega_m)$$

は、 $R(\omega \pm \omega_m) \approx 1$ (共振幅から外れているところではほとんど全て反射される。)、 $R(\omega_{reso}) \approx 0$ (共振点では、反射光はほとんどゼロになる。) とすると、

$$\begin{aligned} 2B_r &= R(\omega) - R(\omega)^* \\ &= R(\omega_{reso} + \Delta\omega) - R(\omega_{reso} + \Delta\omega)^* \\ &\cong R(\omega_{reso}) - R(\omega_{reso})^* + \Delta\omega R'(\omega_{reso}) - \Delta\omega R'(\omega_{reso})^* \\ &\cong \Delta\omega (R'(\omega_{reso}) - R'(\omega_{reso})^*) \\ &= 2i\Delta\omega \Im[R'(\omega_{reso})] \end{aligned}$$

よって、

$$M\Re[2B_re^{-i\omega_mt}] = 2\Delta\omega M\Im[R'(\omega_{reso})] \sin \omega_mt$$

のようになり、 $M \sin \omega_mt$ に比例した位相変化が検出される。 $\sin \omega_mt$ で同期検波することにより、 $\Delta\omega$ (共振点からのずれ) が得られる。

A.1.3 変調周波数が共振幅より小さい場合

$\omega_m\tau_s \ll 1$ の場合、先の式の第2項（下線部）は、 $T(\omega + \omega_m) \cong \omega_m T'(\omega) + T(\omega)$ と近似することにより、

$$M \Re[2B_t e^{-i\omega_m t}] = 2\omega_m M \Re \left[\frac{T(\omega)^* T(\omega + \omega_m) e^{i\omega_m t} - T(\omega)^* T(\omega - \omega_m) e^{-i\omega_m t}}{2\omega_m} \right] \quad (\text{A.6})$$

$$\cong 2\omega_m M \Re \left[i |T(\omega)|^2 \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m} + T(\omega)^* T'(\omega) \cos \omega_m t \right] \quad (\text{A.7})$$

この式の下線部は、純虚数なので消えて、

$$= 2\omega_m M \cos \omega_m t \Re[T(\omega)^* T'(\omega)] \quad (\text{A.8})$$

$\frac{d}{d\omega} |T(\omega)|^2 = 2 \operatorname{Re}[T(\omega)^* T'(\omega)]$ なので、

$$M \Re[2B_t e^{-i\omega_m t}] = M \omega_m \cos \omega_m t \frac{d}{d\omega} |T(\omega)|^2 \quad (\text{A.9})$$

と、 $M \omega_m \cos \omega_m t$ に比例した周波数変化が検出される。

このように ω_m (変調周波数) が $(\omega_0 - \omega_m < \omega < \omega_0 + \omega_m)$ の範囲で $T(\omega)$ が線型とみなせるくらい) 小さい場合は、単純に透過率 $|T(\omega)|^2$ の極値をとる点、つまり、微分をとって、0 となる所にロックする。

A.1.4 Fabry-Perot cavity に rf 変調を掛けた場合

af 変調の場合は単に $r(\Delta)$, $t(\Delta)$ を微分した様な応答が得られるが、rf 変調の場合はそう簡単ではない。

変調周波数によっては、式 A.4 が消滅してしまうこともある。 $T(\omega)$ 及び $R(\omega)$ は共振器の FSR (free spectral range) ω_{FSR} の周期関数であるので、 $\omega_m = \omega_{FSR}$ となる様に ω_m を選ぶと、この共振器は変調の影響を受けない。

A.1.5 位相変調と周波数変調の違い

変調波を

$$\exp i(\omega_0 t + \phi(t)) \quad (\text{A.10})$$

とする。ここで、 $e^{i\omega_0 t}$ は搬送波である。

$\phi(t)$ の Fourier 変換を $\tilde{\phi}(\omega_m)$ とすると、式 (A.10) の位相変化は、

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_m t} \tilde{\phi}(\omega_m) d\omega_m \quad (\text{A.11})$$

であり、周波数変化は

$$\Omega(t) = \frac{d\phi}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_m t} i\omega_m \tilde{\phi}(\omega_m) d\omega_m \quad (\text{A.12})$$

であると言える。ここで、

$$\tilde{\Omega}(\omega_m) = i\omega_m \tilde{\phi}(\omega_m) \quad (\text{A.13})$$

という関係が成り立つ。

よって、式(A.10)は「 $e^{i\omega_0 t}$ に $\phi(t)$ で PM 変調を掛けたもの」であるとも言えるし、「 $\Omega(t)$ で FM 変調を掛けたもの」とも言うことができる。

ここで、 $\phi(t)$ と $\Omega(t)$ の関係は、「 $\phi(t)$ を $H(\omega) = i\omega$ というハイパスフィルタ（微分回路）を通したものが、 $\Omega(t)$ 」で、「 $\Omega(t)$ を、 $H(\omega) = 1/i\omega$ というローパスフィルタ（積分回路）に掛けたものが $\phi(t)$ である」という関係になっている。

逆に、 $\Omega(t)$ により FM 変調を掛けると、

$$\exp i \left(\omega_0 t + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_m t} \frac{\tilde{\Omega}(\omega_m)}{i\omega_m} d\omega_m \right) \quad (\text{A.14})$$

という変調波が得られ、高域が弱められている。

ここで、 $\tilde{f}(\omega_m)^* = \tilde{f}(\omega_m)$ （実数）の場合について考えてみる。²

この信号により、FM 変調を掛けると、

$$\exp i \left(\omega_0 + \frac{2\tilde{f}(\omega_m)}{\omega_m} \sin \omega_m t \right)$$

という変調波が得られるが、PM 変調の場合は

$$\exp i(\omega_0 + 2\tilde{f}(\omega_m) \cos \omega_m t)$$

$\exp$ の肩に乗っている位相が、 $\sin$ と $\cos$ で 90° 異なっていることが分かる。また、FM の場合は、高調波成分が減衰されている。

A.2 機械変調の場合

変調周波数が十分に小さい (storage time τ_s に対して $\omega_m \tau_s \ll 1$) ときは、時刻 t における cavity の透過（反射）率は、共振器長に

$$l = l_0 + l_m \cos \omega_m t \quad (\text{A.15})$$

という機械変調を掛けた場合、

$$T(\omega(l_0 + l_m \cos \omega_m t)/c) \quad (\text{A.16})$$

² $\tilde{f}(t)$ が実数であるためには、 $\tilde{f}(-\omega_m) = \tilde{f}(\omega_m)^*$ という条件が必要。よって $\tilde{f}(\omega_m)$ が実数であると言うことは $\tilde{f}(-\omega_m) = \tilde{f}(\omega_m)$ と言うことになる。よって、

$$f(t) = 2 \int_0^{\infty} \tilde{f}(\omega_m) \cos \omega_m t d\omega_m$$

と表せるものに限って考えていることになる。

と考えて良い。 $e^{-i\omega t}$ の光が入射した時、透過（反射）する光は

$$e^{-i\omega t} T(\omega(l_0 + l_m \cos \omega_m t)/c) \quad (\text{A.17})$$

この強度は

$$\|T(\omega(l_0 + l_m \cos \omega_m t)/c)\|^2 \cong \|T(\omega l_0/c)\|^2 + \frac{d\|T(\Delta)\|^2}{d\Delta} \bigg|_{\Delta=\omega l_0/c} \frac{\omega l_m}{c} \cos \omega_m t \quad (\text{A.18})$$

となり $\cos \omega_m t$ で同期検波すれば、透過（反射）光強度の微分が得られる。

このことは透過（反射）光曲線のグラフのどの範囲を変調により動かすかを考えれば、直観的に理解できる (図 A.1)。

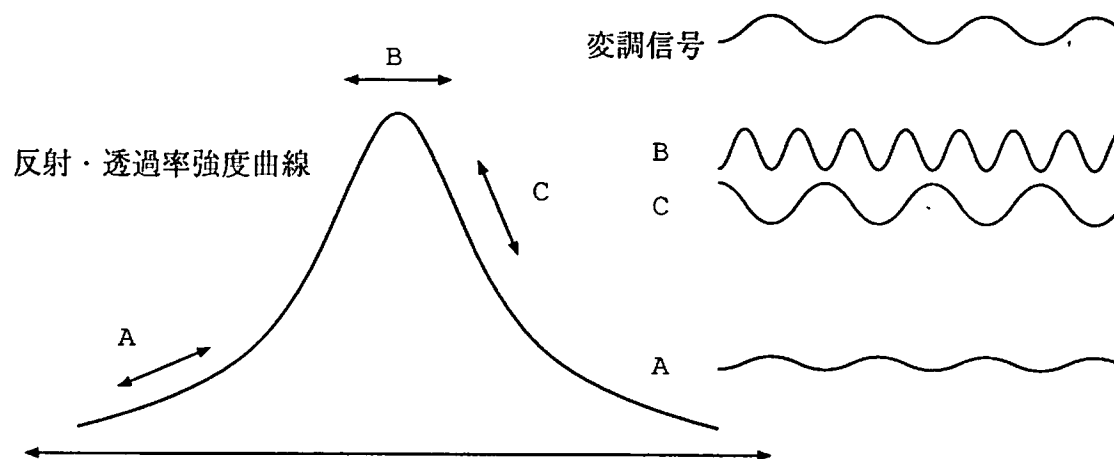


図 A.1: 機械変調

図中で、 Δ が 0 より小さい位置 (A) で変調を掛けると、Photo Detector からは図の右の A の様な信号が得られる。これを変調信号 (図の右上) とかけ算して Low Pass Filter (LPF) に通すと正の信号が得られる。逆に 0 より大きい位置 (C) で変調を掛けると負の信号が得られる。丁度 0 の位置で変調を掛けると Photo Detector から得られる信号は、変調信号の 2 倍の周波数成分は含むが同じ周波数の成分は含まないため、変調信号と掛け算すると 0 になる。

この掛け算して得られた復調信号により、 Δ の値が分かるので、制御に用いることが出来る。

Appendix B

実験に使用した回路

ここでは、この実験に使用した回路をのせておく。

バンドパスフィルター

Δ_1 のループの 15.2kHz の信号を取り出すためのフィルターには図 B.1のものをを用いた。

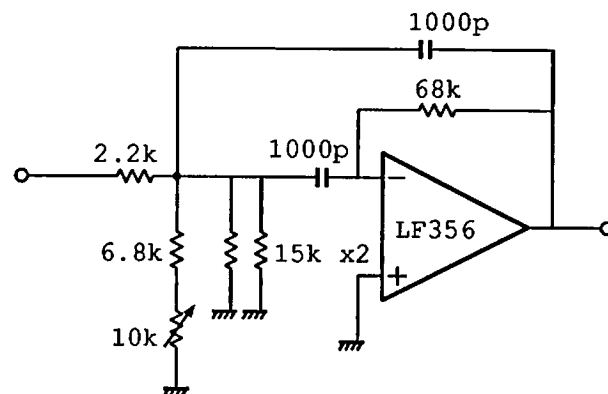


図 B.1: バンドパスフィルター 1

Δ_2 ループの信号である 20.6kHz の影響を少しでも少なくするため、可能な限り Q の高いものにした。

Δ_2 ループの 20.6kHz の信号を取り出すためのフィルターは図 B.2のものをを用いた。この回路の Q は余り高くない。

ミキサー

変調の掛かった信号に搬送波を掛け合わせて復調するためのミキサーには Analog Devices 社の AD630 というチップを用いた。図 B.3のように配線すると、S の信号が C の信号でスイッチングされ、2倍に増幅されて O に出力される。

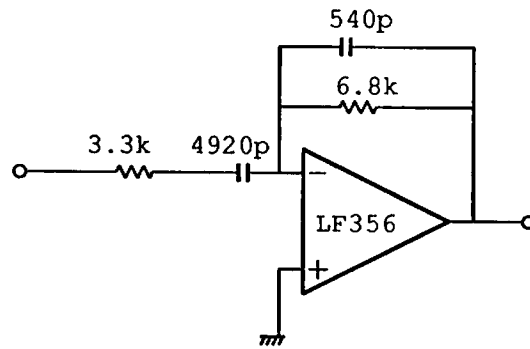


図 B.2: バンドパスフィルター 2

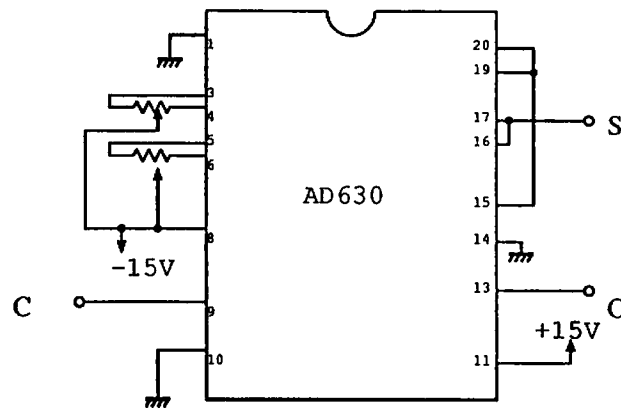


図 B.3: ミキサー

フォトセンサー

レーザー光の強度を測るフォトセンサーには図 B.4-B.5 の様な回路を用いた。図 B.4 の方は 10MHz の変調信号も取り出せるようになっている。

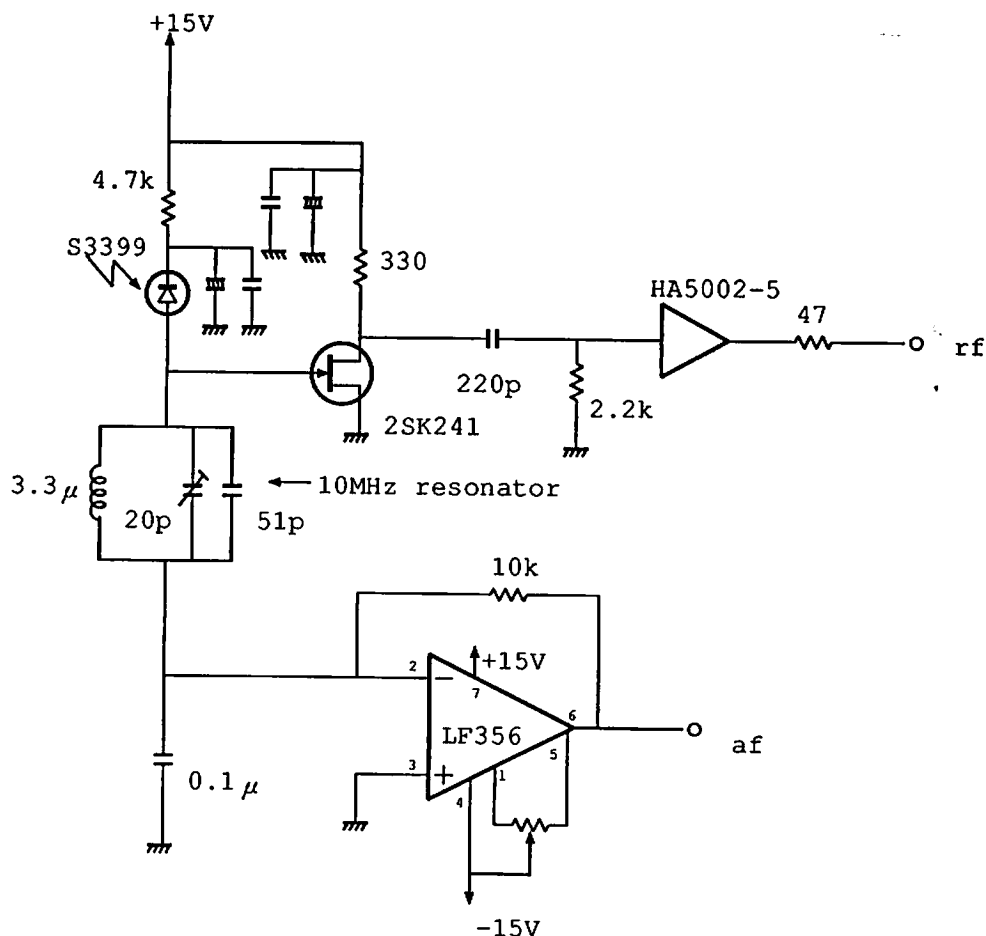


図 B.4: rf & af フォトディテクター

発振回路

共振器長に変調を加えるための発振器は 15.2kHz と 20.6kHz のものを使った。回路は両方とも同じようなものである。図 B.6-B.7 に示す。

フェイズシフター

フォトセンサーで取り出してバンドパスフィルターを通った変調信号を復調するためには、変調信号と位相の合った搬送波を掛け合わせてやらなくてはならない。発振器の信号

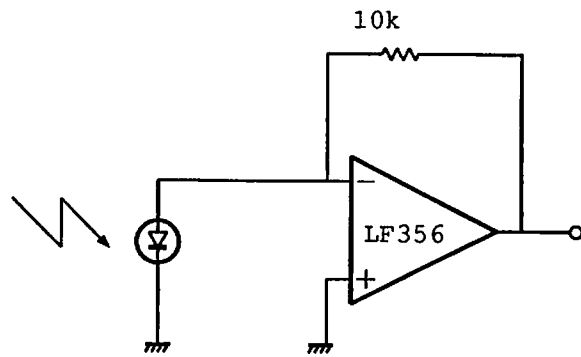


図 B.5: af フォトディテクター

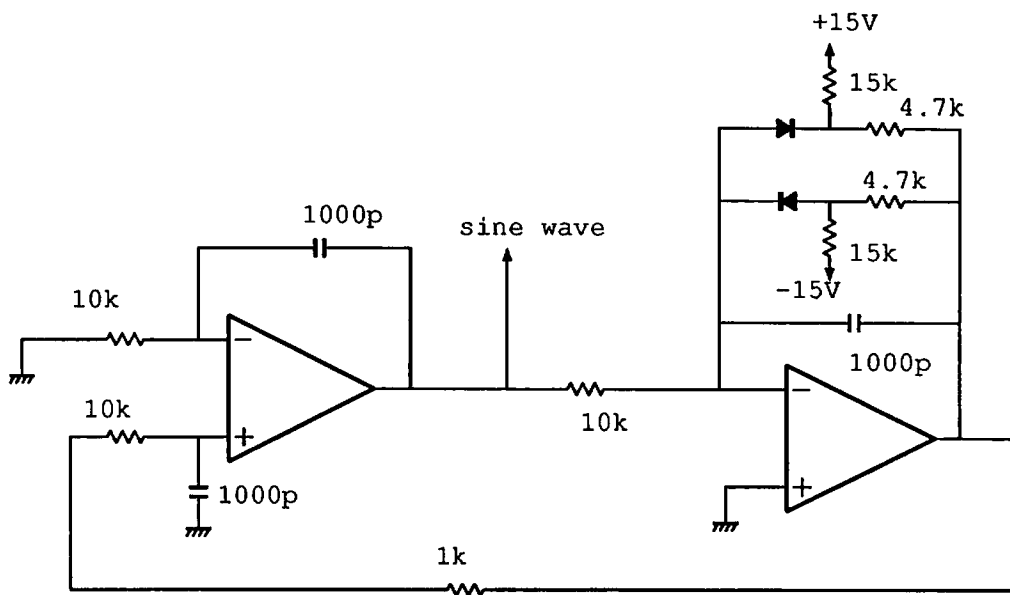


図 B.6: 発振器 1

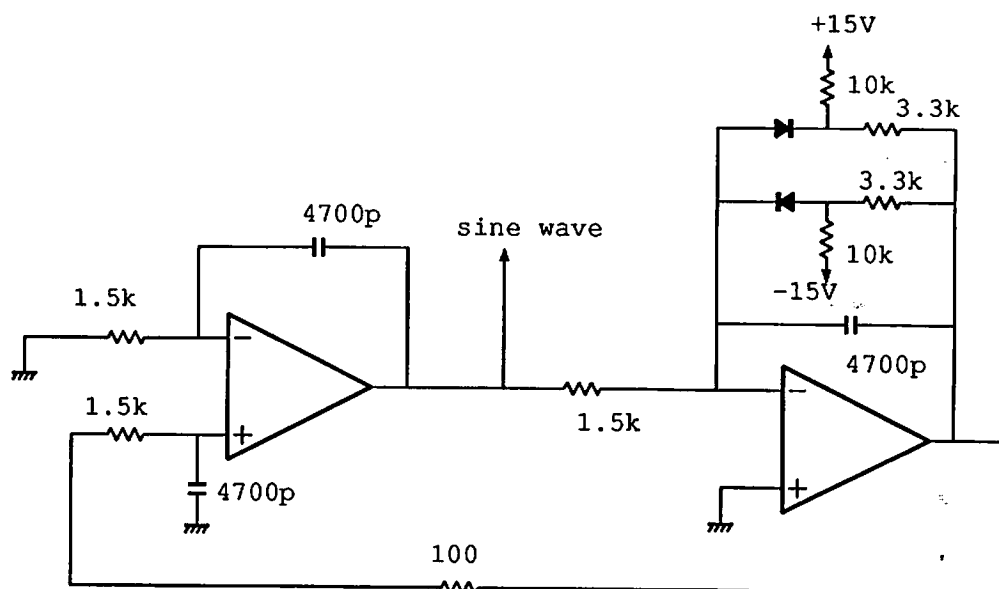


図 B.7: 発振器 2

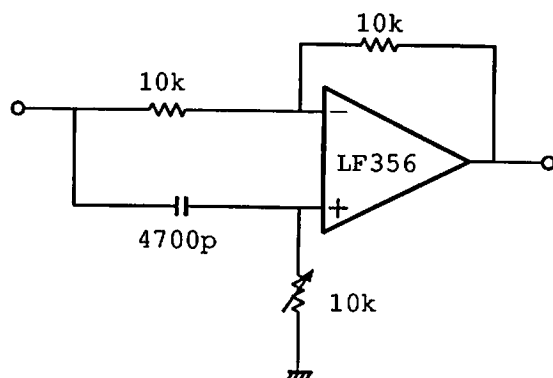
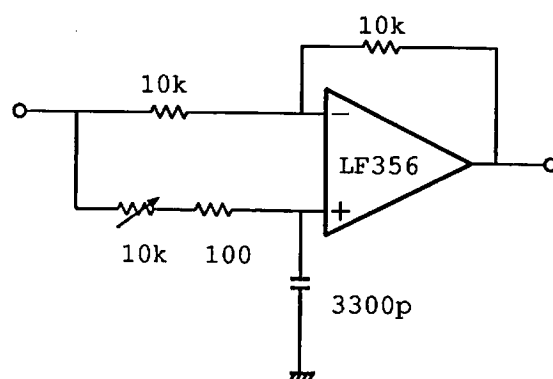


図 B.8: フェーズシフター

の位相を、変調信号の位相と合うように、ずらしてやるための回路がフェイズシフターである。回路図を図 B.8 に示す。

積分器

ピエゾは加えた電圧にほぼ比例して長さが伸びるので、正負の誤差信号からピエゾに加える電圧を作ってやるために、フィルタ回路として単なる積分回路を用いた。回路図は図 B.9 に示す。

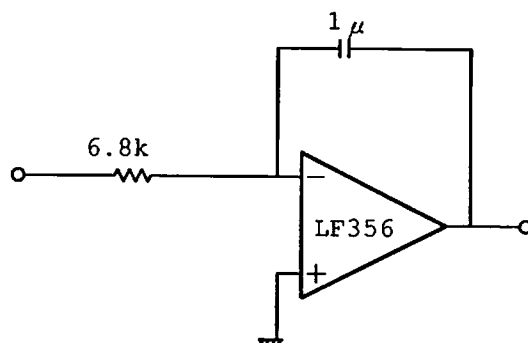


図 B.9: 積分器

レーザーの安定化回路

レーザーは2モード法で安定化した。これは、レーザー管の共振モードの内、実際に発振するのはある周波数帯の中の2つか3つのみであり、隣合う2つのモードはその偏光方向が直交していることを利用した周波数安定化法で、その2つのモードの強度が丁度等しくなるようにフィードバック制御を行なうものである。

回路図は図 B.10 に示す。レーザー管の後ろ側からレーザーの光を取り出して PBS(直交する偏光の光を直交する方向に分ける光学素子) によって2つのモードを分離し、それぞれをフォトディテクターで受けて強度の差をとり、ループフィルターを通してレーザー管に巻かれた薄膜ヒーターに電流を流し、レーザー管の加熱具合を変化させることによりレーザー管の長さを制御して発振周波数を制御する。

これにより約 200Hz 以下の帯域で周波数を安定化することが出来る。この制御を掛けると強度の安定化にもなる。

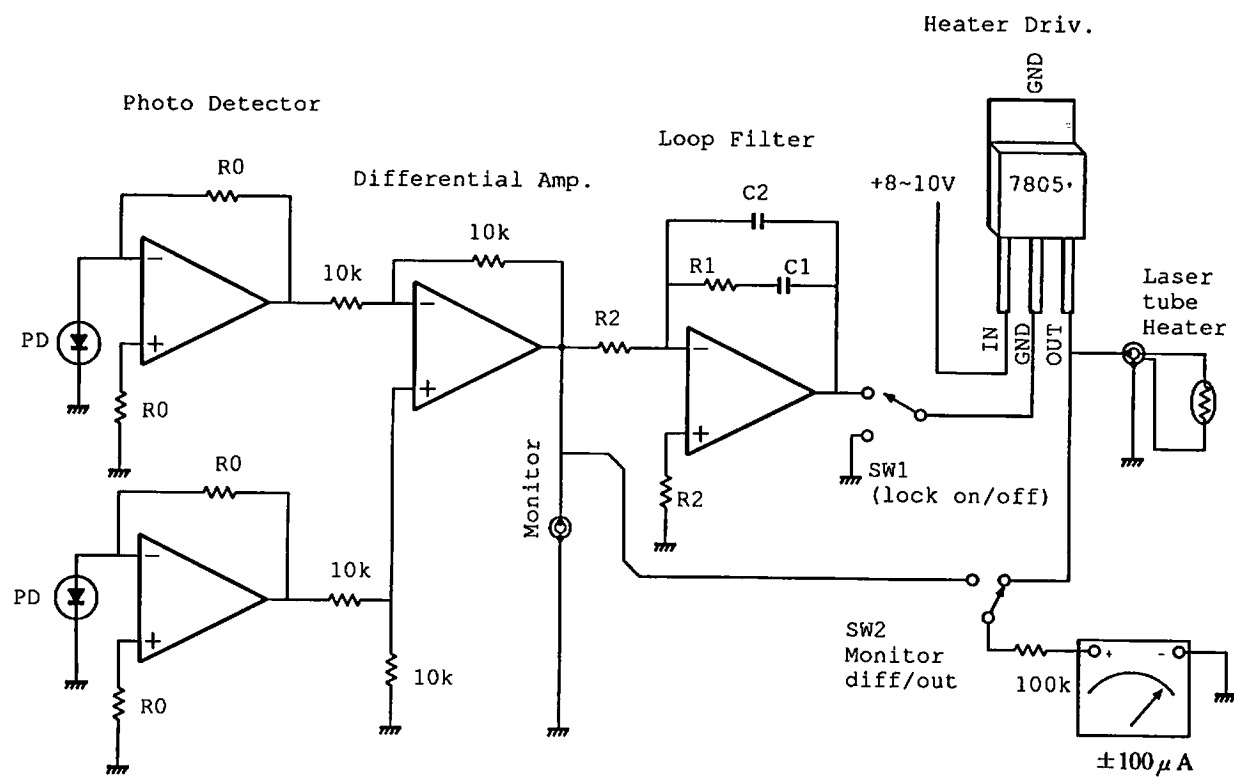


図 B.10: レーザー安定化回路

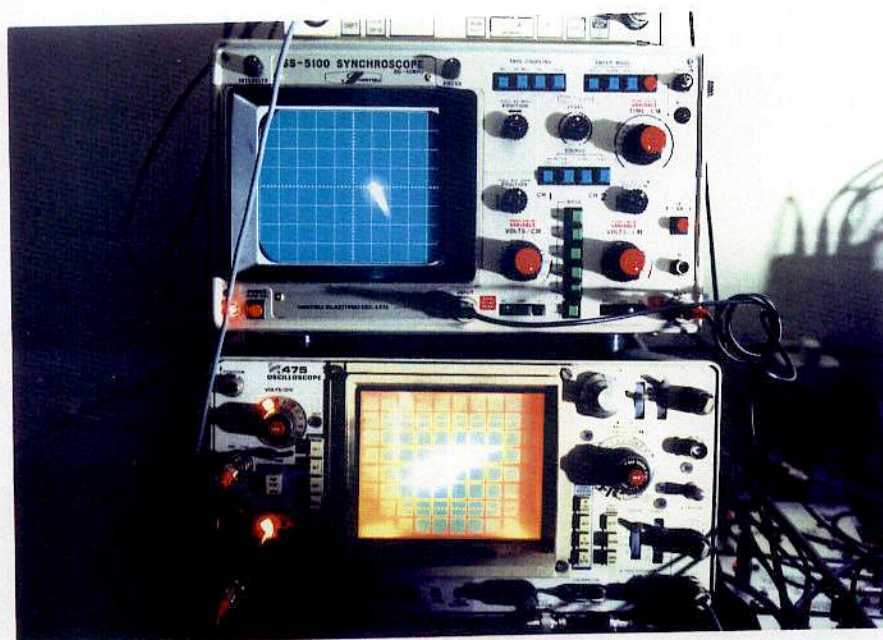
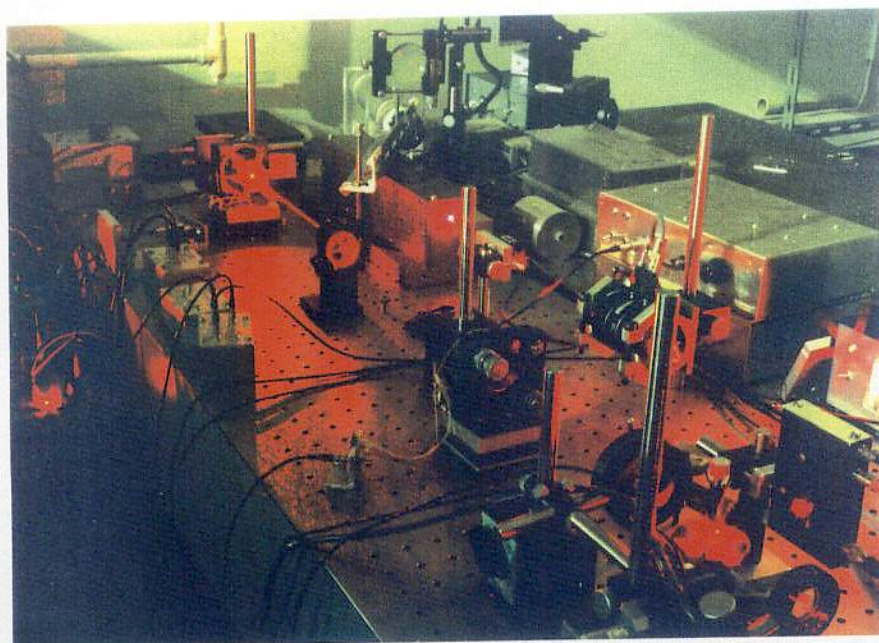
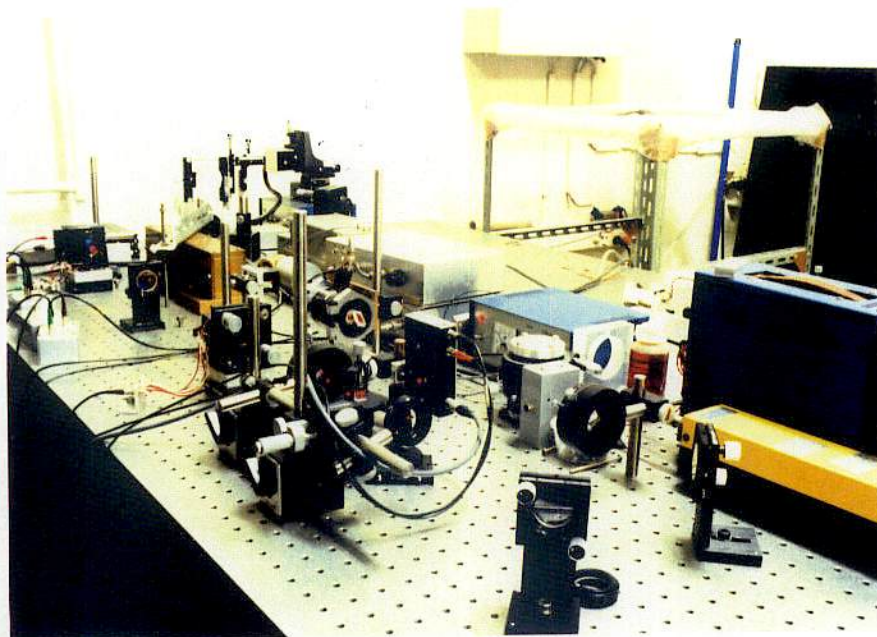
Appendix C

実験装置の写真

右上図 実験装置全景 (電器回路を除く)。右上の銅の箱に入ったレーザーから出た光は手前の2枚の鏡により反射され折り返されて、左奥の3枚並んだ鏡によって成る光共振器に入射する。写真は図4.1の構成になっている。

右中図 3枚鏡共振器がロックしているところ。写真中央の recycling mirror, その左上に並ぶ near mirror と end mirror による3枚の鏡に挟まれた領域で、レーザー光の強度が強くなっているのが分かる。特に near mirror と end mirror に挟まれた奥の共振器内の強度が強いのが目立つ。

右下図 共振器がロックしている時のオシロスコープの写真。上のオシロは図4.8に対応し下のオシロは図4.3に対応する。



Bibliography

- [1] A.Einstein, “Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstheorie,” *Annalen der Physik*, 49 (1916)
- [2] 三尾典克, 大橋正健編, 重力波アンテナ技術検討書
- [3] A.Giazotto, *Physics Reports* **182** (1989) 365-424
- [4] P.Fritchel, D.Shoemaker and R.Weiss, *Appl. Opt.*, **31**(1992), 1412-1418
- [5] ランダウ・リフシッツ, 場の古典論 (原書第 6 版), Nauka (1973)
- [6] J.-Y.Vinet, *J.Physique* **47** (1986) 639
- [7] J.-Y.Vinet, *et.al.*, *Phys.Rev.D* **38** (1988) 433
- [8] H.Kogelnik and T.Li, *Appl.Opt.* **5** (1966) 1550
- [9] K.Kawabe, 修士論文: Fabry-Perot 型重力波検出器の制御 (1992)

謝辞

本実験を行なうに当たって大変多くの方にお世話になりました。

東京大学理学部物理学教室助教授の坪野公夫先生には忙しい中、この実験のテーマを選ぶに当たって参考になるような助言を頂き、暖かく指導・支援して頂きました。

助手の三尾典克先生には随時分からないところや困った時に有用な助言やアイデアを頂いたり励まして頂きました。

博士課程の新谷昌人氏、河辺径太氏、森脇成典氏にも分からないところがあった時や困った時に相談に乗って頂き、有用な助言を頂きました。

先輩の赤坂展昌氏、佐藤寿一氏には特に計算機に関して色々教えて頂きました。

修士課程の近藤尚人氏、長滝重博氏、東京大学宇宙線研究所助教授の黒田和明氏、国立天文台助手の大橋正健氏らにはおりにふれ色々励まして頂きました。

元宇宙科学研究所で現在 Cal.Tech. に移った川村静児氏には技術検討会などで3枚鏡の共振器に関する話を色々聞かせて貰いました。そこで興味を持ったことが、この実験のテーマを選ぶきっかけにもなり、その後の実験や検討を行なうに当たっても非常に役立ちました。

その他大勢の方々それぞれに色々分からないところを教えて貰ったり相談に乗って貰ったりしたおかげで、この論文を書き上げることが出来ました。大変お世話になりましたことに深く感謝しています。