

修士論文
金属物質の機械損失の研究

理学系研究科物理学専攻 16084

關 秀嗣

2003年1月10日

目次

第1章	はじめに	4
第2章	重力波	7
2.1	重力波の伝播	7
2.1.1	一般相対性理論	7
2.1.2	弱場近似	9
2.1.3	平面波解	11
2.1.4	自由粒子への影響	12
2.1.5	平面波のエネルギーと運動量	13
2.2	重力波の発生	15
2.2.1	四重極公式	15
2.2.2	重力波源	15
2.3	重力波の検出	16
2.3.1	共鳴型重力波検出器	16
2.3.2	レーザー干渉計型重力波検出器	18
第3章	熱雑音	22
3.1	揺動散逸定理	22
3.2	1次元調和振動子の熱雑音	23
3.2.1	熱雑音のスペクトル	23
3.2.2	Viscous damping と Structure damping	24
3.2.3	Q 値	26
3.2.4	モード展開	27
第4章	機械損失	28
4.1	損失角と散逸エネルギーの関係	28
4.2	固体内部で起きる損失	30
4.2.1	損失が周波数によらないモデル (Structure damping)	30
4.2.2	熱弾性効果	30
4.3	固体表面の損失	39
4.3.1	周波数によらない固体表面の損失	39
4.3.2	固体表面における熱弾性効果	39

4.4	外的な要因による損失	40
4.4.1	支持による損失	40
4.4.2	残留ガスによる損失	40
4.5	これまで行われてきた機械損失の研究	41
第5章	Q値の測定方法	42
5.1	測定の概略	42
5.1.1	共振周波数の探索	42
5.1.2	Q値の測定	42
5.1.3	縮退モードにおけるビート	43
5.2	試料	43
5.2.1	Al5056	43
5.2.2	Al1070	44
5.2.3	Al6061	44
5.3	測定装置	45
5.3.1	支持系	45
5.3.2	励起系	45
5.3.3	光学系	46
5.3.4	電気系	48
5.3.5	データ取得系	48
5.3.6	真空装置	50
5.4	モードの特定	50
5.4.1	解析解	50
5.4.2	半解析解	51
5.4.3	数値解	53
第6章	Q値の測定結果	54
6.1	Al5056の測定結果	54
6.1.1	円柱の測定結果	54
6.1.2	円板の測定結果	57
6.1.3	ねじれ型振動子の測定結果	59
6.2	Al1070の測定結果	60
6.2.1	円柱の測定結果	60
6.2.2	円板の測定結果	62
6.3	Al6061の測定結果	62
6.3.1	円柱の測定結果	62
6.3.2	円板の測定結果	62
6.4	測定した試料の損失の振る舞い	64

第 7 章 測定結果の考察	67
7.1 外的な要因による損失	68
7.2 熱弾性効果との比較	68
7.2.1 微結晶間の熱弾性効果	68
7.2.2 巨視的な熱弾性効果	73
7.2.3 巨視的な熱弾性効果と微結晶間の熱弾性効果の和	78
7.3 Structure damping の考察	79
7.4 理論値と測定結果の値の不一致	87
7.5 考察のまとめ	87
第 8 章 まとめと結論	89
8.1 まとめと結論	89
8.2 この実験の新しい点、重力波検出における意義	89
8.3 今後の課題	90
付 録 A 熱弾性効果の導出	91
A.1 一般論	91
A.2 巨視的な熱弾性効果 (円板の横振動の場合)	95
付 録 B 薄い円板の横振動の解	97
付 録 C Q 値の測定数値	100
C.1 Al5056 の Q 値	101
C.1.1 円柱の Q 値	101
C.1.2 円板の Q 値	105
C.1.3 ねじれ型振動子の Q 値	108
C.2 Al1070 の Q 値	109
C.2.1 円柱の Q 値	109
C.2.2 円板の Q 値	110
C.3 Al6061 の Q 値	111
C.3.1 円柱の Q 値	111
C.3.2 円板の Q 値	111

第1章 はじめに

A.Einstein は 1916 年、一般相対性理論の重力場の方程式を弱場近似で線形化し重力波の存在を予言した [1]。その後、1978 年に J.H.Taylor と R.A.Hulse は、連星パルサー PSR1913+16 の軌道周期の減衰の観測値を報告し、重力波の存在を間接的に示した [2]。また、この連星の軌道周期の観測結果は、その他に発表されている重力理論に対して厳しい制限を与えた。

こうして重力波が存在することはほぼ間違いないこととなり、現在では重力波の様々な直接検出が試みられている。直接検出の目的の一つが、一般相対性理論を含む重力理論の実験的な検証である。現在、生き残っている重力理論は重力波の位相速度や偏波の種類に対して異なる予言をしている。従って、重力波を直接観測することで、生き残っている重力理論に対してさらに制限を与えることが出来る。よって、重力波の検出は重力理論を実験的に検証するために重要である。直接検出の二つ目の目的は、重力波を用いた新しい天文学の創生である。重力波は他の物質との相互作用が非常に弱いので、天文学的に重要な超新星爆発のコア部分の情報や銀河中心の情報、そして宇宙の膨れ上がり前の情報などが重力波によって得られると考えられている。またブラックホールの形成時に、その減衰が時空の歪みについての情報を与える。これらの情報は他の手段では得られず、重力波観測の天文学的な意義は非常に大きい。これらの目的を達成するためには、重力波を直接検証する必要がある。

重力波の検出方法としては、共鳴型重力波検出器を用いる方法と、レーザー干渉計型重力波検出器を用いる方法が主なものである。共鳴型は重力波によって励起された弾性体の振動を検出する装置で、干渉計型は重力波による自由質点間の固有距離の変化を検出する装置である。観測帯域がレーザー干渉計の方が広いことと、レーザー干渉計の方が高感度を達成することからレーザー干渉計が主流になってきた。

これらの検出装置で問題となる雑音の一つに熱雑音がある。熱雑音は、熱浴の中に置かれた測定装置に熱エネルギーが分配され、装置が振動するものである。重力波検出では、重力波による 2 点間の距離の変化を検出するものであるから、これは直接雑音になる。

ある系の熱雑音は、揺動散逸定理によりその系の機械損失に比例する。よって熱雑音を知るためには、系の機械損失の値が分かれば良い。しかし現在のところ、全ての機械損失の機構が明らかになっているわけではない。よって、実験および理論の両面において機械損失をさらに研究する必要がある。

これらのことを背景として、本研究ではアルミニウム合金 Al5056、Al6061、Al1070 の Q 値測定を室温で行った。ここで Q 値とは共振における機械損失の逆数である。

アルミニウム合金の Q 値を広い周波数範囲で測定し、その周波数依存性を調べた。その結果をいくつかの損失の理論と比較した。そうすることで、アルミニウム合金の機械損失の機構を明らかにすることが研究の目的である。このような研究を行った理由を以下に説明する。

試料としてアルミニウム合金を用いた理由

今回、測定した 3 種のアルミニウム合金の中で Al5056 は共鳴型重力波検出器で広く用いられている物質である。Al5056 は低温において 10^7 を越す高い Q 値を示す。それに対して、Al6061 の Q 値は低温で 10^6 のオーダーであり、Al5056 より Q 値が低い。しかし室温では大小関係が逆になり Al6061 の方が Al5056 より Q 値が高い。Al5056 と Al6061 の Q 値がなぜこのような挙動を示すのかは明らかになっていない。従って、Al5056、Al6061 に純粋アルミニウムに近い Al1070 を加えた 3 種のアルミニウム合金の損失を室温で測定することは、アルミニウム合金の種類による室温と低温での Q 値の挙動の原因を明らかにする第一歩となり、意義のあるものである。

アルミニウムを選んだ理由の 1 つは上述した通りである。しかし、アルミニウム合金は干渉計型重力波検出器の鏡には応用できない物質であり、なぜ今になってその損失の機構を明らかにする必要があるのかという問いに答えられなければならない。それに対しては以下のように言うことが出来る。まず、低温で 10^7 を越す Q 値を与える Al5056 を含むアルミニウム合金の損失は、純粋に損失の研究の観点から興味深い。なぜ低損失を示すのか、物性的な根拠がわかれば、干渉計型重力波検出器の鏡として現在考えられている物質よりも、より適した物質を見出すヒントを与える可能性がある。

また、石英やサファイアなど現在主に研究されている物質とは違った物質の損失を測定し、測定結果と石英やサファイアなどの研究の際に用いられている理論とを比較するのは有用である。なぜなら、正しいと考えられている理論と異なる測定結果が得られれば、現在主に研究されている物質についても再考を促すからである。

これらの理由から、干渉計型重力波検出器への直接的な応用ができないアルミニウム合金の機械損失について、それは十分に研究に値すると考えられたので、アルミニウム合金を試料として用いた。

周波数依存性を研究した理由

アルミニウム合金 Al5056、Al6061 は共鳴型重力波検出器が主流の時代に、その Q 値は盛んに測定されていた。しかし、それらの多くは単一のモードの Q 値が低温にするとどれだけ高くなるかという実験であり、広い周波数範囲でさまざまなモードの Q 値を測定した例はあまりない。よって、広い周波数範囲で多くのモードの損失を測定することにより、損失の周波数依存性を理論と実験で新たに比較することができる。従って、これまでとは違った損失の理論の検証ができると判

断される。そのため、損失の周波数依存性を研究した。

これらの動機から Al5056、Al1070、Al6061 の 3 種類のアルミニウム合金の Q 値を室温で測定した。測定をする際に、東京大学理学部坪野研究室で最近開発された不動点支持法という Q 値の測定方法を用いた。その理由は、不動点支持法は支持による損失が生じ難く、物質内部で起こる損失をより精度良く測定できるからである。

本論文の構成は以下のようにになっている。第 2 章ではこの研究の根底に流れる重力波とその検出について述べる。第 3 章では、重力波検出器の雑音源として重要な熱雑音の基本概念について説明する。第 4 章で熱雑音と密接に関係する機械損失について、現在考えられている理論をいくつか紹介する。第 5 章ではアルミニウム合金の Q 値の測定方法について述べる。第 6 章では Q 値の測定結果を示す。第 7 章では、測定結果についての考察を行う。第 8 章では、全体のまとめと結論を述べる。なお、本論と関係はあるが脇道にそれる事項は付録にまとめた。

第2章 重力波

重力波は、一般相対性理論における重力場の方程式の波動解である [5]。重力の相互作用は非常に弱いので、重力波は発生源から散乱や吸収などされずに進行する。よって、重力波は他では得られない天文学的な情報をもたらす。これらの天文学的な情報を得るためには、重力波を検出することが必要である。

本章では重力波とその検出方法について簡単に説明する。簡単のため特に明記しない場合は、自然単位系を用い、光速 c は 1 とする。

2.1 重力波の伝播

2.1.1 一般相対性理論

アインシュタインの一般相対性理論において、重力場は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ によって決定される。時空の微小に離れた 2 点間の固有時間 $d\tau$ は、計量テンソルを用いて

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

となる¹。

重力場を定める方程式を記述するため、いくつかの記号を導入する。

アフィン接続係数 $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma$ は $g_{\mu\nu}$ を用いて

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right\} \quad (2.2)$$

と表わせる。

リーマン・クリストッフェルテンソル $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda$ を

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \quad (2.3)$$

で定義する。縮約してリッチテンソル

$$R_{\mu\kappa} \equiv R_{\mu\lambda\kappa}^\lambda \quad (2.4)$$

及び、スカラー曲率

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \quad (2.5)$$

¹ここでギリシャ文字は 1,2,3,0 の値を取り、ラテン文字は 1,2,3 の値を取るものとする。

を得る。

物質系のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を、物質系の作用 I_M の $g_{\mu\nu}$ による変分 δI_M を用いて

$$\delta I_M = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g(x)} T^{\mu\nu}(x) \delta g_{\mu\nu}(x) \quad (2.6)$$

で定義する。ここで、 $g(x)$ は $g_{\mu\nu}(x)$ の行列式である。

重力場の作用 I_G はスカラー曲率 R を用いて

$$I_G \equiv -\frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{g(x)} R(x) d^4x \quad (2.7)$$

となると仮定する (Hilbert action)。ここで、 G は万有引力定数である。 $g_{\mu\nu}$ で変分し、

$$\delta I_G = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{g(x)} \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right] \delta g_{\mu\nu} d^4x \quad (2.8)$$

を得る。物質系と重力場をあわせた全作用 I

$$I = I_M + I_G \quad (2.9)$$

を $g_{\mu\nu}$ で変分し、

$$\delta I = \delta I_M + \delta I_G = 0 \quad (2.10)$$

とおく。(2.6),(2.8) より、アインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.11)$$

を得る²。

具体的な $T_{\mu\nu}$ を質量 m_n 、電荷 e_n を持つ n 個の質点と、電磁場 $F_{\mu\nu}$ からなる衝突のないプラズマの場合に書き下しておく。電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ は、ベクトルポテンシャル A_μ を用いて

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad (2.12)$$

と書ける。各質点の固有時間 $d\tau_n$ を

$$d\tau_n = (-g_{\mu\nu} dx_n^\mu dx_n^\nu)^{1/2} \quad (2.13)$$

とする。 I_M は

$$I_M = - \sum_n m_n \int d\tau_n - \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{g(x)} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \sum_n e_n \int dx_n^\mu A_\mu(x_n) \quad (2.14)$$

²この方程式は A.Einstein による発表の 5 日前に D.Hilbert によって発表された [3, 4]。

となる。 $g_{\mu\nu}$ で変分し、(2.6) より

$$T^{\lambda\kappa}(x) = g^{-1/2}(x) \sum_n m_n \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_n \frac{dx_n^\lambda}{d\tau_n} \frac{dx_n^\kappa}{d\tau_n} \delta^4(x-x_n) + F_\mu^{\lambda}(x) F^{\mu\kappa}(x) - \frac{1}{4} g^{\lambda\kappa}(x) F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \quad (2.15)$$

を得る。

質点の運動方程式は I_M を x^μ で変分することで得られ、

$$\frac{d^2 x_n^\mu}{d\tau_n^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x_n) \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\lambda}{d\tau_n} = \frac{e_n}{m_n} F_\nu^\mu(x_n) \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} \quad (2.16)$$

となる。電磁場が存在しなければ、

$$\frac{d^2 x_n^\mu}{d\tau_n^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x_n) \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\lambda}{d\tau_n} = 0 \quad (2.17)$$

となる。

2.1.2 弱場近似

アインシュタイン方程式は電磁場の場合と同様に、波動解を持つ。これが重力波である。重力波はエネルギーと運動量を持ち、それ自身の重力場に影響を与える。このことが、一般の場合の重力波の厳密な解を見出すのを困難にする。ここでは、弱い重力波を考える。すなわち、重力波の運動量とエネルギーが小さく、それ自身の伝播に影響を与えないとする。

計量テンソルをミンコフスキー時空の計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ を用いて

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

と書く。 $\eta_{\mu\nu}$ は

$$\eta_{00} = -1, \quad \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1, \quad \eta_{0i} = 0, \quad \eta_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.19)$$

の符号を取る。ここで、 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ である。 h の 1 次の項までを考え、添え字の上げ下げは $\eta_{\mu\nu}$ を用いて行う。つまり

$$\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\nu} \equiv h^\lambda_\nu, \quad \eta^{\lambda\rho} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\lambda}, \quad \text{etc} \quad (2.20)$$

アフィン接続係数とリッチテンソルは h の 1 次までで

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} h_{\rho\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} h_{\rho\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} h_{\mu\nu} \right] \quad (2.21)$$

$$R_{\mu\nu} \simeq \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \quad (2.22)$$

となるので、(2.21)、(2.22) より 1 次のリッチテンソルは

$$R_{\mu\nu} \simeq R_{\mu\nu}^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \left(\square^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} h^\lambda{}_\nu - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h^\lambda{}_\mu + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h^\lambda{}_\lambda \right) \quad (2.23)$$

となる。これらを用いるとアインシュタイン方程式は

$$\square^2 h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} h^\lambda{}_\nu - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h^\lambda{}_\mu + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h^\lambda{}_\lambda = -16\pi G S_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda \quad (2.25)$$

となる。ここで、 $\square^2$ は不変 D'Alembertian である。

$T_{\mu\nu}$ は $h_{\mu\nu}$ の最低次まで取り、したがって $h_{\mu\nu}$ に依存せず、保存条件

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^\mu{}_\nu = 0 \quad (2.26)$$

を満たす。(2.26) より

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} S^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} S^\lambda{}_\lambda \quad (2.27)$$

が成り立つ。

(2.24) は一意の解を与えない。なぜなら、一つの解が与えられると、座標変換で新たな解を作ることが出来るからである。場を弱いままに保つ最も一般的な座標変換は

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x) \quad (2.28)$$

である。ここで $\partial \epsilon^\mu / \partial x^\nu$ は高々 $h_{\mu\nu}$ と同じオーダーの大きさの量である。新しい座標系で

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{\partial \epsilon^\mu}{\partial x^\lambda} \eta^{\lambda\nu} - \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\rho} \eta^{\rho\mu} \quad (2.29)$$

となる。よって、 $h_{\mu\nu}$ が (2.24) の解なら

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \epsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \epsilon_\nu}{\partial x^\mu} \quad (2.30)$$

も (2.24) の解である。 $(\epsilon_\mu \equiv \epsilon^\nu \eta_{\mu\nu})$ この性質を場の方程式のゲージ不変性と呼ぶ。

場の方程式を解く際に、特定のゲージ、つまり座標系を選ぶことができる。もっとも便利な座標系は調和座標系であり、調和座標条件

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 \quad (2.31)$$

を満たす。(2.21) を用いると、調和座標条件 (2.31) は h の 1 次までの近似で

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} h^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} h^\mu{}_\mu \quad (2.32)$$

を与える。

(2.24)、(2.32) を用い、場の方程式は

$$\square^2 h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu} \quad (2.33)$$

となる。

この方程式の 1 つの解は遅延ポテンシャル

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = 4G \int d^3\mathbf{x}' \frac{S_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.34)$$

で与えられる。 $S_{\mu\nu}$ に対する条件 (2.27) より、解 (2.34) は調和座標条件 (2.32) を自動的に満たす。(2.34) には、方程式

$$\square^2 h_{\mu\nu} = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} h^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} h^\mu{}_\mu \quad (2.36)$$

の任意の解を加えることができる。(2.34) は波源 $S_{\mu\nu}$ によって生成された重力波であり、(2.35)、(2.36) は無限遠からやってくる重力波であると解釈できる。これらの方程式の形から重力波は光速で伝播することがわかる。

2.1.3 平面波解

(2.35)、(2.36) の平面波解を考える。遅延波 (2.34) は $r \rightarrow \infty$ で平面波になる。(2.35)、(2.36) の解は

$$h_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) + e_{\mu\nu}^* \exp(-ik_\lambda x^\lambda) \quad (2.37)$$

と書ける。(2.35) から

$$k_\mu k^\mu = 0 \quad (2.38)$$

(2.36) から

$$k_\mu e^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} k_\nu e^\nu{}_\nu \quad (2.39)$$

がそれぞれ満たされなければならない。

対称テンソル $e_{\mu\nu}$ は偏光テンソルと呼ばれる。対称テンソルは、一般に 10 個の独立な成分を持つが、(2.39) より、独立な成分は 6 個である。座標変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ によって、 $h_{\mu\nu}$ は (2.30) により変換される。

$$\epsilon^\mu(x) = i\epsilon^\mu \exp(ik_\lambda x^\lambda) - i\epsilon^{\mu*} \exp(-ik_\lambda x^\lambda) \quad (2.40)$$

を選ぶと、(2.30) は

$$h'_{\mu\nu}(x) = e'_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) + e'^{\mu*}_{\mu\nu} \exp(-ik_\lambda x^\lambda) \quad (2.41)$$

を与える。ここで

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + k_\mu \epsilon_\nu + k_\nu \epsilon_\mu \quad (2.42)$$

この波動は、調和座標条件 (2.39) を満たしている。

$e'_{\mu\nu}$ と $e_{\mu\nu}$ は4つの任意パラメータ ϵ_μ に対して、同じ物理的な状態を表わしていると考えられるので、 $e_{\mu\nu}$ の独立な6成分のうち、物理的に重要なのは $6 - 4 = 2$ 成分のみである。

+z 方向に伝播する波動を考える。波動ベクトルは

$$(k^0, k^1, k^2, k^3) = (k, 0, 0, k) \quad (2.43)$$

となる。(2.39) の与える $e_{\mu\nu}$ の間の4つの関係式から e_{i0} と e_{22} はその他の6つの $e_{\mu\nu}$ の成分によって表わせる。それは

$$e_{01} = -e_{31}, \quad e_{02} = -e_{32}, \quad e_{03} = -\frac{1}{2}(e_{33} + e_{00}), \quad e_{22} = -e_{11} \quad (2.44)$$

となる。

(2.28) と (2.40) によって定義される座標変換を行うと

$$\begin{aligned} e'_{11} &= e_{11}, & e'_{12} &= e_{12}, & e'_{13} &= e_{13} + k\epsilon_1, \\ e'_{23} &= e_{23} + k\epsilon_2, & e'_{33} &= e_{33} + 2k\epsilon_1, & e'_{00} &= e_{00} - 2k\epsilon_0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

と変換される。よって e_{11}, e_{12} のみが物理的に意味を持つ。実際 e'_{11}, e'_{12} そして $e'_{22} = -e'_{11}$ 以外の成分は、座標変換

$$\epsilon_1 = -\frac{e_{13}}{k}, \quad \epsilon_2 = -\frac{e_{23}}{k}, \quad \epsilon_3 = -\frac{e_{33}}{2k}, \quad \epsilon_{00} = \frac{e_{00}}{2k} \quad (2.46)$$

によって0に出来る。

よって $e_{\mu\nu}$ は、 e'_{11}, e'_{12} をそれぞれ h_+, h_x とすると

$$e_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_x & 0 \\ 0 & h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

となる。ここで、 h_+ はプラスモード、 h_x はクロスモードと呼ばれる。

2.1.4 自由粒子への影響

重力波の自由粒子への影響を考える。自由粒子は、重力場のみが存在する場合、(2.17) に示したように運動方程式

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} + \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.48)$$

に従う。自由粒子が $t = 0$ で、(2.47) が成立する座標系で静止していたとする。この粒子の 4 元速度は

$$\left. \frac{dx^\mu}{d\tau} \right|_{t=0} = \delta^\mu_0 \quad (2.49)$$

となる。よって

$$\left. \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \right|_{t=0} = 0 \quad (2.50)$$

を得る。なぜなら (2.47) が成り立つ座標系では

$$\Gamma^\mu_{00} = 0 \quad (2.51)$$

となるからである。よって、(2.47) が成り立つ座標系に静止している粒子は加速度を受けない。よって (2.47) が成り立つ座標系では重力波は粒子に作用しない。

自由粒子間の距離については事情が異なる。2つの粒子の座標をそれぞれ $x^\mu, x^\mu + \delta x^\mu$ とすると δx^μ は

$$\delta x^\mu = \delta x^\alpha(0) \left[\delta_\alpha^\mu + \frac{1}{2} e_\alpha^\mu \right] \quad (2.52)$$

となる。ここで $e_{\mu\nu}$ は (2.47) で与えられる。この解から自由粒子間の距離は重力波によって振動することがわかる。この振動の振幅は重力波の振幅と自由粒子間の距離に比例する。

図 2.1 に重力波が鉛直方向 (z 軸) から来た時の原点を中心とする円周上の自由粒子と原点間の固有距離の時間変化を示す。

2.1.5 平面波のエネルギーと運動量

重力波はエネルギーと運動量を持つ。 $\hbar$ の 1 次までのリッチテンソル (2.23) を用いて、正確なアインシュタイン方程式は

$$R^{(1)}_{\mu\kappa} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\kappa} R^{(1)\lambda}_{\lambda} = -8\pi G (T_{\mu\kappa} + t_{\mu\kappa}) \quad (2.53)$$

$$t_{\mu\kappa} \equiv \frac{1}{8\pi G} \left(R_{\mu\kappa} - \frac{1}{2} g_{\mu\kappa} R^\lambda_{\lambda} - R^{(1)}_{\mu\kappa} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\kappa} R^{(1)\lambda}_{\lambda} \right) \quad (2.54)$$

となる。 $t_{\mu\kappa}$ を重力場自身のエネルギー運動量「テンソル」と解釈する。物質と重力を合わせたエネルギー運動量「テンソル」は

$$\tau^{\nu\lambda} \equiv \eta^{\nu\mu} \eta^{\lambda\kappa} (T_{\mu\kappa} + t_{\mu\kappa}) \quad (2.55)$$

となる。場の方程式より $\tau^{\nu\lambda}$ は局所的に保存する。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tau^{\nu\lambda} = 0 \quad (2.56)$$

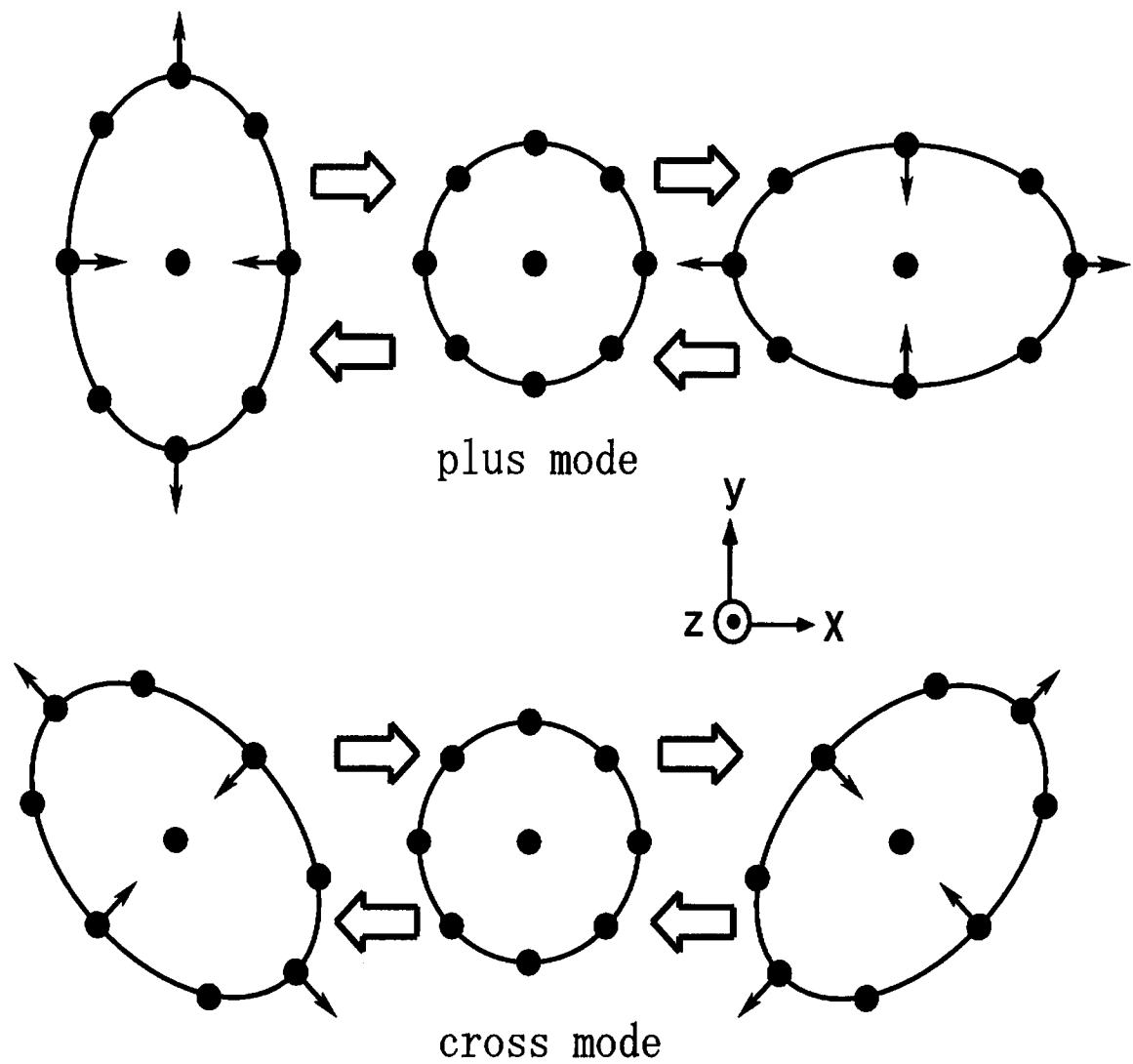


図 2.1: 重力波の偏光

が成り立つ。

平面波解における $t_{\mu\nu}$ を計算する。その為にはリッチテンソルの h の 2 次の項まで計算しなければならない。 $|\mathbf{k}|^{-1}$ より大きい時空の領域で平均すると

$$\langle t_{\mu\kappa} \rangle = \frac{k_\mu k_\nu}{16\pi G} \left(e^{\lambda\rho*} e_{\lambda\rho} - \frac{1}{2} |e^\lambda{}_\lambda|^2 \right) \quad (2.57)$$

となる。特に z 方向に進む波で波動ベクトルと偏光テンソルが (2.43)、(2.44) で与えられるときエネルギー運動量「テンソル」は

$$\langle t_{\mu\nu} \rangle = \frac{k_\mu k_\nu}{8\pi G} (|e_{11}|^2 + |e_{12}|^2) \quad (2.58)$$

となる。

2.2 重力波の発生

重力波の発生について議論する。重力波の放射公式と重力波源を示す。本節では光速 c を省略しないで書く。

2.2.1 四重極公式

重力場と重力波源の速度が小さいとき、重力波の放射エネルギーは

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \left(\frac{d^3 D_{ij}}{dt^3} \right)^2 \quad (2.59)$$

$$D_{ij} = \int \rho \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right) d^3 x \quad (2.60)$$

で与えられる。ここで E, ρ は重力波源のエネルギーと密度である。この式を四重極公式という。質量は正なので重力波の双極子放射はない。(2.59),(2.60) より球対称な系は重力波を放出しないことがわかる。

重力波の振幅は

$$h_{ij} = -\frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \ddot{D}_{ij} \quad (2.61)$$

で与えられる。ここで r は重力波源からの距離である。

2.2.2 重力波源

検出可能と期待される重力波源を以下に示す。

連星中性子星合体

中性子星やブラックホールなどの天体が連星を成していると重力波を放出して軌道運動エネルギーを失っていく。そして、最後には合体し強力な重力波を放出する。この現象の特徴として放出される重力波の波形が予想できることが挙げられる。波形がわかっているならば検出器の信号のノイズの中から効率よく重力波の信号を取り出すことができる。

現在、電磁波パルサーの観測から5つの連星中性子星が発見されている。銀河内では数万年に1回程度の割合で連星中止子合体が起きていると見積もられている。また、銀河系外で約350Mpc以内の範囲では1年間で2～300回程度の合体が起きていると見積もられている。

超新星爆発

超新星爆発において重力崩壊するコアに非対称性が存在すれば、重力波が放出されると考えられている。この現象では、波形の予想は難しくなるが、発生率が連星中性子星に比べて大きくなる。そのため、銀河系内で超新星爆発が起これば重力波が検出される可能性は大きい。その際見積もられる重力波の振幅は $h \sim 10^{-20}$ 程度である。

連星中性子星合体、超新星爆発以外の重力波源では、巨大ブラックホール形成、宇宙ひも、背景重力波放射などが挙げられる。

2.3 重力波の検出

重力波を検出する方法として主なものは、共鳴型重力波検出器と干渉計型重力波検出器の2つが挙げられる。これらについて、簡単に説明する。本節でも光速 c を省略しないで書く。

2.3.1 共鳴型重力波検出器

共鳴型重力波検出器は弾性体で出来ており、その自由振動の方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \text{grad} \text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.62)$$

となる。ここで、 ρ は密度、 λ, μ はラメ係数、変位ベクトルは $\mathbf{u}$ を表す。重力波 h_{ij} の中での弾性体の運動方程式は、重力波による力が外力として働くので、右辺に重力波の項が加わり

$$\rho \ddot{u}_i - \mu \nabla^2 u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \rho \ddot{h}_{ij} x_j \quad (2.63)$$

となる。ここで弾性振動の固有振動パターンに着目して、モードの変位 $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ を振幅 $\xi(t)$ とモードパターン $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ によって

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \sum_n \xi_n(t) \mathbf{w}_n(\mathbf{x}) \quad (2.64)$$

と表すと、モードパターンについて

$$\rho \omega_n^2 w_{ni} + \mu \nabla^2 w_{ni} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w_{nj}}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (2.65)$$

となる。一般座標 ξ としてトランスデューサーの検出する変位をとると、弾性体の n 番目の固有振動モードに対応する換算質量 μ_n は

$$T = \frac{1}{2} \int \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|^2 dV = \frac{1}{2} \sum_n \mu_n \dot{\xi}_n^2(t) \quad (2.66)$$

で定義される。(2.64)、(2.66) より換算質量は

$$\mu_n = \int \rho |\mathbf{w}_n|^2 dV \quad (2.67)$$

となり、(2.63)、(2.65)、(2.67) より

$$\rho \ddot{\xi}_n w_{ni} + \rho \omega_n^2 \xi_n w_{ni} = \frac{1}{2} \rho \ddot{h}_{ij} x_j \quad (2.68)$$

を得る。(2.68) の両辺に w_{ni} をかけて積分すると

$$\mu_n \ddot{\xi}_n + \mu \omega_n^2 \xi_n = \frac{1}{2} \int \rho \ddot{h}_{ij} x_j w_{ni} dV \quad (2.69)$$

を得る。重力波の波長は弾性体に比べて十分に大きいと考えられるので、上式の右辺について $\ddot{h}_{ij}$ を積分の外にとりだすことができ、弾性体の内部摩擦による減衰項を付け加え、最終的な弾性体の運動方程式は

$$\mu_n \left(\ddot{\xi}_n(t) + \frac{\omega_n}{Q_n} \dot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) \right) = \frac{1}{4} \ddot{h}_{ij} q_{nij} \quad (2.70)$$

となる。ここで ω_n は n 番目のモードの共振周波数、 Q_n はそのモードにおける Q 値(第3章参照)で、 q_{nij} は四重極モーメントの変動成分で振動子の質量四重極モーメント Q_{ij}

$$Q_{ij} = \int \rho \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x_k x_k \right) dV \quad (2.71)$$

を用いて

$$q_{nij} = \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \mathbf{w}_n} = \int \rho \left(w_{ni} x_j + w_{nj} x_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} w_{nk} x_k \right) dV \quad (2.72)$$

と表せ、重力波と弾性体の結合の度合を示す。

共振型重力波検出器では、重力波の到来によって振動する弾性体の微小な変位をトランスデューサーを用いて電気信号に変換する。共振型重力波検出器の雑音で問題になるのは弾性体の熱雑音とトランスデューサーの雑音であり、これらが検出器の感度を制限している。

熱雑音について簡単に説明する。熱雑音は弾性体に重力波以外の力 $f(t)$ が加わったとした運動方程式

$$\mu \left(\ddot{\xi}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi \right) = f(t) \quad (2.73)$$

から求めることができる。弾性体の熱振動のエネルギーは、エネルギー等分配則より、熱浴の温度を T として

$$\langle \xi^2 \rangle = \frac{k_B T}{\mu \omega_0^2} \quad (2.74)$$

となる。熱揺動力を $f_T(t)$ とすれば、そのパワースペクトラム密度は

$$\langle |f_T(\nu)|^2 \rangle = \frac{4\mu\omega_0 k_B T}{Q} \quad (2.75)$$

で与えられる。

2.3.2 レーザー干渉計型重力波検出器

2つの自由質点が微小に離れて存在した場合、重力波がやってくると質点間の偏差は変化する。2つの質点間を光を往復させ、偏差の変化に伴う往復時間の変化を検出するのが干渉計型検出器の原理である。干渉計型の方が共鳴型に比べて優れている点はより広い周波数帯で観測が可能である点である。

干渉計型検出器の原理

重力波がやってきたときの自由質点の運動方程式を考える。座標系は (2.47) が成り立つ座標系を用いる。自由質点の運動方程式は

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.76)$$

である。質点は最初静止していたとしよう。すると、(2.76) において $\tau \sim ct$ となり、第2項は $\Gamma_{00}^\mu = 0$ となることがわかる。これは重力波が来ても自由質点の座標は変わらないことを意味する。ここで図 2.2 のような干渉計を考える。

x, y 軸を干渉計の腕に沿ってとり、さらにこれに垂直 z 軸を取る。 x 軸に沿った腕から Photo Detector(PD) に来た光の複素振幅を $A_1 \exp(i\phi)$ 、 y 軸に沿った腕か

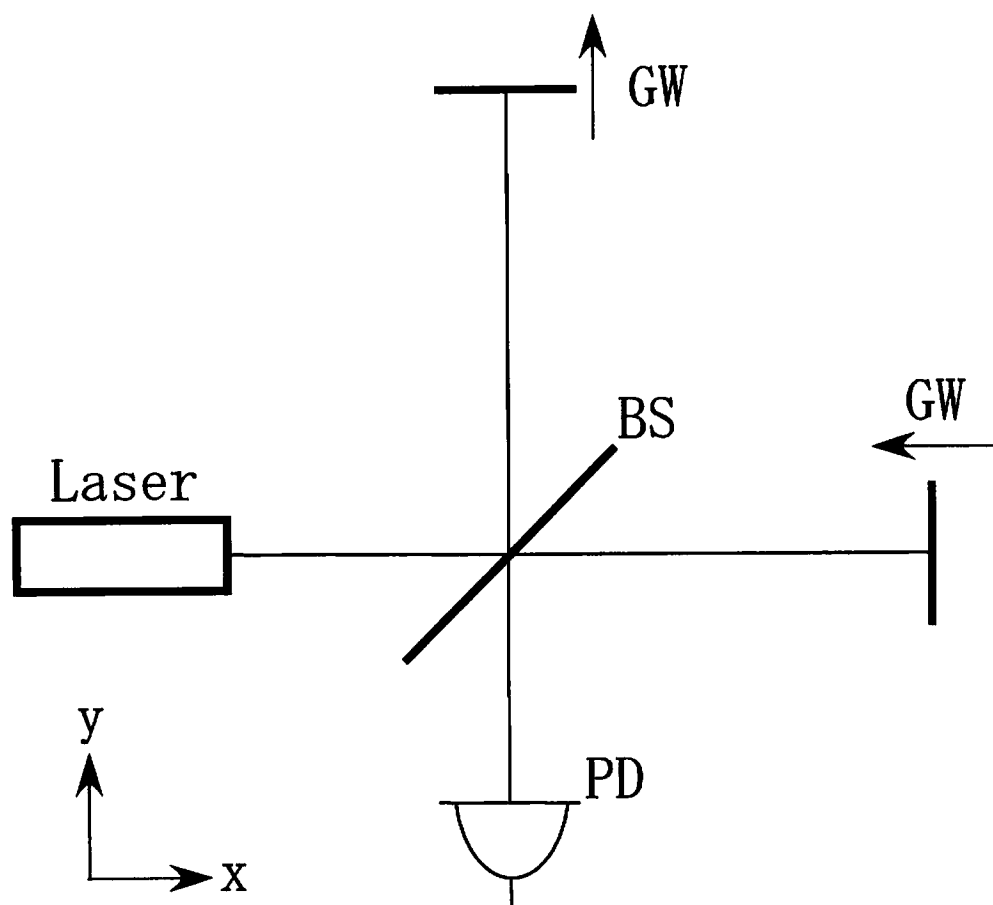


図 2.2: 干渉計型重力波検出器の原理

らの Photo Detector に来た光の複素振幅を A_2 とする。但し、 A_1, A_2 は実数である。このとき Photo Detector が受ける光の強度 I は

$$I = |A_1 \exp(i\phi) + A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi) \quad (2.77)$$

となる。重力波がくると ϕ は変化する。よって Photo Detector で光の強度を測定することによって重力波を検出することが出来る。具体的に生じる位相差 ϕ を計算した結果を示す。 z 軸からプラスモードの重力波がやってくるとする。このとき微小固有時間 $d\tau^2$ は

$$-d\tau^2 = -c^2 dt^2 + (1+h)dx^2 + (1-h)dy^2 + dz^2 \quad (2.78)$$

となる。これ以降 h_+ を h と略記する。光源からやってきた鏡が Beam Splitter で分割される時間を t とし、光が x 軸に平行な腕を往復して Beam Splitter に帰ってきた時間を t_1 、 y 軸にそって往復して帰ってきた時間を t_2 とする。鏡の座標を $(l_1, 0), (0, l_2)$ として、重力波がきわめて小さいことから成り立つ $t_1 \sim t + 2l_1/c$ を用いると

$$\phi(t) = 2\pi\Omega(t_1 - t_2) = 4\pi\Omega(l_1 - l_2) + 2\pi\Omega \int_t^{t+\frac{2l}{c}} h(t') dt' \quad (2.79)$$

となる。ここで Ω は光の角周波数で $l \sim l_1 \sim l_2$ という近似を用いた。第2項を ϕ_{GR} とおく。 h から ϕ_{GR} への伝達関数 $H_{\text{Michelson}}(\omega)$ は h, ϕ_{GR} のフーリエ成分 $\tilde{h}, \tilde{\phi}_{GR}$ の比で定義され、

$$H_{\text{Michelson}}(\omega) = \frac{\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{l\omega}{c}\right) \exp\left(-i\frac{l\omega}{c}\right) \quad (2.80)$$

となる。重力波を観測する周波数を ω_0 としたとき、検出に最適な長さ l は $\omega_0 l/c = \pi/2$ を満たす。1KHz の重力波を検出するのに最適な基線長は $l=75\text{km}$ である。

単純な Michelson 干渉計では 1KHz の重力波を検出するための最良の基線長は 75km であることがわかった。現実的にこのような干渉計をつくるのは難しい。そこで短い基線長でも長い光路長を実現する方法として Delay-Line 方式と Fabry-Perot 方式がある。Delay-Line 方式は鏡の間を $N/2$ 回光を往復させる方法である。Fabry-Perot 方式は両腕に Fabry-Perot cavity を設置する方法である。詳しくは [6] を参照せよ。

世界の大型干渉計計画

大型の干渉計型重力波検出器が世界各国で建設されている。以下に主要な計画を挙げる。

LIGO アメリカ合衆国で進められている LIGO 計画では、Hanford と Livingston で干渉計が建設されている。干渉計は Fabry-Perot 型で基線長は 4km である。2基の干渉計はほぼ完成している。

VIRGO イタリアとフランスによって進められている計画で、Pisa に基線長 3km の Fabry-Perot 型干渉計が建設されている。

GEO ドイツとイギリスによって進められている計画で、Hannover に基線長 600m の Delay-Line 型干渉計が建設されている。

TAMA 日本で進められている計画で、三鷹に基線長 300m の干渉計が既に完成されており、2000 年から本格的な観測体制が可能となった。

干渉計型検出器の雑音源

干渉計型重力波検出器の雑音源について以下に示す。

地面振動

干渉計を構成する鏡など光学素子が地面振動によって揺れてしまうと、重力波検出の雑音となる。また、振動は干渉計の安定な動作を阻害する。地面振動は特に数 10Hz 以下の低周波数帯域で主要な雑音源となる。

熱雑音

熱雑音とは熱浴からエネルギーを得ることにより物理量が揺らぐ現象である。懸架系は熱浴中に存在するので、エネルギーを受け取り振動する。このことにより鏡の位置や角度が揺らぐ。これは干渉計の光路差の揺らぎを起こし、重力波検出の雑音となる。この雑音は懸架系の熱雑音と呼ばれる。とくに鏡の位置が光軸の方向に揺らぐことを振り子の熱雑音と呼ぶ。また、鏡自体も熱浴からエネルギーを得て弾性振動を行う。これも光路長差の揺らぎを引き起こす。これは鏡の熱雑音と呼ばれる。

散射雑音

レーザー干渉計の高周波側の感度は散射雑音で制限される。散射雑音は光が量子化されていることに起因する Photo Detector の光電流の雑音である。レーザーのパワーが大きいと散射雑音は下がる。このため、干渉計の感度を上げるにはレーザーのパワーを上げることが必要になる。その方法としてレーザー源のパワーの向上と、パワーリサイクリングが考えられる。パワーリサイクリングは干渉計から光源に帰ってくる光を鏡で干渉計にもどすことにより、干渉計内部のパワーを実効的に高くする技術である。

その他の雑音

いままで挙げた雑音のほかに、光源に由来する雑音(周波数雑音、強度雑音、ビームジッター)、残留ガスの揺らぎ、ミスマッチングとミスアライメントによる雑音などが存在する。

第3章 熱雑音

熱雑音は機械的な測定精度を根源的に制限する要因の1つである [7]。干渉計の鏡の熱雑音の場合、鏡の各固有振動モードに熱エネルギー $k_B T/2$ が与えられ、鏡面が鏡の重心に対して変動し、光路長変動として観測されるものである。

本章では、系の熱雑音と損失の関係について述べ、Q 値という散逸を表す量について説明する。

3.1 揺動散逸定理

揺動散逸定理 [8, 9] は系の損失と熱雑音のスペクトルについての関係式を与える。熱的な揺動と損失は系と熱浴の同一の相互作用によって支配されるので、それらの間には関係が存在する。

1次元の系について考える。一般化座標を X とし、系と外界との相互作用を表す一般化力を F とする。系の損失の情報は X の F に対する応答で表される。この応答は系の運動方程式から導かれる。運動方程式に一般化力を入れるには、系のハミルトニアンに

$$V = -F(t)X \quad (3.1)$$

という項を加えればよい。

物理系の応答を表すために以下の量を定義する。インピーダンス Z は

$$Z(\omega) \equiv \frac{\tilde{F}(\omega)}{i\omega \tilde{X}(\omega)} \quad (3.2)$$

で定義される。ここで $\tilde{F}, \tilde{X}$ は、それぞれ一般化力 F と一般化座標 X のフーリエ変換である。インピーダンスの実部

$$R(\omega) \equiv \text{Re}[Z(\omega)] \quad (3.3)$$

はレジスタンスと呼ばれる。アドミッタンス Y は

$$Y(\omega) \equiv \frac{1}{Z(\omega)} \quad (3.4)$$

で定義される。アドミッタンスの実部

$$\sigma(\omega) \equiv \text{Re}[Y(\omega)] \quad (3.5)$$

はコンダクタンスと呼ばれる。伝達関数 $H(\omega)$ は

$$H(\omega) \equiv \frac{\tilde{X}}{\tilde{F}} \quad (3.6)$$

で定義される。

X のパワースペクトル密度 $G_x(f)$ と系の応答の関係は

$$G_X(f) = \frac{4k_B T}{\omega^2} \sigma(\omega) \quad (3.7)$$

となる。この関係式 [9] は第 1 種の揺動散逸定理と呼ばれる。 $H(\omega)$ を用いると (3.7) は

$$G_X(f) = -\frac{4k_B T}{\omega} \text{Im}[H(\omega)] \quad (3.8)$$

と書き直せる。伝達関数の虚部は一般化力と一般化座標の位相遅れを表す。位相遅れが存在すると、定常状態で一般化力による仕事の平均は 0 ではなくなる。よって伝達関数の虚部は系の損失を表す。その結果、第 1 種の揺動散逸定理によって損失と熱雑音との関係式が与えられた。

一般化力のパワースペクトル密度 $G_F(\omega)$ も系の応答によって

$$G_F(f) = 4k_B T R(\omega) \quad (3.9)$$

のように表される。この関係式は第 2 種の揺動散逸定理 [9] と呼ばれる。

3.2 1次元調和振動子の熱雑音

3.2.1 熱雑音のスペクトル

簡単な例として、1次元調和振動子の熱雑音を議論する [7]。損失のない調和振動子の運動方程式は

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = F(t) \quad (3.10)$$

となる。ここで、 m, ω_0, x, F はそれぞれ質量、共振角周波数、変位、一般化力である。損失を入れた調和振動子の運動方程式は周波数領域で

$$-m\omega^2 \tilde{x} + m\omega_0^2 [1 + i\phi(\omega)] \tilde{x} = \tilde{F} \quad (3.11)$$

となる。ここで $\phi(\omega)$ は損失角で損失の周波数依存性を表している。(3.11) から伝達関数 H は

$$H(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + m\omega_0^2 [1 + i\phi(\omega)]} \quad (3.12)$$

となる。(3.12) を (3.8) の $H(\omega)$ に代入すると調和振動子のパワースペクトル密度は

$$G_x(f) = \frac{4k_B T}{m\omega} \frac{\omega_0^2 \phi(\omega)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4 \phi^2(\omega)} \quad (3.13)$$

となる。

3.2.2 Viscous damping と Structure damping

(3.13) を使って viscous damping と structure damping という 2 つの代表的な損失による熱雑音を考える。

損失が viscous damping による場合、速度に比例する減衰力が振動子にかかる。運動方程式は

$$m\ddot{x} + m\Gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t) \quad (3.14)$$

となる。ここで、 Γ は定数である。周波数領域で、この方程式は

$$-m\omega^2 \tilde{x} + im\omega\Gamma \tilde{x} + m\omega_0^2 \tilde{x} = \tilde{F} \quad (3.15)$$

となる。(3.11) と (3.15) より、損失角は

$$\phi(\omega) = \frac{\Gamma\omega}{\omega_0^2} \quad (3.16)$$

となる。一般に、(3.16) は

$$\phi(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0 Q} \quad (3.17)$$

と書き直せる。ここで、 Q は Q 値である。 Q 値は損失を表す量として良く用いる。 Q 値の定義は (3.26) で与えられる。(3.16)、(3.17) より viscous damping の Q 値は

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma} \quad (3.18)$$

となる。 Γ が周波数に依存しない限り、 Q 値は共振周波数に比例する。(3.17) を (3.13) の $\phi(\omega)$ に代入し、viscous damping の熱雑音のパワースペクトルは

$$G_x(f) = \frac{4k_B T}{mQ} \frac{\omega_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^2 \omega^2 / Q^2} \quad (3.19)$$

となる。このスペクトルの典型的な振る舞いを図 3.1 に示す。周波数が共振周波数以下 ($\omega \ll \omega_0$) では、パワースペクトルは

$$G_x(f) = \frac{4k_B T}{m\omega_0^3 Q} = \text{constant} \quad (3.20)$$

となり、周波数が共振周波数以上 ($\omega \gg \omega_0$) では、パワースペクトルは

$$G_x(f) = \frac{4k_B T \omega_0}{mQ} \frac{1}{\omega^4} \propto f^{-4} \quad (3.21)$$

となる。

一方、損失が structure damping による場合、損失角は

$$\phi(\omega) = \frac{1}{Q} \quad (3.22)$$

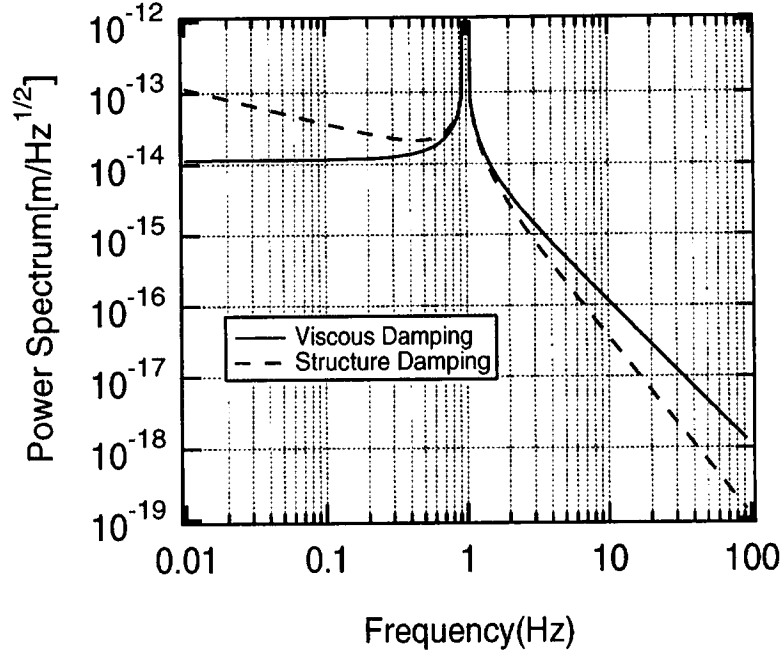


図 3.1: 調和振動子の熱雑音のパワースペクトル密度 $\sqrt{G_x}$ の例; 質量 m は 1kg、共振周波数 $\omega_0/2\pi$ は 1Hz、温度 T は 292K、そして Q は 5×10^5 とした。実線が viscous damping、破線が structure damping の場合の熱雑音のスペクトルを表している。

と書ける。ここで、 Q は振動子の測定された Q 値である。 Q 値の定義は (3.26) で与えられる。structure damping モデルでは Q 値は共振周波数に依存しない。(3.22) を (3.13) に代入して、structure damping の熱雑音のスペクトルは

$$G_x(f) = \frac{4k_B T}{mQ\omega} \frac{\omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^4/Q^2} \quad (3.23)$$

となる。このスペクトルの典型的な振る舞いを図 3.1 に示す。周波数が共振周波数以下 ($\omega \ll \omega_0$) では、パワースペクトルは

$$G_x(f) = \frac{4k_B T}{m\omega_0^2 Q} \frac{1}{\omega} \propto f^{-1} \quad (3.24)$$

となり、周波数が共振周波数以上 ($\omega \gg \omega_0$) では、パワースペクトルは

$$G_x(f) = \frac{4k_B T \omega_0^2}{mQ} \frac{1}{\omega^5} \propto f^{-5} \quad (3.25)$$

となる。

3.2.3 Q 値

Q 値の定義は

$$Q = \frac{1}{\phi(\omega_0)} \quad (3.26)$$

である。この定義からわかるように Q 値は共振周波数における損失と関係付けられる。

(3.13) を用いて調和振動子の熱雑音を計算するためには損失角 $\phi(\omega)$ を評価しなくてはならない。損失角は通常、共振周波数における Q 値から計算される。Q 値の測定はそれぞれの共振のモードで行う。

Q 値の測定法を 2 つ述べる。1 つは共振の減衰時間を測定する方法である。もう 1 つの方法は、伝達関数の共振ピークの幅を測る方法である。

減衰時間を測定する方法を以下に示す。励起された共振の減衰時間を測定するためには、力 $F(t)$

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \cos(\omega_0 t + \delta) & (t < 0) \\ 0 & (t > 0) \end{cases} \quad (3.27)$$

を調和振動子に加える。 F_0, δ は任意の定数である。調和振動子の変位 $x(t)$ と $F(t)$ の間の関係は周波数領域で

$$\tilde{x}(\omega) = H(\omega) \tilde{F}(\omega) \quad (3.28)$$

となる。ここで $H(\omega)$ は (3.12) で与えられる伝達関数である。時間領域では、この関係は

$$x(t) = \int h(t-t') F(t') dt' \quad (3.29)$$

となる。ここで $h(t)$ はインパルス応答で伝達関数 $H(\omega)$ のフーリエ逆変換である。インパルス応答は¹

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_0} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \sin(\omega_0 t) \quad (3.30)$$

となる。(3.27)、(3.30) を (3.29) に代入して共振の減衰は

$$x(t) = \frac{F_0 Q}{m\omega_0^2} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \sin(\omega_0 t + \delta) \quad (t > 0) \quad (3.31)$$

で表される。振幅の減衰時間は ω_0/Q と関係付けられる。よって、Q 値は測定された減衰時間と共振周波数によって求められる。Q 値は減衰時間に比例するので、この方法は Q 値が高いときに適している。

次に、伝達関数の共振ピークの半値幅を測定する方法を示す。半値幅 $\Delta\omega_0$ は方程式

$$\left| H(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega_0}{2}) \right|^2 = \frac{|H(\omega_0)|^2}{2} \quad (3.32)$$

¹インパルス応答を計算するとき $Q \gg 1$ を仮定している。また、 $x(t), F(t)$ は実関数なので伝達関数の虚部は奇関数となる。すなわち、損失角 $\phi(\omega)$ は奇関数である。

の解である。(3.12) と (3.32) から半値幅は

$$\Delta\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (3.33)$$

となる。よって、 Q 値は共振ピークの半値幅を測ることで求められる。半値幅は Q 値の逆数に比例するので、この方法は Q 値が低いときに適している。

3.2.4 モード展開

実際の連続体の運動方程式の熱雑音のパワースペクトルを求める。ここでは詳しい議論は行わない。詳細は [7] を見よ。連続体の運動方程式は無限個の調和振動子の運動方程式の和で書き表せる。それぞれの運動方程式に損失の項を入れると系全体の伝達関数は

$$H_X(\omega) = \sum_n \frac{1}{-m_n\omega^2 + m_n\omega_n^2[1 + i\phi_n(\omega)]} \quad (3.34)$$

となる。 m_n は換算質量で系の全エネルギーと観測点における質量 m_n 、共振周波数 ω_n の仮想的な調和振動子の持つエネルギーとを等しいとして定義される。熱雑音のパワースペクトルは

$$G_X(f) = \sum_n \frac{4k_B T}{\omega} \frac{\omega_n^2 \phi_n(\omega)}{m_n[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_n^4 \phi_n^2(\omega)]} \quad (3.35)$$

となる。実際の重力波検出器の熱雑音はこの方法を用いて計算される。詳細は [10] を見よ。

損失が空間的に非一様に分布している場合、基底関数のモード間にカップリングが生じ、モード展開を行うことはできない。このように損失が非一様な場合はモード展開とは異なった方法を用いて熱雑音を計算する [11]。

第4章 機械損失

この章では、固体における機械損失について述べる。損失は以下の3つに分類される。

固体内部の損失… 固体の性質そのものによって決まる損失であり、物質固有の損失を決定する要因である。

固体表面の損失… 固体内部の機構ではなく、その加工などによって決まる損失である。

外的な損失… 試料の測定する際に導入される損失であり、固体の機械損失ではない。

この章ではまず機械損失と散逸エネルギーの関係を示す。その後、これら3つの損失の主な理論を簡単に説明する。最後に、これまで行われた機械損失の研究のなかで今回の実験の背景となるものをいくつか示す。

4.1 損失角と散逸エネルギーの関係

1次元の調和振動子の熱雑音のパワースペクトルを求めるときに損失角 $\phi(\omega)$ を(3.11)のように複素バネ定数 $k(1+i\phi)$ を用いて導入した。この表現は $\phi \ll 1$ の時に成り立つものである。ここでは一般の弾性体における損失角と系の散逸エネルギーとの関係を示す。そして、その関係式から(3.11)の複素バネ定数を導き、第3章で与えた損失の定義とここで与えた損失角の表現が $\phi \ll 1$ では同一であることを見る。

弾性体が振動しているとき、振動の1周期に弾性体に蓄えられる最大のエネルギーを W 、1周期に失われるエネルギーを ΔW とする。すると損失角 ϕ は

$$\tan \phi = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (4.1)$$

で与えられる。 $\phi \ll 1$ では

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (4.2)$$

となる。つまり損失 ϕ は1周期の間に失われえるエネルギーの全エネルギーに対する割合に 2π をかけたものに等しい。

この表現を一般の弾性体の場合に証明する。

時間に対して周期的な応力 σ

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t} \quad (4.3)$$

を加えると、歪み ϵ

$$\epsilon = \epsilon_0 e^{i(\omega t - \phi)} \quad (4.4)$$

が生じる。ここで損失角 ϕ を定義した。この定義が $\phi \ll 1$ の時、(3.11) のような複素バネ定数 $k(1 + i\phi)$ による損失の定義と同等であることは後に示す。複素コンプライアンス

$$J^*(\omega) \equiv \epsilon/\sigma = |J|(\omega) e^{-i\phi(\omega)} \quad (4.5)$$

を定義する。ここで

$$|J|(\omega) = \epsilon_0/\sigma_0 \quad (4.6)$$

とおいた。 J^* を実部と虚部に分けて

$$J^*(\omega) = J_1(\omega) - iJ_2(\omega) \quad (4.7)$$

と書く。すると

$$|J|^2 = J_1^2 + J_2^2 \quad (4.8)$$

$$\tan \phi = J_2/J_1 \quad (4.9)$$

が成り立つ。

振動の1周期で散逸するエネルギー ΔW は

$$\Delta W = \oint \sigma d\epsilon = \pi J_2 \sigma_0^2 \quad (4.10)$$

となる。一方、蓄えられるエネルギーの最大値 W は

$$W = \int_0^{\pi/2} \sigma d\epsilon = \frac{1}{2} J_1 \sigma_0^2 \quad (4.11)$$

となる。

よって(4.1)式

$$\tan \phi = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (4.12)$$

を得る。 $\phi \ll 1$ では、(4.2)式

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (4.13)$$

を得る。

$\phi \ll 1$ が成り立つとすると応力は歪みを用いて

$$\sigma = M^*(\omega)\epsilon \quad (4.14)$$

と書ける。ここで

$$M^*(\omega) = M_1(\omega) + iM_2(\omega) = M_1(\omega)(1 + i \tan \phi) \quad (4.15)$$

となる。

1次元の調和振動子で損失を導入した時の複素バネ定数 $k(1 + i \tan \phi)$ は (3.48) で $M^*(\omega)$ を一次元調和振動子における複素バネ定数とみなせば、 $\tan \phi \simeq \phi$ より導ける。よって損失角のここでの表現は $\phi \ll 1$ の時、第3章の (3.11) で与えた定義と同じ量を表す。

4.2 固体内部で起きる損失

固体内部で起きる損失として、熱弾性効果と Structure damping について説明する。その他の理論で重要なものとして、フォノン-フォノン相互作用、フォノン-電子相互作用などがあるが、これらの損失は、室温ではこの実験の試料として用いられたアルミニウム合金ではその寄与が小さい [12] ので省略する。

4.2.1 損失が周波数によらないモデル (Structure damping)

structure damping モデルでは損失角 ϕ は周波数に依存しない。損失 ϕ は

$$\phi = \frac{1}{Q} \quad (4.16)$$

で与えられる。この損失は多くの物質で成り立つことが数々の実験により検証されている。しかし、この損失の起源は良く理解されておらず、現象論的に成り立つ理論に過ぎない。

また、このモデルには数学的に困難な点がある。損失は周波数の奇関数なので、全ての周波数範囲で損失が一定であるようにすることは不可能である。よって、Structure damping モデルは単に損失の周波数依存性が弱いといっているだけである。

4.2.2 熱弾性効果

一般論

一般に、弾性体に周期的な外力を加えると、弾性体内部に周期的な応力が生まれ、それによって周期的な温度変化が生じる。応力が空間的に非一様であると、温度変化も同様に非一様となり、その結果、弾性体内部に温度勾配が生じ熱流が流れる。熱流は必然的に弾性体のエントロピーの増加を伴う。それによってエネル

ギーが熱として散逸され、物質内部の損失となる。この損失を熱弾性効果という[13]。

弾性体内に生じた温度勾配は、緩和時間 τ とすると $\exp(-t/\tau)$ のように指数関数的に減少する。緩和モードは無限個存在する。それぞれの緩和モードに対して、熱弾性効果による損失は

$$\phi = \Delta_k \frac{\nu \nu_k}{\nu^2 + \nu_k^2} \quad (4.17)$$

のように表せる。ここで Δ_k は緩和強度と呼ばれ、その緩和モードの損失の強さを表す。 ν_k は損失が最大になる周波数で緩和時間 τ_k と

$$\tau_k = \frac{1}{2\pi\nu_k} \quad (4.18)$$

という関係で結ばれる。

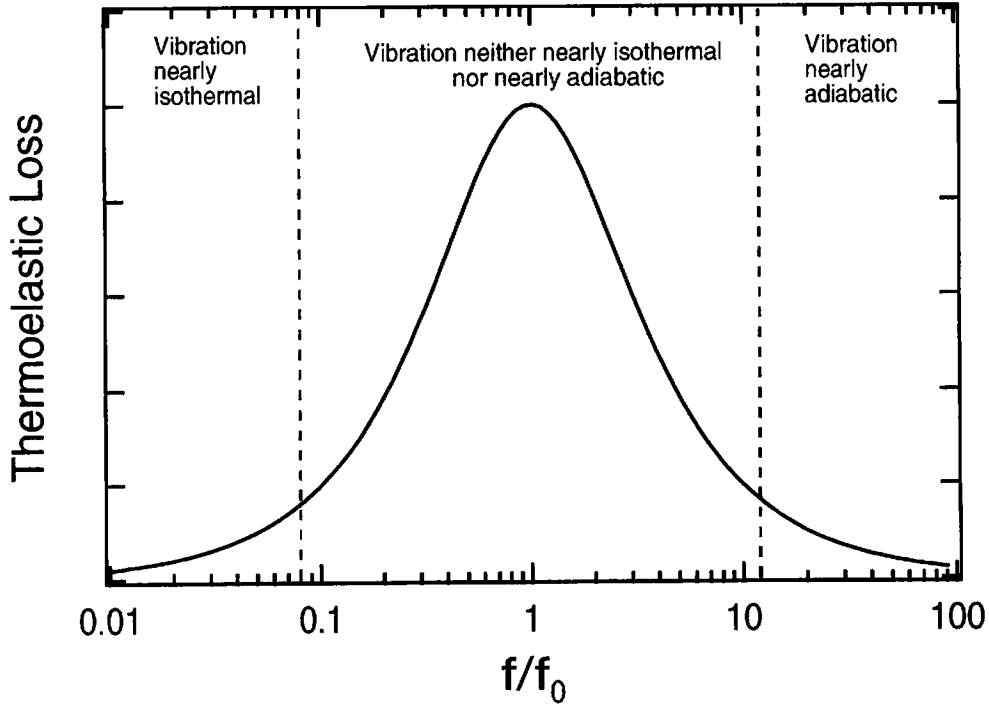


図 4.1: 熱弾性効果の周波数依存性 横軸は周波数 f を損失が最大になる周波数 f_0 で規格化している。

損失が周波数 $\nu = 1/2\pi\tau_k$ の付近で最大になり、周波数がこの最大から離れると高周波側、低周波側の両側で漸近的に 0 に近づく理由は、エネルギーが熱として散逸する機構を分析することで得られる。温度 T の単位体積に熱 δQ が加わると、その単位体積のエントロピー S は

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T} \quad (4.19)$$

増加する。振動の 1 周期に増加するエントロピーは

$$\Delta S = \sum \frac{\delta Q}{T} \quad (4.20)$$

で与えられる。ここで和は振動の 1 周期にわたって取る。定常状態に達するとエントロピー増加は total で 0 になる。体積要素の平均温度を T_0 として、 δT を温度の平均温度からのずれとすると、平衡条件

$$\Delta S = 0 \quad (4.21)$$

から 1 周期あたりに加わる熱量 ΔQ は

$$\Delta Q = \sum \delta Q = T_0^{-1} \sum \delta Q \delta T \quad (4.22)$$

で与えられる。

(4.22) より 1 周期に失われるエネルギーは $\delta Q \delta T$ の和によって表される。周波数がとても高くなると振動は断熱的になり、 δQ が小さくなるので損失は 0 に近づく。逆に周波数がとても低くなると振動は等温的になり、 δT が小さくなるので損失は 0 に近づく。振動が断熱的でも等温的でもない中間の周波数範囲でのみ $\delta Q, \delta T$ が十分大きく、損失が大きくなる。

実際の弾性体における損失はこれらの緩和モードの重ね合わせで与えられる。それぞれの緩和モードはそのモードによって決まる緩和時間を持つ。

一般の弾性体における熱弾性効果の損失 ϕ は、熱伝導方程式を用いて、弾性体に 1 周期の間に加わる熱量を計算することで得られる。簡単な計算により

$$\phi = \frac{1}{W} \frac{C_V}{2T} \left(\frac{\alpha_l E T}{C_V (1 - 2\sigma)} \right)^2 \left(\int \mathcal{U}_{ii}^2 dV \right) \sum_k f_k \frac{\nu \nu_k}{\nu_k^2 + \nu^2} \quad (4.23)$$

を得る。導出の詳細は付録 (A.1) を見よ。ここで、 W は弾性体が 1 周期で蓄える最大のエネルギーであり、 $\mathcal{U}_{ii}$ は弾性体の strain tensor の対角和の空間成分 (定義は (A.10)、(A.21) に与えられる) である。また、 $E, \sigma, T, \alpha_l, C_V$ はそれぞれヤング率、ポアソン比、線膨張係数、単位体積あたりの定積比熱である。(4.23) における k による和は、弾性体におけるさまざまな緩和モードに対する和を表している。 f_k は各緩和モードの損失への寄与を表す weight factor で

$$\sum_k f_k = 1 \quad (4.24)$$

を満たす(定義は(A.33)に与えられる)。また、 ν_k は各緩和モードの損失が最大になる周波数である(定義は(A.25)で与えられる)。

熱弾性効果には巨視的な熱弾性効果と微結晶間の熱流による熱弾性効果の2種類がある。この2つについて、次に述べる。

巨視的な熱流による熱弾性効果

弾性体が巨視的な変形を受け、空間的に非一様な体積変化が生じると、熱弾性効果が生じる。これが巨視的な熱流による熱弾性効果である。この効果を、特に円板の横振動を例に説明する。

円板が横振動して軸方向に曲がると、円板の上面と下面はどちらか一方が伸び、もう一方が縮む。その間に伸び縮みがない中立面が存在する。中立面上で円の中心と一致する点を原点に取り、円板の軸を z 軸とする。変形がない時、円板の上面と下面は xy 平面に平行になるように座標系を取る。

z 軸方向の変形は、中立面からの距離 z に比例した歪みを生じさせる。よって、振動している円板の上面と下面では温度勾配が生じ、圧縮されて温度が高くなっている面から、引き伸ばされて温度が低くなっている面へ熱流が流れる。このことによって損失が生じる。これが横方向の熱流によって生じる巨視的な熱弾性効果である。

円板の横振動による巨視的な熱弾性効果の損失 ϕ_{th} は、変位の z 成分のみを考える円板近似を用いると、近似的に

$$\phi_{th} = A_{nm}\phi_p \quad (4.25)$$

$$\phi_p = \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \frac{E\alpha_l^2 T}{C_V} \sum_k f_k \frac{\omega\tau_k}{1+\omega^2\tau_k^2} \quad (4.26)$$

$$A_{nm} = \frac{\iint \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 dx dy}{\iint \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\sigma) \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} \right] dx dy} \quad (4.27)$$

と表せる。この式の導出は付録A.2に示した。ここで、 $\omega = 2\pi\nu$ は角周波数を表し、緩和時間 τ_k は

$$\tau_k = \frac{1}{2\pi\nu_k} = \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{h^2}{\pi^2 D} \quad (4.28)$$

で与えられる。また、weight factor f_k は

$$f_k = \frac{96}{(2k+1)^4 \pi^4} \quad (4.29)$$

となる。

(4.25) より ϕ_{th} は、モードの形によらない ϕ_p にモードの形による形状因子 A_{nm} をかけたものになる。 ϕ_p は、それぞれの緩和モードの線形結合となっている。 f_k は k に具体的な値を入れて計算して見ると $f_0 = 0.9855, f_1 = 0.0122, f_2 = 0.0015, \dots$ となり、 $k=0$ のモードが最も大きい。Al5056 の半径 6cm、厚さ 2mm の円板の場合の ϕ_p を図 4.2 に示した。ここで、温度は室温 ($T=293K$) とした。この図からわかるように、損失は $k=0$ の緩和モードだけでほとんど決まる。

形状因子 A_{nm} はモードの形によって決定される。円板の変位の z 成分 ζ は円柱座標 (r, θ, z) を用いて

$$\zeta_n(r, \theta) = \zeta_0 \cos n\theta [J_n(kr) + \beta_n I_n(kr)] \quad (4.30)$$

となる (導出は付録 B に示す)。ここで $J_n(x), I_n(x)$ はそれぞれ n 次の Bessel 関数、変形 Bessel 関数であり、 β_n は定数である。 n はモードの Order と呼ばれ、角度方向の節線の数を与える。半径方向の節線の数 m は、(4.30) において r が 0 から円板の半径までの範囲を動くときのベッセル関数の零点の数で、Order n の各値に対してモードの共振周波数が低い方から順に $m = 0, 1, 2, \dots$ のモードが並ぶ。

A_{nm} は $n \geq 2$ の高次モードでは、大体 0.1 ~ 1 程度の値をとる。モードの体積変化 (付録 (A.43) 参照) の値が小さく、(4.27) の分母の第 1 項が第 2 項より小さい、あるいは同程度の大きさの時、 A_{nm} は 1 より小さい。体積変化の値が大きくなって、分母の第 1 項が第 2 項よりかなり大きくなると A_{nm} は 1 に近づく。このことは、体積変化が大きくなれば、温度勾配が大きくなり、熱の散逸が大きくなることを意味している。

ϕ_{th} を Al5056 の半径 6cm、厚さ 2mm の円板の場合に計算した結果を図 4.3 に示す。各共振周波数は付録 (B.23) に与えられている円板の共振周波数の解析解を用いて求めた。図 4.3 を見ると A_{nm} の大きさによって、損失が ϕ_p より小さくなる系列と ϕ_p と大体等しい系列に分裂しているのがわかる。 $m=0$ のモードが損失が ϕ_p より小さい系列を構成し、 m が 1 以上のモードが、損失が ϕ_p と大体等しい系列を構成する。 $m=0$ のモードは A_{nm} の値が 0.2 ~ 0.6 と 1 より小さいので、 ϕ_p に比べて損失が小さい。それに対して $m \geq 1$ のモードは A_{nm} が 1 に近く、損失は ϕ_p とだいたい等しい。

A_{nm} が $m=0$ の場合 1 より小さく、 $m \geq 1$ のモードで 1 に近い値を持つ理由はモードの形から分かる。 $n=2$ のモードの中で、 $m=0, 1, 2$ のモードの形を有限要素法 (第 5 章を見よ。) によって求めた結果を図 4.4 ~ 4.6 に示す。図中で、青色の部分は変位が小さい部分を表し、色が緑、黄色、赤になるにつれて、より変位が大きい部分を表す。

図 4.4 からわかるように、 $m=0$ のモードは半径方向の節がないので、弾性変形による体積変化が小さい。それに対して図 4.5、4.6 からわかるように $m=1, 2$ のモードは半径方向の節が存在するので、モードの形が複雑になり、弾性変形による体積変化が大きくなる。 A_{nm} と体積変化の大きさの関係から A_{nm} は $m=0$ のモードのみで 1 より小さくなり、 $m \geq 1$ のモードでは 1 に近い値をとる。 $n \geq 3$ の

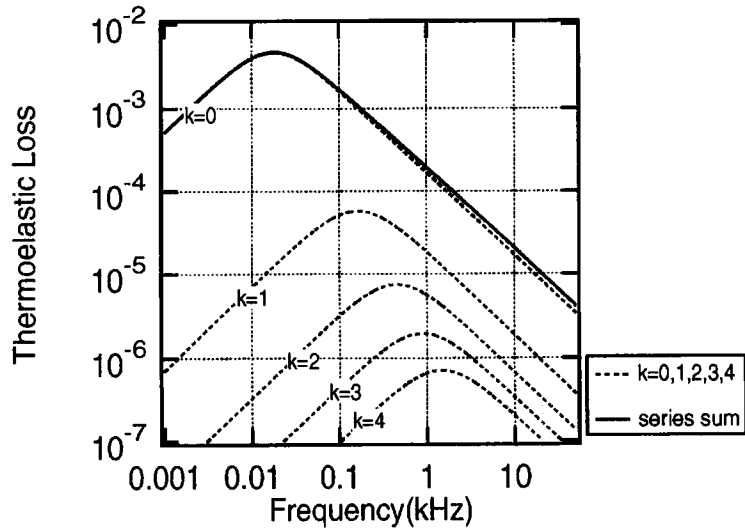


図 4.2: Al5056 半径 6cm、厚さ 2mm の円板の室温 ($T=293\text{K}$) における巨視的な熱弾性効果 ϕ_p 点線は $k=0, 1, 2, 3, 4$ の各緩和モード ((4.26) 式の $k=0, 1, 2, 3, 4$ の各項) を表し、実線は $k=0 \sim \infty$ までの級数和、すなわち ϕ_p を表す。

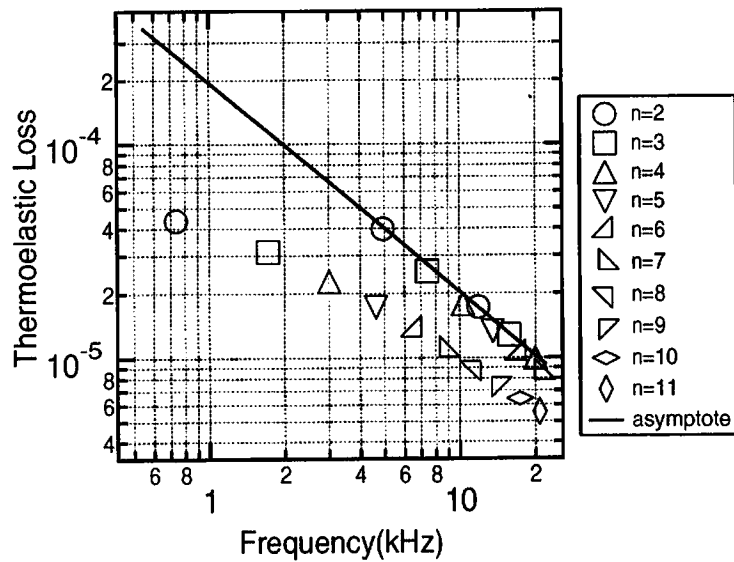


図 4.3: Al5056 半径 6cm、厚さ 2mm の円板の室温 ($T=293\text{K}$) における巨視的な熱弾性効果 asymptote は ϕ_p であり、熱弾性効果のだいたいの値を決定する。

モードでもこのことは成り立つ。

それぞれの系列で、損失の値が周波数が大きくなると、減少するのは、ここで考察した Al5056(Al1070,Al6061 でもそうなる) の円板の場合、熱弾性効果の損失をほとんどを決める $k = 0$ の緩和モードにおいて、面外振動の共振周波数が全て断熱近似が成り立つ範囲に存在するからである。

熱弾性効果の計算に必要な Al5056,6061,1070 の物理定数を表 4.1 にまとめた。表中の C は単位質量あたりの比熱で、 $C_V \simeq C_P \simeq C\rho$ となる。

表 4.1: アルミニウム合金の物理定数 [18] より引用

	Al5056	Al1070	Al6061	単位
密度 $\rho(\text{kgm}^{-3})$	2.64	2.70	2.70	10^3kgm^{-3}
比熱 c	9.63	9.41	9.63	10^2Jkg^{-1}
線膨張率 α	24.1	23.6	23.4	10^{-6}K^{-1}
ヤング率 E	7.10	6.89	6.89	10^{10}Pa
熱伝導度 (25 °C) κ	117	234	171	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
ポアソン比 σ	0.33	0.33	0.33	
熱拡散係数 $D=\kappa/(C\rho)$	4.60	9.21	6.57	$10^{-5}\text{m}^2\text{s}^{-1}$

微結晶間の熱流による熱弾性効果

多結晶からなる金属などの弾性体では、個々の微結晶 (grain) が部分的にランダムな方向を向いている事によって応力が非一様性になる。非一様な応力を受けると、grain 間で歪みや温度上昇が非一様となる。その結果、grain 間に温度勾配が生じ、それを緩和するために熱流が流れ、エネルギーが散逸する。これが微結晶間の熱流による熱弾性効果である。

この損失は (4.23) によって形式的に与えられるが、正確な計算は困難である。よって、以下のような概算を行う。詳しくは [13, 15, 16] を見よ。

(4.35) の k による和の項は grain diamter d_g 、熱拡散係数 D 、振動数 ν のみによるとする。次元解析から、損失はこれらの積から作られる無次元量 $\nu^2 d_g / D$ に依存することがわかる。振動は $\nu^2 d_g / D$ の値が小さいと等温的になり、大きいと断熱的になる。

損失が最も大きくなる周波数 ν_0 は、

$$\frac{\nu_0 d_g^2}{D} \simeq \frac{3\pi}{2} \quad (4.31)$$

で与えられる。

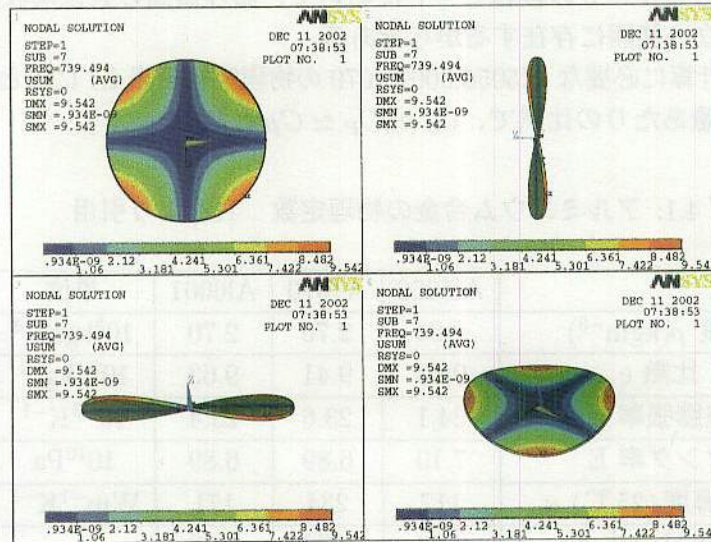


図 4.4: Al5056 半径 6cm、厚さ 2mm の円板の $n=2, m=0$ の面外モード

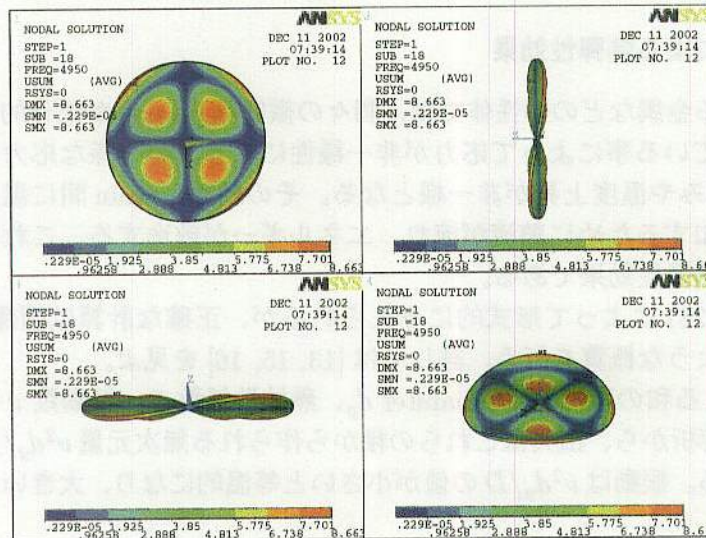


図 4.5: Al5056 半径 6cm、厚さ 2mm の円板の $n=2, m=1$ の面外モード

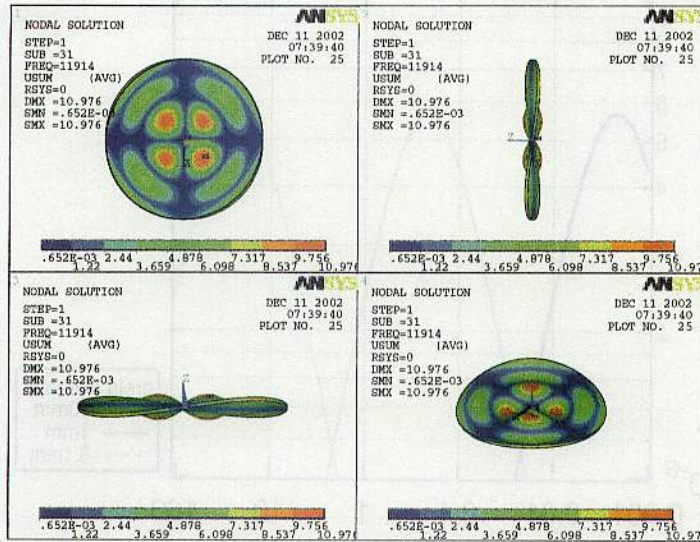


図 4.6: Al5056 半径 6cm、厚さ 2mm の円板の $n = 2, m = 2$ の面外モード

また、コンプライアンス E^{-1} を用いて、非等方性を表す因子 R を

$$R = \frac{\langle E^{-2} \rangle - \langle E^{-1} \rangle^2}{\langle E^{-1} \rangle^2} \quad (4.32)$$

で定義する。ここで $\langle \rangle$ は結晶の可能な方向に対する平均を表す。すると、微結晶間の熱流による熱弾性効果 ϕ_{IC} は

$$\phi_{IC} = R \frac{E \alpha_l^2 T}{C \rho} \frac{\omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \quad (4.33)$$

$$\tau = \frac{d_g^2}{2\pi^2 D} \quad (4.34)$$

と評価される。

因子 R は E^{-1} を弾性テンソルを用いて計算することができ、アルミニウムの場合、およそ 2.4×10^{-3} となる。

Al5056 の場合、 $d_g = 0.1\text{mm}$ とすれば、

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\tau} \sim 20\text{kHz} \quad (4.35)$$

となる。Al5056 の場合に、いくつかの d_g の値に対して ϕ_{IC} をプロットしたグラフを図 4.3 に示す。

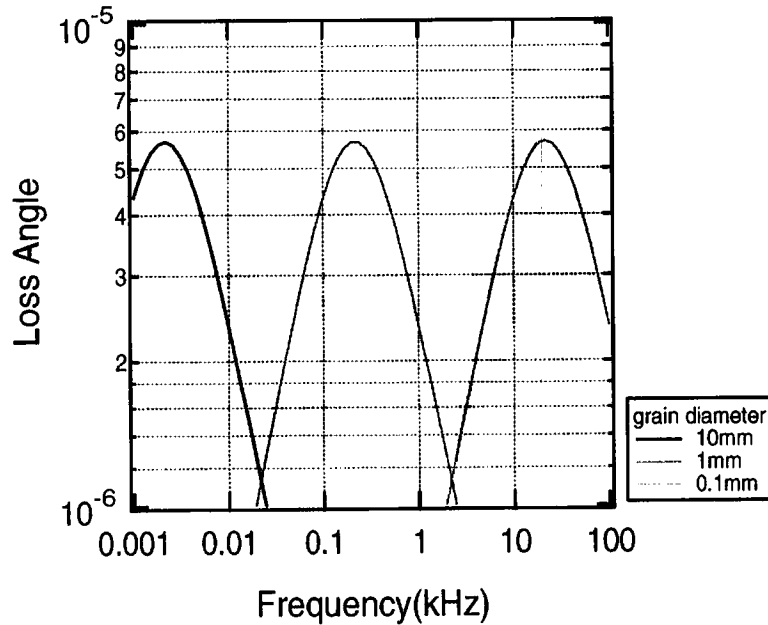


図 4.7: Al5056 における微結晶間の熱流による熱弾性効果

4.3 固体表面の損失

固体表面による損失の理論としては、表面の損失として Structure damping を考える現象論的なものと、表面の多結晶層における熱弾性効果を考えるものがある。その2つを以下に示す。

4.3.1 周波数によらない固体表面の損失

表面による損失として、structure damping を仮定するモデルがある。その場合、表面の損失の大きさは

$$\phi = \phi_{\text{surf}} \frac{U_{\text{surf}}}{U_{\text{bulk}}} \quad (4.36)$$

で与えられる。ここで、 ϕ_{surf} は表面層の損失で、 U_{surf} 、 U_{bulk} はそれぞれ、表面層と試料全体が振動の1周期で蓄えるエネルギーである。

4.3.2 固体表面における熱弾性効果

結晶の場合、表面の多結晶層が微結晶間の熱弾性効果を起こし、損失の原因となる。多結晶の典型的な大きさを a とすると、熱の拡散にかかる時間は $\tau = a^2/D$

程度である。この層が持つ損失は

$$\phi = \frac{E\alpha_l^2 T}{C_V} \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (4.37)$$

となる。この表面層の厚さを h とする。変形が各部で一様であるとする、表面層の体積と全体積との比から表面損失による損失が計算される。直径 d 、高さ l の円柱なら

$$\phi = 4h \left(\frac{1}{2l} + \frac{1}{d} \right) \frac{E\alpha_l^2 T}{C_V} \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (4.38)$$

となる。これが熱弾性効果の表面損失である。この損失の値はダメージ層の厚さに依存するので、正確に評価するのは難しい。Q 値測定に用いたアルミニウム合金の表面の粗さは $0.1\mu\text{m}$ より小さい値であった。この値を代入すると、この損失は $1\text{kHz} \sim 20\text{kHz}$ の周波数に対して非常に小さくなり、固体内部の熱弾性効果に比べて無視できる。

4.4 外的な要因による損失

試料自体で決まっている損失に測定系や環境による損失が加わる。固体における損失ではないが、この損失について簡単に紹介する。

4.4.1 支持による損失

低損失の試料の損失を測定する場合、支持に伴い導入される損失を抑えなければならない。今回行った実験では支持に伴う損失は、 10^{-8} 以下にまで抑えられる不動点支持法を用いた¹。

4.4.2 残留ガスによる損失

残留ガスの分子が試料に衝突することも損失の原因となる。そのため、低損失の試料の損失の測定を行うには、真空中で行われる。この残留ガスによる損失の Q 値は、室温では計算の結果、およそ

$$\phi_{gas} = 1.1 \times 10^{-6} \left(\frac{0.25\text{m}}{h} \right) \left(\frac{2\text{g/cm}^3}{\rho} \right) \left(\frac{1\text{Hz}}{f_0} \right) \left(\frac{p}{1\text{Pa}} \right) \quad (4.39)$$

となることが知られている。ここで h, ρ, f_0, p は、それぞれ試料のサイズ、密度、共振周波数、圧力である。例えば Al5056 の半径 6cm、高さ 6cm の円柱の場合、

¹これは振動モードのオーダー n が $n \geq 2$ を満たすとき正しい。 $n=0,1$ では支持による損失が大きくなる。詳しくは第 5 章を見よ。

$f_0 = 1 \sim 10\text{kHz}$ として、圧力 p を 13Pa 程度とすると ϕ_{gas} は $5 \times 10^{-9} \sim 5 \times 10^{-8}$ となる。Al5056 の典型的な損失である 10^{-6} のオーダーでは、真空度が $13\text{Pa}(0.1\text{torr})$ 以下ならば、残留ガスによる影響は考えなくて良いことになる。他のアルミニウム合金 Al1070、Al6061 についても同様である。

4.5 これまで行われてきた機械損失の研究

これまで行われてきた機械損失の研究のなかで今回の実験の背景になるものをいくつか示す。

アルミニウム合金の損失の研究は共鳴型重力波検出器が主流だった時代に盛んに行われた。それらの多くは、少数のモードの Q 値が低温においてどれだけ大きくなるかというものであった。

Al5056 の Q 値が低温で高くなることを最初に示したのが [28] で、円板の 21kHz の四重極モードの Q 値を $300 \sim 5\text{K}$ まで測定し、 Q 値は $0.28 \times 10^6 \sim 40 \times 10^6$ まで変化するという結果が得られた。これと同様の測定がその後いくつか行われた。その中では 0.04K の温度で 10^8 を越す Q 値を示したものもある [19]。

Al6061 の Q 値は低温で 10^6 のオーダーに達する。[20] によると、 974Hz で、 5K の温度で 4.2×10^6 に達するという。

これらの測定に対して、今回の実験では、温度を室温に保ち、広い周波数範囲で多くのモードの損失を測定した所が新しい点である。そしてその結果と熱弾性効果との比較を行った。熱弾性効果の実験的な検証は古くから行われており、黄銅の reed の横振動の損失の測定値と横振動による巨視的な熱弾性効果の理論値とがきわめて良く一致することが報告されている [21]。また、微結晶間の熱弾性効果 [22] で、黄銅の損失の測定値と極めてよく一致している。また Al5056 でも、微結晶間の熱弾性効果の理論値と測定値との比較が行われている [20]。

これらの比較に対して今回の実験の新しい点は多くのモードに対して比較している点と、モードに依存する円板の巨視的な熱弾性効果の理論値と測定値を広い周波数範囲で比較した点にある。円板の巨視的な熱弾性効果は [14] における Nb の測定ではじめて指摘されたが、その論文では円板の面外振動のオーダー $n=2,3,5$ の3つのモードそれぞれに対して、二つの温度で、損失を測定して差を取った結果と理論値の差をとった結果が一致するというものであった。それに対して、この実験では広い周波数幅に対して、多くのモードでアルミニウム合金の損失の測定値と理論値を比較している点が新しい点である。

第5章 Q値の測定方法

本章では不動点支持法を用いたアルミニウム合金のQ値の測定方法について述べる。アルミニウム合金のような等方性弾性体では形状を円柱形にすると、多くの振動モードで円柱の上面と底面の中心が不動点となる。その不動点をルビー球で支持する方法が不動点支持法である[26, 27]。この方法を用いると、試料の支持による損失が原理的には存在せず、物質固有の損失を従来の測定法と比べてより精確に測定することが出来ると考えられる。本章では、まずQ値測定の概略を述べ、次に実験の試料として用いたアルミニウム合金について述べる。その後、測定装置について説明し、最後にモードの特定方法を示す。

5.1 測定の概略

Q値の測定方法としては、周波数に対する応答関数を調べる方法と、試料を共振周波数で励起して、その減衰の速さを見るという2通りの方法が考えられる。ここでは後の方法を用いて測定を行った。その理由は、試料に用いたアルミニウム合金のQ値がある程度の高さを持っているからである。試料の節を支持して、静電型電極を近付け、大気の影響を受けないように真空に引いた状態で以下の手順でQ値の測定を行った。

5.1.1 共振周波数の探索

まず測定を行う周波数範囲を決め、その中に存在する全てのモードとその共振周波数を計算で求めた。そして共振周波数の低いモードから順に、計算で求めた値付近の周波数をFunction Generatorで掃引し、ロックインアンプの出力信号を見ながらモードの共振を探した。すべての周波数範囲で探索を行い、計算で求めたモードと対応するか調べた。

5.1.2 Q値の測定

共振が見つかったらその共振周波数で励起し、励起を切って信号の減衰をロックインアンプに入力した。ロックインアンプの参照周波数が ω_r で、共振周波数が

ω_0 の時、 Q 値を Q で表わすとロックインアンプの出力の絶対値は

$$\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \quad (5.1)$$

に比例する。記録されたデータをこの式でフィットすることにより、 Q 値を計算した。

フィッティングの範囲は、基本的に減衰の半減期の 3 倍までのデータを用いることにした。

5.1.3 縮退モードにおけるビート

円柱において order $n \geq 1$ のモードは縮退している。実際には試料の形状の非対称性で縮退した共振周波数がわずかにずれ、2つの共振が励起されることがある。

縮退した2つのモードを同時に励起した場合、出力信号はビートする。そのような場合、縮退した2つのモードの Q 値は等しいと仮定し、信号の包絡線でフィッティングして、 Q 値を求めた。

5.2 試料

試料として用いたアルミニウム合金 Al5056, Al1070, Al6061 の化学成分を表 5.1 に示す。

5.2.1 Al5056

。第 4 章でも述べたが、Al5056 は低温で 10^7 を超える Q 値を示し、共鳴型重力波検出器で広く用いられている。

市販されている半径 13cm の一本の丸棒から半径 6cm、高さ 6cm、2cm、1cm の円柱と厚さ 4mm、3mm、2mm の円板を作成した。よって、これらの試料の材質は全て同一で、微視的な性質は同じであると考えられる。

高さ 6cm の円柱の試料は Q 値の測定後、ねじれ型振動子に加工し、ねじれモードの Q 値を測定した。その形を図 5.1 に示す。円の半径は 6cm で、それに $w = 4$ cm の切込みを上下に入れてある。また h は 2cm である。振動子の芯の太さ d を変えることで共振周波数を変化させることができるので、 d を徐々に細くしていき、それぞれの形でねじれモードの Q 値を測定した。測定した d の値は、4.0cm、3.5cm、3.0cm、2.5cm、2.0cm、1.0cm である。

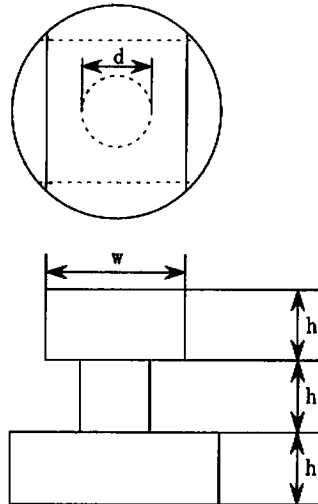


図 5.1: ねじれ型振動子 上から見た図と側面から見た図を示している。

5.2.2 Al1070

Al1070 は純粋アルミニウムに近く、Al5056、Al6061 に比べて柔らかい。また、熱伝導度が Al5056、Al6061 に比べて高い。このことによる影響に注目してこの物質を試料に選んだ。市販されている半径 13cm の一本の丸棒から半径 6cm、厚さ 2mm の円板を作成した。

5.2.3 Al6061

Al6061 は室温では Al5056 より Q 値が高く、低温では $10^6 \sim 10^7$ の Q 値を示すが Al5056 より Q 値が低い。Al5056 の Q 値とは異なる振る舞いをするこの物質の Q 値に注目して、試料に選んだ。

市販されている半径 13cm の一本の丸棒から半径 6cm、厚さ 2mm の円板を作成した。

表 5.1: アルミニウム合金 Al5056、Al1070、Al6061 の化学成分

JIS 呼称	化学成分%								
	Al	Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Zn	Ti
Al1070	99.70 以上	0.20	0.25	0.04	0.03	0.03	-	0.04	0.03
Al5056	99.00 以上	0.30	0.40	0.10	0.05 ~0.2	4.5 ~5.6	0.05 ~0.25	0.10	-
Al6061	99.00 以上	0.40 ~0.80	0.7	0.15 ~0.40	0.15	0.8 ~1.2	0.04 ~0.35	0.25	0.15

5.3 測定装置

等方性弾性体では試料を円柱形にすると、order $n \geq 2$ のモードで、中心が不動点になる。円柱の中心を点接触で支持すれば、中心が不動点となるモードで、支持による損失は原理的には生じない。よって従来の測定法と比べると、固体の損失(固体内部および固体表面の損失)だけをより精確に測定できる。そこで、試料の中心をルビーの小球で支持する装置を支持系として用いた。この装置では、ルビー球が試料の中心と高精度で一致している。

Q 値の測定は、試料の共振を励起し、励起を切って、試料の減衰の速さから Q 値を求める方法をとった。振動モードの励起は、静電型の電極を用いた。

試料の変位を計測するために、マイケルソン干渉計を用いた。干渉計を制御するため、電気回路からなる制御系を用意した。

振動の減衰を記録するデータ取得系として、ロックインアンプとコンピューターを用いた。また、大気による損失の効果を除くため、試料と支持系は真空計の中に収めた。

5.3.1 支持系

試料支持系の図を図 5.2 に示す。

直径 2mm のルビー球をアルミニウム製のロッドにはめ込み、二つのルビー球で、試料の上下の中心を支持する。球の直径を小さくしたのは、試料との接触面積を小さくするためである。

上側のロッドはアルミニウム製の外側の枠の中を上下に動くことが出来る。バネを用いてロッドを下向きに押し付け、試料を安定に支える。接触の効果を少なくするため、試料が安定に支えられる範囲で出来る限りバネの力を弱く設定し、およそ 100g 重の力が下向きに加わるように設計してある。下側のロッドはアルミニウム製のロッドの土台にはめ込まれる。上下のロッドの可動部分とはめ込み部分はすり合わせの精度で加工されている。ダイヤルゲージを用いて測定を行いながら、ロッドの位置を周りの外枠に対して固定した。

試料の位置をあわせるためアルミニウム製のアジャスターを用いた。アジャスターはすり合わせの精度で加工されている。

上下のルビー球の位置が一致しロッドが垂直に立つようにアルミニウム製の骨組みがつくられている。

5.3.2 励起系

試料の内部共振を励起するために、静電型電極を用いた。この方法では、電極を用いて試料に対して引力を加える。ここでは電極をくし型に配置したくし型電極を用いた。これによって交互に並んでいる電極による電場を効率よく利用でき

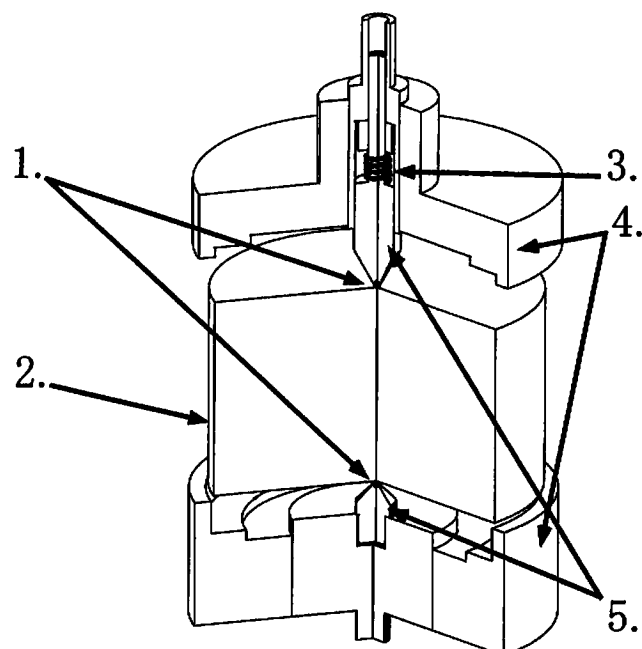


図 5.2: 試料支持系 1. ルビー球 (直径 2mm)、2. 試料、3 ばね、4. アジャスター、5. ロッド

る。電極による力は、加える電圧の二乗と極板の面積に比例して強くなる。また試料との距離が大きくなるほど引力は指数関数的に弱まる。

本実験では、円柱の上面で励起を行った。そのためにくし型のパターンを持つ電極を用いた。この電極はフレキシブル基板状で作成され、平らなアクリルの土台に接着されている。極板と試料側面の間の距離は 0.5mm 程度になるように調節されている。

励起を行う際は、シンセサイザから出た出力に 40V の DC オフセットを乗せ、 $40V_{p-p}$ の電圧をくし型電極の片方の電極に加えた。

5.3.3 光学系

試料表面の微小な変位を、図 5.3 のようなマイケルソン干渉計で取得した。

レーザー

干渉計の光源として波長 633nm の He-Ne レーザーを用いた。レーザーは 2 モード法 [5] で周波数安定化されている。

マイケルソン干渉計

差動型マイケルソン干渉計について簡単に説明する。図 5.3 に、干渉計の配置を示す。レーザーからやってくる光は Beam Splitter で分割される。これらの光は、参照鏡と試料の鏡面によって反射される。反射光の複素振幅 E_1, E_2 は、

$$E_1 = A_1 \exp[i(2kx_1 - \omega t)] \quad (5.2)$$

$$E_2 = A_2 \exp[i(2kx_2 - \omega t)] \quad (5.3)$$

となる。ここで、 A_i は任意の実定数、 ω は光の各周波数、そして x_i は図に書かれている干渉計の腕の長さである。パラメタ k は波数で、光の波長 λ を用いて

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.4)$$

と書ける。

反射光は Beam Splitter で合成され、この合成された光が Photo Detector(PD) へ入る。PD に入る光の強度を求める。簡単のため、Beam Splitter は光を等しい強度で二分割すると仮定する。PD1 へ入る光の強度 I_1 は

$$I_1 = r_1^2 \frac{A_1^2 + A_2^2}{2} - r_1^2 A_1 A_2 \cos[2k(x_1 - x_2)] \quad (5.5)$$

となる。ここで、 r_1 は、光を PD1 に入れるために置かれた鏡の反射率である。

PD2 へ入る光の強度 I_2 は

$$I_2 = r_2^2 \frac{A_1^2 + A_2^2}{2} + r_2^2 A_1 A_2 \cos[2k(x_1 - x_2)] \quad (5.6)$$

となる。ここで、 r_2 は、光を PD2 に入れるために置かれた鏡の反射率である。干渉計の Visibility、 K は

$$K = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (5.7)$$

で定義される。ここで $I_{\max}, I_{\min}$ は光の強度の最大値と最小値である。Visibility は干渉計の明瞭度を表す指標である。

干渉計の出力は 2 つの PD の出力の差である。 I_1 と I_2 の差をとると

$$I_1 - I_2 = (r_1^2 - r_2^2) \frac{A_1^2 + A_2^2}{2} - (r_1^2 + r_2^2) A_1 A_2 \cos[2k(x_1 - x_2)] \quad (5.8)$$

となる。

差動信号に DC 成分が残るので、offset 調整回路で取り除く。その結果、干渉計の出力電圧 V_{out} は、

$$V_{\text{out}} = A \cos(2kX) \quad (5.9)$$

となる。ここで A は定数、 X は腕の長さの差である。

$$X = x_1 - x_2 \quad (5.10)$$

ここで X の変化に対して最も V_{out} の変化が大きいのは V_{out} が 0 である点である。よって、低周波数で干渉計の出力が 0 になるように参照鏡に制御をかける。干渉計をこの動作点に保つと、 V_{out} は X に比例する。 V_{out} が 0 になるには、 n を整数として

$$2kX = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (5.11)$$

となる時である。この時、干渉計の伝達関数 H_I は

$$H_I = \left. \frac{dV_{\text{out}}}{dX} \right|_{V_{\text{out}}=0} = 2kA \quad (5.12)$$

となる。

参照鏡

参照鏡は干渉計の一つの腕を構成する。参照鏡には piezo-アクチュエータ (PZT) が取り付けられており、PZT を用いて参照鏡の位置をコントロールすることで、干渉計の腕の長さを制御する。

試料の鏡面

試料であるアルミニウム合金の表面を研磨し、レーザーが反射するように鏡面をつくった。円柱形の試料に対して、側面を研磨し、厚さが数 mm 程度の円板に対しては、円形の上面を研磨した。また、Al5056 のみに対して作成したねじれ型振動子の場合、振動子の上側の切り込みを入れた側面を研磨した。反射率は低い。

5.3.4 電気系

電気回路は差動アンプ、オフセット調整器、フィルタ、増幅器からなる。光学系の非対称性により DC 成分が生じるので、オフセット調整器を入れてこれを除去する。また、piezo素子は、高周波数に対して発振してしまうので、高周波をカットするようにローパスフィルターを挿入した。

5.3.5 データ取得系

試料の減衰を見るために、減衰の大きさに比例する干渉計の出力を記録した。試料の励起は Function Generator から正弦波の交流電圧をかけて行ったので、それ

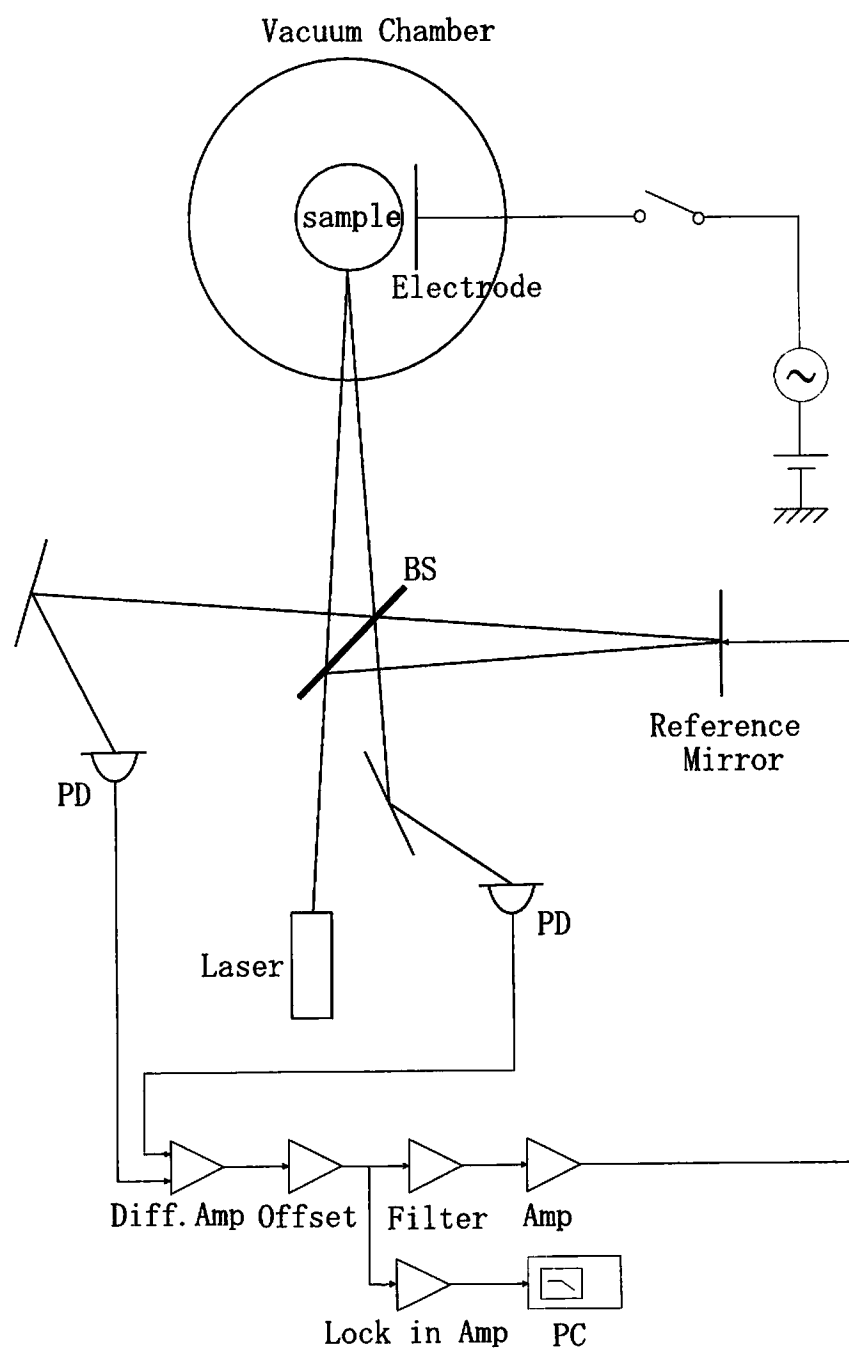


図 5.3: 干渉計の配置

と同じ周波数にロックしたロックインアンプに干渉計の出力を入力し、励起した周波数の成分のみを取り出した。ロックインアンプの出力をアナログデジタルコンバータを通してパソコンに記録した。

5.3.6 真空装置

試料と試料の支持系、及び励起用の静電型電極を真空装置の中に入れて測定した。真空ポンプは油回転ポンプを用いた。真空度は2～13Pa程度である。真空度が13Pa以下であれば、大気による損失の影響は無いことが分かっている。

5.4 モードの特定

試料の共振を見つけてQ値を測定するには、試料の振動モードを解析的または数値的な方法で求め、共振周波数を計算できなければならない。また、モードの形を知ること、そのモードが現在の励起の仕方で励起できるかどうか知ることができる。この節では、試料のモードを求めるために用いた解析的、半解析的な方法と数値的な方法について簡単に説明する。なお、アルミニウム合金は等方であると仮定した。

5.4.1 解析解

円柱状弾性体の解析解

円柱の軸を z 軸とする。 z 方向に有限な円柱状等方性弾性体の場合、ねじれ運動のみに完全な解析解が存在する。円柱の半径を r 、長さを h とする。密度を ρ 、ヤング率を E 、ポアソン比を σ として、ねじれ振動の解析的な共振周波数 f は

$$f = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}} \sqrt{\left(\frac{2r}{h}\alpha\right)^2 + \beta^2} \quad (5.13)$$

で与えられる。ここで、

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots \quad (5.14)$$

で、 β は、 J_2 を2次のベッセル関数として

$$J_2(\beta) = 0 \quad (5.15)$$

を満たす解である。具体的な値は

$$\beta = 0, 5.13562, 8.41724, 11.6198, 14.7960, 17.9598, \dots \quad (5.16)$$

である。 α が π の整数倍の時は z 軸に対して対象、反整数倍の時は z 軸に対して半対称なモードとなる。

図5.1のようなねじれ型振動子の場合、共振周波数は(5.1)のようにはならない。この形状の場合、共振周波数を近似的に解析的に表す式は存在するが、測定数値との誤差が大きいので、実際の実験では後で述べる有限要素法を用いて共振周波数を求めた。

z 軸に対して対称な場合、parityを p で表し、 $p=0$ のモードと呼び、半対称な場合、 $p=1$ のモードと呼ぶ。

薄い円板の解析解

薄い円板の場合、薄い板の近似を用いて、モードの共振周波数を求めることができる。ここでは、円板の軸を z 軸にとり、変位が z 方向のみの面外モードの場合の共振周波数を考える。この共振周波数は補遺Bの(B.23)

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\sigma^2)}} h k^2 \quad (5.17)$$

となる。ここで、 k は(A.21)によって定義され、 z 方向の変位が自由端境界条件(A.17),(A.18)を満たすことを要求して求められる。

5.4.2 半解析解

ねじれ振動以外の円柱状弾性体の振動モードの厳密な解析解は存在しない。半解析的に振動モードを求める方法がHutchinsonにより考案された[23]。以下にその概略を示す。詳しくは[24]を見よ。

変位ベクトルを $\mathbf{u}$ として、等方体での弾性体の運動方程式は

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \text{graddiv} \mathbf{u} \quad (5.18)$$

となる。ここで

$$c_t = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}, \quad c_l = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}} \quad (5.19)$$

とおく。ヘルムホルツの定理を用いると

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_l \quad (5.20)$$

と分解できる。ここで $\text{div} \mathbf{u}_t = 0$, $\text{curl} \mathbf{u}_l = 0$ であり、(5.6)より

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \nabla^2 \mathbf{u}_l = 0 \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \nabla^2 \mathbf{u}_t = 0 \quad (5.22)$$

となる。 $\mathbf{u}_t$ は $\text{div} \mathbf{u}_t \neq 0$ より、圧縮を伴う波、つまり縦波である。また、 $\text{div} \mathbf{u}_t = 0$ より、 $\mathbf{u}_t$ は圧縮をない波、つまり横波である。 c_l, c_t は波の伝播速度である。

この波動方程式を時間と空間を変数分離し、空間部分を円柱座標を使って解く。その解は1つの縦波と2つの横波を表す3つの解の組となる。ここで、これらの解の線形結合を新たに基底としてとりなおし、円柱内の波動をこの基底の線形結合としてとる。円柱の表面には一切、応力がかからないという条件を境界条件として課す。境界条件は6つの方程式で表せ、そのうちの3つの特定の境界条件のみを考慮して基底を定める。残りの3つの境界条件を満たすために、無限にある基底のうち、波数の小さいものだけを考慮して、その基底の係数を決定する。採用する規定の数は NR, NZ で表され、波長が直径の $1/NR$ 以上程度、高さの $1/NZ$ 以上程度のもののみを考慮する。

求まった解の特徴を挙げる。モードの形は order n と parity p で表される。order n は、変位の r 成分 u_r 、あるいは θ 成分 u_θ を $0 < \theta < 2\pi$ に沿って見た場合に変位が0になる回数で節線の数にあたる。なぜなら、どちらの基底も

$$u_r \propto \cos(n\theta), \quad u_\theta \propto \sin(n\theta) \quad (5.23)$$

という θ 依存性を持つからである。また、parity p は、 $z = 0$ の面に対して変位が対称であれば0、反対称であれば1となる。これは、いずれの基底も β を定数として

$$u_r, u_\theta, u_z \propto \sin(\beta z) \text{ or } \cos(\beta z) \quad (5.24)$$

という z 依存性を持つからである。

中心付近の変位の各成分を見た場合、 r 成分は、 α をモードによって決まる離散的な定数として、

$$u_r \propto J_n'(\alpha r) \text{ or } \frac{n}{r} J_n(\alpha r) \quad (5.25)$$

となる。 x が小さいところで、

$$J_n(x) \sim \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (5.26)$$

という近似が成り立つので、 r が小さいところでは、 $n > 0$ の場合

$$u_r \propto \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} \quad (5.27)$$

となる。

θ 成分は

$$u_\theta \propto J_n'(\alpha r) \text{ or } \frac{n}{r} J_n(\alpha r) \quad (5.28)$$

となる。

また、 z 成分は

$$u_z \propto J_n(\alpha r) \text{ or } 0 (\text{ねじれモード}) \quad (5.29)$$

となる。

従って、中心 ($r = 0$) の変位の成分は次のようになる。

$n = 0$ の時

z 成分を持ち、他の成分は 0 になる。ただし、ねじれモードの時は、 z 成分も 0 となる。

$n = 1$ の時

r, θ 成分は有限となり、 z 成分は 0 になる。

$n \geq 2$ の時

r, θ, z 成分全てが 0 になる。

また、 $n > 0$ の全てのモードは縮退していることが知られており、周波数が等しい $\pi/(2n)$ だけ方向が傾いた二つの基底を取ることができる。実際には円柱の微妙な非対称性により、これらの縮退モードは非常に接近した 2 つの周波数として観測されることがある。

5.4.3 数値解

Hutchinson による半解析的な方法では、半径 r に比べて高さ h が低いとき、つまり、円板に近くなると、精度が悪くなる。また、Order n が 8 程度になると、実際には存在しない解が多く出てきてしまうことがある。

そのため、純粋な数値的な方法も併用して共振周波数やモードの形を計算した。ここでは有限要素法を用いた。

有限要素法は、構造物を有限個の小さな要素に分割し、その各要素に仮想仕事の原理 [25] を適用する。そして、その要素間の連続条件を考慮して、全体の振動を表す行列を求めることで問題を解く。要素の頂点を節点といい、荷重はこの節点を介してのみを伝えられる。また応力や歪みは要素内で一定であるという仮定もおく。そして、それらは数値的に解析される。

有限要素法のプログラムはパッケージのひとつである ANSYS を用いた。ANSYS を用いた解析方法は [26] を見よ。有限要素法では要素の切り方によって精度が変わってくる。ここでは、ANSYS とは別の要素の配置や節点の並びを決めるプログラムを用いた。このプログラムは十分な精度があることが確認されている。

第6章 Q値の測定結果

前章に示した測定方法で Al5056、Al1070、Al6061 の Q 値の測定を行った。試料の半径は全て 6cm である。測定は 2 ~ 12Pa 程度の真空中で行った。以下にその結果を示す。Al5056 に対しては、高さ 6cm、2cm、1cm の円柱と厚さ 4mm、3mm、2mm の円板および高さ 6cm の円柱から作ったねじれ型振動子の Q 値の測定結果を示す。Al1070 に対しては、高さ 6cm の円柱と半径 6cm、厚さ 2mm の円板の Q 値の測定結果を示す。Al6061 に対しては、高さ 6cm の円柱と半径 6cm、厚さ 2mm の円板の Q 値の測定結果を示す。

ここでは Q 値の測定結果はグラフで示し、測定数値は付録 C に表にしてまとめた。

測定は複数回行い、各々のモードで測定された最も高い Q 値をグラフにプロットした。試料を支持し直して測定した場合も、Q 値の変化は Order $n \geq 2$ のほとんどのモードで 10% 未満であった。この事は不動点支持法が高次モードの Q 値測定に対して有用であることを示している。 $n = 0, 1$ の低次モードの Q 値は一部を除いて高次モードの Q 値と比べてかなり低く、支持による損失が生じていることがわかる。

なおこの章の Q 値のグラフは、全て測定された共振周波数に対して Q 値をプロットしている。

6.1 Al5056 の測定結果

測定した試料は円柱形で、半径は全て 6cm、高さはそれぞれ 6cm、2cm、1cm の「円柱」¹と 4mm、3mm、2mm の「円板」²の全部で 6 種類である。

6.1.1 円柱の測定結果

半径 6cm、高さ 6cm の試料

¹便宜的にこう呼ぶ。

²同上。

測定された Q 値のグラフを図 6.1 に示す。 $n \geq 2$ の高次モードの Q 値の典型的な値は $1.6 \sim 2.5 \times 10^5$ で、周波数とともに増加する傾向がある。それに対して $n = 0, 1$ の低次モードでは、 Q 値のばらつきが大きく、特定の周波数依存性は見られない。

半径 6cm、高さ 2cm の試料

測定された Q 値のグラフを図 6.2 に示す。 $n = 0, 1$ の低次モードの Q 値は、 $4.9 \times 10^4 \sim 2.3 \times 10^5$ と変動が大きく、特定の周波数依存性も見出せない。一般的に $n = 0, 1$ の低次モードは支持による損失から $n \geq 2$ の高次モードと比べて Q 値は低くなる。しかし、この試料では高次モードと同程度の Q 値が得られるモードも存在する。それ以外の低次モードは、高次モードと比べて Q 値は低い。

$n \geq 2$ の高次モードの Q 値は、 $1.3 \times 10^5 \sim 2.2 \times 10^5$ の範囲内にあり、全体としては周波数に対して単調に増加していく傾向がある。しかし、単調増加から外れ、 Q 値が下がっているモードもいくつか存在する。

半径 6cm、高さ 1cm の試料

測定された Q 値のグラフを図 6.3 に示す。

$n = 0, 1$ の低次モードの Q 値は、 $1.5 \times 10^4 \sim 1.4 \times 10^5$ と変動が大きく、周波数依存性は他の試料と同様に見出せない。

$n \geq 2$ の高次モードの Q 値は、 $1.1 \times 10^5 \sim 2.2 \times 10^5$ の範囲内にある。その中で $p = 1$ のモードの Q 値は、 $1.1 \times 10^5 \sim 1.4 \times 10^5$ の範囲内にあり、全体としては周波数と共に Q 値が増加していく傾向があるが、その変動はそれほど大きくない。それに対して $p = 0$ のモードの Q 値は $1.4 \sim 2.2 \times 10^5$ と $p = 1$ のモードよりも高く、だいたい周波数とともに増加していく傾向が見られる。 $p = 0$ のモードは面内モードで、 $p = 1$ のモードは面外モードであり、モードの振動の仕方の違いが Q 値の値の大きさとしてあらわれている。

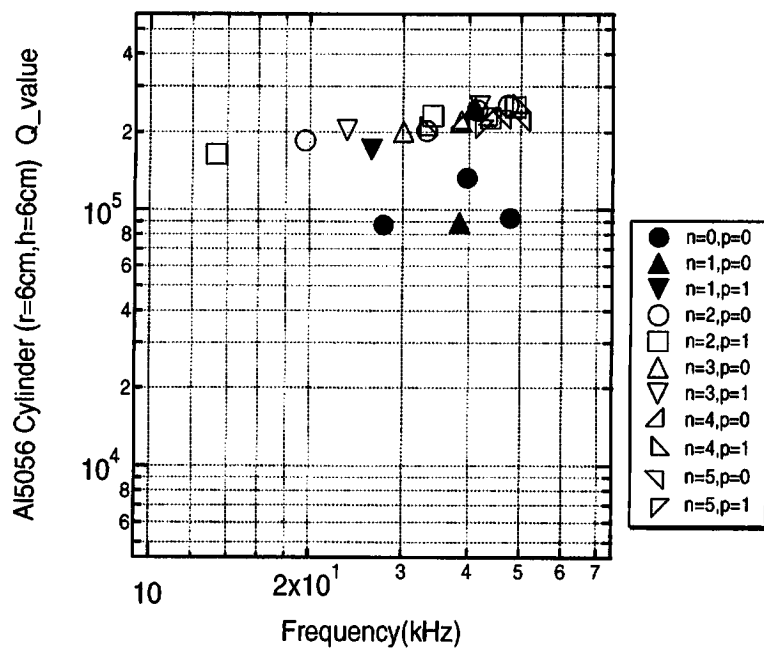


図 6.1: Al5056 半径 6cm、高さ 6cm の試料の Q 値

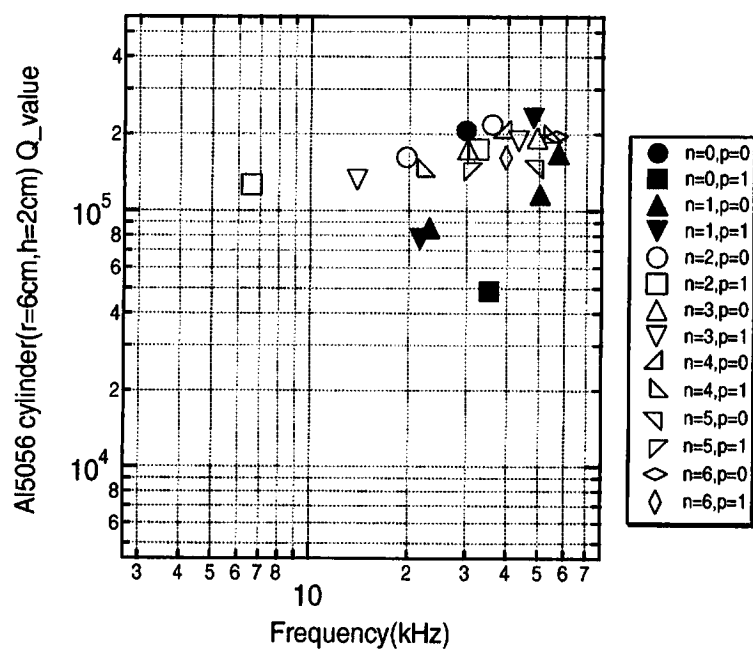


図 6.2: Al5056 半径 6cm、高さ 2cm の試料の Q 値

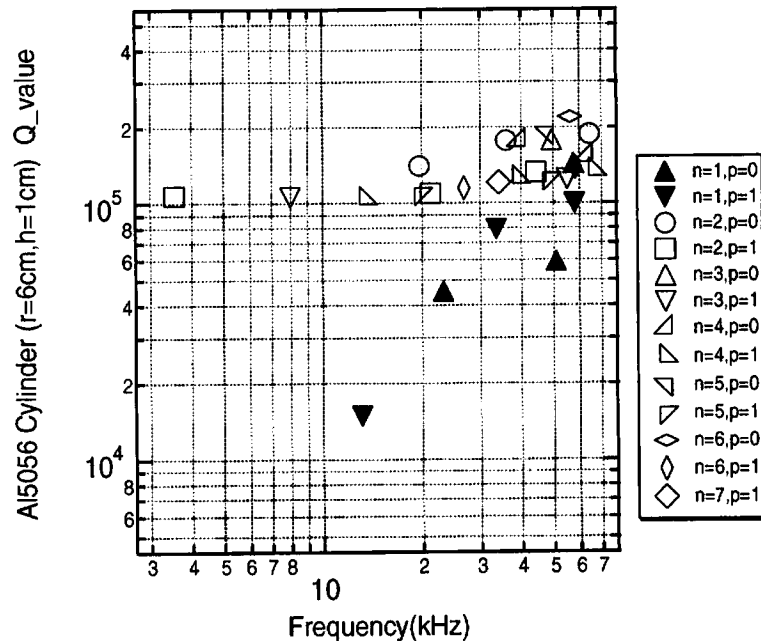


図 6.3: Al5056 半径 6cm、高さ 1cm の試料の Q 値

6.1.2 円板の測定結果

半径 6cm、厚さ 4mm の試料

測定されて Q 値のグラフを図 6.4 に示す。 $n \geq 2$ の高次モードのみグラフにした。Q 値は $6.4 \times 10^4 \sim 1.1 \times 10^5$ の範囲で変化した。 $n = 2$ のモードの中で半径方向の節線の数 m が 1 のモード ($n=2$ のモードの中で共振周波数が低いほうから 2 番目のモード) の Q 値が周波数がその近くにあるモードの Q 値に比べてやや低い値となった。それ以外は全体として周波数に対して緩やかに Q 値が増加していくのがわかる。

半径 6cm、厚さ 3mm の試料

測定されて Q 値のグラフを図 6.5 に示す。 $n \geq 2$ の高次モードのみグラフにした。Q 値は $4.1 \sim 8.9 \times 10^4$ の範囲で変化した。厚さ 4mm の試料で見られた $n = 2$ のモードのなかで半径方向の節線の数 m が 1 のモード ($n=2$ のモードの中で周波数が低いほうから 2 番目のモード) の Q 値が、その近くに周波数があるモードの Q 値に比べて低いという傾向が、この試料ではよりはっきりと見える。また、この傾向は $n = 3, m = 1$ のモード、 $n = 4, m = 1$ のモード、 $n = 2, m = 2$ のモードにも現れている。全体として、各 n に対して、 $m = 0$ のモードは $m \geq 1$ のモードに

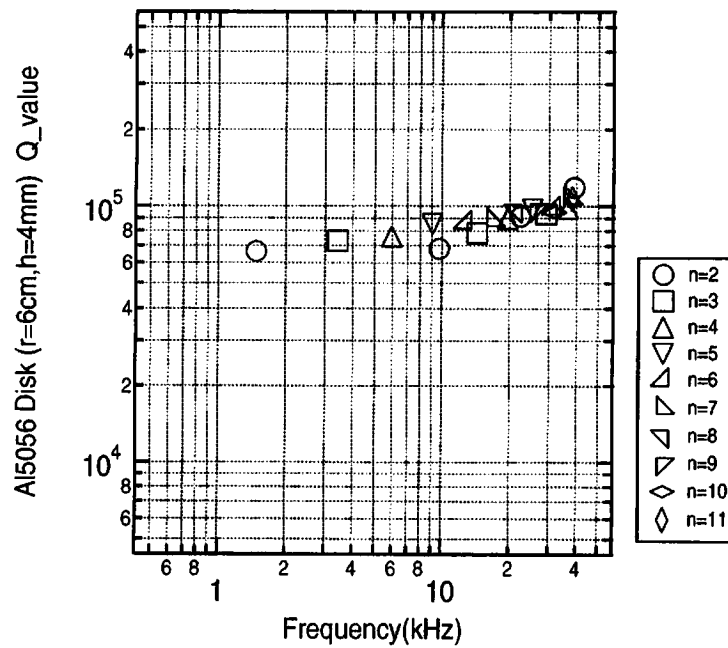


図 6.4: Al5056 半径 6cm、高さ 4mm の試料の Q 値

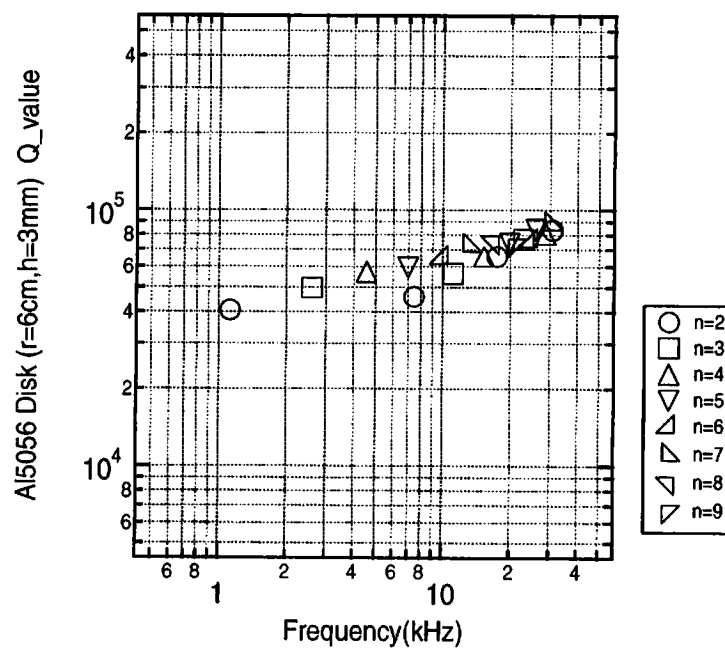


図 6.5: Al5056 半径 6cm、高さ 3mm の試料の Q 値

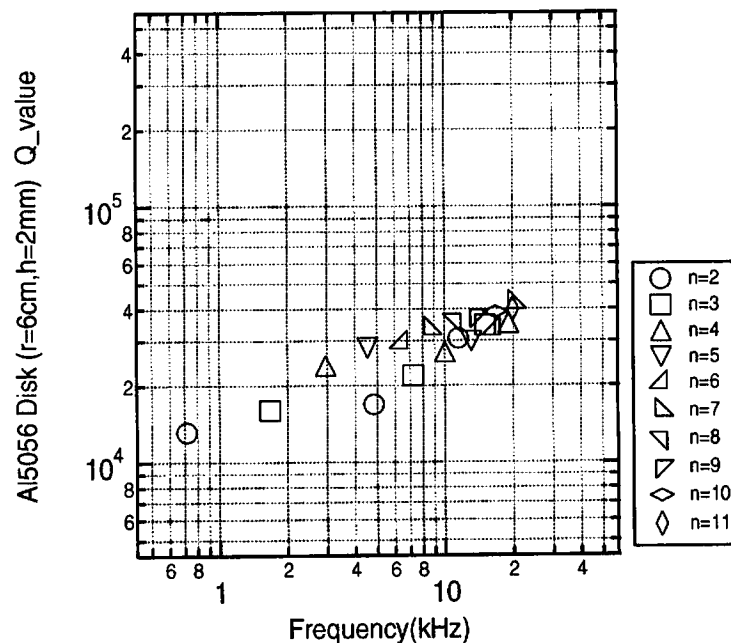


図 6.6: Al5056 半径 6cm、高さ 2mm の試料の Q 値

比べて Q 値が高く、Q 値の値が 2 系列に分裂しているのがグラフからわかる。この分裂の傾向は $n \geq 5$ のモードでははっきりしない。

また、大きな傾向としては、周波数とともに Q 値が上昇していくのがわかる。

半径 6cm、厚さ 2mm の試料

測定されて Q 値のグラフを図 6.5 に示す。 $n \geq 2$ の高次モードのみグラフにした。Q 値は $1.3 \sim 3.3 \times 10^4$ の範囲で変化した。

各オーダー n に対して、半径方向の節線の数 m が 1 のモードは Q 値が高く、 $m \geq 1$ のモードは Q 値が低いのが図 6.5 よりわかる。この $m = 0$ のモードが作る系列と $m \geq 1$ のモードが作る系列との間での Q 値の分裂が厚さ 3mm の試料よりはっきりとわかる。また厚さ 4mm, 3mm の試料と同様に、大きな傾向としては、周波数とともに Q 値が上昇していくのがわかる。

6.1.3 ねじれ型振動子の測定結果

ねじれ型振動子の芯の太さを 4.0cm、3.5cm、3.0cm、2.5cm、2.0cm、1.0cm にして、それぞれのねじれモードの Q 値を測定した結果を図 6.7 に示す。芯の太さ

が 4.0cm, 3.5cm, 3.0cm, 2.5cm までは Q 値の最高値は周波数が低くなると単調に増加していく。それに対して、芯の太さが 2.0cm, 1.0cm のモード Q の値はほとんど増加せず、周波数に対して一定のように見える。

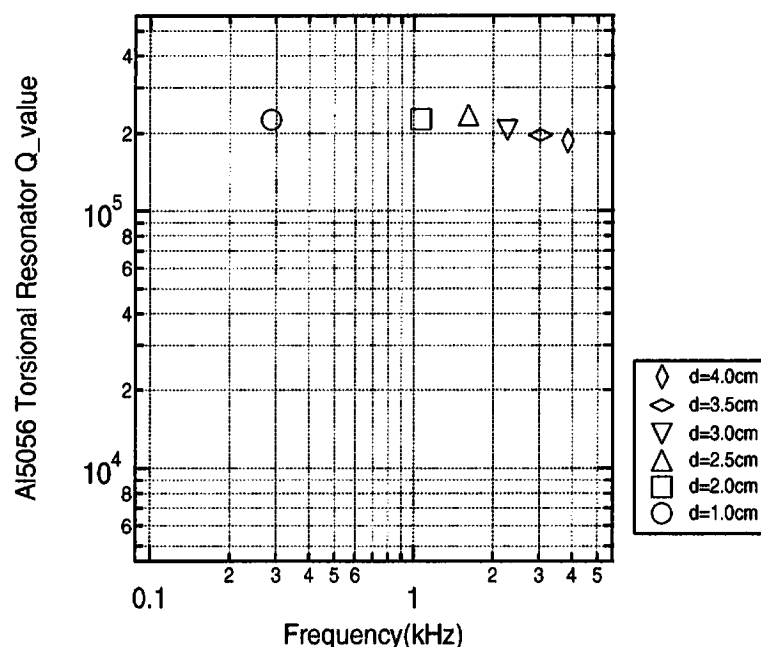


図 6.7: Al5056 のねじれ型振動子の Q 値

6.2 Al1070 の測定結果

測定した試料は半径 6cm、高さ 6cm の円柱と半径 6cm、厚さ 2mm の円板である。

6.2.1 円柱の測定結果

半径 6cm、高さ 6cm の試料

Q 値のグラフを図 6.9 に示す。 $n \geq 2$ の高次モードの Q 値は $1.0 \sim 1.6 \times 10^5$ の範囲にあった。周波数とともに Q 値が高くなっていく傾向があるが、それに従わないものもある。なお、この試料ではモードが特定できない場合が多かったので測定された Q 値が少ない。モードが特定されていない共振の Q 値も参考までに unknown mode として示した。その中には $n = 0, 1$ の低次モードも含まれている。

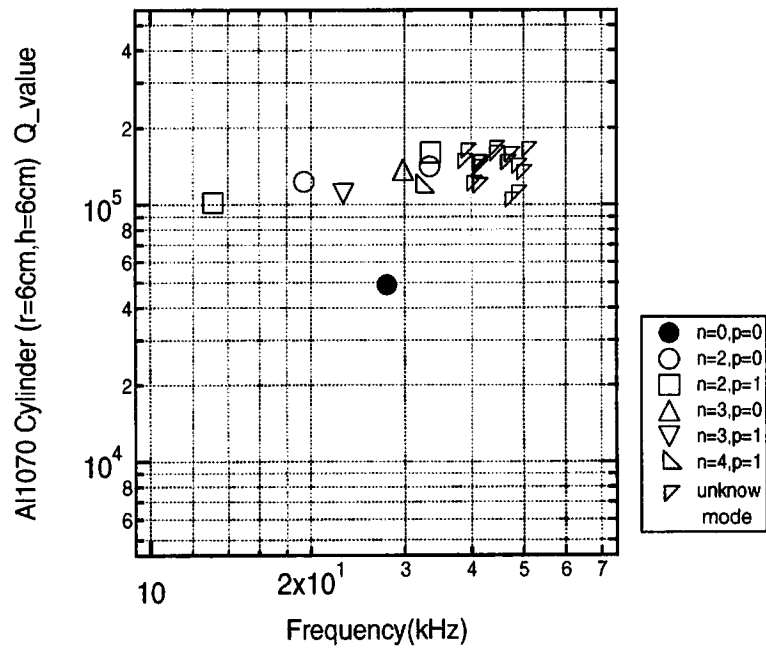


図 6.8: Al1070 半径 6cm、高さ 6cm の試料の Q 値

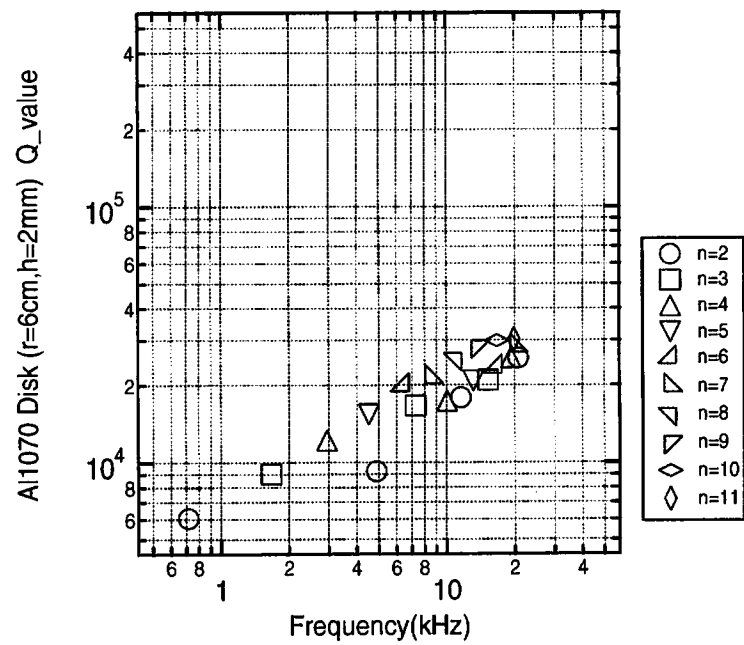


図 6.9: Al1070 半径 6cm、高さ 2mm の試料の Q 値

6.2.2 円板の測定結果

半径 6cm、厚さ 2mm の試料

測定されて Q 値のグラフを図 6.10 に示す。 $n \geq 2$ の高次モードのみグラフにした。Q 値は $6.1 \times 10^3 \sim 3.0 \times 10^4$ の範囲で変化した。

各オーダー n の値に対して、半径方向の節線の数 m が 0 のモードの Q 値が高く、 $m \geq 1$ のモードは Q 値が低くなり、2 系列に分裂するのが Al5056 の厚さ 2mm の試料以上にはっきりと見える。周波数とともに Q 値が上昇していくのも Al5056 の厚さ 2mm の試料と同様である。

6.3 Al6061 の測定結果

測定した試料は半径 6cm、高さ 6cm の円柱と、半径 6cm、厚さ 2mm の円板である。

6.3.1 円柱の測定結果

半径 6cm、高さ 6cm の試料

測定された Q 値のグラフを図 6.12 に示す。 $n \geq 2$ の高次モードの Q 値は $2.2 \sim 3.6 \times 10^5$ の範囲にあった。Q 値を測定できたモードが少なく、周波数依存性など良くわからないが、Q 値が周波数に対して一定ではない。なお、この試料ではモードが特定できない場合が多かったので測定された Q 値が少ない。モードが特定されていない共振の Q 値も参考までに unknown mode として示した。その中には $n = 0, 1$ の低次モードも含まれている。

6.3.2 円板の測定結果

半径 6cm、厚さ 2mm の試料

測定されて Q 値のグラフを図 6.13 に示す。 $n \geq 2$ の高次モードのみグラフにした。Q 値は $8.6 \times 10^3 \sim 7.7 \times 10^4$ の範囲で変化した。

各オーダー n の値に対して、半径方向の節線の数 m が 0 のモードの方が Q 値が高く、Q 値の低い $m \geq 1$ のモードとの間で 2 系列に分裂するのが、Al6061 の厚さ 2mm の試料と同じようにはっきりと見える。周波数とともに Q 値が上昇していくのも Al5056、Al6061 の厚さ 2mm の試料と同様である。

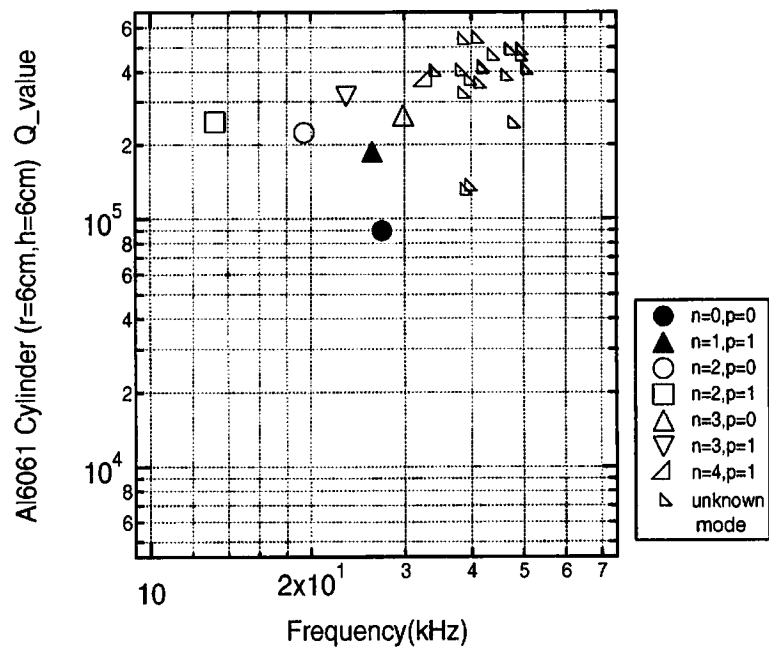


図 6.10: Al6061 半径 6cm、高さ 6cm の試料の Q 値

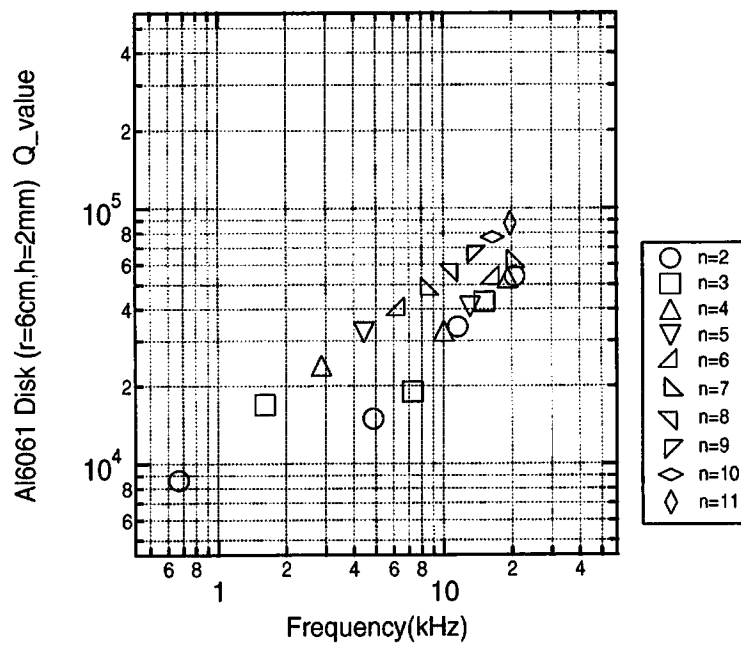


図 6.11: Al6061 半径 6cm、厚さ 2mm の試料の Q 値

6.4 測定した試料の損失の振る舞い

測定した Q 値の逆数である損失を、Al5056、Al1070、Al6061 それぞれに対してまとめてプロットした。それを以下に示す。なお $n \geq 2$ の高次モードにのみをプロットした。

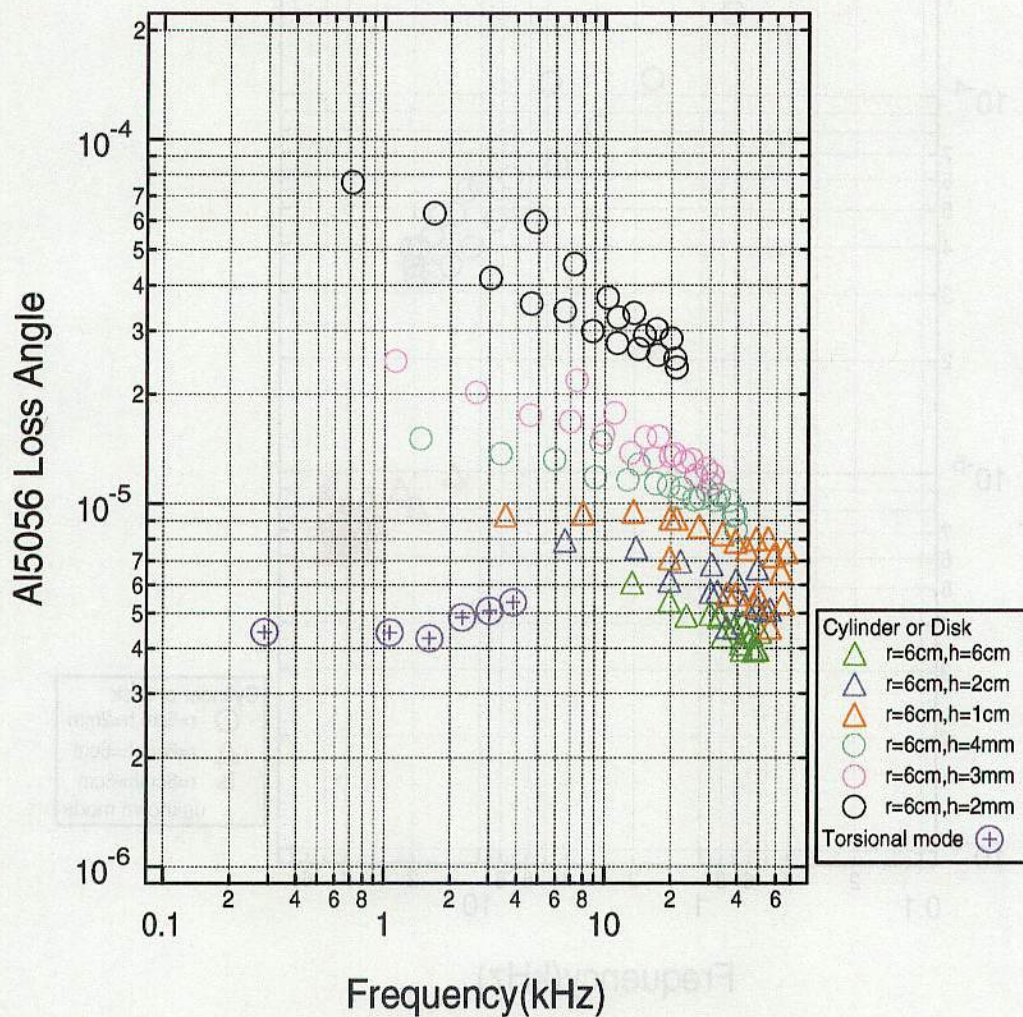
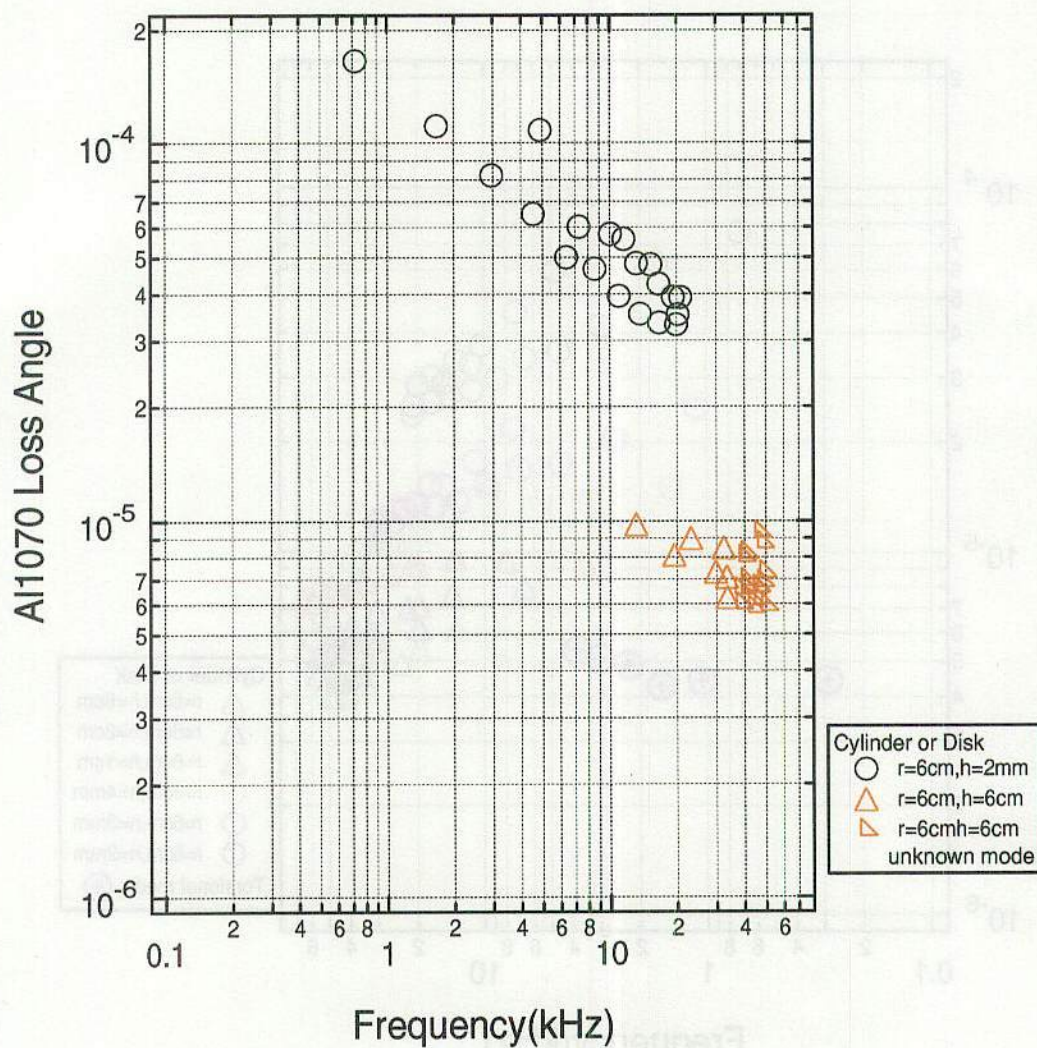


図 6.12: Al5056 の損失の測定値



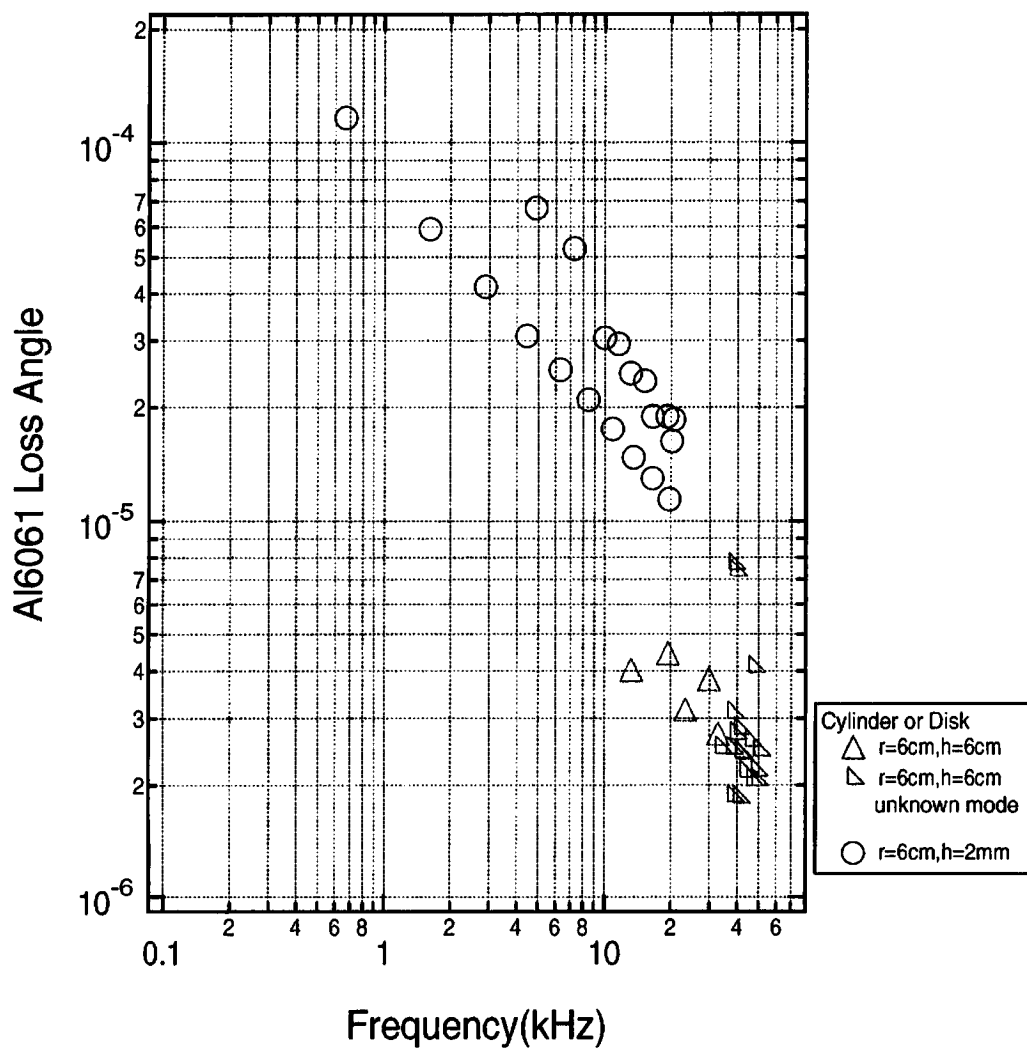


図 6.14: Al6061 の損失の測定値

第7章 測定結果の考察

本章では、前章の測定結果の考察を行う。得られた Q 値の値の逆数である損失の値を周波数に対してプロットして、その損失の原因が何なのかを考察する。

考察の進め方を以下に示す。

アルミニウム合金 Al5056、Al1070、Al6061 の損失の測定値において、外的な要因による損失 (支持による損失および真空中の残留ガスによる損失) の寄与を無視することができ、得られた損失の測定値が試料固有の損失 (固体内部および表面の損失) であることを確認する。

次に、固体内部で起きる損失の理論と測定結果を比較する。

はじめに、Al5056、Al1070、Al6061 の円柱の損失には微結晶間の熱流による熱弾性効果の寄与があるとして、損失の測定値と微結晶間の熱弾性効果の理論値を比較し、平均的な grain の大きさを Al5056、Al1070、Al6061 それぞれに対して見積る。またそれぞれの材質をエッチングした表面の顕微鏡写真から grain の大きさの範囲を調べ、見積もりが妥当かどうか考察する。次に、薄い円板では巨視的な熱流による熱弾性効果が大きくなることから、Al5056、Al1070、Al6061 の円板の損失の測定値と巨視的な熱弾性効果を比較し、定性的な議論をする。そして、円板の測定値を熱弾性効果 (微結晶間の熱弾性効果と巨視的な熱弾性効果が両方生じるとして、2つの和を取った値) と比較する。その結果、巨視的および微結晶間の和を取ったことで、熱弾性効果の理論値が、Al5056、Al1070、Al6061 の円板の損失により近い値になることを見る。

その次に、structure damping による損失の寄与について考察する。Al5056、Al1070、Al6061 の structure damping による bulk の損失を考察する。structure damping による bulk の損失の上限値と熱弾性効果の和をとって、測定値と比較する。そして、Al5056、Al1070、Al6061 の損失は巨視的な熱弾性効果と微結晶間の熱弾性効果、および structure damping による bulk の損失の3つを考えれば、大部分が説明できることを見る。

最後に、それでも残る理論値と測定値の不一致の原因について考察する。これらの考察を以下に示す。

7.1 外的な要因による損失

外的な要因による損失が、損失の測定値に影響するかどうか考える。図6.8、6.11、6.14を見ると、 $n \geq 2$ の高次モードの損失の測定値は全て 10^{-6} より大きい。不動点支持法を用いると、支持による損失は $n \geq 2$ の高次モードにおいて 10^{-8} 以下であることが分かっている [26]。よって高次モードの測定値を考えると、支持による損失は無視できる。次に、残留ガスによる損失が影響するか考える。Q 値を測定した時の真空度は最も低い場合で 13Pa 程度であった。4.4.2 節の議論から、この程度の真空度を達成すれば、室温のアルミニウム合金の損失では、残留ガスによる影響は無視できることがわかる。よって、今回の損失の測定値は試料固有の損失 (固体内部および表面) の損失であり、外的な要因による損失は無視できることがわかった。

7.2 熱弾性効果との比較

Al5056、Al1070、Al6061 の損失の測定結果が試料固有の損失 (固体内部および表面の損失) であることがわかったので、この節では、固体内部で生じる損失として根源的な熱弾性効果の理論値と測定結果を比較する。測定は室温で行ったので、理論値を計算するとき $T = 293\text{K}$ とした。

7.2.1 微結晶間の熱弾性効果

円柱と巨視的な熱弾性効果

微結晶間の熱弾性効果は試料の形状によらずに生じる。それに対して、巨視的な熱弾性効果は試料の形状に依存し、一般に試料が薄いほうが大きくなる。よって、測定した試料の形状の中で巨視的な熱弾性効果の寄与が小さいのは高さ 6cm、2cm、1cm の円柱¹である。円柱の中で巨視的な熱弾性効果が最も大きい、高さ 1cm の円柱に対して、巨視的な熱弾性区効果の大まかな値を決める ϕ_p を計算した²。そして高さ 6cm、2cm、1cm の円柱の損失の測定値と比較した。そのグラフを図 7.1 に示す。図中で Macro Thermoelastic とは巨視的な熱弾性効果の事である。高さ 1cm の試料における ϕ_p は $f=4\text{kHz}$ のあたりで 1cm の試料の測定値の約 1/5 である。 ϕ_p にかかる形状因子 A_{nm} は³、 $n \geq 2$ の高次モードではだいたい 0.1 ~ 1 の値をとるので、高さ 1cm の試料の損失では、巨視的な熱弾性効果の寄与は支配的ではないことがわかる。高さ 2cm、6cm の試料では、巨視的な熱弾性効果の損失は

¹第 6 章における便宜的な呼び方をこの章でも用いる。

²半径に比べて高さが無視できない円柱形の場合、巨視的な熱弾性効果は簡単には計算できない。ここでは高さ 1cm の円柱の巨視的な熱弾性効果を薄板近似が成り立つと仮定して計算した。

³(4.27) 式を参照のこと。

高さ 1cm の試料に比べて小さい。よって、高さ 2cm、1cm の円柱の損失においても巨視的な熱弾性効果の寄与は支配的ではない。Al1070、Al6061 の半径 6cm、高さ 6cm の円柱の損失についても巨視的な熱弾性効果の寄与が支配的でないことが同じようにわかる。

Al5056 の円柱の損失と微結晶間の熱弾性効果の比較

よってこれらの円柱の損失に熱弾性効果が寄与するなら、それは微結晶間の熱流による熱弾性効果である。微結晶間の熱弾性効果はねじれ振動の場合にも生じる。そこで Al5056 の場合には、高さ 6cm、2cm、1cm の円柱とねじれ型振動子の損失の測定値と、微結晶間の熱弾性効果と比較する。Al1070、Al6061 の場合には、高さ 6cm の円柱の損失の測定値と微結晶間の熱弾性効果と比較する。(4.33)、(4.34) および、非等方性を表す R としてアルミニウムの値 2.4×10^{-3} を用いる。適当な grain 半径の大きさを仮定してプロットすると、図 7.2~7.4 のようになる。ここで、Micro Thermoelastic とは微結晶間の熱弾性効果の事を指す。図 7.2 のねじれモードの損失は、周波数が低いほうから順に、芯の太さが 1.0cm、2.0cm、2.5cm、3.0cm、3.5cm、4.0cm のねじれ型振動子のねじれモードの損失である。

図 7.2 で、ねじれモードの損失のうち周波数が高い 4 つのモードの損失は、周波数が大きくなるほど損失が大きくなる。逆に高さ 6cm の損失は周波数が大きくなると、損失が小さくなる傾向を示す。微結晶間の熱弾性効果は図 7.2 のような周波数依存性を持つ。ここで、ねじれモードの損失と高さ 6cm の円柱の損失が微結晶間の熱弾性効果のピークをだいたい表していると仮定する。すると、図 7.2 より平均的な grain 半径は 0.15mm 程度と見積られる。この見積もりが正しいか確かめるため、Al5056 の高さ 1cm、2cm、6cm の円柱と同じロッドから切り出した Al5056 の厚さ 3mm の円板試料の、 Q 値を測定した後に、その研磨した表面をエッチングして、典型的な grain の大きさを顕微鏡で観察した。その写真を図 7.5 に示す。図 7.5 で白く見えるのが grain の塊である。下に付いているスケールは試料の表面に置き、顕微鏡のフォーカスがずれるため二枚の写真をとって張り合わせたもので、1 目盛りが 0.1mm である。

図 7.5 の写真の範囲では、grain の大きさは 0.1 ~ 0.2mm 程度である。よって、上の grain の大きさの見積りは妥当である。このことから、高さ 1cm、2cm、6cm の試料の損失には、微結晶間の熱弾性効果が寄与している可能性がある。

Al1070、Al6061 の円柱の損失と微結晶間の熱弾性効果の比較

Al5056 の円柱に微結晶間の熱弾性効果が寄与しているとすれば、Al1070、Al6061 の円柱でも微結晶間の熱弾性効果が寄与している可能性がある。しかし、Al1070、Al6061 では高さ 6cm の試料のみ測定したので、微結晶間の熱弾性効果が寄与しているとしても、そのピークの位置がどこかわからない。

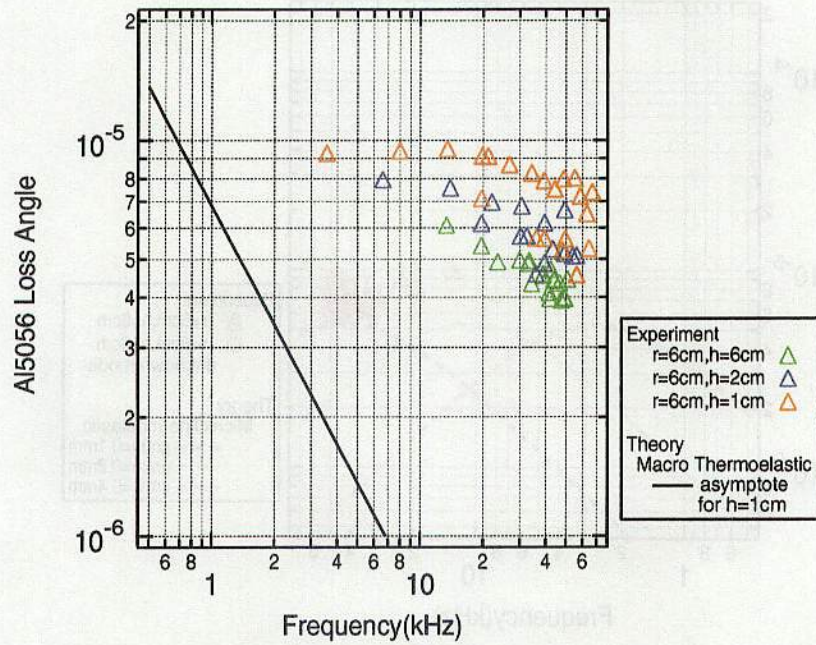


図 7.1: Al5056 の高さ 1cm,2cm,6cm の試料の損失と巨視的な熱弾性効果の比較

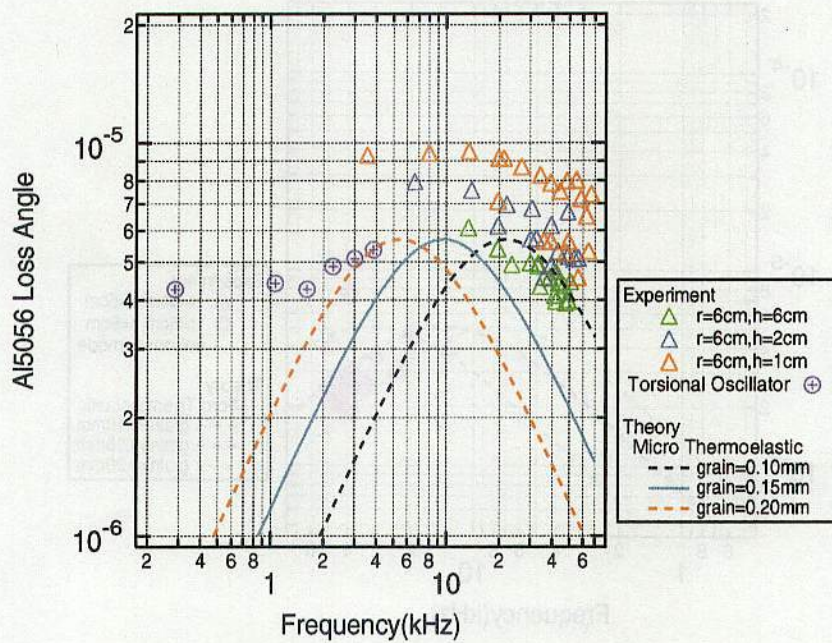


図 7.2: Al5056 の高さ 1cm,2cm,6cm の試料の損失と微結晶間の熱弾性効果の比較

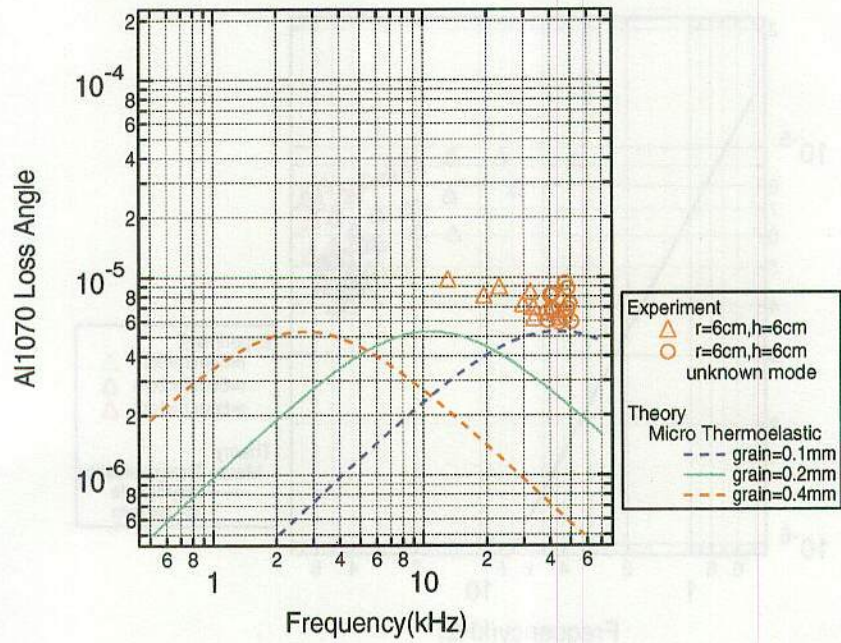


図 7.3: Al1070 の高さ 6cm の試料の損失と微結晶間の熱弾性効果の比較

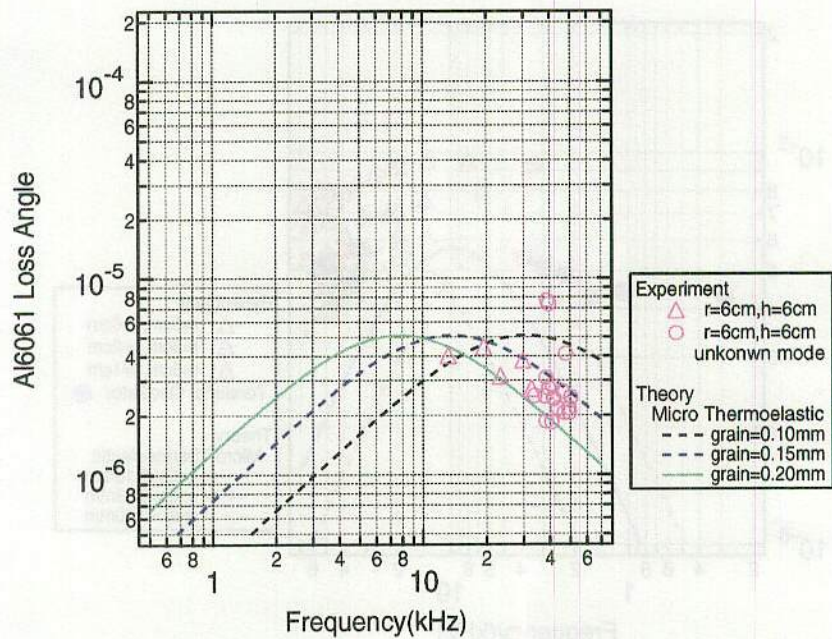


図 7.4: A6061 の高さ 6cm の試料の損失と微結晶間の熱弾性効果の比較

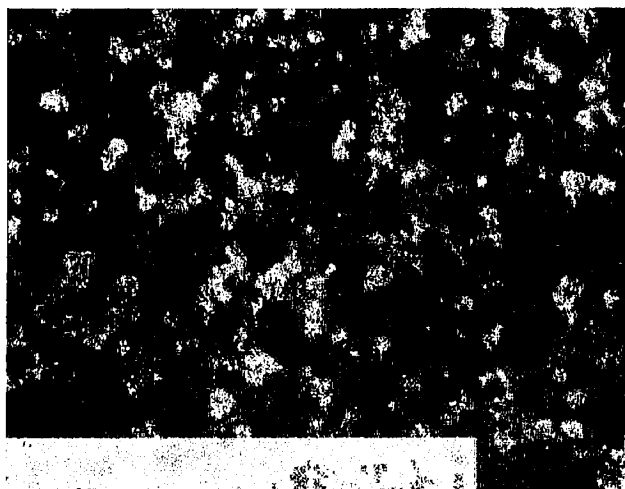


図 7.5: Al5056 のエッチングした表面の顕微鏡観察 スケールの1目盛りは0.1mm

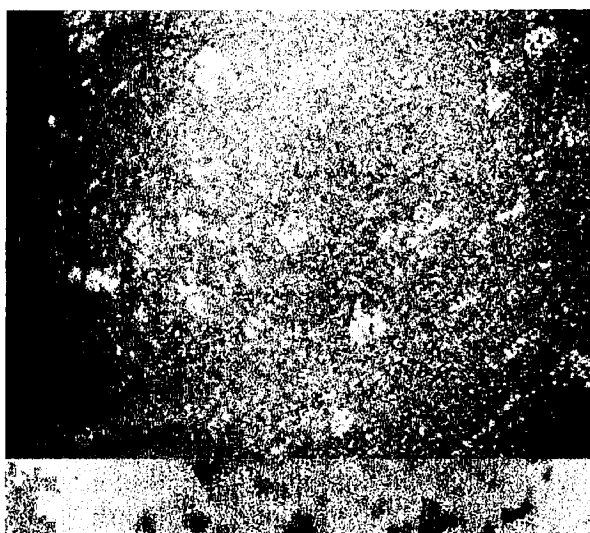


図 7.6: Al070 のエッチングした表面の顕微鏡写真 スケールは1目盛り0.1mm

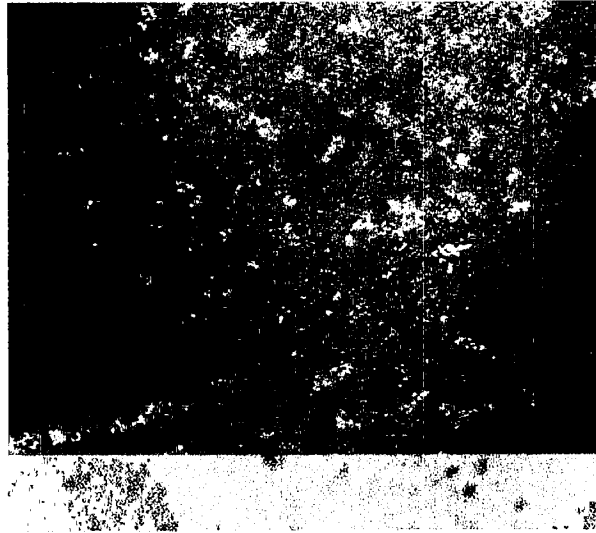


図 7.7: A6061 のエッチングした表面の顕微鏡写真 スケールは1目盛り 0.1mm

そこで、Al1070、Al6061 それぞれに対して測定に用いた試料と同じロッドから切り出した試料の表面を研磨し、Al5056 と同様にエッチングして顕微鏡で観察した。エッチングが上手くいかず grain があまり鮮明でないが、その写真を図 7.6、7.7 に示す。スケールは Al5056 の時と同じやり方で貼り付けた。

写真から grain の大きさは Al1070 で 0.1 ~ 0.4mm 程度、Al6061 で 0.1 ~ 0.2mm と考えられえる。しかし、grain が Al5056 ほどはっきりと見えていないので正確なことは言えない。

Al1070、Al6061 の高さ 6cm の損失の測定値は周波数依存性をもつ。これをもとに、それぞれの平均的な grain 半径を見積ると図 7.3 より、Al1070 は 0.2mm 程度、図 7.4 より Al60621 は 0.2mm 程度となる。これらの平均的な grain 半径の仮定は表面の写真から見積られる grain 半径の大きさの範囲に入っている。Al5056 ほどの確実に言える事ではないが、Al1070、Al6061 の高さ 6cm の円柱の損失にも微結晶間の熱弾性効果が寄与している可能性がある。

7.2.2 巨視的な熱弾性効果

測定した試料のうち、Al5056 の厚さ 4mm、3mm、2mm の円板及び、Al1070、Al6061 の厚さ 2mm の円板の損失には巨視的な熱弾性効果が寄与している可能性がある。その理由は、図 4.3 の巨視的な熱弾性効果の理論値と図 6.8、6.11、6.14 の円板の損失の傾向が似ているからである。この事を詳しく見るために上に挙げた 5 つの円板の損失の測定値と円板の横振動における巨視的な熱弾性効果の計算値を比較した。その結果を図 7.8~7.12 に示す。なお、熱弾性効果を計算するとき

は、円板の共振周波数の解析解を用いて計算し、プロットは共振周波数の測定値に合わせてある。グラフ中の asymptote とは (4.26) の ϕ_p のことである。

グラフより、全ての損失の測定値は巨視的な熱弾性効果の理論値よりも大きい。しかし、定性的には以下の点で一致している。

円板の厚さ h に対する依存性 円板の厚さを h とする。巨視的な熱弾性効果は共振周波数が高周波側で断熱近似が成り立つ場合、 h が薄いほど損失は大きくなる。Al5056 の厚さ 4mm、3mm、2mm の円板及び Al1070、Al6061 の半径 6cm、厚さ 2mm の円板では、共振周波数は全て巨視的な熱弾性効果が最大となる周波数に比べて十分に大きい。図 7.8、7.9、7.10 は同じ Al5056 の材質で、 h が異なる試料の損失の測定値と理論値を示している。測定値も理論値と同様に h が薄くなるほど損失の値が大きくなるので、 h 依存性は理論と実験で定性的に一致している。

モード依存性 巨視的な熱弾性効果は形状因子 A_{nm} を通してモードの形に依存する。各オーダー n に対して、半径方向の節線の数 m が 0 のモードは A_{nm} の値が小さく、 $m \geq 1$ のモードは A_{nm} の値が大きい。この A_{nm} の値の差によって、巨視的な熱弾性効果の理論値は 2 系列に分裂する。それに対して、測定値も 2 系列に分裂しているのが図 7.8~7.12 からわかる。ただし、この分裂が Al5056、Al1070、Al6061 の厚さが 2mm の試料で最も明瞭に現れ、Al5056 の厚さ 3mm、4mm の試料のように、より厚くなるとはっきりしなくなる。

周波数依存性 巨視的な熱弾性効果の理論値は、共振周波数が高周波側にあつて、断熱近似が成り立つ場合、上に述べたそれぞれの系列の中では、周波数が高いモードほど損失の値が小さくなる。図 7.8~7.12 から分かるように、損失の測定値も各系列で周波数が高いモードほど小さくなるので、周波数依存性は理論値と測定値で定性的に一致している。しかし、Al5056、Al1070 では周波数に対する損失の傾きは理論値と測定値で異なる。図 7.8~7.11 を見るとわかるように、測定値の周波数に対する傾きは、理論値に比べて小さく、高周波側ほど不一致が目立つ。また、Al5056 では、厚さが 2mm の円板の方が 3mm、4mm の円板に比べて低周波側で傾きが大きく、理論値に近いものになっている。Al6061 の厚さ 2mm の試料では、Al5056、Al6061 の厚さ 2mm の試料に比べて、高周波側で理論と実験の傾きが良く一致している。

物理定数依存性 周波数が高周波側で断熱近似が成り立つ場合、巨視的な熱弾性効果のだいたいの値を決める ϕ_p は、同じ形状の試料では、周波数が同一の場合、熱拡散係数 D に比例する。熱拡散係数が大きいほうから順にアルミニウム合金の材質を並べると Al1070、Al6061、Al5056 の順となる。よって、図 7.13 のように、熱弾性効果の理論値は、形状が半径 6cm、厚さ 2mm の円板の試料では、大きいほうから順に Al1070、Al6061、Al5056 の順となる。測定値の方はどうなっているかを見る。Al1070 と Al6061 は理論から予想される大小関係を測定値も満たし、Al1070 の方が Al6061 より損失が大きい。Al1070 と Al5056 の大小関係も理論と実験で一致している。ところが Al5056 と Al6061 の大小関係は理論と測定で一致せず、 $n = 2, m = 0$ 、 $n = 2, m = 1$ 、 $n = 3, m = 1$ のモード以外では大小関係が理論

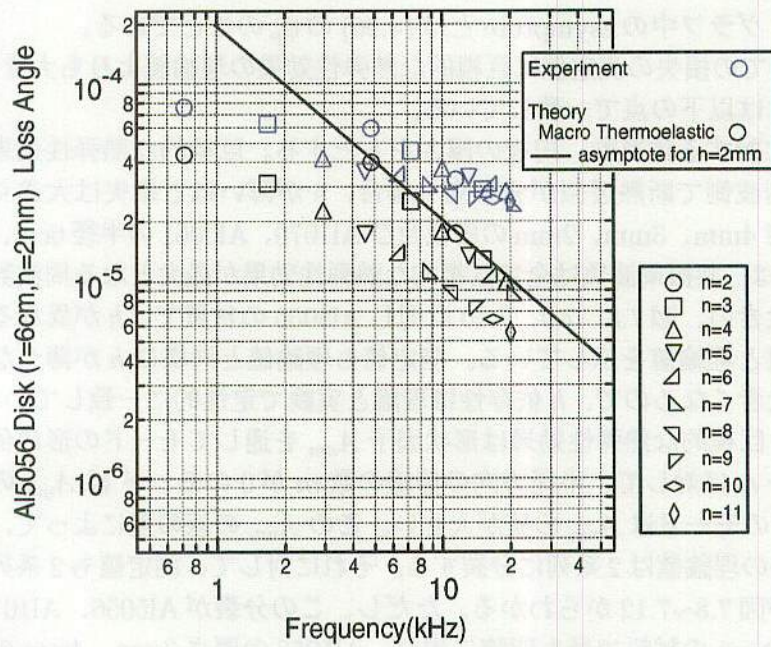


図 7.8: 半径 6cm、高さ 2mm の Al5056 の円板の損失と巨視的な熱弾性効果の比較

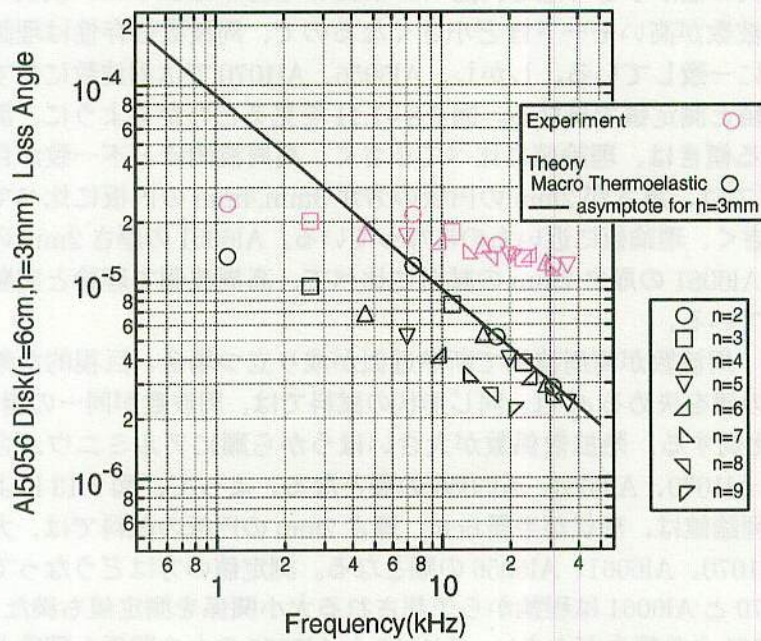


図 7.9: 半径 6cm、高さ 3mm の Al5056 の円板の損失と巨視的な熱弾性効果の比較

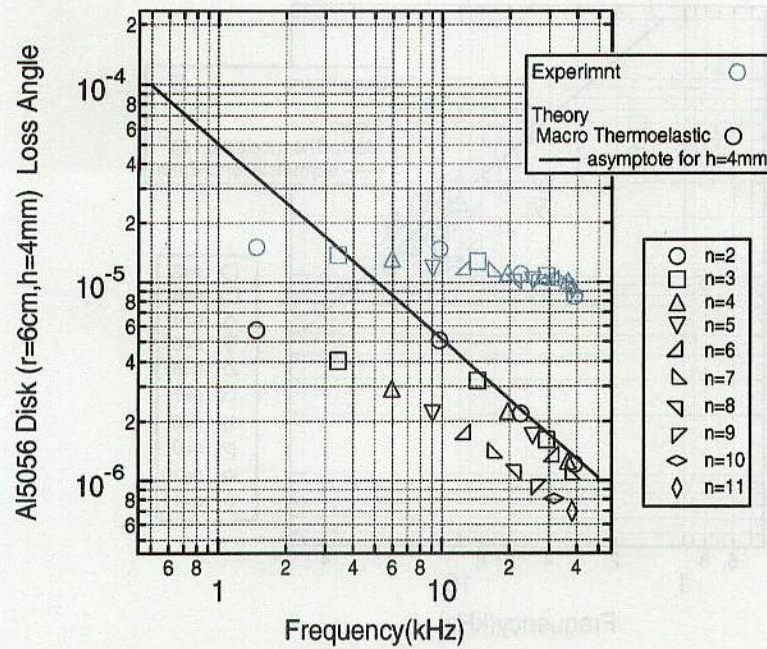


図 7.10: 半径 6cm、高さ 4mm の Al5056 の円板の損失と巨視的な熱弾性効果の比較

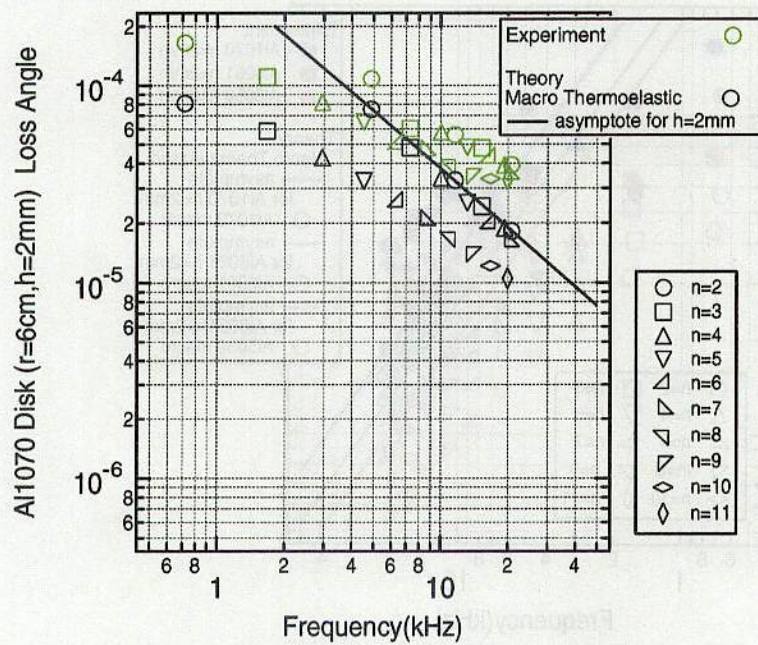


図 7.11: 半径 6cm、高さ 2mm の Al1070 の円板の損失と巨視的な熱弾性効果の比較

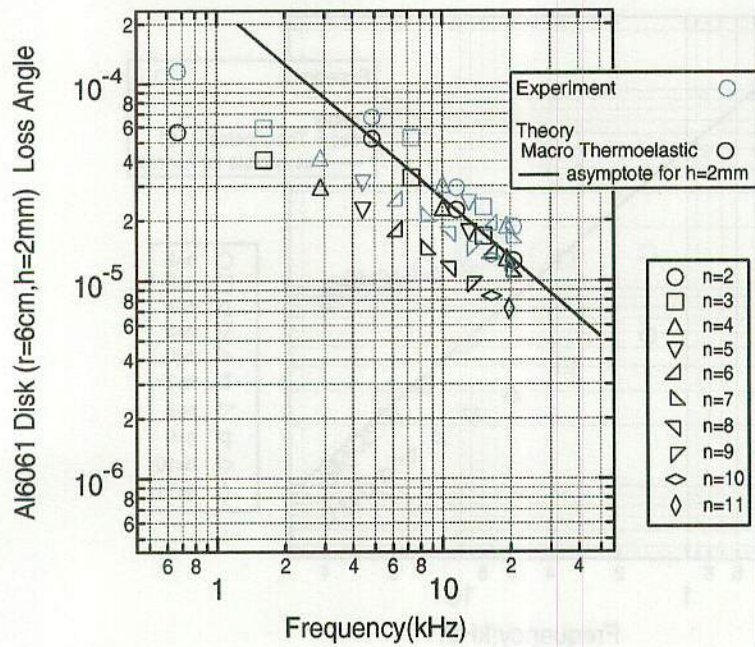


図 7.12: 半径 6cm、高さ 2mm の Al6061 の円板の損失と巨視的な熱弾性効果の比較

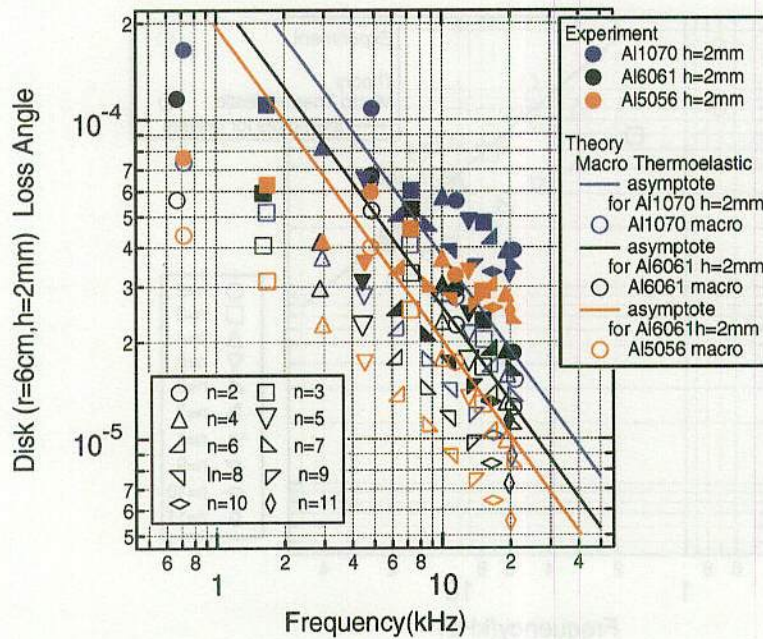


図 7.13: 半径 6cm、高さ 2mm の Al5056、Al1070、Al6061 の比較

と逆になり、Al6061の方がAl5056より損失が小さくなる。その原因はAl6061が高周波側で理論値と測定値の傾きが大体等しいのに対して、Al5056では高周波側で理論から予想されるほど、測定値が小さくならないからである。その理由は後で考察するが、Al5056の場合、微結晶間の熱弾性効果の効果も大きいからであると考えられる。

これら4点の定性的な一致から、Al5056、Al1070、Al6061の円板の測定値は巨視的な熱弾性効果が寄与していると結論される。

7.2.3 巨視的な熱弾性効果と微結晶間の熱弾性効果の和

Al5056の円板について考える。

Al5056の厚さが2mm,3mm,4mmの円板には大きさが0.1～0.2mm程度のgrainが存在する。よって、円板にも微結晶間の熱弾性効果が生じる。grainの平均的な大きさを円柱での結果から見積られた0.15mmとすると、損失が最も大きくなるのは約10kHzで、最大値は約 6×10^{-6} である。この微結晶間の熱弾性効果と、厚さが2mm,3mm,4mmの円板における巨視的な熱弾性効果の値の和を取ってプロットしたグラフを図7.14、7.15、7.16に示す。巨視的な熱弾性効果のみを考えた場合と比較すると、理論値がより測定値に近い値になっていることがわかる⁴。まず、円板が薄くなるほど、2系列への分裂がはっきりすることが説明が出来る。つまり、巨視的な熱弾性効果の損失の値が大きい厚さ2mmの円板の方は、微結晶間の熱弾性効果を加えても、分裂が見えなくなることはないのに対して、円板が厚くなるほど、巨視的な熱弾性効果は小さくなり、微結晶間の熱弾性効果のなかに埋もれてしまうようになる。

次に高周波側で、測定値の損失の周波数に対する傾きの方が巨視的な熱弾性効果の理論値の周波数に対する傾きに比べて緩やかであり、傾きが一致しなかった理由が、以下のように説明できる。つまり、巨視的な熱弾性効果の理論値に微結晶間の熱弾性効果の理論値を加えると、高周波側での理論値の傾きが、巨視的な熱弾性効果のみを考えているときに比べて緩やかになり、測定値に近くなるのである。20kHzより高周波側では、測定値の傾きは理論値に比べて緩やかになってしまい、完全には一致しない。しかし、10kHzまででは測定値と理論値の傾きはあっているので、grain半径の平均値が0.15mm程度であるという微結晶間の熱弾性効果の考察から得られた見積りは円板の場合でも矛盾せず、測定結果を良く説明できる。

Al1070、Al6061の円板の場合、平均的なgrain半径の見積もりがAl5056ほどはつきりしない。ここでは、Al1070、Al6061の円柱の結果から仮定した平均的なgrain半径の大きさをを用い、Al1070、Al6061共に平均的なgrain半径の大きさを0.2mmとした。そして、微結晶間の熱弾性効果と巨視的な熱弾性効果の和をAl1070、Al606

⁴厚さが4mmの場合、損失の値は近くなるが、10kHzぐらいで、理論値が上に凸となり、実験値と定性的に一致しない。

それぞれに対してプロットした。そのグラフを図7.17、図7.18に示す。その結果、Al1070では、高周波側での測定値と巨視的な熱弾性効果の理論値の周波数に対する傾きの不一致が改善された。また、Al6061では $n=2, m=0$ のモードと $n=3, m=0$ のモード以外では測定値と熱弾性効果の和の理論値が、非常に良く一致した。

7.3 Structure dampingの考察

前節で、Al5056、Al1070、Al6061の円柱の損失の測定値と微結晶間の熱弾性効果とを比較し、微結晶間の熱弾性効果が円柱の損失に寄与しているとして、平均的な grain 半径を見積った。また、Al5056、Al1070、Al6061の全ての円板の試料に対して、損失の測定値と熱弾性効果(巨視的及び微結晶間の熱弾性効果の和)を比較した。しかし、全ての試料で、熱弾性効果の理論値と測定値では絶対値が異なった。この節では、損失周波数によらない structure damping モデルによる寄与が Al5056、Al1070、Al6061 で存在するか考察し、それによって、この絶対値の不一致が説明できるかどうかを考える。

structure damping を仮定する対象は2通りある。固体の bulk の損失(内部損失)と固体表面の損失である。アルミニウム合金では、表面損失の効果はあまりないことが知られている。そこで、Al5056、Al1070、Al6061のそれぞれの structure damping の bulk の損失を見積ってみる。

Al5056の円柱は図7.2を見れば分かるように、低周波数では微結晶間の熱弾性効果に従っていない。むしろ1.6kHz以下ではねじれモードの損失は周波数にあまり依存していない。低周波側でのねじれモードの損失はおよそ 4.2×10^{-6} である。また、高さ6cmの円柱の損失は高周波数でおよそ 3.9×10^{-6} である。そこで、 $\phi = 3.9 \times 10^{-6}$ を structure damping による損失の上限として、その値を熱弾性効果に理論値(円柱では平均 grain 半径を0.15mmとした微結晶間の熱弾性効果の値、円板ではそれに巨視的な熱弾性効果を加えた値)に加えてみた。その結果を図7.19~7.23に示す。これらの図から、この仮定によって厚さ4mm、3mmの円板の損失の測定値と理論値が良く一致することがわかる。それに対して、厚さ2mmの円板では、理論値は測定値よりも小さく、高さ6cm、2cmの円柱では、理論値のほうが測定値よりも大きくなってしまう。また、高さ1cmの円柱の測定値と理論値はだいたい一致する。なぜ、このような不一致が起こるのかは次に節で考察する。

Al5056と同様にAl1070とAl6061の structure damping による bulk の損失を考察するのは、測定した損失の数が少ないので難しい。ここではそれぞれの高さ6cmの試料の損失の最小の測定値を structure damping による bulk の損失の上限として用いることにする。Al1070の高さ6cmの円柱の損失の最小の測定値は、モードは特定されていないが、44.161kHzに存在するモードにおける値で、 5.8×10^{-6} である。また、Al6061の高さ6cmの円柱の損失の最小の測定値は、モードは特定されていないが、38.342kHzに存在するモードで 1.8×10^{-6} である。Al1070、Al6061

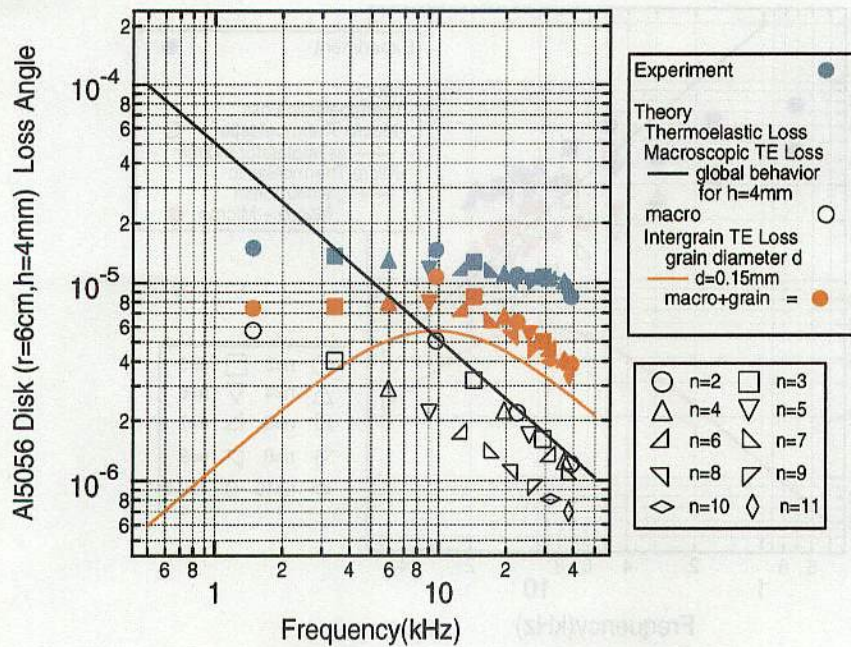


図 7.14: Al5056 の厚さ 2mm の円板の損失の測定値と 2つの熱弾性効果の和の比較

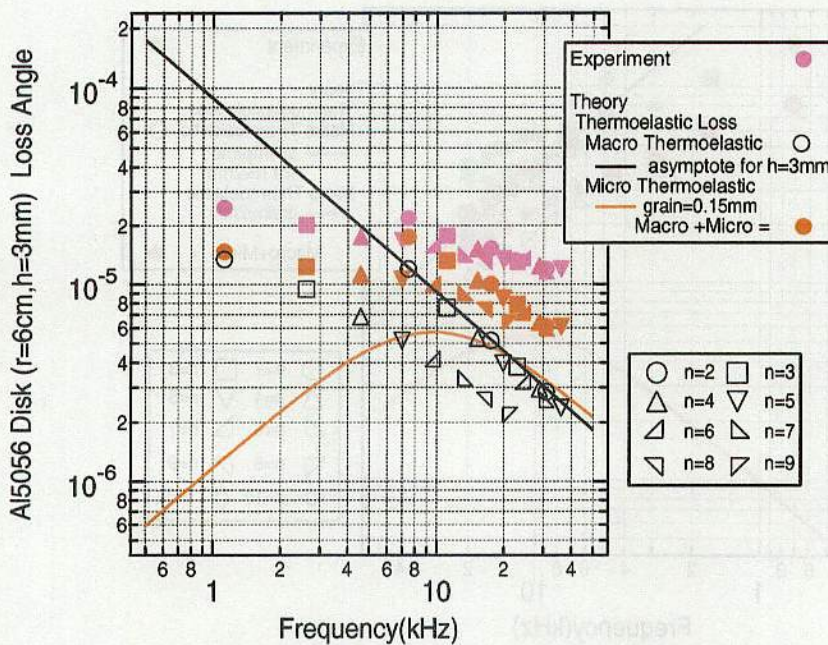


図 7.15: Al5056 の厚さ 3mm の円板の損失の測定値と 2つの熱弾性効果の和の比較

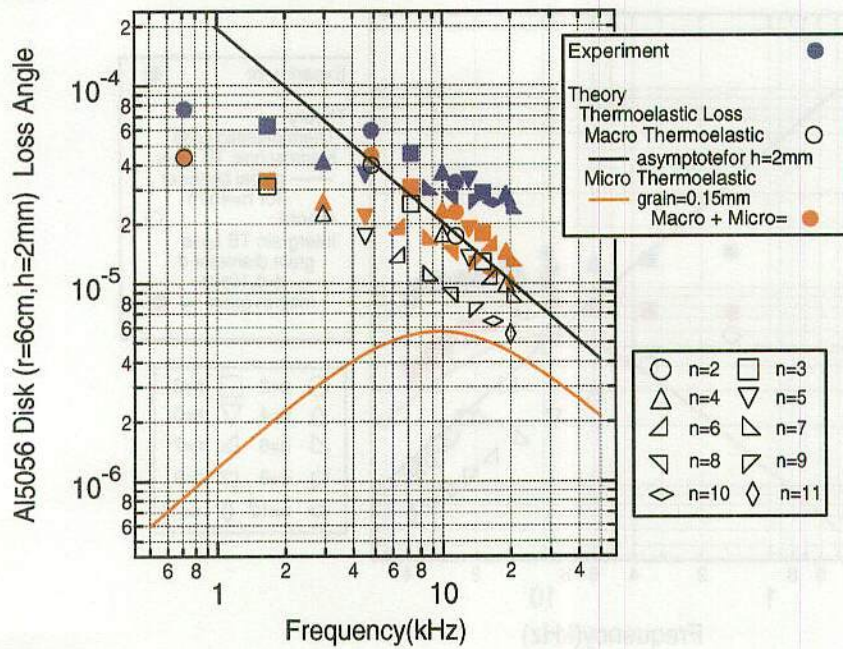


図 7.16: Al5056 の厚さ 4mm の円板の損失の測定値と 2 つの熱弾性効果の和の比較

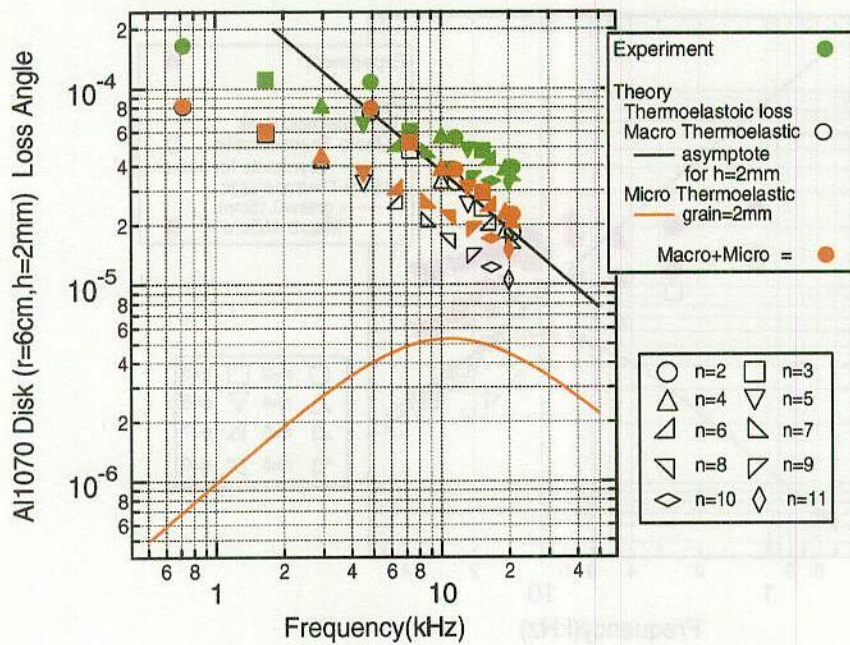


図 7.17: Al1070 の厚さ 2mm の円板の損失の測定値と 2 つの熱弾性効果の和の比較

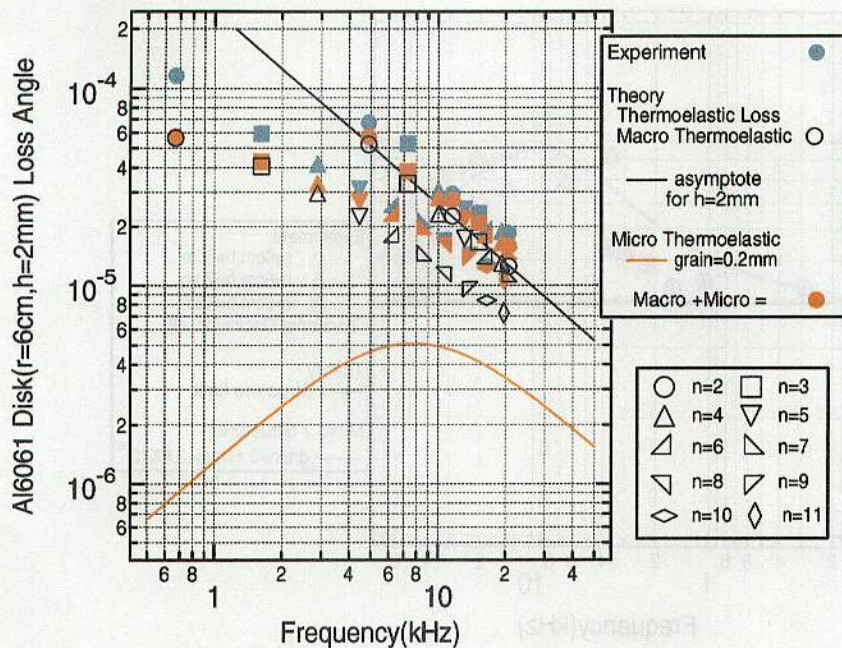


図 7.18: Al6061 の厚さ 2mm の円板の損失の測定値と 2 つの熱弾性効果の和の比較

それぞれの試料に対して、高さ 6cm の損失の測定値の最小値を structure damping による bulk の損失の上限として、熱弾性効果の理論値 (円柱では微結晶間の熱弾性効果の値、円板ではそれに巨視的な熱弾性効果を加えた値) に加えた結果を図 7.23~7.26 に示す。

Al1070 では、ここで行った仮定により、高さ 6cm の円柱の損失はだいたい説明できるが、厚さ 2mm の円板の損失の測定値は理論値より大きく、完全には説明できない。また、Al6061 では、structure damping による bulk の損失を大きく仮定したため、厚さ 2mm の円板の損失は良く説明できるが、高さ 6cm の円柱の損失の測定値は理論値より小さくなってしまふ。

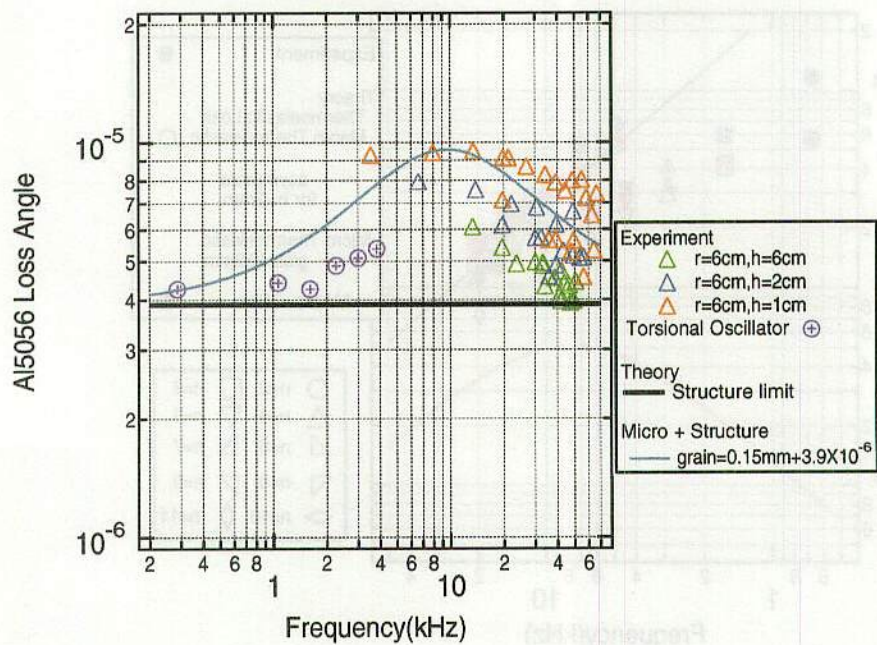


図 7.19: Al5056 の円柱の損失の測定値と、熱弾性効果と Structure damping の和の比較

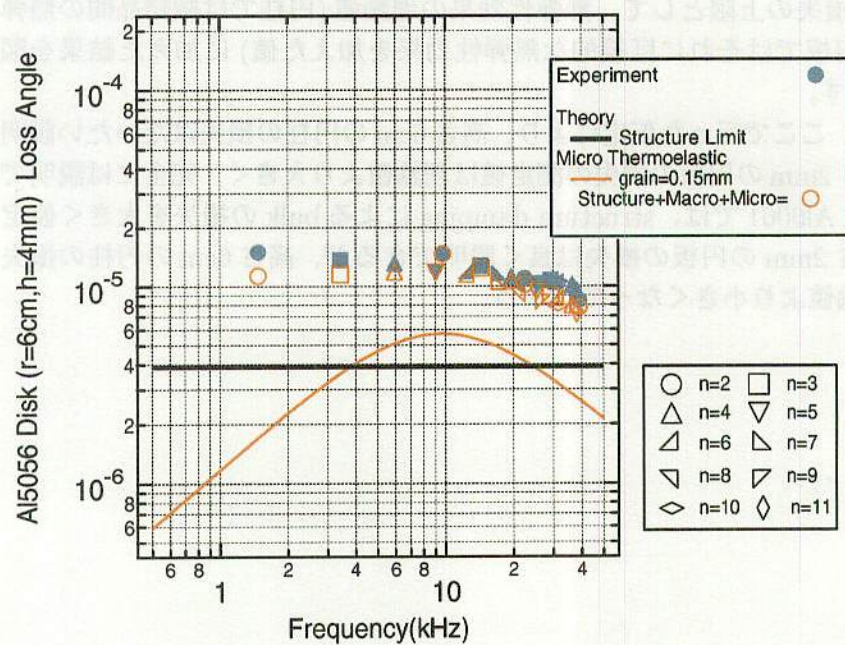


図 7.20: 高さ 4mm の Al5056 の円板の損失の測定値と、熱弾性効果と Structure damping の和の比較

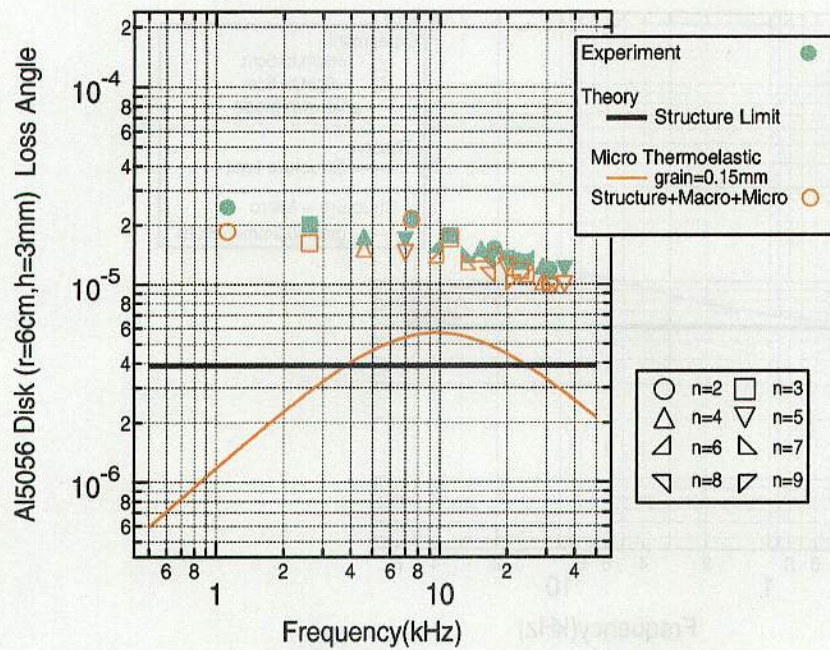


図 7.21: 高さ 3mm の Al5056 の円板の損失の測定値と、熱弾性効果と Structure damping の和の比較

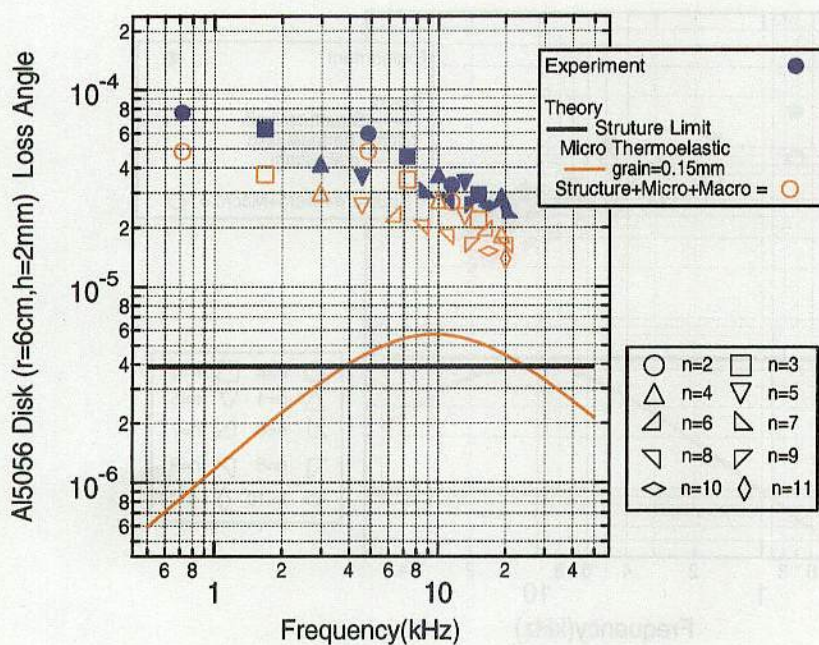


図 7.22: 高さ 2mm の Al5056 の円板の損失の測定値と、熱弾性効果と Structure damping の和の比較

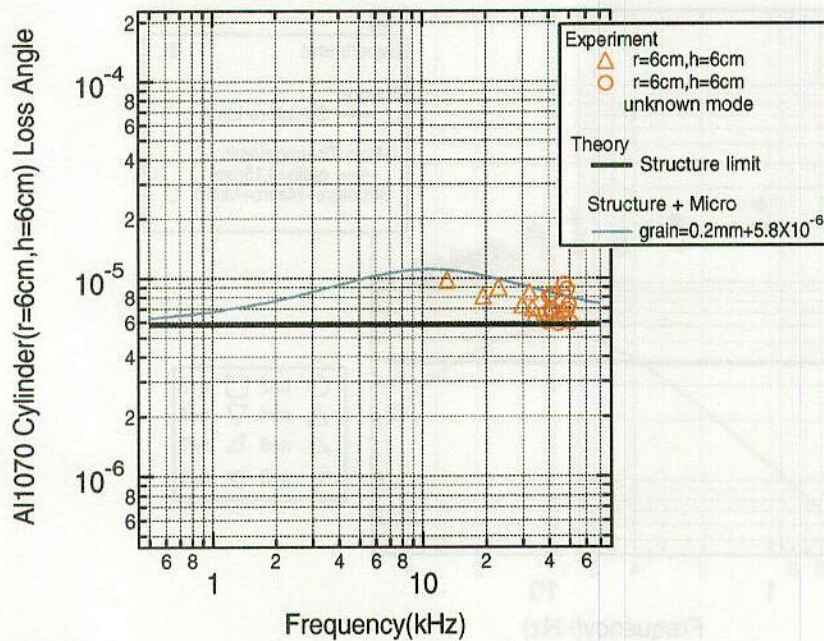


図 7.23: Al1070 の高さ 6cm の円柱の損失の測定値と、熱弾性効果と Structure damping の和の比較

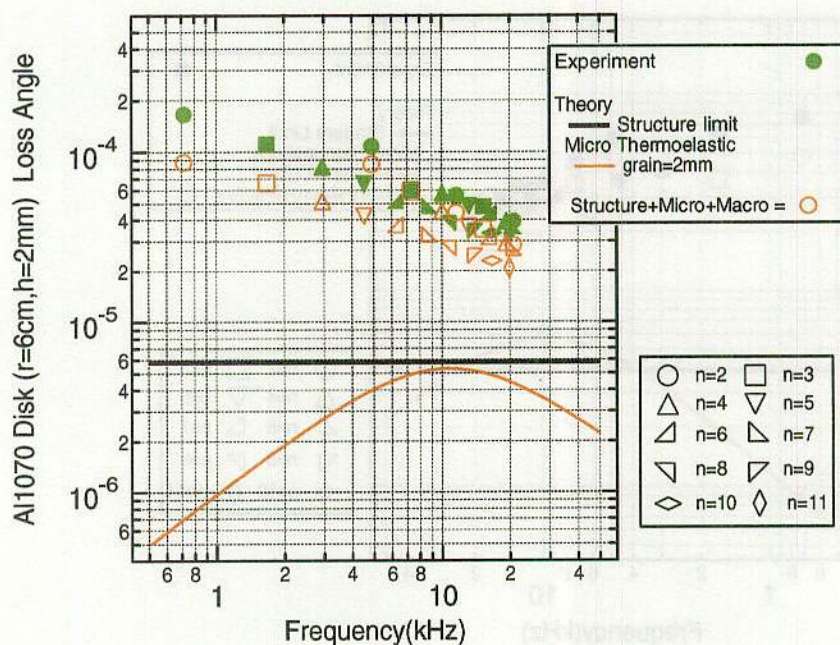


図 7.24: 高さ 2mm の Al1070 の円板の損失の測定値と、熱弾性効果と Structure damping の和の比較

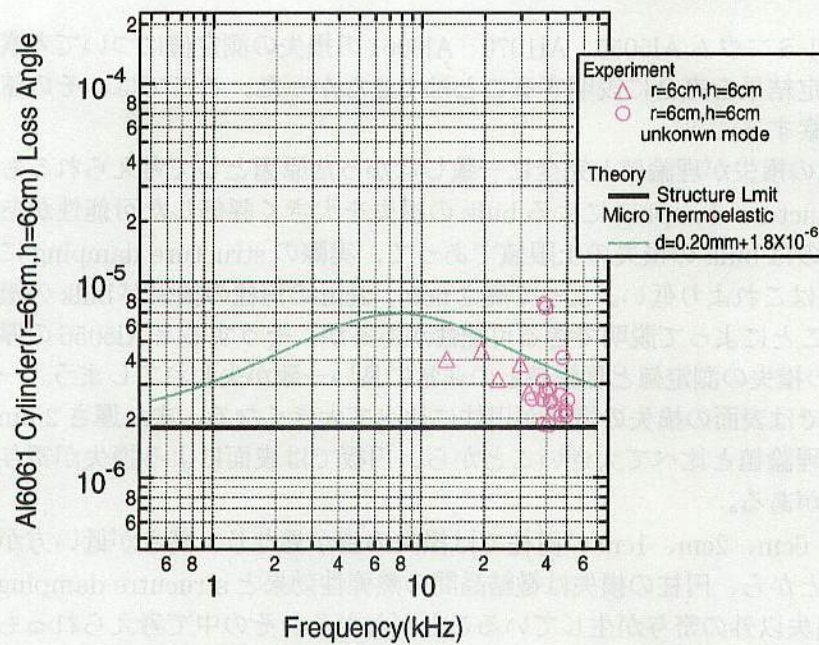


図 7.25: Al6061 の高さ 6cm の円柱の損失の測定値と、熱弾性効果と Structure damping の和の比較

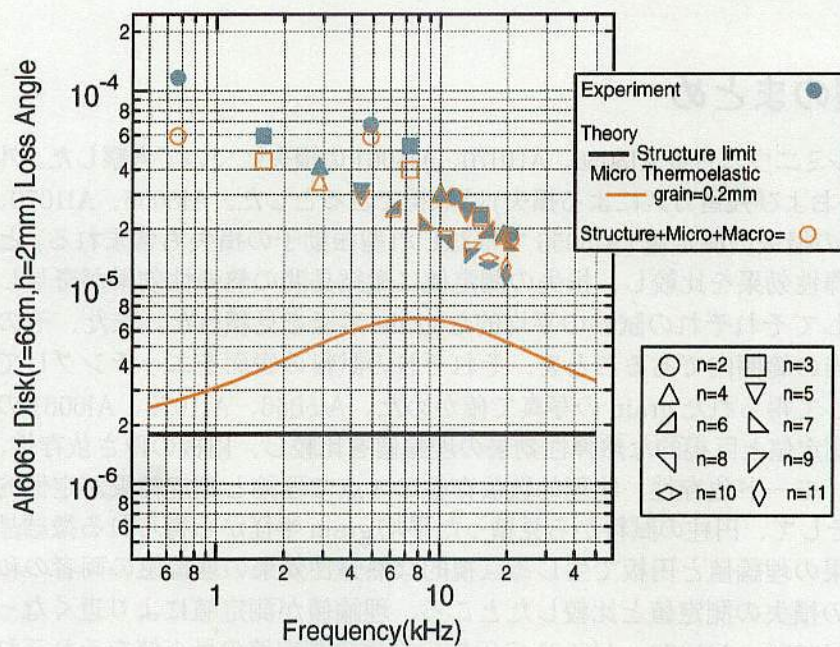


図 7.26: 高さ 2mm の Al6061 の円板の損失の測定値と、熱弾性効果と Structure damping の和の比較

7.4 理論値と測定結果の値の不一致

これまで、アルミニウム Al5056、Al1070、Al6061 の損失の測定値について考察してきたが、測定結果を完全に説明することはできなかった。ここでは、その値の差について考察する。

Al5056 の円柱の損失が理論値と完全に一致しなかった原因として考えられるものとしては、structure damping による bulk の損失を大きく評価した可能性がある。今回考えたのは bulk の損失の上限値であって、実際の structure damping による bulk の損失はこれより低い。よって高さ 6cm、2cm の円柱の損失が bulk の損失を低く見積ることによって説明できる可能性があるが、そうすると Al5056 の厚さ 3mm、4mm の損失の測定値と理論値との非常に良い一致が失われてしまう。一般に、薄い円板では表面の損失の寄与が円柱に比べて大きくなる。また厚さ 2mm の円板の損失が理論値と比べて大きいことから、円板では表面による損失が寄与している可能性がある。

Al5056 の高さ 6cm、2cm、1cm の円柱では損失の値が異なり、高さが低い方が損失が大きいことから、円柱の損失は微結晶間の熱弾性効果と structure damping による bulk の損失以外の寄与が生じていることがわかる。その中で考えられるものとしては、表面による損失と巨視的な熱弾性効果である。円柱の場合では巨視的な熱弾性効果による寄与を無視して考察を行ったが、その寄与が全くないとは考えられない。一般の円柱形の試料で巨視的な熱弾性効果を計算することは出来ないが、この効果によって高さが低い 1cm、2cm の円柱の損失が高さ 6cm の円柱の測定結果に比べて大きいことが説明できる可能性がある。

7.5 考察のまとめ

測定したアルミニウム合金 Al5056、Al1070、Al6061 の損失について考察した。外的な損失(支持および残留ガスによる損失)は無視できるとした。Al5056、Al1070、Al6061 の円柱の損失の測定値 (Al5056 ではねじれ型振動子の損失も含まれる) と微結晶間の熱弾性効果を比較し、損失の測定値に微結晶間の熱弾性効果が寄与していると仮定してそれぞれの試料の平均的な grain 半径を見積った。また、その見積もりが妥当の範囲内であることを、それぞれの試料の表面をエッチングして顕微鏡で観察して得られた grain の写真で確かめた。Al5056、Al1070、Al6061 の円板の損失の測定値と巨視的な熱弾性効果の理論値を比較し、円板の厚さ依存性、周波数依存性、モード依存性、物理的数依存性の 4 点で理論と測定結果が定性的に一致した。そして、円柱の試料から見積った平均 grain 半径から得られる微結晶間の熱弾性効果の理論値と円板で生じる巨視的な熱弾性効果の理論値の両者の和をとって円板の損失の測定値と比較したところ、理論値が測定値により近くなった。そして、Al5056、Al1070、Al6061 の円柱の損失の測定値の最小値をそれぞれの材質における structure damping による bulk の損失と仮定して、その値と熱弾

性効果 (円柱では微結晶間の熱弾性効果のみ、円板ではそれと巨視的な熱弾性効果の和) の理論値との和をとって、測定値と比較した所、測定値と理論値は完全には一致しなかったが、測定値の大きさのオーダーは、理論値によって説明が出来ることがわかった。最後に、測定値と理論値の不一致の原因を考察した。

第8章 まとめと結論

8.1 まとめと結論

不動点支持法を用いて、アルミニウム合金 Al5056, Al1070, Al6061 を試料として Q 値の測定を行った。用意した試料は全て半径 6cm で Al5056 では高さ 6cm、2cm、1cm の円柱と厚さ 4mm、3mm、2mm の円板であり、Al1070、Al6061 では高さ 6cm の円柱と厚さ 2mm の円板である。Al5056 の高さ 6cm、2cm、1cm の円柱および高さ 6cm の円柱からつくられたねじれ型振動子の損失の結果と微結晶間の熱弾性効果を比較した。円柱では微結晶間の熱弾性効果が寄与しているとして Al5056 の平均的な grain 半径を見積もった。同様に Al1070、Al6061 の高さ 6cm の円柱の損失の結果に微結晶間の熱弾性効果が寄与しているとして、Al1070、Al6061 の平均的な grain 半径を見積もった。それぞれの材質をエッチングした表面を顕微鏡で観察した結果から、その見積もりが妥当であると判断した。また、Al5056、Al6061、Al1070 の円板の損失の結果と巨視的な熱弾性効果を比較し、定性的な一致をみた。この巨視的な熱弾性効果の理論値に円柱での考察から得られた微結晶間の熱弾性効果の理論値に加えたところ、実験値との一致はさらによくなった。

そして、Al5056、Al1070、Al6061 の円柱の損失の測定値の最小値をそれぞれの材質における structure damping による bulk の損失と仮定して熱弾性効果 (円柱では微結晶間の熱弾性効果のみ、円板ではそれと巨視的な熱弾性効果の和) の理論値との和をとって、測定値と比較した所、測定値と理論値は完全には一致しなかったが、測定値のだいたいの大きさは、理論値によって説明が出来ることがわかった。

これらのことから、Al5056、Al1070、Al6061 の円柱と円板の損失は、微結晶間の熱弾性効果、巨視的な熱弾性効果、bulk の structure damping による損失の 3 つによってその大部分が説明できると結論された。

8.2 この実験の新しい点、重力波検出における意義

今回の実験の新しい点は、アルミニウム合金の円板における巨視的な熱弾性効果のモード依存性を実験によって確かめた点である。巨視的な熱弾性効果の理論値から予想される損失の 2 系列への分裂が実験によって確かめられたことは、巨視的な熱弾性効果が円板によって生じている確かな証拠となり、理論の正しさをモード依存性という点から示したことになる。

また、広い周波数範囲で多くのモードで単一の材質の損失を測定したことも、これまであまり行われて来なかったことである。このように多くのモードを測定し、巨視的および微結晶間の熱弾性効果および structure damping による bulk の損失と比較した例はアルミニウム合金では例がない。よってこの点も今回の実験の新しい点である。

今回の実験の重力波検出における意義は、以下のように言うことができる。重力波検出の障害となる熱雑音と密接に関係のある機械損失について、これまで成り立つと考えられていた理論をアルミニウム合金を用いて詳細に検証したことによって、熱弾性効果や structure damping モデルが現実成り立つことを確認した。この事によって、石英やサファイアといった、干渉計型重力波検出器に直接応用される物質においても、熱弾性効果や structure damping による損失やそれに比例する熱雑音が存在するということを、それらの理論の正しさを示したことにより、より確かなものにした。

8.3 今後の課題

今後の課題を3つ以下に列挙する。

1つ目はアルミニウム合金の熱弾性効果の理論値と測定値との間の大きさの違いの原因を明らかにすることである。その為には、より多くの形状において損失を測定する必要がある。

2つ目は巨視的な熱弾性効果の値を数値的に求めることである。円板近似以外の場合にも巨視的な熱弾性効果が計算できるようにすれば、巨視的な熱弾性効果をより一般的な場合に検証できる。

3つ目は、アルミニウム合金の損失を広い周波数範囲で多くのモードで低温にして測定することである。不動点支持法を用いれば高次モードでは支持による損失が生じにくいので、アルミニウム合金の内部損失もより精度良く測定できることになる。また、低温においても巨視的な熱弾性効果や微結晶間の熱弾性効果がアルミニウム合金の損失に大きく寄与するかがわかるはずである。

付 録 A 熱弾性効果の導出

A.1 一般論

損失 ϕ は、(4.1) より、 $\phi \ll 1$ の時、 W を固体の振動エネルギー、 ΔW を振動の 1 周期に失われるエネルギーとして

$$\phi = Q^{-1} = \frac{\Delta W}{2\pi W} \quad (\text{A.1})$$

と表わされる。 ΔW は 1 周期の間に弾性体が行う仕事として求めても良いし、1 周期の間に増加する弾性体の熱量 ΔQ としても良い。両者は一致する。

$$\Delta W = \Delta Q \quad (\text{A.2})$$

ここでは、 ΔQ を熱力学を用いて求める。単位体積あたりのエントロピー S の時間変化は単位体積に単位時間に流れ込む熱量を温度 T で割って得られる。熱流束密度 $\mathbf{q}$ は、 κ を熱伝導度として

$$\mathbf{q} = -\kappa \text{grad} T \quad (\text{A.3})$$

と表わせる。よって単位体積に単位時間に流れ込む熱量は、 $-\text{div} \mathbf{q}$ となり、

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{T} \kappa \nabla^2 T \quad (\text{A.4})$$

となる。温度変化はとても小さいので

$$\Delta Q = T_0 \Delta S \quad (\text{A.5})$$

として良い。ここで、 T_0 は平均温度、 ΔS は 1 周期あたりの弾性体全体でのエントロピー変化である。よって振動の振動数を ν とし、1 周期の時間平均を $\langle \dots \rangle$ で表わすと

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_0^{\frac{1}{\nu}} \left(\int \frac{\partial S}{\partial t} dV \right) dt \\ &= \nu^{-1} \left\langle \int \frac{\partial S}{\partial t} dV \right\rangle \\ &= \nu^{-1} \left\langle \int \frac{\kappa}{T} \nabla^2 T dV \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

となるので、

$$\Delta Q = \nu^{-1} \kappa T_0 \left\langle \int \frac{1}{T} \nabla^2 T dV \right\rangle \quad (\text{A.7})$$

を得る。

ΔQ を求めるには以下のようにする。まず、積分の中の T^{-1} を

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_0^2} \Delta T \quad (\text{A.8})$$

$$\Delta T = T - T_0 \quad (\text{A.9})$$

と近似する。温度変化 ΔT を求めるため、熱伝導方程式 [17] を用いる。 u_i は、弾性体の変形による変位ベクトルの成分、 x_i は座標とし、添え字 i は 1, 2, 3 の値をとることとする。弾性力学では、strain tensor u_{ij}

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.10})$$

の対角和 u_{ii} は、弾性体が歪みによって変形した事による体積の相対変化を表わす。 u_i は、変位ベクトルの成分、 x_i は座標で、 $i = 1, 2, 3$ である。この u_{ii} を用いて、熱伝導方程式は

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial t} = D \nabla^2 \Delta T - \frac{\alpha_l E T}{C_V (1 - 2\sigma)} \frac{\partial u_{ii}}{\partial t} \quad (\text{A.11})$$

と表わせる。ここで、 α_l は線膨張係数、 E はヤング率、 σ はポアソン比、 C_V は、単位体積あたりの定積比熱である。また D は熱拡散係数で

$$D = \frac{\kappa}{C_V} \quad (\text{A.12})$$

で定義される。

熱伝導方程式を用いて $\nabla^2 \Delta T$ を書きかえ、(A.8) を用いると (A.7) は

$$\Delta Q = \nu^{-1} \kappa T_0 \left\langle \int \frac{1}{D} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{\Delta T}{T_0^2} \right) \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial t} + \frac{\alpha_l E T}{C_V (1 - 2\sigma)} \frac{\partial u_{ii}}{\partial t} \right) dV \right\rangle \quad (\text{A.13})$$

となる。積分の中身を展開すると、時間平均をとっても 0 にならないのは

$$-\frac{1}{D} \frac{\alpha_l E T}{C_V (1 - 2\sigma)} \frac{\Delta T}{T_0^2} \frac{\partial u_{ii}}{\partial t} \quad (\text{A.14})$$

という項だけである。結局、 ΔQ は

$$\Delta Q = -\nu^{-1} \frac{C_V}{T_0} \frac{\alpha_l E T}{C_V (1 - 2\sigma)} \left\langle \int \Delta T \frac{\partial u_{ii}}{\partial t} dV \right\rangle \quad (\text{A.15})$$

となる。

(A.15) の積分は以下のようにして求まる。一時的に ΔQ を

$$\Delta Q = -\beta\nu^{-1} \left\langle \int \Delta T \frac{\partial u_{ii}}{\partial t} dV \right\rangle \quad (\text{A.16})$$

と書く。また熱伝導方程式を

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial t} = D \nabla^2 \Delta T + \gamma \frac{\partial u_{ii}}{\partial t} \quad (\text{A.17})$$

と書く。ここで、

$$\beta = -\frac{C_V}{T_0} \frac{\alpha_l E T}{C_V(1-2\sigma)} \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma = -\frac{\alpha_l E T}{C_V(1-2\sigma)} \quad (\text{A.19})$$

である。 u_{ii} は振動数 ν の周期関数で、座標依存性は任意である。 ΔT も振動数 ν の周期関数だが、熱伝導方程式を満たし、 $\text{grad} \Delta T$ の法線成分は熱流の境界では消える。

$\Delta T, u_{ii}$ の座標と時間を以下のように分離する。

$$\Delta T(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(T(\mathbf{r})e^{2\pi i \nu t}) \quad (\text{A.20})$$

$$u_{ii}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(\mathcal{U}_{ii}(\mathbf{r})e^{2\pi i \nu t}) \quad (\text{A.21})$$

ここで、 Re は実数部分を取る操作を表わす。時間の原点を適当にとって、 $\mathcal{U}_{ii}$ を実数とする。すると、一般的に、 T は複素数となる。(A.16)(A.17) を書きなおすと

$$\Delta Q = \pi\beta \int \mathcal{U}_{ii} \text{Im}(T) dV \quad (\text{A.22})$$

$$(D\nabla^2 - 2\pi i \nu)T + 2\pi i \nu \gamma \mathcal{U}_{ii} = 0 \quad (\text{A.23})$$

となる。

複素関数 $T(\mathbf{r})$ は、正規直交関数系によって展開される。ここで、特に正規直交関数系 $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ で

$$\int \psi_i \psi_j dV = \delta_{ij} \quad (\text{A.24})$$

$$(D\nabla^2 + 2\pi\nu_k)\psi_k = 0 \quad (\text{A.25})$$

を満たし、 T と同じ境界条件を満たすものを選ぶ。つまり、表面でそれらの勾配の法線成分が0となれば良い。また、 ψ_k は実関数である。

展開式

$$T = \sum_j a_j \psi_j \quad (\text{A.26})$$

で、定数 a_j は一般に複素数である。この定数は展開式 (A.25) を (A.23) に代入し、左から ψ_k を掛け、弾性体の全領域で積分すると求まる。その結果は、

$$a_k = \frac{i\nu\gamma}{\nu_k + i\nu} b_k \quad (\text{A.27})$$

ここで、

$$b_k = \int \psi_k \mathcal{U}_{ii} dV \quad (\text{A.28})$$

は、 $\mathcal{U}_{ii}$ の展開係数である。

後は展開式 (A.26) を (A.22) に代入し、展開係数 (A.27) を使えば良い。 a_k の虚部は

$$\text{Im}(a_k) = \frac{\nu_k \nu \gamma b_k}{\nu_k^2 + \nu^2} \quad (\text{A.29})$$

となるので、 ΔQ は、

$$\pi\beta\gamma \sum_k b_k^2 \frac{\nu_k \nu}{\nu_k^2 + \nu^2} \quad (\text{A.30})$$

と求まる。正規直交関数系 ψ_k が満足する関係式

$$\sum_k \psi_k(\mathbf{r}_1) \psi_k(\mathbf{r}_2) = \delta^{(3)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (\text{A.31})$$

を用いると

$$\sum_k f_k = 1 \quad (\text{A.32})$$

を示すことが出来る。ここで、

$$f_k = \frac{b_k^2}{\int \mathcal{U}_{ii}^2 dV} = \frac{[\int \psi_k \mathcal{U}_{ii} dV]^2}{\int \mathcal{U}_{ii}^2 dV} \quad (\text{A.33})$$

とおいた。よって、

$$\Delta Q = \pi\beta\gamma \left(\int \mathcal{U}_{ii}^2 dV \right) \sum_k f_k \frac{\nu\nu_k}{\nu_k^2 + \nu^2} \quad (\text{A.34})$$

を得る。(A.18)、(A.19) を代入して、

$$\Delta Q = \pi \frac{C_V}{T} \left(\frac{\alpha_l ET}{C_V(1-2\sigma)} \right)^2 \left(\int \mathcal{U}_{ii}^2 dV \right) \sum_k f_k \frac{\nu\nu_k}{\nu_k^2 + \nu^2} \quad (\text{A.35})$$

となる。ここで、 T を平均温度 T_0 で近似し、 T_0 を改めて T と書いた。

(A.1)、(A.2)、(A.34) より、熱弾性効果の損失は一般に

$$\phi = \frac{1}{W} \frac{C_V}{2T} \left(\frac{\alpha_l ET}{C_V(1-2\sigma)} \right)^2 \left(\int \mathcal{U}_{ii}^2 dV \right) \sum_k f_k \frac{\nu\nu_k}{\nu_k^2 + \nu^2} \quad (\text{A.36})$$

となる。

A.2 巨視的な熱弾性効果 (円板の横振動の場合)

巨視的な熱流による熱弾性効果

薄い円板の横振動の場合の巨視的な熱弾性効果を表す式を導く [14]。円板の弾性振動の解は付録 B に示す。円板の軸を z 軸にとる。横振動の場合、(A.25) は

$$D \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial z^2} + 2\pi\nu_k \psi_k = 0 \quad (\text{A.37})$$

と近似できる。境界では熱は流れないので、

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial z} = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm \frac{h}{2} \quad (\text{A.38})$$

ここで、 h は円板の厚さである。これを解いて

$$\psi_k = \sqrt{\frac{2}{h}} \sin \left\{ (2k+1) \frac{\pi z}{h} \right\} \quad (\text{A.39})$$

$$2\pi\nu_k = (2k+1)^2 \frac{\pi^2 D}{h^2} \quad (\text{A.40})$$

を得る。

円板の z 軸方向の変位 ζ

$$\zeta_n(r, \theta) = \zeta_0 \cos n\theta [J_n(kr) + \beta_n I_n(kr)] \quad (\text{A.41})$$

は z によらないので、

$$U_{ii} = -\frac{1-2\sigma}{1-\sigma} z \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.42})$$

の 2 乗を $-h/2 \leq z \leq h/2$ の範囲で積分して

$$\int U_{ii}^2 dV = \frac{h^3}{12} \left(\frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \right)^2 \iint \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \quad (\text{A.43})$$

を得る。(A.33)、(A.39) より

$$f_k = \frac{96}{(2k+1)^4 \pi^4} \quad (\text{A.44})$$

と求まる¹。

¹この計算は本当は正しくない。それは 1 次元の近似 (A.37) を用いているから、 U_{ii} の x, y 依存性を無視し、 z のみで展開しているからである。正しく正規直交関数系を作るためには、(A.39) に x, y の正規直交関数 $\varphi_l(x, y)$ を掛け、

$$\psi_{k,l} = \psi_k(z) \varphi_l(x, y) \quad (\text{A.45})$$

(A.35) で W として補遺で計算されている円板の自由エネルギー F_{pl} を用いると、(A.44) から円板の横振動の巨視的な熱弾性効果 ϕ_{th} は、

$$\phi_{th} = A_{nm}\phi_p \quad (\text{A.52})$$

$$A_{nm} = \frac{\iint \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 dx dy}{\iint \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\sigma) \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\} \right] dx dy} \quad (\text{A.53})$$

$$\phi_p = \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \frac{E\alpha_i^2 T}{C_V} \sum_k f_k \frac{\omega \tau_k}{1+\omega^2 \tau_k^2} \quad (\text{A.54})$$

となる。なお、各周波数 $\omega = 2\pi\nu$ 、及び、緩和時間 τ_k

$$\tau_k = \frac{1}{2\pi\nu_k} = \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{h^2}{\pi^2 D} \quad (\text{A.55})$$

を記号として用いた。

論文の本文において形状因子 A_{nm} が問題となる。その形式的な表現を与えると

$$A_{nm} = \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \frac{1}{(1-2\sigma)^2} \frac{E}{2W} \int \mathcal{U}_{ij}^2 dV \quad (\text{A.56})$$

となる。

$$\int \psi_{k,l} \psi_{k',l'} dV = \delta_{k,k'} \delta_{l,l'} \quad (\text{A.46})$$

を用いる。すると一般論の f_k を $f_{k,l}$ で置き換え

$$f_{k,l} = \frac{[\int \psi_{k,l} \mathcal{U}_{ii} dV]^2}{\int \mathcal{U}_{ii}^2 dV}, \quad \sum_{k,l} f_{k,l} = 1 \quad (\text{A.47})$$

を満足する。 $f_{k,l}$ を求めると

$$f_{k,l} = \frac{96}{(2k+1)^4 \pi^4} \frac{[\iint \varphi(x,y)_l (\Delta \zeta) dx dy]^2}{\iint \Delta \zeta^2 dx dy} \quad (\text{A.48})$$

となる。ここで補遺 A のように 2 次元ラプラシアンを Δ で表した。

$$\sum_{k,l} f_{k,l} = 1, \quad \frac{96}{(2k+1)^4 \pi^4} = 1 \quad (\text{A.49})$$

から

$$\sum_l \frac{[\iint \varphi(x,y)_l (\Delta \zeta) dx dy]^2}{\iint \Delta \zeta^2 dx dy} = 1 \quad (\text{A.50})$$

となる。よって

$$f_k \equiv \sum_l f_{k,l} = \frac{96}{(2k+1)^4 \pi^4} \quad (\text{A.51})$$

として良いことが形式的に示せる。しかしながら、ここで求めた f_k はあくまで 3 次元を 1 次元に近似した範囲でしか正しくないということは強調しておかなくてはならない。strain などの x, y の依存性による緩和時間に対する影響などは考慮されていない。

付 録 B 薄い円板の横振動の解

薄い円板の横振動の解を示す [17]。上面と下面はどちらか一方が伸び、もう一方が縮むので、その間には伸び縮みがない中立面が存在する。中立面上にを原点にとり、円板の軸を z 軸にとる。変形がない時、円板の上面と下面は xy 平面に平行である。中立面の z 方向の変位を w と書く。すると中立面の変位ベクトルは十分な近似で

$$u_x^{(0)} = u_y^{(0)} = 0, \quad u_z^{(0)} = w(x, y, t) \quad (\text{B.1})$$

と書ける。

円板が薄いということから、応力テンソル σ_{ik} に対して、円板内のすべての点で

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} \quad (\text{B.2})$$

という式が成り立つ。この条件から、以下の式が導かれる。

$$u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{B.3})$$

u_x, u_y から strain tensor の全成分が決定される。それは、以下のような式で表せる。

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad u_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad u_{xy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ u_{xz} &= u_{yz} = 0, \quad u_{zz} = \frac{\sigma}{1 - \sigma} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

単位体積あたりの自由エネルギー F は、

$$F = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \left(u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} u_{ll}^2 \right) \quad (\text{B.5})$$

から

$$F = z^2 \frac{E}{1 + \sigma} \left\{ \frac{1}{2(1 - \sigma)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} \quad (\text{B.6})$$

と求まる。全自由エネルギーは F を全体積にわたって積分すれば良い。 z についての積分の範囲は、円板の厚さを h として、 $-h/2$ から $h/2$ までであり、 x, y につい

ては円板の全表面が積分範囲となる。結局、全自由エネルギー F_{pl} は、

$$F_{pl} = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\sigma) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \right] dx dy \quad (B.7)$$

w を決定する方程式を導く。最小作用の原理

$$\delta \int L dt = 0 \quad (B.8)$$

を用いる。ここで Lagrangian は

$$L = T - F_{pl} \quad (B.9)$$

である。T は

$$T = \int \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dV \quad (B.10)$$

である。 ρ は円板の密度を表す。変分を行うと、簡単のため記号

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \quad (B.11)$$

及び¹、二次元 Laplacian

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (B.12)$$

を用い、

$$\delta T = \delta \iint \frac{1}{2} \rho \dot{w}^2 h r dr d\theta = h \iint \rho \dot{w} (\delta \dot{w}) r dr d\theta \quad (B.13)$$

$$\begin{aligned} \delta F_{pl} &= \frac{D}{2} \iint r (\Delta^2 w) \delta w d\theta dr \\ &+ \frac{D}{2} \oint \left\{ -r \frac{\partial}{\partial r} \Delta w - 2(1-\sigma) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} \delta w d\theta \\ &+ \frac{D}{2} \oint \left\{ r \delta w + 2(1-\sigma) \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} \frac{\partial \delta w}{\partial r} d\theta \end{aligned} \quad (B.14)$$

より、

$$\begin{aligned} \delta S &= \iiint \{ D \Delta^2 w + h \rho \ddot{w} \} \delta w r dr d\theta dt \\ &- D \oint \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \Delta w + 2(1-\sigma) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right) \right\} \delta w r d\theta dt \\ &- D \oint \left\{ \Delta w + 2(1-\sigma) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} \frac{\partial \delta w}{\partial r} r dt d\theta \end{aligned} \quad (B.15)$$

¹第4章の熱拡散係数と混同してはならない。ここでの D は円柱剛性と呼ばれる。

を得る。

自由端境界条件より、 δw 、 $\partial \delta w / \partial r$ が任意なので、運動方程式

$$D\Delta^2 w + h\rho \ddot{w} = 0 \quad (\text{B.16})$$

及び、円周における境界条件

$$\frac{\partial}{\partial r} \Delta w + 2(1 - \sigma) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$\Delta w + 2(1 - \sigma) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (\text{B.18})$$

が求まる。

$$w(x, y, t) = e^{i\omega t} \zeta(r, \theta) \quad (\text{B.19})$$

と置くと、角振動数 ω のモード ζ を定める方程式は、

$$(D\Delta^2 - h\rho\omega^2)\zeta = 0 \quad (\text{B.20})$$

となる。

$r=0$ で特異でない解は、Bessel 関数 $J_n(x)$ 、変形 Bessel 関数 $I_n(x)$ を用いて、

$$\zeta_n(r, \theta) = \zeta_0 \cos n\theta [J_n(kr) + \beta_n I_n(kr)] \quad (\text{B.21})$$

となる。ここで、

$$k^4 = \frac{h\rho\omega^2}{D} \quad (\text{B.22})$$

とおいた。

この ζ を境界条件に代入して、 k 及び β_n が求まる。また、共振周波数 ν は

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1 - \sigma^2)}} h k^2 \quad (\text{B.23})$$

と求まる。

(A.19) より、振動の 1 周期の間に弾性体が持つ最大のエネルギーは、(A.7) の w を ζ に置き換えたものである。本文中の自由エネルギー F_{pl} はこの意味で用いる。

付 録 C Q 値の測定数値

本文中では省略した Q 値の測定数値を表にまとめた。円柱のモードに対しては、各モードを Order n 及び parity p の値で分類し、共振周波数は Hutchinson の半解析的な方法で求めた値、有限要素法で求めた値、および、実際に測定された値を表にした。円柱の表中の半解析とは Hutchinson の方法によって求められた共振周波数の値で、FEM は有限要素法によって求められた共振周波数、測定は実際測定された共振周波数を指す。Best Q は複数の測定で得られた最高の Q 値の値である。この実験で用いた不動点支持法は Q 値の再現性が $n \geq 2$ の高次モードで良く、Q 値の測定値は同じモードでは 10% 程度の誤差しか生じない。よって、Q 値の最高値のみを示した。Loss Angle は Best Q の逆数である。それぞれの表ではモードが有限要素法で得られた共振周波数が低いほうから順に番号 No が付けられている。また、殆どが測定されていない縮退モードについても記してある。縮退が存在する場合、Q 値のグラフや第 7 章の損失のグラフの測定値は、Q 値が高い (損失が小さい) 方を用いた。

円板のモードにたいしては面外モードのみを見ており、各モードは Order n の値で分類されている。共振周波数は解析的な方法で求めたものと、有限要素法を用いて求めたものと実際に測定された共振周波数を表中に示した。表中の解析とは円板の解析的な式から求められた共振周波数を意味する。FEM は円柱の場合と同じである。円板の場合も複数測定したうちの最高の Q 値を Best Q の欄に書き、その逆数を Loss Angle とした。

なお、円柱の表中で Hutchinson の共振周波数の計算値のうち、ねじれ振動の共振周波数はねじれ振動の解析的な式から求めたものである。それらは*で表わしてある。

また、円板の表中で番号に*がついているモードは面内モードで、解析解は面外モードのみ求めているため、書かれていない。円板では面外モードのみを測定しているので、これらのモードは測定されていない。

C.1 Al5056のQ値

C.1.1 円柱のQ値

半径 6cm、高さ 6cm の試料

13kHz から 52kHz までの範囲で見付ける事が出来る全てのモードを調べた。その結果を表 C.1 に示す。

12 番、42 番、56 番の 3 つのねじれモードは見つけることは出来なかった。それは、ねじれモードでは試料の半径方向の変位が原理的には存在しないので、側面にレーザーをあてる方法では変位を読み取るのが難しいからである。これは、他の円柱の試料でも同様で、ねじれモードは測定されていない。

また、28 番と 29 番の $n = 1$ のモードを発見することが出来なかった。それ以外のモードは全て発見したが、 $n = 0, 1$ の低次のモードでは正しい減衰を得られなかったものも多く、それらのモードに対しては Q 値は測定していない。 $n \geq 2$ の高次のモードでは、全てのモードで Q 値を測定した。またモードの特定も行った。そのなかで、縮退を発見したのは 30 番と 31 番のモードのみであった。

半径 6cm、高さ 2cm の試料

6kHz から 57kHz までの範囲で見付ける事が出来る全てのモードを調べた。その結果を表 C.2 に示す。28 番のねじれモードと 37 番と 38 番の $n = 7$ のモードは発見できなかった。それ以外の全てのモードを特定し、 $n \geq 2$ の高次モードに対して Q 値の測定を行った。 $n = 0, 1$ の低次モードにつき、3 番の $n = 0$ のモード以外は全て Q 値の測定を行った。また、縮退を発見できたのは、26 番と 27 番及び 29 番と 30 番のモードであった。

半径 6cm、高さ 1cm の試料

3kHz から 67kHz までの範囲で見付ける事が出来る全てのモードを調べた。その結果を表 C.3 に示す。36 番のねじれモード、21 番の $n = 0$ のモード、68、69 番の $n = 7$ のモード、37, 38 番の $n = 8$ のモード、50、51 番の $n = 9$ のモード及び 62、63 番の $n = 10$ のモードは発見できなかった。それ以外のモードを特定し、 $n \geq 2$ のモードの高次のモードに対しては、Q 値の測定を行った。 $n = 0, 1$ の低次モードについては測定できるモードは全て測定を行った。また、21 ~ 25 番のモードは一応、上の表のようにモードの特定をしたが、Hutchinson の方法と有限要素法の方法で共振周波数が入れ替わり、正確にモードを特定するのが難しい。よって、第 6 章のグラフではこれらの Q 値の値は除いてある。

表 C.1: Al5056 半径 6cm、高さ 6cm の試料の計算結果と実験結果

No	n	p	半解析 (kHz)	FEM(kHz)	測定 (kHz)	Best Q	Loss Angle
1	2	1	13.447	13.404	13.332	1.64×10^5	6.10×10^{-6}
2	2	1	13.447	13.407			
3	2	0	19.784	19.721	19.607	1.85×10^5	5.41×10^{-6}
4	2	0	19.784	19.723			
5	0	1	20.723	20.668	20.676		
6	1	0	22.945	22.879	22.814		
7	1	0	22.945	22.879			
8	3	1	23.697	23.689	23.516	2.03×10^5	4.93×10^{-6}
9	3	1	23.697	23.689			
10	1	1	26.201	26.142	26.263	1.71×10^5	5.85×10^{-6}
11	1	1	26.201	26.142			
12	0	1	26.498*	26.422			
13	0	0	27.688	27.584	27.414	8.72×10^4	1.15×10^{-5}
14	3	0	30.312	30.283	30.053	2.01×10^5	4.98×10^{-6}
15	3	0	30.312	30.283			
16	4	1	33.318	33.410	33.068	2.05×10^5	4.88×10^{-6}
17	4	1	33.318	33.425			
18	2	0	33.506	33.437	33.223	2.02×10^5	4.95×10^{-6}
19	2	0	33.506	33.451			
20	2	1	34.229	34.181	34.112	2.31×10^5	4.33×10^{-6}
21	2	1	34.229	34.185			
22	1	1	34.354	34.256	34.185		
23	1	1	34.354	34.256			
24	1	0	38.900	38.836	38.375	8.90×10^4	1.12×10^{-5}
25	1	0	38.900	38.836			
26	3	0	39.025	38.949	38.606	2.20×10^5	4.55×10^{-6}
27	3	0	39.025	38.949			
28	1	1	38.972	38.993			
29	1	1	38.972	38.993			
30	4	0	39.164	39.248	38.821	2.18×10^5	4.59×10^{-6}
31	4	0	39.164	39.255	38.823	2.26×10^5	
32	0	1	39.814	39.807	38.952		
33	0	0	40.028	39.928	39.669	1.33×10^5	7.52×10^{-6}
34	1	0	41.380	41.319	41.018	2.47×10^5	4.05×10^{-6}
35	1	0	41.380	41.319			
36	2	0	41.720	41.678	41.422	2.43×10^5	4.12×10^{-6}
37	2	0	41.720	41.688			
38	3	1	42.042	42.053	41.866	2.52×10^5	3.97×10^{-6}
39	3	1	42.042	42.053			
40	5	1	42.471	42.776	42.145	2.12×10^5	4.72×10^{-6}
41	5	1	42.471	42.776			
42	0	0	43.316*	43.292			
43	2	1	44.377	44.279	43.893	2.27×10^5	4.41×10^{-6}
44	2	1	44.377	44.298			
45	4	0	44.330	44.300	43.895	2.25×10^5	4.44×10^{-6}
46	4	0	44.330	44.302			
47	5	0	47.014	47.307	46.572	2.30×10^5	4.35×10^{-6}
48	5	0	47.014	47.307			
49	2	0	47.807	47.794	47.355	2.54×10^5	3.94×10^{-6}
50	2	0	47.807	47.834			
51	0	0	48.365	48.371	48.007	9.25×10^4	1.08×10^{-5}
52	2	1	49.683	49.800	49.526	2.50×10^5	4.00×10^{-6}
53	2	1	49.683	49.868			
54	4	1	49.749	49.881	49.589	2.52×10^5	3.97×10^{-6}
55	4	1	49.749	49.892			
56	0	0	52.995*	50.714			
57	5	0	51.172	51.323	50.744	2.25×10^5	4.44×10^{-6}
58	5	0	51.172	51.323			

表 C.2: Al5056 半径 6cm、高さ 2cm の試料の計算結果と実験結果

No	n	p	半解析 (kHz)	FEM(kHz)	測定 (kHz)	Best Q	Loss Angle
1	2	1	6.7657	6.6180	6.5955	1.26×10^5	7.95×10^{-6}
2	2	1	6.7657	6.6201			
3	0	1	11.283	11.054	11.138		
4	3	1	14.063	13.974	13.886	1.32×10^5	7.58×10^{-6}
5	3	1	14.063	13.974			
6	2	0	19.788	19.718	19.632	1.62×10^5	6.16×10^{-6}
7	2	0	19.788	19.720			
8	1	1	21.809	21.659	21.615	7.77×10^4	1.29×10^{-5}
9	1	1	21.809	21.659			
10	4	1	22.235	22.262	22.039	1.44×10^5	6.96×10^{-6}
11	4	1	22.235	22.271			
12	1	0	23.213	23.137	23.118	8.58×10^4	1.17×10^{-5}
13	1	0	23.213	23.137			
14	0	0	29.919	29.799	29.802	2.07×10^5	4.83×10^{-6}
15	3	0	30.396	30.340	30.176	1.75×10^5	5.72×10^{-6}
16	3	0	30.396	30.340			
17	5	1	30.858	31.101	30.630	1.47×10^5	6.82×10^{-6}
18	5	1	30.858	31.101			
19	2	1	32.640	32.582	32.445	1.74×10^5	5.73×10^{-6}
20	2	1	32.640	32.636			
21	0	1	35.296	36.326	35.186	4.87×10^4	2.06×10^{-5}
22	2	0	36.005	35.925	35.865	2.18×10^5	4.58×10^{-6}
23	2	0	36.005	35.943			
24	4	0	39.588	39.610	39.320	2.05×10^5	4.89×10^{-6}
25	4	0	39.588	39.617			
26	6	1	39.694	40.258	39.427	1.62×10^5	6.18×10^{-6}
27	6	1	39.694	40.263	39.428	1.63×10^5	6.14×10^{-6}
28	0	0	43.316*	43.251			
29	3	1	43.351	43.484	43.138	1.89×10^5	5.30×10^{-6}
30	3	1	43.351	43.484	43.139	1.91×10^5	5.23×10^{-6}
31	1	1	47.711	47.993	47.871	2.32×10^5	4.31×10^{-6}
32	1	1	47.711	47.993			
33	5	0	48.194	48.386	48.301	1.50×10^5	6.67×10^{-6}
34	5	0	48.194	48.386			
35	3	0	49.336	49.331	49.150	1.93×10^5	5.17×10^{-6}
36	3	0	49.336	49.331			
37	7	1	45.342	49.631			
38	7	1	45.342	49.631			
39	1	0	50.600	50.501	50.297	1.16×10^5	8.63×10^{-6}
40	1	0	50.600	50.501			
41	4	1	53.808	54.149	53.559	1.96×10^5	5.09×10^{-6}
42	4	1	53.808	54.175			
43	6	0	56.502	56.965	56.128	1.96×10^5	5.11×10^{-6}
44	6	0	56.502	56.967			
45	1	0	57.707	57.701	57.177	1.68×10^5	5.94×10^{-6}
46	1	0	57.707	57.701			

表 C.3: Al5056 半径 6cm、高さ 1cm の試料の計算結果と実験結果

No	n	p	半解析 (kHz)	FEM(kHz)	測定 (kHz)	Best Q	Loss Angle
1	2	1	3.9774	3.5582	3.5522	1.07×10^5	9.31×10^{-6}
2	2	1	3.9774	3.5595			
3	0	1	6.8640	6.0971	6.5380		
4	3	1	8.3056	8.0184	7.9835	1.06×10^5	9.43×10^{-6}
5	3	1	8.3056	8.0184			
6	1	1	13.727	13.111	13.103	1.49×10^4	7.72×10^{-5}
7	1	1	13.727	13.111			
8	4	1	13.698	13.599	13.480	1.05×10^5	9.53×10^{-6}

9	4	1	13.698	13.604			
10	2	0	19.400	19.718	19.628	1.41×10^5	7.11×10^{-6}
11	2	0	19.400	19.720			
12	5	1	19.912	20.108	19.807	1.09×10^5	9.14×10^{-6}
13	5	1	19.912	20.108			
14	2	1	21.661	21.276	21.212	1.10×10^5	9.13×10^{-6}
15	2	1	21.661	21.322			
16	1	0	22.854	23.154	23.136	4.52×10^4	2.21×10^{-5}
17	1	0	22.854	23.154			
18	0	1	23.670	23.252	23.390		
19	6	1	26.752	27.368	26.766	1.15×10^5	8.69×10^{-6}
20	6	1	26.752	27.371			
21	0	0	29.942	29.957			
22	3	1	30.267	30.220	29.969	1.81×10^5	5.52×10^{-6}
23	3	1	30.267	30.220	30.006	1.18×10^5	8.51×10^{-6}
24	3	0	29.814	30.345	30.177	1.80×10^5	5.57×10^{-6}
25	3	0	29.814	30.345			
26	1	1	33.898	33.930	33.566	7.90×10^4	1.27×10^{-5}
27	1	1	33.898	33.930			
28	7	1		35.259	34.203	1.21×10^5	8.27×10^{-6}
29	7	1		35.259			
30	2	0	35.511	36.002	35.946	1.77×10^5	5.65×10^{-6}
31	2	0	35.511	36.002			
32	4	1	39.294	39.626	39.214	1.27×10^5	7.90×10^{-6}
33	4	0	38.854	39.627	39.333	1.77×10^5	5.65×10^{-6}
34	4	0	38.854	39.635			
35	4	1	39.294	39.650			
36	0	0	43.316*	43.251			
37	8	1		43.670			
38	8	1		43.687			
39	2	1	44.361	44.761	44.247	1.33×10^5	7.54×10^{-6}
40	2	1	44.361	45.002			
41	0	1	46.004	46.600	46.002		
42	5	0	47.329	48.424	47.913	1.90×10^5	5.27×10^{-6}
43	5	0	47.329	48.424			
44	5	1	48.580	49.414	48.669	1.25×10^5	8.00×10^{-6}
45	5	1	48.580	49.414			
46	3	0	48.736	49.533	49.355	1.78×10^5	5.63×10^{-6}
47	3	0	48.736	49.533			
48	1	0	50.594	51.046	50.890	5.92×10^4	1.69×10^{-5}
49	1	0	50.594	51.046			
50	9	1		52.557			
51	9	1		52.557			
52	3	1	54.908	55.954	55.003	1.24×10^5	8.04×10^{-6}
53	3	1	54.908	55.954			
54	6	0	55.525	57.042	56.210	2.19×10^5	4.57×10^{-6}
55	6	0	55.525	57.044			
56	1	0	56.907	57.891	57.550	1.43×10^5	6.97×10^{-6}
57	1	0	56.907	57.891			
58	1	1	57.819	59.193	57.870	1.00×10^5	1.00×10^{-5}
59	1	1	57.819	59.193			
60	6	1	58.017	59.451	58.272	1.39×10^5	7.22×10^{-6}
61	6	1	58.017	59.455			
62	10	1		61.831			
63	10	1		61.854			
64	4	0	62.006	63.205	62.823	1.53×10^5	6.52×10^{-6}
65	4	0	62.006	63.237			
66	2	0	63.882	64.932	64.343	1.88×10^5	5.33×10^{-6}
67	2	0	63.882	64.943			
68	7	0		65.625			
69	7	0		65.625			
70	4	1	65.454	67.051	66.659	1.35×10^5	7.40×10^{-6}
71	4	1	65.654	67.133			

C.1.2 円板の Q 値

半径 6cm、厚さ 4mm の試料

1kHz から 39kHz までの範囲で見付ける事が出来る全てのモードを調べた。その結果を表 C.4 に示す。 $n \geq 2$ の高次モードに対しては、面外モードは全て特定し、Q 値の測定を行った。 $n = 0, 1$ の低次モードは、共振が発見できないものと、発見できても、減衰が速く、Q 値がうまく測定できないものがあった。

半径 6cm、厚さ 3mm の試料

1kHz から 36kHz までの範囲で見付ける事が出来る全てのモードを調べた。その結果を表 C.5 に示す。面外振動の高次モードの中で $n = 10$ の 44 番と 45 番及び、 $n = 11$ の 55 番と 56 番は共振を発見できなかった。また、 $n = 0, 1$ の低次モードはほとんどが、発見できなかった。発見できた 19 番の $n = 1$ のモードは Q 値が 10^3 のオーダーで、高次モードに比べて 1 桁小さく、支持による損失が大きいことがわかる。

半径 6cm、厚さ 2mm の試料

700Hz から 21kHz までの範囲で見付ける事が出来る全てのモードを調べた。その結果を表 C.6 に示す。高次モードの面外振動の Q 値は全て測定した。また $n = 0, 1$ の低次モードのほとんどが、発見できなかった。発見できた $n = 1$ のモードは Q 値が 10^3 のオーダーで、高次モードに比べて 1 桁小さい。

表 C.4: Al5056 半径 6cm、厚さ 4mm の試料の計算結果と実験結果

No	n	解析 (kHz)	FEM(kHz)	測定 (kHz)	Best Q	Loss Angle
1	2	1.4751	1.4602	1.4751	6.37×10^4	1.57×10^{-5}
2	2	1.4751	1.4605			
3	0	2.5433	2.5191			
4	3	3.4338	3.3806	3.4146	7.29×10^4	1.37×10^{-5}
5	3	3.4338	3.3806			
6	1	5.7528	5.6490	5.7346	5.65×10^3	1.77×10^{-4}
7	1	5.7528	5.6490			
8	4	6.0372	5.9134	5.9568	7.65×10^4	1.31×10^{-5}
9	4	6.0372	5.9147			
10	5	9.2721	9.0379	9.0607	8.20×10^4	1.22×10^{-5}
11	5	9.2721	9.0379			
12	2	9.8836	9.5909	9.7093	6.79×10^4	1.47×10^{-5}
13	2	9.8836	9.6061			
14	0	10.800	10.517			
15	6	13.127	12.732	12.687	8.60×10^4	1.18×10^{-5}
16	6	13.127	12.733			
17	3	14.842	14.241	14.364	8.35×10^4	1.20×10^{-5}
18	3	14.842	14.241			
19	1	16.787	16.148	16.231	1.66×10^4	6.02×10^{-5}
20	1	16.787	16.148			
21	7	17.595	16.982	16.796	8.85×10^4	1.13×10^{-5}
22	7	17.595	16.982			
23	4	20.576	19.495	19.599	8.80×10^4	1.14×10^{-5}
24	4	20.576	19.504			
25	2		19.709			
26	2		19.711			
27	8	22.669	21.770	21.353	9.59×10^4	1.04×10^{-5}
28	8	22.669	21.775			
29	2	23.663	22.376	22.450	8.70×10^4	1.15×10^{-5}
30	2	23.663	22.477			
31*	1		23.146			
32*	1		23.146			
33	0	24.627	23.383	24.223		
34	5	27.065	25.321	25.340	9.60×10^4	1.04×10^{-5}
35	5	27.065	25.321			
36	9	28.345	27.094	26.316	9.70×10^4	7.86×10^{-6}
37	9	28.345	27.094			
38	3	31.383	29.260	29.194	9.40×10^4	1.06×10^{-5}
39	3	31.383	29.260			
40*	0		29.989			
41*	3		30.315			
42*	3		30.315			
43	1	33.375	31.204	30.959	5.01×10^4	2.00×10^{-5}
44	1	33.375	31.204			
45	6	34.280	31.663	31.529	1.05×10^5	9.53×10^{-6}
46	6	34.280	31.665			
47	10	34.619	32.933	31.655	9.44×10^4	1.06×10^{-5}
48	10	34.619	32.939			
49*	2		35.988			
50*	2		36.001			
51	4	39.916	36.568	36.376	1.01×10^5	9.89×10^{-6}
52	4	39.916	36.608			
53	7	42.207	38.495	37.329	9.95×10^4	1.01×10^{-5}
54	7	42.207	38.495			
55	11	41.488	39.294	38.101	1.03×10^5	9.69×10^{-6}
56	11	41.488	39.294			
57	2	43.001	39.343	38.997	1.06×10^5	9.42×10^{-6}
58*	4		39.560			
59*	4		39.565			
60	2	43.001	39.674			

表 C.5: Al5056 半径 6cm、厚さ 3mm の試料の計算結果と実験結果

No	n	解析 (kHz)	FEM(kHz)	測定 (kHz)	Best Q	Loss Angle
1	2	1.0852	1.0990	1.1193	4.05×10^4	1.15×10^{-5}
2	2	1.0852	1.0993			
3	0	1.8947	1.8957			
4	3	2.5820	2.5537	2.6047	4.95×10^5	2.02×10^{-5}
5	3	2.5820	2.5537			
6	1	4.2745	4.2717			
7	1	4.2745	4.2717			
8	4	4.4482	4.4868	4.5666	5.73×10^4	1.74×10^{-5}
9	4	4.4482	4.4879			
10	5	6.8358	6.8939	6.9821	5.96×10^4	1.68×10^{-5}
11	5	6.8358	6.8939			
12	2	7.3352	7.2934	7.4535	4.59×10^4	2.18×10^{-5}
13	2	7.3352	7.3075			
14	0	8.0232	8.0024			
15	6	9.6826	9.7710	9.8290	6.49×10^4	1.54×10^{-5}
16	6	9.6826	9.7717			
17	3	11.008	10.901	11.094	5.64×10^4	1.77×10^{-5}
18	3	11.008	10.901			
19	1	12.467	12.379	12.543	2.77×10^3	3.61×10^{-4}
20	1	12.467	12.379			
21	7	12.983	13.122	13.085	7.28×10^4	1.37×10^{-5}
22	7	12.983	13.122			
23	4	15.259	15.028	15.236	6.59×10^4	1.52×10^{-5}
24	4	15.259	15.037			
25	8	16.732	16.950	16.728	7.50×10^4	1.33×10^{-5}
26	8	16.732	16.955			
27	2	17.567	17.283	17.477	6.57×10^4	1.52×10^{-5}
28	2	17.567	17.379			
29	0	18.288	18.091			
30	5	20.066	19.669	19.833	7.44×10^4	1.34×10^{-5}
31	5	20.066	19.669			
32*	2		19.713			
33*	2		19.715			
34	9	20.927	21.271	20.736	7.34×10^4	1.36×10^{-5}
35	9	20.927	21.271			
36	3	23.293	22.801	22.899	7.70×10^4	1.30×10^{-5}
37	3	23.293	22.801			
38*	1		23.152			
39*	1		23.152			
40	1	24.781	24.377			
41	1	24.781	24.377			
42	6	25.412	24.794	24.845	7.60×10^4	1.32×10^{-5}
43	6	25.412	24.796			
44	10	2.5565	2.6087			
45	10	2.5565	2.6093			
46	4	29.620	28.737	28.753	8.06×10^4	1.24×10^{-5}
47	4	29.620	28.780			
48*	0		29.997			
49*	3		30.328			
50*	3		30.328			
51	7	31.287	30.403	30.232	8.86×10^4	1.13×10^{-5}
52	7	31.287	30.403			
53	2	31.923	31.002	30.878	8.35×10^4	1.20×10^{-5}
54	2	31.923	31.330			
55	11	30.644	31.424			
56	11	31.644	31.424			
57	0	32.667	31.988			
58	5	36.532	35.170	35.966	8.39×10^4	1.96×10^{-5}

表 C.6: Al5056 半径 6cm、厚さ 4mm の試料の計算結果と実験結果

No	n	解析 (kHz)	FEM(kHz)	測定 (kHz)	Best Q	Loss Angle
1	2	0.7379	0.7395	0.7143	1.31×10^4	7.62×10^{-5}
2	2	0.7379	0.7397			
3	0	1.2717	1.2747			
4	3	1.7169	1.7263	1.6780	1.60×10^4	6.27×10^{-5}
5	3	1.7169	1.7263			
6	1	2.8764	2.8852	2.8220	2.36×10^3	4.24×10^{-4}
7	1	2.8764	2.8852			
8	4	3.0186	3.0515	2.9593	2.39×10^4	4.18×10^{-5}
9	4	3.0186	3.0524			
10	5	4.6360	4.7237	4.5469	2.81×10^4	3.56×10^{-5}
11	5	4.6360	4.7237			
12	2	4.9418	4.9497	4.8324	1.68×10^4	5.94×10^{-5}
13	2	4.9418	4.9652			
14	0	5.3996	5.4403			
15	6	6.5637	6.7542	6.4301	2.95×10^4	3.39×10^{-5}
16	6	6.5637	6.7561			
17	3	7.4201	7.4496	7.2358	2.19×10^4	4.57×10^{-5}
18	3	7.4201	7.4496			
19	1	8.3936	8.4787	8.1637	3.49×10^3	2.87×10^{-4}
20	1	8.3936	8.4787			
21	7	8.7975	9.1664	8.6022	3.35×10^4	2.99×10^{-5}
22	7	8.7975	9.1664			
23	4	10.289	10.345	10.001	2.71×10^4	3.70×10^{-5}
24	4	10.289	10.356			
25	2	11.832	11.914	11.449	3.27×10^4	3.06×10^{-5}
26	8	11.335	11.981	11.051	3.62×10^4	2.76×10^{-5}
27	8	11.335	11.986			
28	2	11.832	12.020			
29	0	12.313	12.520			
30	5	13.533	13.661	13.103	2.98×10^4	3.35×10^{-5}
31	5	13.533	13.661			
32	9	14.173	15.240	13.770	3.75×10^4	2.66×10^{-5}
33	9	14.173	15.240			
34	3	15.692	15.879	15.111	3.44×10^4	2.90×10^{-5}
35	3	15.692	15.879			
36	1	16.688	17.056	16.044		
37	1	16.688	17.056			
38	6	17.140	17.394	16.523	3.31×10^4	3.02×10^{-5}
39	6	17.140	17.396			
40	10	17.310	17.394	16.753	3.90×10^4	2.57^{-5}
41	10	17.310	17.396			
42*	2		19.823			
43*	2		19.826			
44	4	19.956	20.192	19.119	3.51×10^4	2.85×10^{-5}
45	4	19.956	20.247			

C.1.3 ねじれ型振動子の Q 値

ねじれ型振動子の芯の太さを 4.0cm, 3.5cm, 3cm, 2.5cm, 2.0cm, 1.0cm にして、それぞれのねじれモードの Q 値を測定した。測定のやり方は、ねじれ型振動子を測定装置に 2 ～ 3 回置いて、それぞれの置いた状態で 3 ～ 5 回測定行うという方法をとった。その中で得られた Q 値の最大値と最小値を表 6.7 に示す。

表 C.7: ねじれ型振動子の計算結果と実験結果

芯の太さ (cm)	FEM(kHz)	測定 (kHz)	Q	Loss Angle
4.0	3.9290	3.8375	$1.76 \sim 1.86 \times 10^5$	$5.68 \sim 5.37 \times 10^{-6}$
3.5	3.1460	3.0180	$1.83 \sim 1.96 \times 10^5$	$5.45 \sim 5.09 \times 10^{-6}$
3.0	2.3711	2.2638	$1.96 \sim 2.05 \times 10^5$	$5.11 \sim 4.87 \times 10^{-6}$
2.5	1.6932	1.6103	$2.13 \sim 2.35 \times 10^5$	$4.50 \sim 4.28 \times 10^{-6}$
2.0	1.1229	1.0618	$2.11 \sim 2.26 \times 10^5$	$4.73 \sim 4.42 \times 10^{-6}$
1.0	0.3026	0.2872	$2.08 \sim 2.35 \times 10^5$	$4.82 \sim 4.26 \times 10^{-6}$

C.2 Al1070のQ値

測定した試料は半径 6cm、高さ 6cm の円柱と半径 6cm、厚さ 2mm の円板である。

C.2.1 円柱のQ値

半径 6cm、高さ 6cm の試料

13kHz から 34kHz までの範囲で見付ける事が出来る全てのモードを調べた。その結果を表 C.8 に示す。なお、Hutchinson の共振周波数の計算値で*がついているものは、Al5056 と同様にねじれ型振動子の解析解から求めた共振周波数の値である。

$n = 0, 1$ 低次モードは 11 番の $n=1$ のモードを除いて Q 値を測定できなかった。

表 C.8: Al1070 半径 6cm、高さ 6cm の試料の計算結果と実験結果

No	n	p	半解析 (kHz)	FEM(kHz)	測定 (kHz)	Best Q	Loss Angle
1	2	1	13.108	13.128	13.102	1.02×10^5	9.80×10^{-6}
2	2	1	13.108	13.132			
3	2	0	19.271	19.305	19.409	1.23×10^5	8.11×10^{-6}
4	2	0	19.271	19.308			
5	0	1	20.193	20.242	20.644		
6	1	0	22.351	22.397	22.798		
7	1	0	22.351	22.397			
8	3	1	23.093	23.213	23.017	1.11×10^5	9.05×10^{-6}
9	3	1	23.093	23.213			
10	1	1	25.526	25.632	25.484		
11	1	1	25.526	25.632			
12*	0	1	25.811	25.917			
13	0	0	26.974	27.012	27.729	4.90×10^4	2.04×10^{-5}
14	3	0	29.527	29.645	29.773	1.37×10^5	7.30×10^{-6}
15	3	0	29.527	29.645			
16	4	1	32.469	32.754	32.300	1.18×10^5	8.48×10^{-6}
17	2	0	32.642	32.760	33.367	1.41×10^5	7.08×10^{-6}
18	4	1	32.469	32.769	32.311	1.18×10^5	8.47×10^{-6}
19	2	0	32.642	32.773			
20	2	1	33.345	33.509	33.539	1.60×10^5	6.24×10^{-6}
21	2	1	33.345	33.512			

C.2.2 円板のQ値

半径 6cm、厚さ 2mm の試料

700Hz から 21kHz までの範囲で見付ける事が出来る全てのモードを調べた。その結果を表 C.8 に示す。番号に * が付いているモードは面内モードで測定されていない。その他の高次モードの Q 値は全て測定した。また、 $n = 0, 1$ の低次モードはほとんどが、発見できなかった。発見できたモードも減衰が速いので測定されていない。

表 C.9: Al1070 半径 6cm、厚さ 2mm の試料の計算結果と実験結果

No	n	解析 (kHz)	FEM(kHz)	測定 (kHz)	Best Q	Loss Angle
1	2	0.7187	0.7203	0.7165	6.05×10^3	1.65×10^{-4}
2	2	0.7187	0.7205			
3	0	1.2387	1.2416			
4	3	1.6724	1.6816	1.6725	9.02×10^3	1.11×10^{-4}
5	3	1.6724	1.6816			
6	1	2.8019	2.8105			
7	1	2.8019	2.8105			
8	4	2.9404	2.9725	2.9510	1.22×10^4	8.22×10^{-5}
9	4	2.9404	2.9733			
10	5	4.5159	4.6013	4.5276	1.54×10^4	6.50×10^{-5}
11	5	4.5159	4.6013			
12	2	4.8138	4.8214	4.8814	9.25×10^3	1.08×10^{-4}
13	2	4.8138	4.8365			
14	0	5.2597	5.2994			
15	6	6.3936	6.5792	6.3981	2.00×10^4	5.01×10^{-5}
16	6	6.3936	6.5811			
17	3	7.2285	7.2566	7.2901	1.66×10^4	6.02×10^{-5}
18	3	7.2285	7.2566			
19	1	8.1762	8.2591			
20	1	8.1762	8.2591			
21	7	8.5696	8.9289	8.5565	2.15×10^4	4.66×10^{-5}
22	7	8.5696	8.9289			
23	4	10.023	10.077	10.036	1.74×10^4	5.76×10^{-5}
24	4	10.023	10.087			
25	2	11.521	11.606	11.580	1.79×10^4	5.59×10^{-5}
26	8	11.041	11.671	10.985	2.53×10^4	3.95×10^{-5}
27	8	11.041	11.676			
28	2	11.521	11.709			
29	0	11.994	12.195			
30	5	13.182	13.307	13.132	2.08×10^4	4.82×10^{-5}
31	5	13.182	13.307			
32	9	13.805	14.846	13.691	2.83×10^4	3.54×10^{-5}
33	9	13.805	14.846			
34	3	15.285	15.467	15.264	2.09×10^4	4.79×10^{-5}
35	3	15.285	15.467			
36	1	16.256	16.614	16.255		
37	1	16.256	16.614			
38	6	16.700	16.943	16.546	2.35×10^4	4.25×10^{-5}
39	6	16.700	16.945			
40	10	16.861	18.481	16.657	2.99×10^4	3.35×10^{-5}
41	10	16.861	18.489			
42*	2		19.310			
43*	2		19.313			
44	4	19.441	19.668	19.271	2.55×10^4	3.92×10^{-5}
45	4	19.441	19.722			
46	7	20.557	21.012	20.252	2.84×10^4	3.52×10^{-5}
47	7	20.557	21.102			
48	2	20.943	21.289	20.764	2.55×10^4	3.92×10^{-5}

C.3 Al6061のQ値

測定したのは半径 6cm、高さ 6cm の円柱と、半径 6cm、厚さ 2mm の円板である。測定結果を Al5056,6061 と同じ書き方で示す。

C.3.1 円柱のQ値

半径 6cm、高さ 6cm の試料

13kHz から 34kHz までの範囲で見付ける事が出来る全てのモードを調べた。その結果を表 C.10 に示す。なお、Hutchinson の共振周波数の計算値のうち、ねじれ振動の共振周波数はねじれ振動の解析的な式から求めたものである。それらは*で表わしてある。 $n = 0, 1$ の低次モードは 11 番の $n=1$ のモードを除いて Q 値を測定できなかった。

表 C.10: Al6061 半径 6cm、高さ 6cm の試料の計算結果と実験結果

No	n	p	半解析 (kHz)	FEM(kHz)	測定 (kHz)	Best Q	Loss Angle
1	2	1	13.108	13.128	13.213	2.48×10^6	4.02×10^{-6}
2	2	1	13.108	13.132			
3	2	0	19.271	19.305	19.433	2.25×10^6	4.45×10^{-6}
4	2	0	19.271	19.308			
5	0	1	20.193	20.242	20.563		
6	1	0	22.351	22.397	22.618		
7	1	0	22.351	22.397			
8	3	1	23.093	23.213	23.323	3.16×10^5	9.05×10^{-6}
9	3	1	23.093	23.213			
10	1	1	25.526	25.632	26.062	1.87×10^5	5.34×10^{-6}
11	1	1	25.526	25.632			
12*	0	1	25.811	25.917			
13	0	0	26.974	27.012	27.167	8.97×10^4	1.11×10^{-5}
14	3	0	29.527	29.645	29.798	2.63×10^5	3.80×10^{-6}
15	3	0	29.527	29.645			
16	4	1	32.469	32.754	32.805	3.66×10^5	2.73×10^{-6}
17	2	0	32.642	32.760			
18	4	1	32.469	32.769			
19	2	0	32.642	32.773			

C.3.2 円板のQ値

半径 6cm、厚さ 2mm の試料

700Hz から 21kHz までの範囲で発見できる全てのモードを調べた。その結果を表 C.11 に示す。* が付いている面内モードは測定されていない。その他の高次モードの Q 値は全て測定した。 $n = 0, 1$ の低次モードは全て発見できなかった。Al6061 と Al1070 は質量とヤング率およびポアソン比の値がだいたい等しいので、両者の共振周波数の解析解と有限要素法による数値解は等しくなっている。

表 C.11: Al6061 半径 6cm, 厚さ 2mm の試料の計算結果と実験結果

No	n	解析 (kHz)	FEM(kHz)	測定 (kHz)	Best Q	Loss Angle
1	2	0.7187	0.7203	0.6688	8.61×10^4	1.16×10^{-4}
2	2	0.7187	0.7205			
3	0	1.2387	1.2416			
4	3	1.6724	1.6816	1.6129	1.69×10^4	5.92×10^{-5}
5	3	1.6724	1.6816			
6	1	2.8019	2.8105			
7	1	2.8019	2.8105			
8	4	2.9404	2.9725	2.8733	2.40×10^4	4.17×10^{-5}
9	4	2.9404	2.9733			
10	5	4.5159	4.6013	4.4377	3.24×10^4	3.09×10^{-5}
11	5	4.5159	4.6013			
12	2	4.8138	4.8214	4.8796	1.49×10^4	6.71×10^{-5}
13	2	4.8138	4.8365			
14	0	5.2597	5.2994			
15	6	6.3936	6.5792	6.2927	3.98×10^4	2.51×10^{-5}
16	6	6.3936	6.5811			
17	3	7.2285	7.2566	7.2728	1.90×10^4	5.26×10^{-5}
18	3	7.2285	7.2566			
19	1	8.1762	8.2591			
20	1	8.1762	8.2591			
21	7	8.5696	8.9289	8.4315	4.78×10^4	2.09×10^{-5}
22	7	8.5696	8.9289			
23	4	10.023	10.077	10.025	3.28×10^4	3.05×10^{-5}
24	4	10.023	10.087			
25	2	11.521	11.606	11.533	3.40×10^4	2.94×10^{-5}
26	8	11.041	11.671	10.847	5.71×10^4	1.75×10^{-5}
27	8	11.041	11.676			
28	2	11.521	11.709			
29	0	11.994	12.195			
30	5	13.182	13.307	13.114	4.07×10^4	2.46×10^{-5}
31	5	13.182	13.307			
32	9	13.805	14.846	13.529	6.77×10^4	1.48×10^{-5}
33	9	13.805	14.846			
34	3	15.285	15.467	15.197	4.27×10^4	2.34×10^{-5}
35	3	15.285	15.467			
36	1	16.256	16.614	16.255		
37	1	16.256	16.614			
38	6	16.700	16.943	16.518	5.29×10^4	1.89×10^{-5}
39	6	16.700	16.945			
40	10	16.861	18.481	16.466	7.69×10^4	1.30×10^{-5}
41	10	16.861	18.489			
42*	2		19.310			
43*	2		19.313			
44	4	19.441	19.668	19.201	5.29×10^4	1.89×10^{-5}
45	4	19.441	19.722			
46	7	20.557	21.012	20.211	6.15×10^4	1.63×10^{-5}
47	7	20.557	21.102			
48	2	20.943	21.289	20.764	5.39×10^4	1.86×10^{-5}

関連図書

- [1] A. Einstein, S. B. Preuss. Akada. Wiss. 688(1916), 154(1918).
- [2] J. H. Taylor, J. M. Weisberg, *Astrophys. J.* 345, 434(1989).
- [3] D. Hilbert, *Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachr., Math.-Phys. Kl.*, 395(Nov. 20, 1915)
- [4] A. Einstein, *Preuss. Akad. Wiss.* 844(Nov. 25, 1915)
- [5] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley(1972).
- [6] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健 編, 重力波をとらえる, 京都大学学術出版会 (1998).
- [7] P. R. Saulson, *Phys. Rev. D* 42(1990) 2437.
- [8] H. B. Callen, T. A. Welton, *Phys. Rev.* 83(1951) 34.
- [9] H. B. Callen, R. F. Green, *Phys. Rev.* 86(1952) 702.
- [10] A. Gillespie, f. Raab, *Phys. Rev. D* 52(1995) 74.
- [11] Y. Levin, *Phys. Rev. d*, 57(1998) 57.
- [12] V. B. Braginsky, v. P. Mitrofanov, V. I. Panov, *Systems with Small Dissipation*, The University of Chicago Press(1985).
- [13] C. Zener, *Phys. Rev.* 53(1938) 90.
- [14] D. G. Blair, J. Ferreira, *phys. Rev. Lett.* 49(1982) 375.
- [15] C. Zener, *Proc. Phys. Soc.* 52(1940) 152.
- [16] C. Zener, *Elasticity and Anelasticity of Metals*, The University of Chicago Press(1948).
- [17] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Pergamon(1986).

- [18] American Society of Metals, *metals handbook vol.1 8th ed.*
- [19] A.de Waard, et al. *Physica B* 280(2000)535.
- [20] W.Duffy, Jr, *J. Appl. Phys.* 68 (1990), 5601.
- [21] B.S.Berry, *J. Appl. Phys.* 26, 1221.
- [22] R.H.Randall, F.C.Rose, C.Zener, *Phys. Rev.* 56(1939)343.
- [23] J.R.Hutchinson, *J. Appl. Mech.* 47(1980), 901.
- [24] 山元一広, 修士論文, 東京大学 (1997).
- [25] E.T.Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press(1989).
- [26] 沼田健司, 修士論文, 東京大学 (2000).
- [27] K. Numata et al., *Phys. Lett. A* 276(2000) 37.
- [28] T.Suzuki, K.Tsubono, H.Hirakawa, *Phys. Lett.* 67A(1978), 2.
- [29] K.Seta, S.Iwasaki, *Opt. Comm.* 55(1985) 5.