

修士論文
TAMA300 における
300m Fabry-Perot 共振器の開発

理学系研究科物理学専攻 66078

佐々木 愛一郎

1998 年 1 月

目次

1	はじめに	2
2	レーザー干渉計による重力波検出の原理	3
2.1	重力波	3
2.2	干渉計の応答	3
3	レーザー光の記述	9
3.1	近軸近似	9
3.2	基本 Gaussian モード	9
3.3	Hermite-Gaussian モード	11
3.4	楕円 Gaussian モード	12
3.5	Laguerre-Gaussian モード	12
4	Fabry-Perot 共振器の特性	14
4.1	Fabry-Perot 共振器の内外の電場	14
4.2	Fabry-Perot 共振器の周波数応答	15
4.3	モードマッチング	17
5	Fabry-Perot 共振器の制御理論	21
5.1	制御をかける理由	21
5.2	Pound-Drever method	21
6	300m Fabry-Perot 共振器の開発	25
6.1	300m Fabry-Perot 共振器のスペック	25
6.2	入射光学系	27
6.3	Initial Alignment	28
6.4	Fabry-Perot 共振器の制御	40
7	まとめ	50

1 はじめに

Einstein によって重力波の存在が予言されてから久しいが、その効果の小ささが災いして直接検出には未だに誰も成功していない。しかし重力波の検出は、一般相対論の検証だけでなく重力波天文学という新しい分野を切り開く可能性を秘めており、宇宙を見る新しい手段として期待されている。重力波検出の難しさは、物質との相互作用が極めて微弱であることに起因するが、だからこそ1度放出されるとあらゆる物を透過する。そこで電磁波などでは伝わらない高密度星の内部や宇宙初期の情報を得ることができるのではないかと予想されている。

重力波検出はこうした魅力的な要素を含んでおり、世界的にも盛んに検出器の建設が始まっている。今日の重力波検出器の主流は巨大な Michelson 干渉計を原型としたものである。基本的には、Michelson 干渉計の重力波に対する感度は干渉計の腕の長さに比例する。欧米では数 km という長基線長のレーザー干渉計がつくられている。わが国では国立天文台三鷹キャンパス内に TAMA300 という基線長 300[m] のレーザー干渉計の建設が進んでいる。更に、基線長を延ばすのと同等の効果を得るために、Michelson 干渉計の腕の部分

を距離の長い Fabry-Perot 共振器にした Fabry-Perot-Michelson Interferometer(FPMI) という方式のものが世界の主流で、TAMA300 でもこの方式を採用している。

今回我々のグループでは、300[m] という世界最長の Fabry-Perot 共振器を共振状態に制御することに成功した。本論文の内容は、光共振器を理解するための一般的な事柄から始まって、実際の 300m Fabry-Perot 共振器を共振状態へ導くまでの過程までが記されている。

2 レーザー干渉計による重力波検出の原理

2.1 重力波

重力場の効果は、ミンコフスキー空間 (平坦な時空) からの摂動と考えることができる。すなわち、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1)$$

と考える。 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ を満たしている場合には、 $h_{\mu\nu}$ の 2 次以上の項は無視しても差し支えない。式 (1) を Einstein 方程式に代入してこのような近似をし、更に Lorentz gauge 条件を課すと、以下の方程式が得られる。

$$\left(-\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \Delta\right) h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2)$$

これは線型化された Einstein 方程式と呼ばれている。真空中では $T_{\mu\nu} = 0$ なので、式 (2) は波動方程式に帰着される。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{\mu\nu} = c^2 \Delta h_{\mu\nu} \quad (3)$$

式 (3) は、 $h_{\mu\nu}$ が平坦な時空を光速で伝わる波であることを表している。これが重力波である。更に TT gauge 条件を課すと、 $h_{\mu\nu}$ の独立な成分は 2 つしかないことがわかる。このことは、重力波が 2 つの偏光を持っていることを表している。

2.2 干渉計の応答

重力波は、2 つの自由質点間の空間的な距離を変化させる。この距離の変化を検出するための装置としてレーザー干渉計が挙げられる。自由質点としては干渉計を構成する鏡を利用する。自由質点に近い状態を実現するために、重力波を検出するためのレーザー干渉計を構成する鏡はワイヤーで吊られている。

ここでは図 1 のような単純な Michelson 干渉計が重力波に対してどのような応答をするかを考える。レーザーから出た光は beam splitter (BS) によって 2 つの方向 (x 及び y 方向) にまず分けられ、それぞれ鏡で反射された後に beam splitter で重ね合わされて photo detector (PD) に入射する。この現象を定量的に考えてみる。

BS に当たる直前のレーザー光の電場を

$$E_{\text{in}} = E_0 \exp[j\omega t] \quad (4)$$

と表す。2 方向に分けられた光が BS を通過した直後から、再び BS に戻って来る直前までに得る位相変化をそれぞれ ϕ_x 、 ϕ_y とする。また、BS で再結合してから PD に入射するまでに得る位相変化を ϕ_0 とする。このとき、PD の位置における光電場は、

$$E_{\text{out1}} = \frac{1}{2} E_0 \exp[j(\omega t - \phi_y - \phi_0)] - \frac{1}{2} E_0 \exp[j(\omega t - \phi_x - \phi_0)] \quad (5)$$

であるのでその強度は、

$$\begin{aligned}
 I_{\text{out1}} &= |E_{\text{out1}}|^2 \\
 &= \frac{1}{2} E_0^2 \{1 - \cos(\phi_y - \phi_x)\} \\
 &= \frac{1}{2} E_0^2 \{1 - \cos(\phi)\}
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\phi \equiv \phi_y - \phi_x \tag{7}$$

となる。

また同様な考え方をすると、レーザーの方に戻っていく光の強度は

$$\begin{aligned}
 I_{\text{out2}} &= |E_{\text{out2}}|^2 \\
 &= \left| -\frac{1}{2} E_0 \exp[j\omega t - \phi_x] - \frac{1}{2} E_0 \exp[j\omega t - \phi_y] \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} E_0^2 \{1 + \cos(\phi_y - \phi_x)\} \\
 &\equiv \frac{1}{2} E_0^2 \{1 + \cos(\phi)\}
 \end{aligned} \tag{8}$$

となる。蛇足であるが、

$$I_{\text{out1}} + I_{\text{out2}} = E_0^2 = \text{const.} \tag{9}$$

が成立している (エネルギー保存)。

光の時間平均強度が I_{AV} のとき、その平方根に比例する強度の揺らぎ (散射雑音、光子数雑音、shot noise などと呼ばれる) が存在する。実際に干渉計を動作させる際には、光の散射雑音の影響を少なくするために、 I_{out1} が最小になるように制御をかける (dark fringe)。

このような干渉計に対して、 z 方向に進む p +モードの重力波が入射する場合を考える。このような重力波は、干渉計とのカップリングが最も強いものである。

光の伝搬は以下の式に従う。

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \tag{10}$$

ただし、ギリシャ文字は 0 から 3 までの整数で、記号は通常の相対論で用いられるものと同じ意味で使われている。この式を、干渉計の x 軸に沿って伝搬する光に適用すると、この光の伝搬は以下の式に従う。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \{1 + h(t)\} dx^2 = 0 \tag{11}$$

ただし $h(t)$ は重力波の振幅を表す。例えば 2 つの自由質点間の、(重力が作用していないときの) 距離を l とすると、 $h(t)$ という重力波が来た時には 2 つの自由質点間の距離は $\{1 + h(t)/2\}l$ になる。

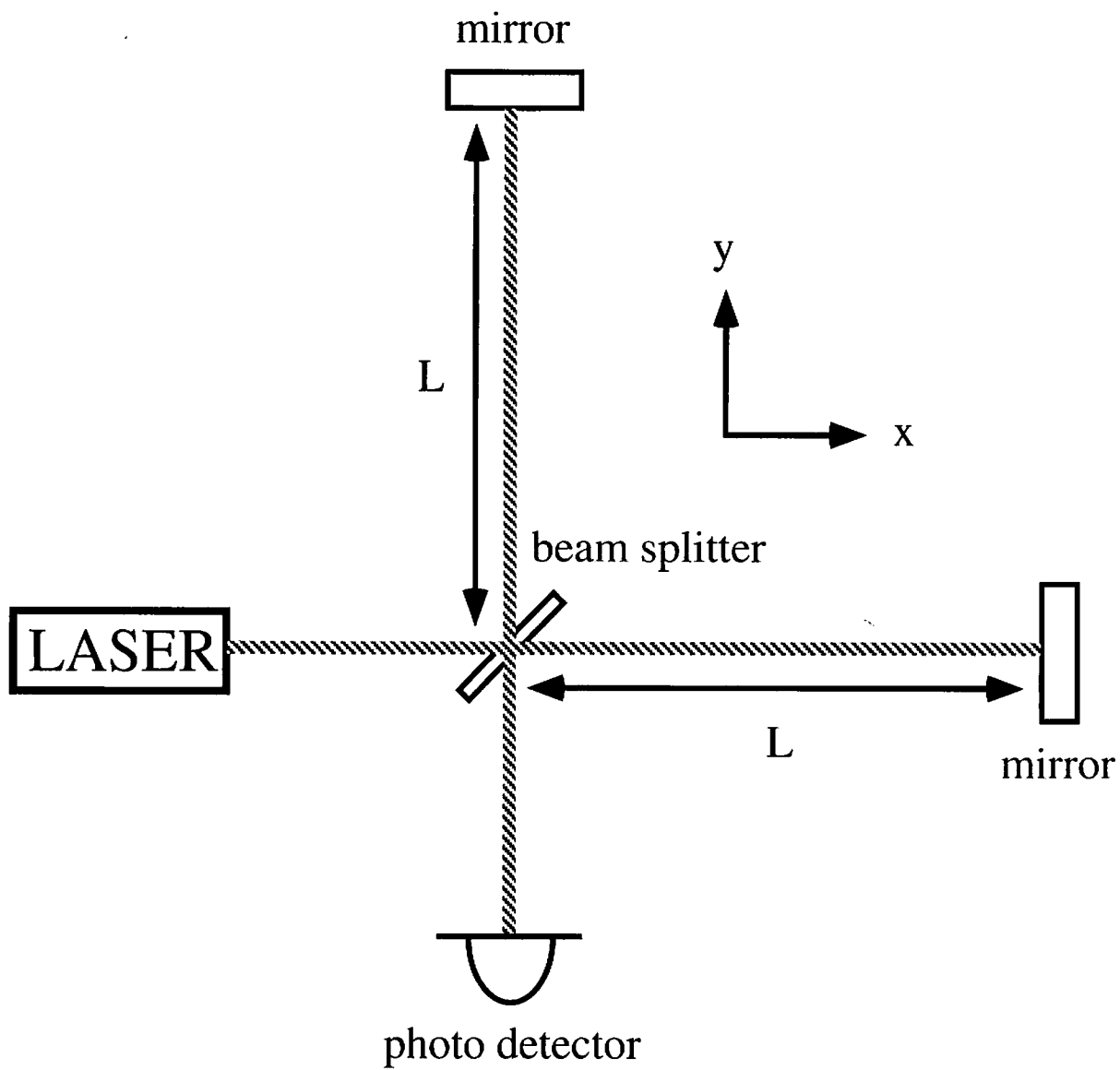


图 1: Michelson 干涉計

この式を、 $h(t) \ll 1$ として近似すると、

$$1 - \frac{1}{2}h(t) \simeq \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} \quad (12)$$

となる。ここで、光が x 軸上で BS と鏡の間を 1 往復するのにかかる時間 Δt_x を求めるために両辺を積分すると、

$$\int_{t-\Delta t_x}^t \left[1 - \frac{1}{2}h(t') \right] dt' = \frac{2L}{c} \quad (13)$$

なので、

$$\Delta t_x = \frac{2L}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\Delta t_x}^t h(t') dt' \quad (14)$$

となる。さらに、重力波の効果は非常に小さいので、積分の下限に含まれる Δt_x を $2L/c$ で近似すると、

$$\Delta t_x \simeq \frac{2L}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2L}{c}}^t h(t') dt' \quad (15)$$

と表せる。 $2L/c$ は重力波が来ないときに光が往復するのにかかる時間なので、重力波の影響は時間に換算すると上式の右边第 2 項であることがわかる。レーザーの角周波数は ω なので、光が x 軸上で BS と鏡の間を 1 往復する間に重力波が光に与える位相変化は、

$$\delta_x = \frac{\omega}{2} \int_{t-\frac{2L}{c}}^t h(t') dt' \quad (16)$$

となる。

y 軸上を往復する光についても同様に考えられる。この光の伝搬は、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \{1 - h(t)\} dx^2 = 0 \quad (17)$$

という式に従う。つまり、 x 軸上を伝搬する光とは重力波の効果が反対である。違いはこれだけなので、結局

$$\delta_y = -\delta_x \quad (18)$$

となることがすぐわかる。Michelson 干渉計が検出するのは ϕ であることを考慮すると、重力波が干渉計に与える位相変化は

$$\phi_g = \omega \int_{t-\frac{2L}{c}}^t h(t') dt' \quad (19)$$

ということになる。

また、Michelson 干渉計の重力波に対する周波数応答を考えることができる。 $h(t)$ の Fourier 変換を $H(\Omega)$ とすると、

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (20)$$

となる。これを式 (19) に代入して、積分の順序を入れ換えると、

$$\delta(t) = \omega \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega H(\Omega) \int_{t-\frac{2L}{c}}^t dt' e^{j\Omega t'} \quad (21)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} H(\Omega) \left[\frac{2\omega}{\Omega} \sin\left(\frac{L\Omega}{c}\right) \exp\left(-j\frac{L\Omega}{c}\right) \right] e^{j\Omega t} d\Omega \quad (22)$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty} H(\Omega) G_M(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (23)$$

とできるので、

$$G_M(\Omega) \equiv \frac{2\omega}{\Omega} \sin\left(\frac{L\Omega}{c}\right) e^{-j\frac{L\Omega}{c}} \quad (24)$$

を Michelson 干渉計の重力波に対する感度の周波数応答関数とみなすことができる。

式 (24) を見てわかるように、周波数の決まった重力波を検出するためには

$$\frac{L\Omega}{c} = \frac{\pi}{2} \quad (25)$$

を満たすときに $|G_M(\Omega)|$ が最大になるので、このときに干渉計の感度も最大になることがわかる。例えば 300[Hz] の重力波に対しては $L=250[\text{km}]$ という非常に大きな値になってしまう。このような長基線長の Michelson 干渉計を建設するのはいろいろな意味で地上では難しいので、それを解決するための案として Delay-Line 方式と Fabry-Perot 方式というものが考えられている (図 2)。前者は Michelson 干渉計の 2 本の腕それぞれに 2 枚の鏡を配置して、それらの間を異なった経路で何度も光に往復させることによって実際に光路長を稼いでいる。例えば基線長 1[km] の Delay-Line 型干渉計で $L=250[\text{km}]$ の単純 Michelson 干渉計と同じ性能に到達するには、光を 250 回往復させれば良い。

今日世界で主流になっているのは後者のタイプで、Michelson 干渉計の腕の部分 Fabry-Perot 共振器に置き換えたものである (FPMI)。光を共振器の中で多重反射させることによって実効的に光路長を長くしている。欧米ではすでに km スケールの FPMI の建設が進んでいる。日本でも将来的には km スケールの FPMI を建設することが検討されている。TAMA 計画は、将来の km スケールの FPMI に必要な技術を確認するために発足した。とはいえ TAMA300 は、銀河系近傍でのイベントによる重力波を直接検出する機能を持つものとして期待されている。

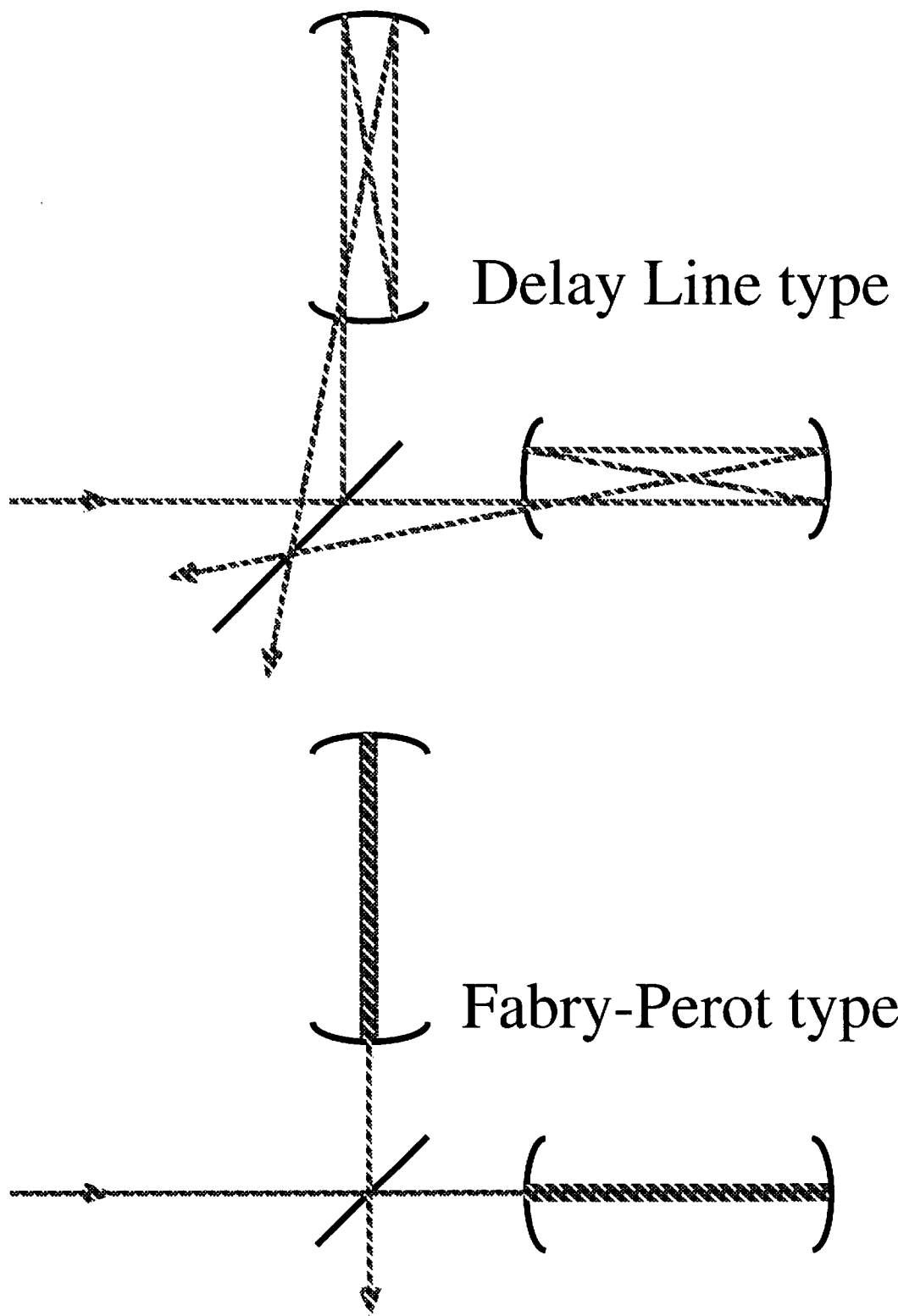


図 2: Delay-Line 型および Fabry-Perot 型のレーザー干渉計

3 レーザー光の記述

3.1 近軸近似

レーザー光は平面波に近いと言われているが、厳密な平面波ではない。実際のレーザー光は位置に依存する有限のビーム径を持つ。また波面も平面ではなく、位置によって等位相面の形状も異なる。Fabry-Perot 共振器を考える際にはレーザー光のこのような性質までも考慮しなければならぬ。そこで、 z 方向に進むレーザー光の複素振幅に空間依存性を持たせるために、次のようにおく [4]。

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \exp[j(\omega t - kz)] \quad (26)$$

ここで k は波数、 ω は角振動数である。光速 c を使うと $\omega = ck$ の関係がある。この式を波動方程式

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Psi \quad (27)$$

に代入し、更に z 方向についての変化が緩やかであるとして z に関する 2 階微分の項を無視する (近軸近似) と、 ψ に対する以下の方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2jk \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (28)$$

3.2 基本 Gaussian モード

ここで ψ を次のような形の解だと仮定する (基本 Gaussian モード)。

$$\psi = \exp \left[-j \left(P(z) + \frac{k}{2q(z)} r^2 \right) \right] \quad (29)$$

ただし、 $r^2 = x^2 + y^2$ である。すると $q(z)$ と $P(z)$ に関する微分方程式が得られる。

$$\frac{dq(z)}{dz} = 1 \quad (30)$$

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{j}{q(z)} \quad (31)$$

更に、実数 $R(z)$ と $w(z)$ を用いて $q(z)$ を以下のように表す。

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi w(z)^2} \quad (32)$$

これを式 (29) に代入すればわかることだが、 $R(z)$ と $w(z)$ は物理的な意味を持っていて、それぞれ波面の曲率半径、ビーム径を表している。基本 Gaussian モードのビームを、 $z = \text{const.}$ の平面で切ったときの強度分布は、Gauss 分布となる。そのような平面 (x - y

平面) 上で、原点における強度の e^{-2} 倍になるような点から原点までの距離でビーム径を定義する。ビーム径が最小になるような部分をビームウエストと呼び、ウエストサイズを w_0 で表す。また、ウエストポジションを原点にとる。つまり、 $w(0) = w_0$ と記す。ウエストでの等位相面は平面であると考え、

$$q_0 = j \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (33)$$

となる。よって、式 (30) より

$$q(z) = q_0 + z = j \frac{\pi w_0^2}{\lambda} + z \quad (34)$$

と表せる。式 (32) と式 (34) を使うと、以下の有用な式が得られる。

$$w(z)^2 = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] \quad (35)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad (36)$$

更に式 (34) を式 (31) に代入すると、

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{j}{q(z)} = -\frac{j}{z + j \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda} \right)} \quad (37)$$

式 (37) を積分すると、

$$P(z) = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] - \eta(z) \quad (38)$$

ただし、

$$\eta(z) \equiv \tan^{-1} \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \quad (39)$$

$\eta(z)$ は Guoy phase と呼ばれるものである。以上の結果を用いると、基本 Gaussian モードのビームは次のように表せる。

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) &\equiv \psi(x, y, z) \exp[j(\omega t - kz)] \\ &= \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{(w(z))^2} \right] \exp \left[j \left(\omega t - kz - \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} + \eta(z) \right) \right] \end{aligned} \quad (40)$$

$w_0/w(z)$ は、ビームが広がった分だけエネルギーの空間密度が減っていることを表す。 $\exp \left[-(x^2 + y^2)/w(z)^2 \right]$ は、ビームの断面の強度分布が Gauss 関数であることを表す。 $k(x^2 + y^2)/\{2R(z)\}$ は、波面が球面であることを表す。Guoy phase は、平面波との位相差を表す。

3.3 Hermite-Gaussian モード

式(28)の解としては式(29)以外にも存在する。式(29)の条件をゆるめたより一般的な解は次のような形である。

$$\psi = g\left(\frac{x}{w(z)}\right) h\left(\frac{y}{w(z)}\right) \exp\left[-j\left(P(z) + \frac{k}{2q(z)}(x^2 + y^2)\right)\right] \quad (41)$$

これまでと同様に、式(41)を式(28)に代入すると、 g と h は Hermite 多項式であることがわかる。つまり、以下の式を満たす。

$$\frac{d^2 H_m}{dx^2} - 2x \frac{dH_m}{dx} + 2mH_m = 0 \quad (42)$$

Hermite 多項式の次数の低いものを挙げると、

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \end{aligned} \quad (43)$$

式(28)は、

$$g \cdot h = H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \quad (44)$$

の時に満たされる。式(40)に含まれる $w(z)$ や $R(z)$ は基本モードと同じである。注意すべきは Guoy phase で、次式で与えられる。

$$\eta(m, n; z) = (m + n + 1) \tan^{-1}\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right) \quad (45)$$

これは、共振器内での共振周波数がモードによって違うことを意味している。以上の結果をまとめると、一般に $\Psi(x, y, z, t)$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \Psi_{mn}(x, y, z, t) &= \left(\frac{2}{\pi w(z)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2^m m!}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}} H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \exp\left[\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}\right] \\ &\quad \times \exp\left[j\left(\omega t - kz - \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} + \eta(m, n; z)\right)\right] \end{aligned} \quad (46)$$

一般にこのようなモードを Hermite-Gaussian モードと呼ぶ。また、TEM(Transverse Electro Magnetic) を使って表される場合もある。例えば基本 Gaussian モードは TEM00 モードとも言われる。最後の2つの数字は H_n などの添字を表している。これらは規格化されており、かつ互いに直交する。すなわち、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \Psi_{ij}^*(x, y, z, t) \Psi_{kl}(x, y, z, t) = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (47)$$

を満たしている。このことは、直交関係

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x^2] H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} \quad (48)$$

を用いれば容易に示される。もちろん時間成分を含む Ψ を、それを含まない ψ に置き換えても式(47)は成立する。すなわち、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi_{ij}^*(x, y, z) \psi_{kl}(x, y, z) = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (49)$$

も満たされる。積分した値が z に依らないことがわかる。

3.4 楕円 Gaussian モード

式(29)の条件をゆるめて、試行関数を

$$\psi_e(x, y, z) = \exp \left[-j \left(P(z) + \frac{kx^2}{2f(z)} + \frac{ky^2}{2g(z)} \right) \right] \quad (50)$$

とすると、楕円 Gaussian モードが導かれる。

$$\psi_e = \left(\frac{2}{\pi w_{x0} w_{y0}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{jkw_{x0}^2}{2f(z)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{jkw_{y0}^2}{2g(z)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-j \left(\frac{kx^2}{2f(z)} + \frac{ky^2}{2g(z)} \right) \right] \quad (51)$$

式(51)は規格化されている。また、

$$f(z) \equiv (z - b_x) + j \frac{\pi w_{x0}^2}{\lambda} \quad (52)$$

$$g(z) \equiv (z - b_y) + j \frac{\pi w_{y0}^2}{\lambda} \quad (53)$$

としている。ここで w_{x0} 、 w_{y0} はそれぞれ x 、 y 軸方向に関するウエストサイズを表し、 b_x 、 b_y はそれぞれのウエストポジションを表す。楕円 Gaussian ビームは、文字通りビーム断面での強度分布が楕円になっている。式(51)は一見したところ式(40)とは全く違った形に見えるが、もちろん式(40)は式(51)の特別な場合である。すなわち、 $b_x = b_y = 0$ かつ $w_{x0} = w_{y0} = w_0$ とすれば式(51)は式(40)と一致する。

3.5 Laguerre-Gaussian モード

円柱座標 (r, ϕ, z) を導入すると、式(28)に対して次のような試行関数を代入すると便利である。

$$\psi(r, \phi, z) = g \left(\frac{r}{w(z)} \right) \exp \left[-j \left(P(z) + \frac{kr^2}{2q(z)} + l\phi \right) \right] \quad (54)$$

式 (54) を式 (28) に代入すると、

$$g = \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^l \cdot L_n^l \left(\frac{2r^2}{w(z)^2} \right) \quad (55)$$

となることがわかる。ここで L_n^l は Laguerre 多項式で、以下の微分方程式の解である。

$$x \frac{d^2 L_n^l}{dx^2} + (l+1-x) \frac{dL_n^l}{dx} + n L_n^l = 0 \quad (56)$$

次数の低いものの例を挙げると、

$$\begin{aligned} L_0^l(x) &= 1 \\ L_1^l(x) &= l+1-x \\ L_2^l(x) &= \frac{1}{2}(l+1)(l+2) - (l+2)x + \frac{1}{2}x^2 \end{aligned} \quad (57)$$

である。また、Guoy phase は

$$\eta(n, l; z) = (2n + l + 1) \tan^{-1} \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \quad (58)$$

となることに注意が必要である。結局、規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi_m^l \psi_n^l = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} r dr \psi_m^l \psi_n^l \quad (59)$$

$$= \delta_{mn} \quad (60)$$

を満たす Laguerre-Gaussian モードは次のようになる。

$$\begin{aligned} \psi_n^l(r, \phi, z) &= \left(\frac{2}{\pi w(z)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n!}{(n+l)!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^l \exp \left(-\frac{r^2}{w(z)^2} \right) L_n^l \left(\frac{2r^2}{w(z)^2} \right) \\ &\times \exp \left[-j \left(\frac{kr^2}{2R(z)} + l\phi - \eta(n, l; z) \right) \right] \end{aligned} \quad (61)$$

このことは、直交関係

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^l L_m^l(x) L_n^l(x) dx = \frac{(m+l)!}{m!} \delta_{mn} \quad (62)$$

を用いれば容易に示される。また、レーザー光の振幅が ϕ に依らない場合には $l=0$ とできることを付記しておく。

4 Fabry-Perot 共振器の特性

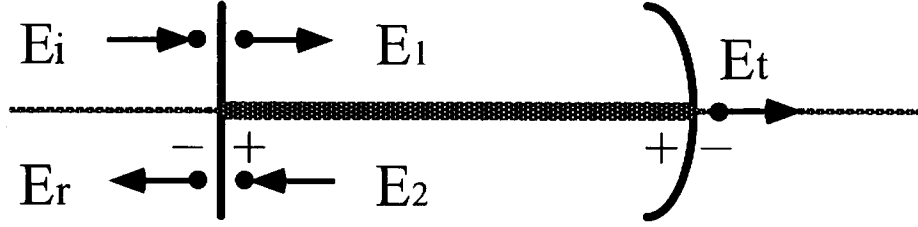


図 3: Fabry-Perot 共振器に出入りする光電場

4.1 Fabry-Perot 共振器の内外の電場

図 3 のように Fabry-Perot 共振器の内側及び外側の波動の電場を定義する。 E_i は共振器に入射する波を表し、 $\cdot$ の位置において

$$E_i = E_0 \exp[j\omega t] \quad (63)$$

で表されたとする。また、全ての $\cdot$ はいずれも鏡の表面に非常に近い場所にあることを意味している。 E_r は共振器から反射される波動の電場を表す。 E_t は共振器を透過する波動の電場を表す。 E_1 、 E_2 は共振器内部をそれぞれ右、左に進む波動の電場を表す。共振器長を l とする。平面鏡 (Front Mirror) の振幅反射率と透過率をそれぞれ r_f 、 t_f 、球面鏡 (End Mirror) の反射率と透過率をそれぞれ r_e 、 t_e とする。ここで、鏡における光の損失を無視すると、

$$r^2 + t^2 = 1 \quad (64)$$

という関係がそれぞれの鏡で成り立っている。また、反射率の符合に関しては、図 3 のように定義する。

このとき、Fabry-Perot 共振器が定常状態にあるなら、以下の式が成立する。

$$\begin{aligned} E_1 &= t_f E_i + r_f E_2 \\ E_2 &= r_e E_1 \exp[-2j\Phi] \\ E_r &= t_f E_2 - r_f E_i \\ E_t &= t_e E_1 \exp[-j\Phi] \end{aligned} \quad (65)$$

$$\Phi \equiv \frac{l\omega}{c} \quad (66)$$

これらより、それぞれの位置の電場を E_i のみで表せる。

$$E_1 = \frac{t_f}{1 - r_f r_e \exp[-2j\Phi]} E_i$$

$$\begin{aligned}
E_2 &= \frac{t_f r_e \exp[-2j\Phi]}{1 - r_f r_e \exp[-2j\Phi]} E_i \\
E_r &= \left(-r_f + \frac{r_e t_f^2 \exp[-2j\Phi]}{1 - r_f r_e \exp[-2j\Phi]} \right) E_i
\end{aligned} \tag{67}$$

$$E_t = \frac{t_f t_e \exp[-j\Phi]}{1 - r_f r_e \exp[-2j\Phi]} E_i \tag{68}$$

すると、Fabry-Perot 共振器の反射率と透過率は以下ようになる。

$$r_{\text{FP}}(\Phi) \equiv \frac{E_r}{E_i} = -r_f + \frac{r_e t_f^2 \exp[-2j\Phi]}{1 - r_f r_e \exp[-2j\Phi]} \tag{69}$$

$$t_{\text{FP}}(\Phi) \equiv \frac{E_t}{E_i} = \frac{t_f t_e \exp[-j\Phi]}{1 - r_f r_e \exp[-2j\Phi]} \tag{70}$$

また、反射光及び透過光強度を計算すると、以下ようになる。

$$|E_r|^2 = \frac{\{(t_f^2 + r_f^2)r_e - r_f\}^2 + 4r_f r_e (t_f^2 + r_f^2) \sin^2 \Phi}{(1 - r_f r_e)^2 (1 + F \sin^2 \Phi)} |E_i|^2 \tag{71}$$

$$|E_t|^2 = \frac{(t_f t_e)^2}{(1 - r_f r_e)^2 (1 + F \sin^2 \Phi)} |E_i|^2 \tag{72}$$

ただし、

$$F \equiv \frac{4r_f r_e}{(1 - r_f r_e)^2} \equiv \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi} \right)^2 \tag{73}$$

と定義している。 F や $\mathcal{F}$ は、共振器の多重反射の度合いを表している。もちろん、値が大きいほど度合いが大きい。特に、 $\mathcal{F}$ はフィネスと呼ばれている。共振条件 ($\Phi = \pi \times \text{整数}$) を満たしているときに、透過光及び共振器内部の光の強度が最大になる。故に、反射光強度は最小になる。特に、2枚の鏡の反射率と透過率が等しいときには光は完全に透過し、反射光は0になる。

4.2 Fabry-Perot 共振器の周波数応答

Michelson 干渉計と同様に考えて、Fabry-Perot 共振器についても周波数応答関数を求めることが可能である。図3のような共振器に重力波がやってくる場合を考える。共振器に入射する直前の位置での入射光の複素振幅を $E_i = E_0 \exp[j\omega t]$ とすると、

$$\begin{aligned}
E_r &= -r_f E_0 \exp[j\omega t] + r_e t_f^2 E_0 \exp[j\omega t_1] + r_f r_e^2 t_f^2 E_0 \exp[j\omega t_2] + \dots \\
&= -r_f E_0 \exp[j\omega t] + \left(\frac{t_f^2}{r_f} \right) E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (r_f r_e)^n \exp[j\omega t_n]
\end{aligned} \tag{74}$$

ただし、

$$t_n = t - \frac{2nl}{c} - \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2nl}{c}}^t h(t') dt' \tag{75}$$

Σ の中の第 k 項は、共振器の中を k 回往復してきた光の寄与を表す。重力波の効果は充分小さいので、

$$\exp \left[\frac{j\omega}{2} \int_{t-\frac{2nl}{c}}^t h(t') dt' \right] = 1 - \frac{j\omega}{2} \int_{t-\frac{2nl}{c}}^t h(t') dt \quad (76)$$

とできることを使うと、

$$E_r \simeq E_0 \exp[j\omega t] \times \left[-r_f + \frac{t_f^2}{r_f} \sum_{n=1}^{\infty} (r_f r_e)^n \exp \left(-j\omega \frac{2nl}{c} \right) - \frac{t_f^2}{r_f} \sum_{n=1}^{\infty} (r_f r_e)^n \exp \left(-j\omega \frac{2nl}{c} \right) \frac{j\omega}{2} \int_{t-\frac{2nl}{c}}^t h(t') dt' \right]$$

となる。更に $h(t)$ の Fourier 変換 $\tilde{h}(\Omega)$ を使って

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (77)$$

と書けることを用い、更に

$$\frac{t_f^2}{r_f} \sum_{n=1}^{\infty} (r_f r_e)^n \exp \left(-j\omega \frac{2nl}{c} \right) = \frac{t_f^2 r_e \exp \left(-j\omega \frac{2l}{c} \right)}{1 - r_f r_e \exp \left(-j\omega \frac{2l}{c} \right)} \equiv \Lambda(\omega) \quad (78)$$

とおくと、

$$E_r = E_0 \exp[j\omega t] \left[-r_f + \Lambda(\omega) - \frac{\omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tilde{h}(\Omega)}{\Omega} \{ \Lambda(\omega) - \Lambda(\omega + \Omega) \} e^{j\Omega t} \right) d\Omega \right] \quad (79)$$

となる。さて、制御云々を考えなければ重力波が来ないときに Fabry-Perot 共振器が共振しているので、

$$\exp \left(-j\omega \frac{2l}{c} \right) = 1 \quad (80)$$

となっているはずである。すると、

$$\Lambda(\omega) - \Lambda(\omega + \Omega) = j \frac{2t_f^2 r_e}{(1 - r_f r_e)(1 - r_f r_e e^{-j\Omega \frac{2l}{c}})} e^{-j\Omega \frac{l}{c}} \sin \left(\frac{\Omega l}{c} \right) \quad (81)$$

となる。以上の結果を使って計算を進めると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} E_r &= E_0 \exp[j\omega t] \times \left[\frac{-r_f + r_e(r_f^2 + t_f^2)}{1 - r_f r_e} - j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\Omega} \tilde{h}(\Omega) e^{j\Omega t} \frac{t_f^2 r_e}{(1 - r_f r_e)(1 - r_f r_e e^{-j\Omega \frac{2l}{c}})} e^{-j\Omega \frac{l}{c}} \sin \left(\frac{\Omega l}{c} \right) d\Omega \right] \\ &= E_0 \exp[j\omega t] \frac{-r_f + r_e(r_f^2 + t_f^2)}{1 - r_f r_e} \times \\ &\quad \left[1 - j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t_f^2 r_e}{-r_f + r_e(r_f^2 + t_f^2)} \frac{\omega}{\Omega} \frac{1}{1 - r_f r_e e^{-j\Omega \frac{2l}{c}}} e^{-j\Omega \frac{l}{c}} \sin \left(\frac{\Omega l}{c} \right) \tilde{h}(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \right] \\ &= E_0 \exp[j\omega t] \frac{-r_f + r_e(r_f^2 + t_f^2)}{1 - r_f r_e} [1 - j\Theta_{\text{GW}}(t)] \end{aligned} \quad (82)$$

Θ_{GW} は重力波によってもたらされる効果を表している。ここで

$$H_{\text{FP}}(\Omega) \equiv \frac{r_e t_f^2}{-r_f + r_e(r_f^2 + t_f^2)} \frac{\omega}{\Omega} \exp \left[-j \frac{\Omega l}{c} \right] \sin \left(\frac{\Omega l}{c} \right) \frac{1}{1 - r_f r_e e^{-j \frac{2\Omega l}{c}}} \quad (83)$$

と定義すると、

$$\Theta_{\text{GW}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{FP}}(\Omega) \tilde{h}(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (84)$$

と書けることから、 $H_{\text{FP}}(\Omega)$ は Fabry-Perot 共振器の周波数応答関数と呼ばれる。更に、 $\Omega l/c \ll 1$ を満たす領域では、

$$|H_{\text{FP}}(\Omega)| \simeq \frac{A\omega\tau_s}{2\sqrt{r_f r_e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_s^2 \Omega^2}} \quad (85)$$

となるので、Low Pass Filter と同じ特性であることがわかる。ただし、

$$A \equiv \frac{r_e t_f^2}{-r_f + r_e(r_f^2 + t_f^2)} \quad (86)$$

$$\tau_s \equiv \frac{2l\mathcal{F}}{\pi c} \quad (87)$$

としている。 τ_s は storage time と呼ばれ、光子が光共振器中に滞在する時間の目安を与える。この値を使うと、 $H_{\text{FP}}(\Omega)$ の Low Pass Filter としての cut off frequency は、TAMA300 のスペックでは

$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau_s} \quad (88)$$

$$\simeq 484[\text{Hz}] \quad (89)$$

となる。 r_f や r_e を大きくしてフィネスを大きくすれば、cut off frequency が小さくなることがわかる。特に低い周波数の重力波に対しては感度が高くなるが、高い周波数に関してはフィネスを大きくしてもあまり感度は変わらない。

4.3 モードマッチング

ここまではレーザー光が平面波であるとして Fabry-Perot 共振器の特性を考えてきたが、実際は Gauss ビームであることを考慮しなければならない。図 3でもわかるように EM には球面鏡が用いられているが、これは鏡の曲率とレーザー光の波面の曲率を一致させるためである。共振器が機能するためには、波面と鏡の曲率が一致しなければならない[4]。図 3では FM は平面鏡なので、共振するためには FM の位置にビームウエストがなければならないことになる。

また、Guoy phase の効果を考慮すると、共振条件は以下のように修正される。

$$\Phi - \eta(l) = \pi \times \text{整数} \quad (90)$$

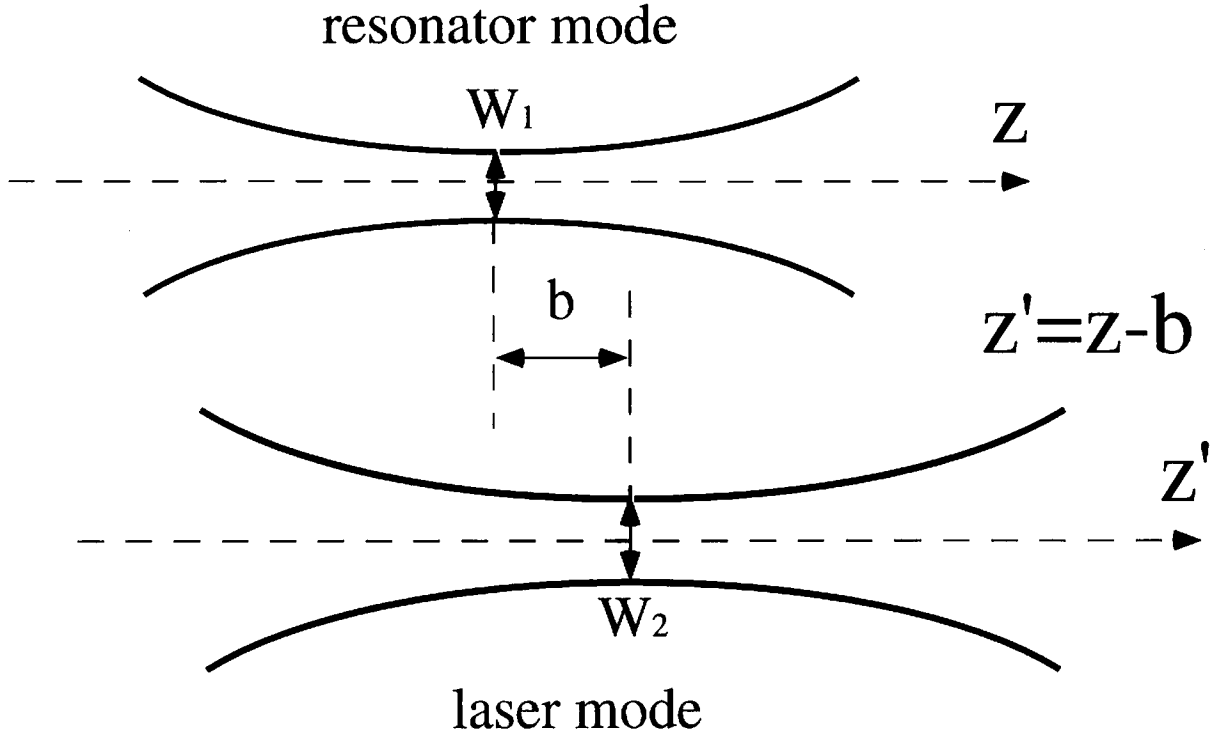


図 4: 共振器の固有モードに対してミスマッチしたレーザー光を表している。それぞれのウエストの位置は光軸に沿って b だけずれ、ウエストサイズも違っている (w_1, w_2)。

もちろん $\eta(l)$ は光が共振器長 l だけ進んだときに獲得する Guoy phase である。

光の共振を定量的に扱うためにはモードマッチングという概念が必要である。例えば、平面鏡と球面鏡からなる Fabry-Perot 共振器に対して共振することができる光 (共振器の固有モード) とは、平面鏡の位置にウエストを持ち、かつウエストサイズが以下の式を満たす光線である [4]。

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{l(2R - l)} \quad (91)$$

ただし R は EM の曲率半径である。図 4 は共振器の固有モードに対してミスマッチしたレーザー光を表している。共振器の固有モードに対してレーザー光のウエストポジションが、光軸方向に b ずれ、ウエストサイズもそれぞれ w_1, w_2 となっていて一致していない。

2つの異なるモードがあったとき、それらのモードがどの程度物理的に一致しているかを表す指標として、マッチング率 (Matching Ratio) がある。マッチング率は、2つのモードの結合振幅強度で定義される。すなわち、2つの異なるモードをそれぞれ $\psi(x, y, z)$ と

$\varphi(x, y, z)$ で表したとき、

$$\begin{aligned}\text{マッチング率} &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi^*(x, y, z) \varphi(x, y, z) \right|^2 \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \varphi^*(x, y, z) \psi(x, y, z) \right|^2\end{aligned}\quad (92)$$

で与えられる。

図4のようにずれた基本 Gaussian ビーム (プライムで表す) は、Laguerre-Gaussian モードを使って展開可能である。すなわち、

$$\begin{aligned}\psi_0'(r, \phi, z') &= \psi_0'(r, \phi, z - b) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(r, \phi, z)\end{aligned}\quad (93)$$

とできる。ここで、 ψ_n^l の上つき添字に関しては $l = 0$ としている。また、マッチング率は

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi_0^*(r, \phi, z) \psi_0'(r, \phi, z - b) \right|^2 = |c_0|^2 \quad (94)$$

なので、結局のところ展開係数の絶対値の2乗になる。図4のような場合について計算すると、

$$\text{マッチング率} = \frac{4w_1^2 w_2^2}{(w_1^2 + w_2^2)^2 + \left(\frac{2b}{k}\right)^2} \quad (95)$$

となる。

同じような概念が、楕円ビームを考える時にも適用される。すなわち、楕円 Gaussian ビームがどの程度基本 Gaussian ビームに近い状態かを表す指標として、結合振幅強度を用いるのである。楕円 Gaussian ビームは、 $x - z$ 面内でスポットサイズ w_{x0} のウエストを $z = b_x$ にもち、 $y - z$ 面内でスポットサイズ w_{y0} のウエストを $z = b_y$ にもっているとする。このようなビームと、原点に w_0 のウエストを持つ基本 Gaussian ビームとの結合振幅強度は

$$\frac{4w_0^2 w_{x0} w_{y0}}{\left[(w_0^2 + w_{x0}^2)^2 + \left(\frac{\lambda b_x}{\pi}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[(w_0^2 + w_{y0}^2)^2 + \left(\frac{\lambda b_y}{\pi}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (96)$$

となる。

しかし、この式は w_{x0} 、 w_{y0} 、 b_x 、 b_y 以外のパラメーター (つまり w_0 のこと) を含んでいるので基準にはならない。それに、楕円モードが基本モードにどのくらい近いかを表す指標としてリーズナブルなものであるためには、 b_x や b_y の絶対的な位置ではなくそれらの相対位置 ($b_y - b_x$) に依存する形でなくてはならないだろう。そこで、結合振幅強度が最大になるような基本 Gaussian ビームとの結合振幅強度をもって楕円ビームの TEM00 モー

ドへのマッチング率を定義する。ある楕円モードに対して結合振幅強度が最大になるような基本モードのパラメーターは、

$$w_0^2 = w_{x0}w_{y0} \left[1 + \left(\frac{\lambda(b_y - b_x)}{\pi(w_{x0}^2 + w_{y0}^2)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (97)$$

$$b = \frac{w_{x0}^2 b_y + w_{y0}^2 b_x}{w_{x0}^2 + w_{y0}^2} \quad (98)$$

によって与えられる。このような基本モードとの結合振幅強度は次の式で与えられる。

$$\sqrt{2} \times \left[1 + \frac{\{(w_{x0}^2 + w_{y0}^2)^2 + (\lambda(b_y - b_x)/\pi)^2\}^{1/2}}{2w_{x0}w_{y0}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (99)$$

5 Fabry-Perot 共振器の制御理論

5.1 制御をかける理由

レーザー干渉計型重力波検出器を構成する鏡は、ワイヤーで振り子状に吊られている。このことは前にも触れたように、鏡を自由質点に近い状況にするために必須な原理的要請である。振り子は高い周波数 (共振周波数以上) の振動に対しては防振効果があるが、共振周波数付近の振動を助長してしまう。降りにしたことで地面振動などによって励起される鏡の揺れは、光軸方向に関して

$$(\Delta z)_{\text{RMS}} \simeq 10[\mu\text{m}] \quad (100)$$

程度であると見積もられている。これに対して共振器を共振状態に保つためには

$$(\Delta z)_{\text{RMS}} \leq 1[\text{nm}] \quad (101)$$

程度に抑えなければならない。これを抑えるために Fabry-Perot 共振器を構成する鏡の位置を制御する必要がある。鏡の位置制御には、length control と alignment control の 2 つがある。前者は干渉計の光路長制御 (並進) であり、後者は傾きの制御である。今回の報告は前者に関するものである。

ここで、length control をかけてしまうと重力波の信号が打ち消されてしまうのではないかという疑問が浮かぶ。これに対する解決策は 2 つあり、1 つは制御帯域を重力波の観測帯域から外すということである。つまり、観測されるであろう重力波を周波数領域で考えたとき、重力波信号への寄与の大きい周波数付近では制御がかからないようにするという方法である。

もう 1 つは、重力波の観測帯域でも強い制御をかけ (Tight Lock) feedback signal を観測するという方法である。制御をかけることによって error signal は減少するのでその中に含まれる重力波の情報も減少するが、feedback signal に含まれる重力波の信号は減少しない。この方法を用いれば、制御帯域が重力波の周波数付近を含んでも、重力波の信号を観測することが可能である。また、Tight Lock にすれば電気回路の雑音を抑えることもできるので有利な方法である。TAMA300 では後者の方法が用いられることになっている。

5.2 Pound-Drever method

300m Fabry-Perot 共振器の length control には、Pound-Drever 法という制御法が採用された。この方法について解説する。

共振器に対して位相変調光を入射する。純粋な光波を $E_0 \exp[j\omega t]$ で表した場合、変調周波数 ω_m 、変調指数 m の位相変調光 E_{PM} は、Bessel 関数 $J_n(m)$ を使って以下のように表せる。

$$E_{\text{PM}} = E_0 \exp[j(\omega t + m \sin \omega_m t)] \quad (102)$$

$$\begin{aligned}
&= E_0 \exp[j\omega t] \exp[jm \sin \omega_m t] \\
&= E_0 \exp[j\omega t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \exp[jn\omega_m t] \quad (103)
\end{aligned}$$

$$\simeq E_0 [J_0(m) \exp[j\omega t] + J_1(m) \{ \exp[j(\omega + \omega_m)t] - \exp[j(\omega - \omega_m)t] \}] \quad (104)$$

$$= E_0 [J_0(m) + 2jJ_1(m) \sin \omega_m t] \exp[j\omega t] \quad (105)$$

ただし、Bessel 関数の性質

$$\exp[jm \sin \omega_m t] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \exp[jn\omega_m t] \quad (106)$$

$$J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m) \quad (107)$$

$$J_n(m) \simeq \frac{1}{n!} \left(\frac{m}{2}\right)^n \quad (\text{for } m \ll 1) \quad (108)$$

を使った。

式(104)の第1項はもとのレーザー光と同じ周波数 ω の光(carrier)を表す。第2項と第3項はからわかることは、位相変調光はcarrierだけでなく、周波数が変調周波数分だけ上下にずれた光波も含むことを表している。これら2成分はそれぞれ upper sideband, lower sideband と呼ばれている。

さて、位相変調光を共振器に入射したときについて考える。まず、変調周波数が共振器の Free Spectral Range の半分程度であるときは、共振器はほとんどの sideband を反射するので、共振器の sideband に対する反射率を -1 としてよい。carrier に対しては、式(69)の結果を用いれば良い。ただし、式(69)を次のように近似する。

$$\begin{aligned}
r_{\text{FP}}(\Phi) &= -r_f + \frac{r_e t_f^2 \exp[-2j\Phi]}{1 - r_f r_e \exp[-2j\Phi]} \\
&= \frac{-r_f + r_e(r_f^2 + t_f^2) \exp[-2j\Phi]}{1 - r_f r_e \exp[-2j\Phi]} \\
&\simeq r_{\text{FP}}(0) + \left. \frac{\partial r_{\text{FP}}(\Phi)}{\partial \Phi} \right|_{\Phi=0} \times \Phi \\
&\simeq \frac{-r_f + r_e(r_f^2 + t_f^2)}{1 - r_f r_e} - j \frac{2r_e t_f^2}{(1 - r_f r_e)^2} \Phi \quad (109)
\end{aligned}$$

すると Fabry-Perot 共振器で反射された位相変調光は次のように表せる。

$$E_{\text{ref}} = E_0 \{ r_{\text{FP}}(\Phi) J_0(m) - 2jJ_1(m) \sin \omega_m t \} \exp[j\omega t] \quad (110)$$

反射光強度 $I_{\text{ref}} (= E_{\text{ref}}^* E_{\text{ref}})$ を計算して変調周波数成分の項 ($\sin \omega_m t$ に比例する項) を取り出すと、

$$\left[8J_0(m)J_1(m) \frac{r_e t_f^2}{(1 - r_f r_e)^2} \right] \Phi \sin \omega_m t \quad (111)$$

となる。式 (111) は変調周波数成分の信号であるが、この中から Φ のみを抽出するためには homodyne 法を用いて復調すればよい。すなわち、式 (111) は $\sin \omega_m$ という carrier が Φ によって振幅変調を受けたものであると考えれば、一般的な homodyne 法 [3] を使って Φ に比例した error signal を取り出せることが容易にわかる。

この error signal を用いて共振器長とレーザーの発振周波数に制御をかけて光共振器を共振状態に保つ方法を Pound-Drever 法と呼ぶ。 Φ は ω と l という 2 つの変数に依ることに注意する必要がある。すなわち、

$$\Phi = \frac{l\Delta\omega + \omega\Delta l}{c} \quad (112)$$

と表されるものである。一般に、error signal の低い周波数成分は共振器長制御に用い、高い周波数成分はレーザーの発振周波数制御に用いる。

ところで、Fabry-Perot-Michelson-Interferometer が Michelson-Interferometer と比べてどのくらい有利かを見積もることができる。厳密な議論をするには干渉計の重力波に対する周波数応答関数を考慮せねばならないが、あまり周波数の高くない領域では周波数応答関数は平坦であるので、干渉計の DC 感度で比べてみる。

まず BS から 2 枚の鏡までの距離が l である MI についてを考える。振幅が h で与えられる重力波がやってきた場合、BS で 2 方向に別れた光が再び BS に戻ってくるまでに重力波から得る位相差はそれぞれ $2khl$ と $-2khl$ である。 k は波数である。それらが再び BS で重ね合わされることを考えると、干渉計の出力ポートでの電場 ψ_{MI} は、次のように表すことが可能である。

$$\begin{aligned} \psi_{\text{MI}} &= \frac{1}{2}e^{j(\omega t + 2\delta)} - \frac{1}{2}e^{j(\omega t - 2\delta)} \\ &= je^{j\omega t} \sin 2\delta \\ &\simeq 2\delta je^{j\omega t} \end{aligned} \quad (113)$$

$$|\psi_{\text{MI}}| \simeq 2|\delta| \quad (114)$$

ただし、

$$\delta \equiv khl \quad (115)$$

としている。

次に共振器長が l である対称的な FPMI を考える。式 (109) を使って同様な考え方を用いると、干渉計の出力ポートでの電場は次のようになる。

$$\begin{aligned} \psi_{\text{FPMI}} &= \frac{1}{2}r_{\text{FP}}(\delta)e^{j\omega t} - \frac{1}{2}r_{\text{FP}}(-\delta)e^{j\omega t} \\ &= -2j \frac{r_e t_f^2}{(1 - r_f r_e)^2} \delta e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (116)$$

$$|\psi_{\text{FPMI}}| \simeq \frac{r_e t_f^2}{(1 - r_f r_e)^2} |\psi_{\text{MI}}| \quad (117)$$

$$\equiv f(r_f, r_e, t_f) \psi_{\text{MI}} \quad (118)$$

$$f(r_f, r_e, t_f) \equiv \frac{r_e t_f^2}{(1 - r_f r_e)^2} \quad (119)$$

鏡のロスを見無視すれば、

$$t_f^2 = 1 - r_f^2 \quad (120)$$

と表すことができるので、

$$f(r_f, r_e, t_f) = f(r_f, r_e) \quad (121)$$

となる。ここで r_f を固定したとき、 r_e が 1 に近づくほど $f(r_f, r_e)$ は大きくなる。また r_e を固定したときには、 $f(r_f, r_e)$ は $r_f = r_e$ を満たすときに極大になる。TAMA 計画におけるスペックは、

$$r_f = 0.994$$

$$r_e = 0.99995$$

となっている。この値を代入すると、

$$f(0.994, 0.99995) \simeq 326 \quad (122)$$

となる。

6 300m Fabry-Perot 共振器の開発

本論文に書かれている実験は、国立天文台三鷹キャンパスに建設されているレーザー干渉計型重力波検出器 TAMA300 の片腕を用いて行なわれた。図 5 は TAMA300 の全体図で、実線部が今回の実験で用いられた部分である。すでに Mode Cleaner は完成している。更に我々によって 1 本の 300m 共振器 (実線部) が完成した。

片腕というのは、単なる 300[m] の真空パイプで、その両端には鏡を吊った懸下装置を設置するための真空タンクがある (図 5)。真空パイプには窓が付いていて、中のターゲットを覗けるようになっている。このターゲットは、レーザー光を真空パイプに通す (Initial Alignment) 作業を行うためにある (後述)。

6.1 300m Fabry-Perot 共振器のスペック

今回の実験では TAMA300 運転時に用いられるものと同じスペックを用いた。下の表は鏡のスペックである。

鏡の種類	曲率半径	強度反射率	loss
front mirror	plane	98.8%	50ppm 以下
end mirror	450[m]	99.99%	50ppm 以下

共振器が安定に動作するためには、以下の式を満たしていなければならないことがわかっている [4]。

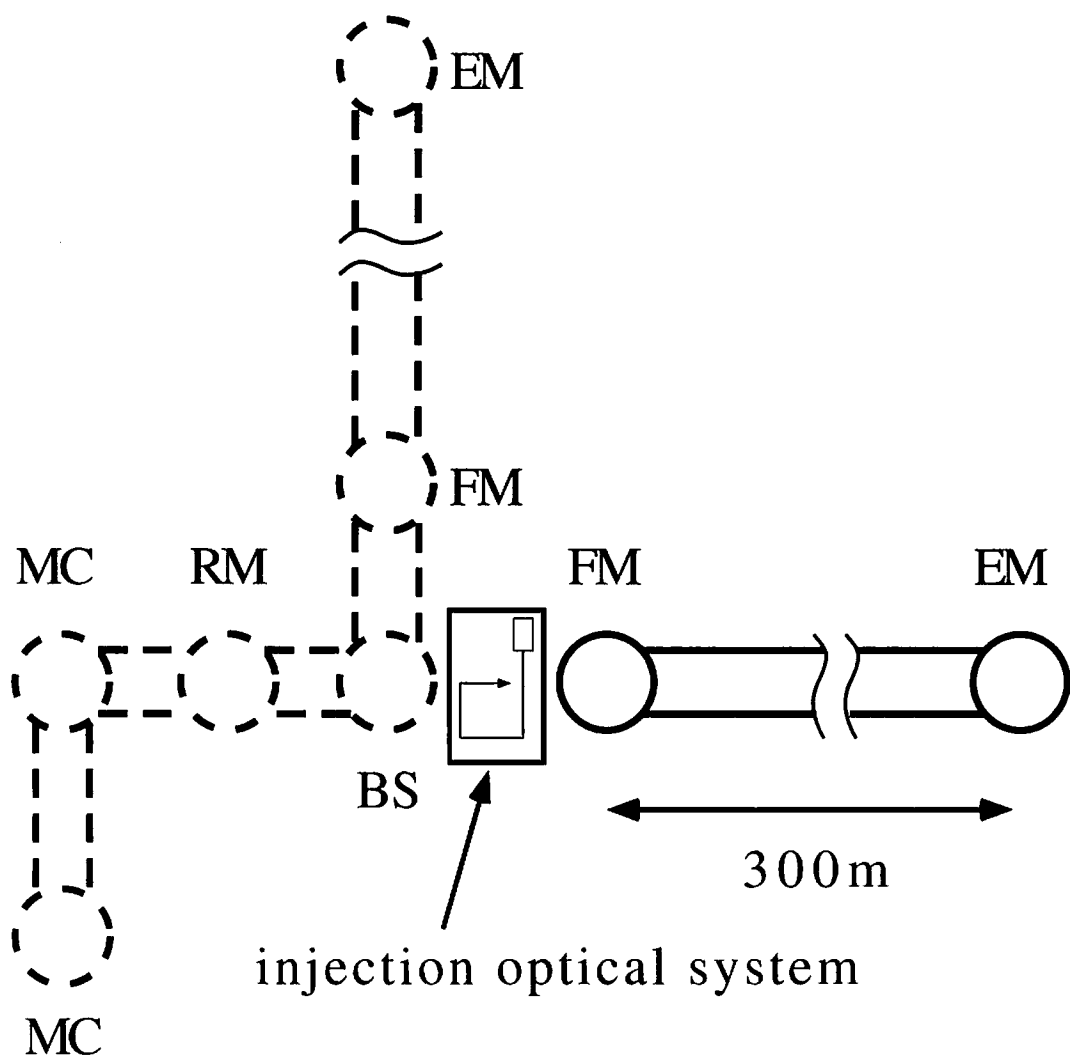
$$0 < \left(1 - \frac{l}{R_f}\right) \left(1 - \frac{l}{R_e}\right) < 1 \quad (123)$$

ここで l は共振器長、 R_f と R_e はそれぞれ front mirror と end mirror の曲率半径である。つまり、適当な曲率半径の鏡を用いても共振器は動作しないのである。共振器長が長い場合には、それと同じオーダーの曲率半径を持つ鏡が必要になる。

また、共振器長とそれを構成する鏡の曲率半径が与えられたとき、それぞれの位置でのレーザー光の曲率半径は、鏡のそれと一致していなければならない。すると必然的にそれを満たすレーザー光のモードは一意に決まる。図 6 のように、距離 l だけ離れた 2 枚の鏡 (それぞれの曲率半径は R_1 と R_2) を考える。このとき、共振器にマッチするレーザーのモードのパラメーターは以下の式にしたがって決定される。

$$w_0^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \frac{l(R_1 - l)(R_2 - l)(R_1 + R_2 - l)}{(R_1 + R_2 - 2l)^2} \quad (124)$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{l(R_2 - l)}{R_1 + R_2 - 2l} \\ t_2 &= \frac{l(R_1 - l)}{R_1 + R_2 - 2l} \end{aligned} \quad (125)$$



FM: front mirror tank

EM: end mirror tank

RM: recycling mirror tank

MC: mode cleaner tank

BS: beam splitter tank

図 5: TAMA300 の全体図。実線で今回の実験で使った部分を表している。

また、 ψ_{mn} (Hermite-Gaussian モード) に対する共振条件は

$$\frac{\nu}{\nu_0} = N + \frac{1}{\pi}(m+n+1) \cos^{-1} \sqrt{\left(1 - \frac{l}{R_1}\right) \left(1 - \frac{l}{R_2}\right)} \quad (126)$$

$$\nu_0 \equiv \frac{c}{2l} \quad (127)$$

となる。 ν_0 は Free Spectral Range と呼ばれている。 N は自然数であり、 $\cos^{-1}$ の項は Guoy phase shift の効果である。 ψ_n^l (Laguerre-Gaussian モード) に対しては、 $(m+n+1)$ を $(2n+l+1)$ に交換すればよい。

TAMA300 におけるパラメーターは

$$\begin{aligned} R_1 &= \infty \\ R_2 &= 450 \text{ [m]} \end{aligned} \quad (128)$$

とすることによって得られる。

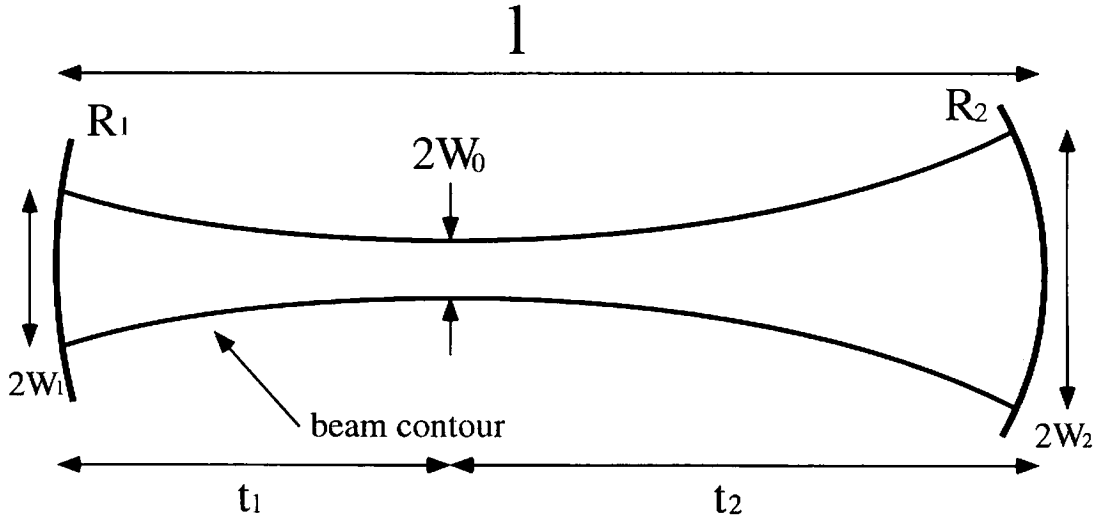


図 6: 曲率半径の違う 2 枚の鏡からなる Fabry-Perot 共振器の固有モード

6.2 入射光学系

前述したように、共振器を機能させるためには共振器のモードと入射光のモードを一致させなければならない。そのためにはレーザー光を共振器に入射させる前に共振器のモー

ドに合わせる必要がある。図 7 は今回の実験で用いた入射光学系である。なお、図中の数値の単位はミリメートルである。

光源としては 700[mW] の出力をもつ YAG レーザーを用いた。レーザーから水平にビームが出射されていなかったため、レーザーの直後で 1 度ステアリングミラーに当てて、光線が水平になるように調整した。今後、このステアリングミラーを first mirror と呼ぶことにする。その後の $\lambda/2$ 板と PBS1 (偏光ビームスプリッター) は、必要な時に光量を調節するためのものである。位相変調をかけるための EOM (電気光学変調素子) と、戻り光を除去するための FI (ファラデーアイソレーター) を通過した後、2 枚のシリンダカルレンズによって、ビームの断面の強度分布が円形になるように整形される。

レンズ f1 と f2 は、モードクリーナー (MC) にマッチするモードを作るために使用した。今回の実験ではモードクリーナーは使用しなかったが、TAMA300 運転時になるべく近い状態を実現するために、MC にマッチするモードをつくった。故に今回の実験に用いられた入射光学系において得られた知見は、実際に MC と 300m 共振器を接続する際にも役立つ。

PBS2 と $\lambda/4$ 板は、共振器からの反射光を取り出すためのものである。レーザーからでた光の偏光は直線偏光である。PBS2 はこれを全て通過させるように調節されている。PBS2 を通過した直線偏光は $\lambda/4$ 板によって円偏光にされる。故に共振器には円偏光が入射するので、共振器から反射してくる光も円偏光である。反射された円偏光はもう 1 度 $\lambda/4$ 板を通過することによって、今度は PBS2 で反射されるような偏光面を持つ直線偏光にされる。このようにして、共振器からの反射光を取り出すことができる。この働きは FI の働きに似ている。

レンズ f3 と f4 は仮想的な MC から出射した光のモードを 300m Fabry-Perot 共振器にマッチするモードに変換するために使用した。この 2 枚のレンズのレンズ間距離は 1[mm] 以下のオーダーの精度で合わせなければならないので、f4 の位置はマイクロメーターで調節した。

レンズ f4 を通過した光は 3 枚のステアリングミラーでイニシャルアラインメントされてから共振器に入射する。レーザー光の、x 方向 (horizontal) と y 方向 (vertical) のプロファイルを測定した。この測定には Beam Scan というビームプロファイルを簡単に測れる装置を使用した。図 8 は FI2 の直後で測定したものであり、楕円ビームになっていることがわかる。図 9 はシリンダカルレンズを通過した後で測定したものであり、基本モードに近い状態に整形されていることがわかる。このときの基本モードへのマッチング率は 99.9% であった。

6.3 Initial Alignment

共振器を機能させるためには 300[m] の真空パイプに光を通さなければならない。しかし共振器長が 300[m] と非常に長いために、光を共振状態にするのには困難が付きまとう。しかし、我々は共振状態に導くことに成功したので、その道筋を以下に説明する。

optical system for our experiment

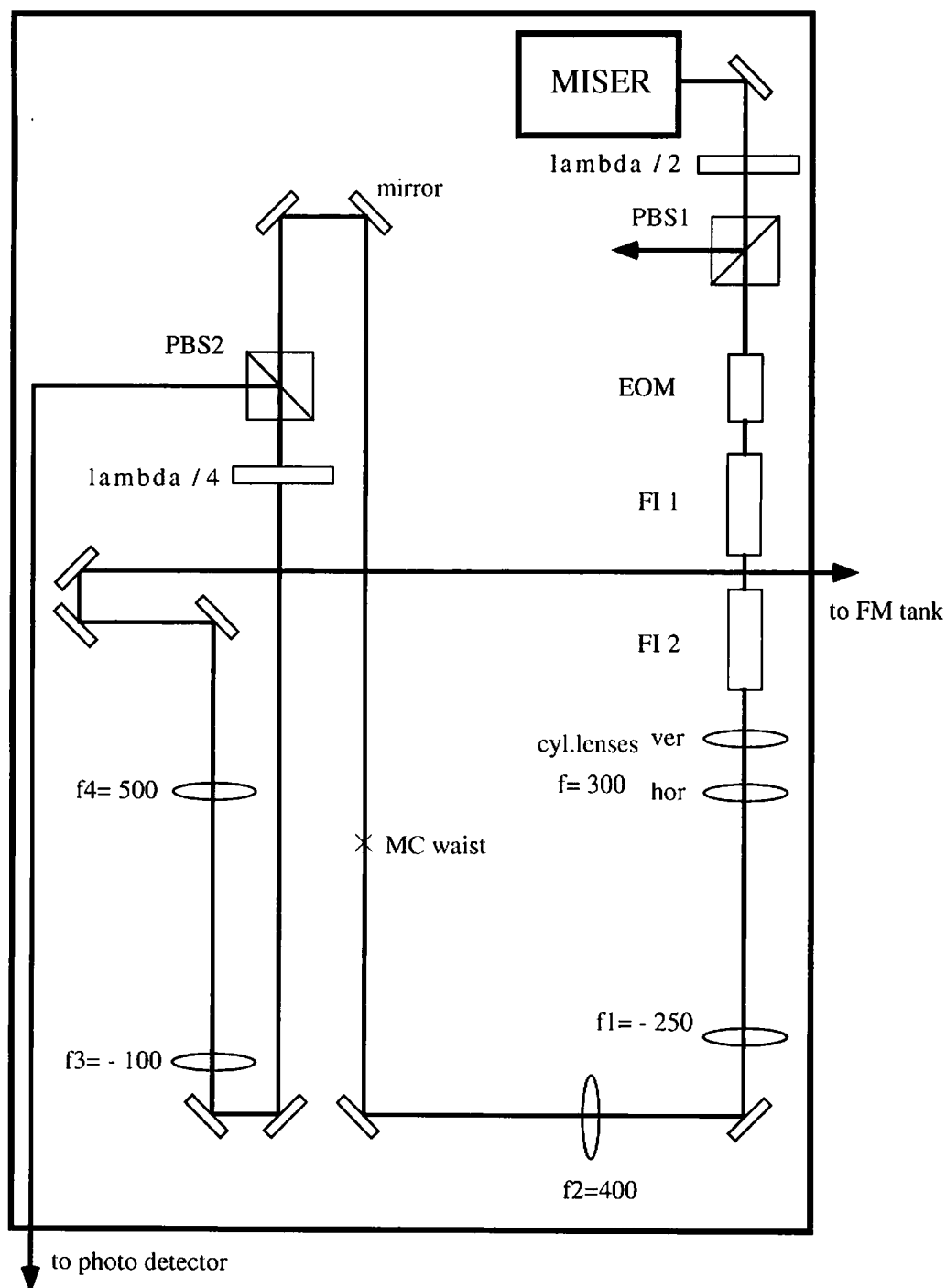


図 7: 今回の実験に用いた入射光学系。レンズの焦点距離を表す数値の単位は [mm]。

beam profiles after EOM, FI1 & FI2

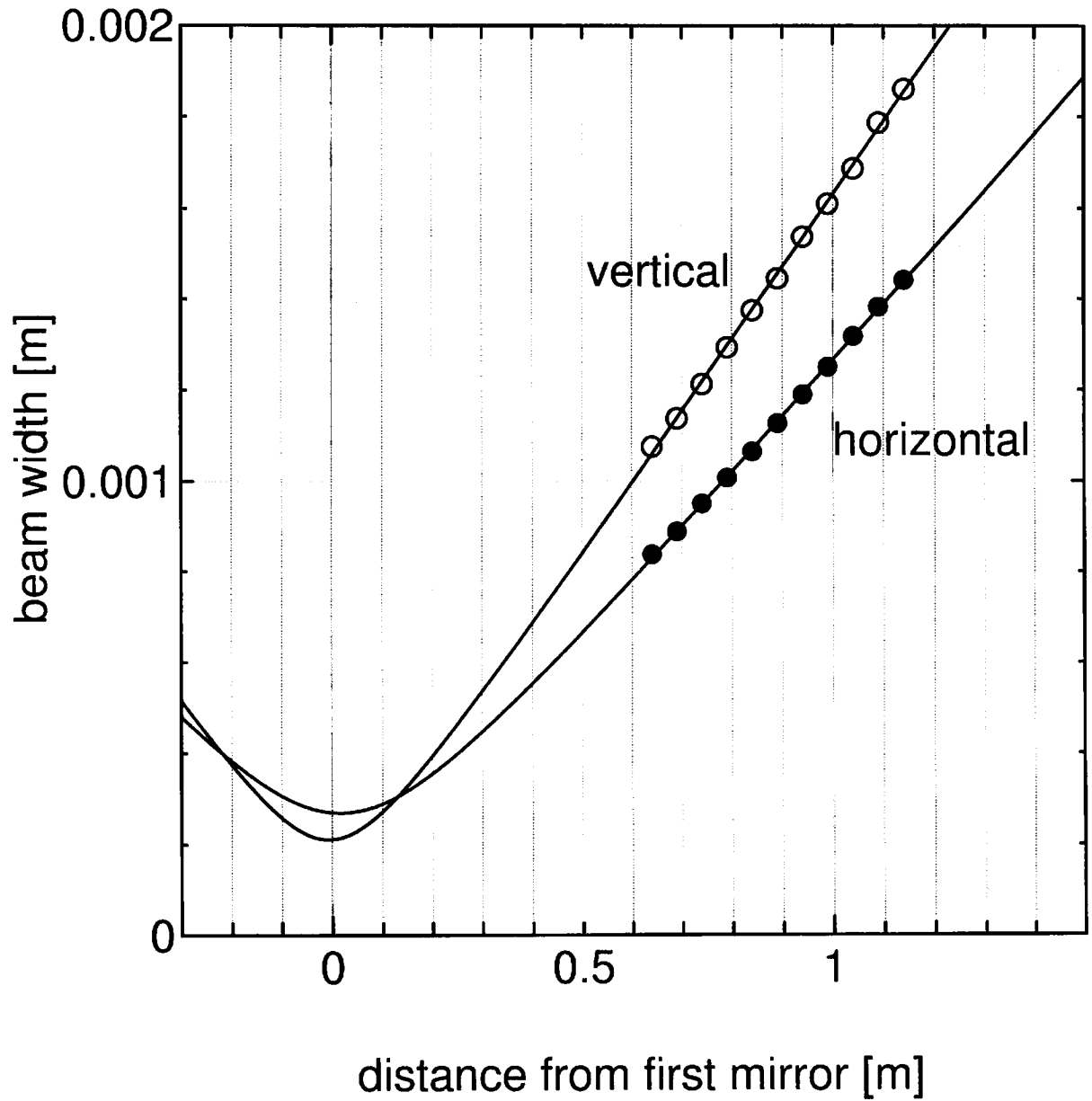


図 8: MISER から出射したビームのプロファイル

beam profiles after cylindrical lenses

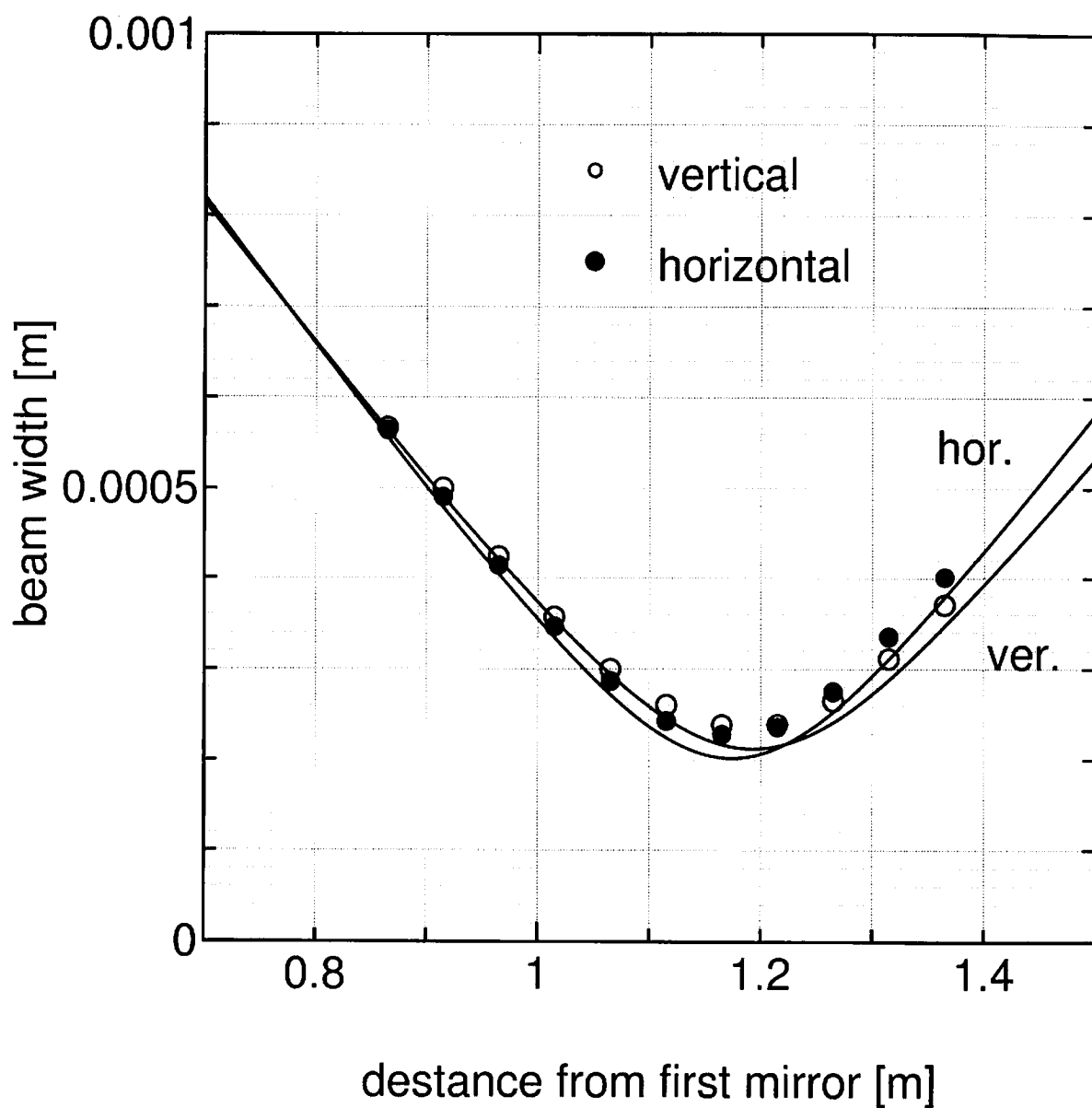


図 9: シリンドリカルレンズ後のビームのプロファイル

まず初めに光学テーブルを移動して空気中で 300[m] 先までビームを到達させる。真空パイプのすぐ横のスペースを使えばよい。この時、 f_3 と f_4 のレンズ間距離を調節して、300[m] 先でもおよそ正しいビーム径になるようにする。あまり広がりすぎると、真空パイプを通れなくなる恐れがあるからである。この時チェックすべきことは、ビームが水平に出射され、かつ真空パイプの真中くらいの高さになっているかどうかである。このような正しい状態に最初からなっていることはありえないので、光学テーブル上の f_4 以降のステアリングミラーを調節することで、ビームの出射する方向を修正する。

以上の作業が終わったら、光学テーブルを正しい位置に置く。この時に注意することは、ビームをフロントミラー (FM) タンクの入射窓の真中から真空パイプに入射させることである。

ところで、真空パイプにはターゲットと呼ばれているものが 2 つある (図 10)。ターゲットはそれぞれ、FM タンクと EM タンクから 10[m] のところに設置されている。それぞれターゲット 1 (T1)、ターゲット 2 (T2) とする。次に、T1 を真空パイプの真中の高さ (付近) に持ち上げる。ターゲットの様子を覗き穴から CCD カメラでモニターしながら光学テーブル上のステアリングミラーを水平方向に適当に動かしてみる。この操作をしばらく続けていると、そのうち T1 に光が当たるだろう。注意することは、このときステアリングミラーを垂直方向に動かしてはならないということである。すでに垂直方向には正しい位置になっているはずだからである。

次に、T1 を下げて、T2 を先ほどの T1 と同じくらいの高さまで持ち上げて、先ほどと同様に、ステアリングミラーを水平方向のみに動かして光を T2 にぶつける。これに成功したら T2 を下ろす。すると光はすでにエンドミラー (EM) タンクまで到達している。そこで、EM タンクの出射窓の中心からビームが出射していることを確かめる。必要ならば、光学テーブル上の最後のステアリングミラーを水平及び垂直方向に微調して、窓の中心から光が抜けるように調節する。

ここまできたら、FM タンク付近と EM タンク付近の 2 箇所でビームプロファイルを測定する。タンクに鏡をインストールした後ではプロファイル測定が不可能になってしまうからである。この辺りでのビーム径は太いので、図 11 のようにナイフエッジを用いてプロファイルを測定した。EM タンクの窓から出てきた光は太いので、レンズで絞ってから Photo Detector の受光面に入射させる。レンズの前にナイフエッジを置き、ナイフエッジの位置を水平方向に変化させる。ビームの断面をナイフエッジが覆うにつれて、PD に入射する光の強度は変化する。その強度変化を、ナイフエッジの移動距離の関数としてプロットする。断面での強度分布 Gauss 分布だとして、プロットしたものを Gauss の誤差関数でフィットすれば、ビーム径 (水平方向) を求めることができる。ナイフエッジの移動方向を垂直に移動させれば垂直方向のビーム径を測定することができる。測定結果は図 13 に示されている。このようなプロファイルを持つビームと共振器の固有モードのマッチング率は 99.7% であった。

また、 f_3 と f_4 のレンズ間距離の誤差が beam profile に与える影響を調べるために、レンズ間距離を $\pm 1[\text{mm}]$ ずつ動かした時の beam profile を測定した (図 14)。ここでは水平

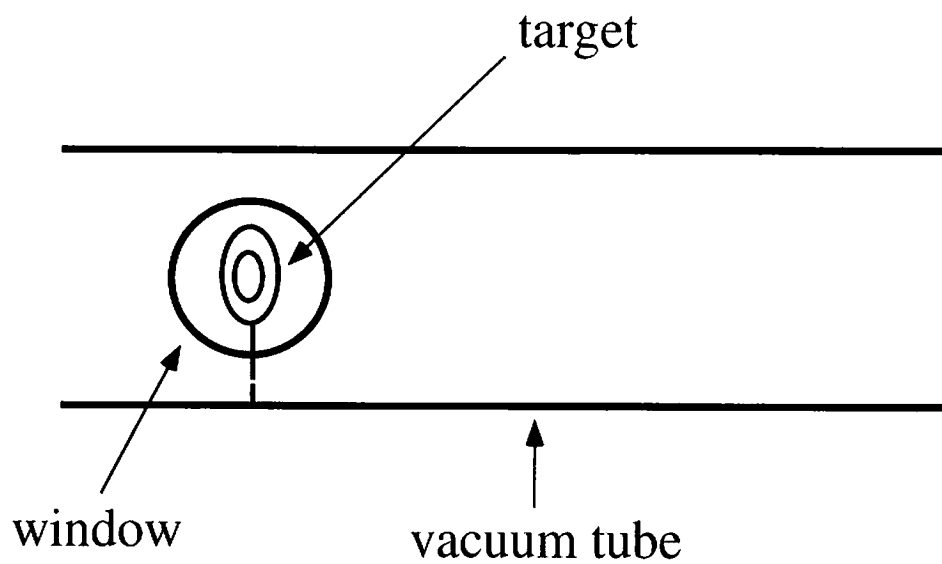
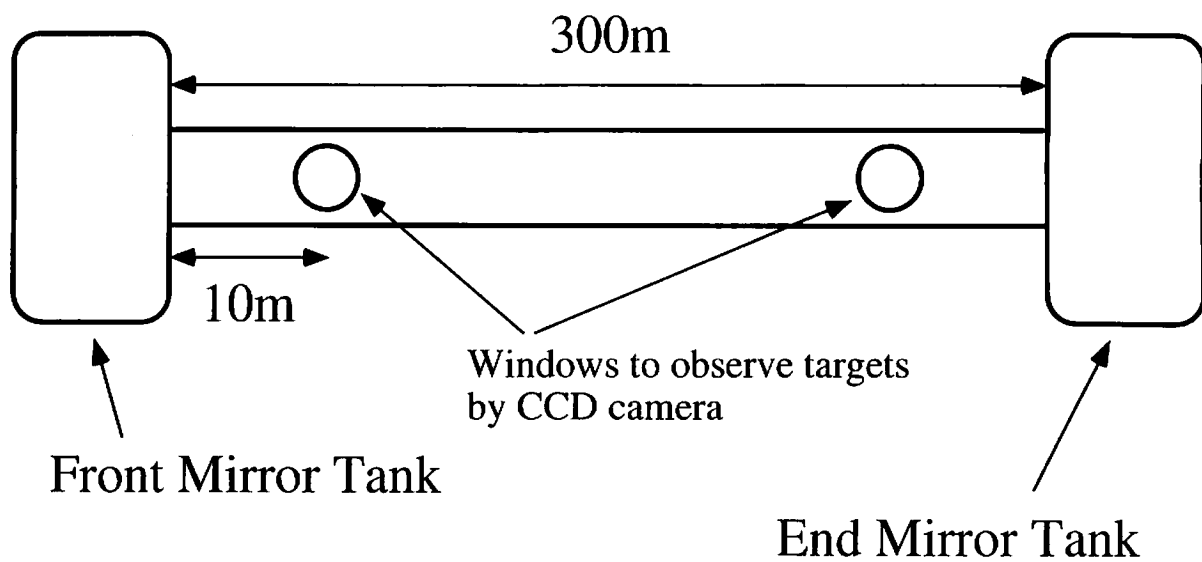


图 10: vacuum tube and targets

large aperture beam
(about 4cm diameter)

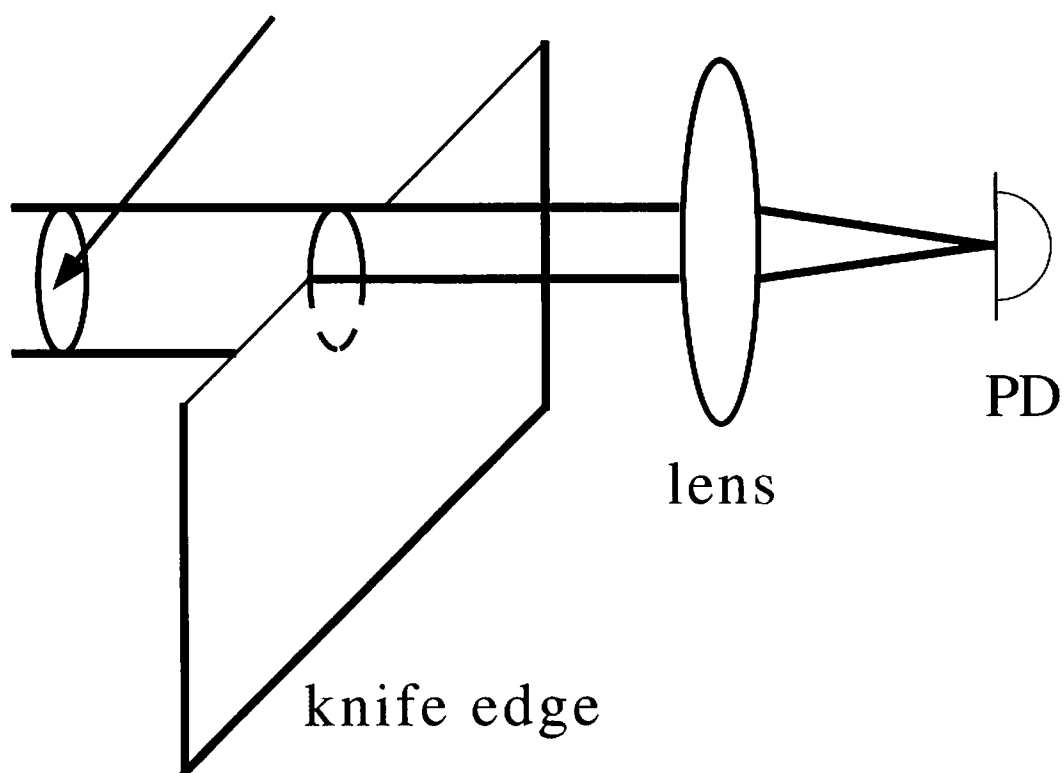


図 11: knife edge を用いたビーム径測定法

方向の beam profile を示している。この測定結果は理論値とかなり一致していることがわかる (図 14)。レンズ間距離を 1[mm] 長くした場合には共振器へのマッチング率は 97% 程度に落ちた。これに対して、1[mm] 短くした場合にはマッチング率は 83% 程度まで大きく下がった。このことから、f3 と f4 のレンズ間距離が正しい距離から短くなるほうにずれた場合に特に共振器へのマッチング率が悪化することがわかる。

さらに、f3 と f4 の絶対的な位置の誤差が beam profile に与える影響も計算してみた (図 15)。結論としては、それらの影響はほとんど問題にならないことがわかった。よって、要求が厳しいのはレンズ f3 と f4 の間隔だけであることが明らかになった。

さて、レーザーのモードを共振器の固有モードに対してどの程度マッチしていないとしないか？ この制限を決めるには干渉計のコントラストに与える影響を考えるのが妥当だろう。レンズ f3 と f4 の間隔に誤差があり、レーザー光のウエストサイズやウエストポジションが共振器の固有モードのそれらからずれたとき、レーザー光のモードを共振器の固有モードで展開すると Laguerre-Gaussian モードの高次モードが励起されることがわかっている。干渉計が対称的な場合は、励起された高次モードも beam splitter 上で再結合されたときに打ち消し合うが、図 12 のように非対称な干渉計の場合には完全には打ち消し合わない。それは、beam splitter から基本モードと高次モードが得る Guoy phase shift が同じでないことに起因する。そこで、ミスマッチした場合に励起された高次モードがどの程度出力ポートの dark fringe を汚すかを見積もる。

ミスマッチの度合いがあまり大きくない場合には、高次モードとしては ψ_1 のみを考えれば充分であろう。入射光を共振器の固有モードで展開すると、

$$\psi_0' = c_0\psi_0 + c_1\psi_1 \quad (129)$$

である。ただしこの場合の共振器の固有モードとは、beam splitter から 2 枚の front mirror までの平均距離の位置にウエストがあるようなモードである。beam splitter や front mirror の付近ではレーザー光の波面はほぼ平面であるので Guoy phase のみを考慮する。 ψ_0 と ψ_1 が得る Guoy phase shift の差は $2\eta(z)$ であるので、 ψ_1 が干渉計の透過ポートにつくる電場は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c_1\psi_1(e^{j2\eta(\Delta l)} - e^{-j2\eta(\Delta l)}) &= jc_1\psi_1 \frac{e^{2j\eta(\Delta l)} - e^{-2j\eta(\Delta l)}}{2j} \\ &= jc_1\psi_1 \sin 2\eta(\Delta l) \end{aligned} \quad (130)$$

となる。ただし

$$\Delta l \equiv 50[\text{cm}] \quad (131)$$

$$\eta(\Delta l) = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda \Delta l}{\pi w_0^2} \right) \quad (132)$$

である。強度を計算して photo detector の受光面で積分すると、

$$|c_1|^2 \sin^2 2\eta(\Delta l) \quad (133)$$

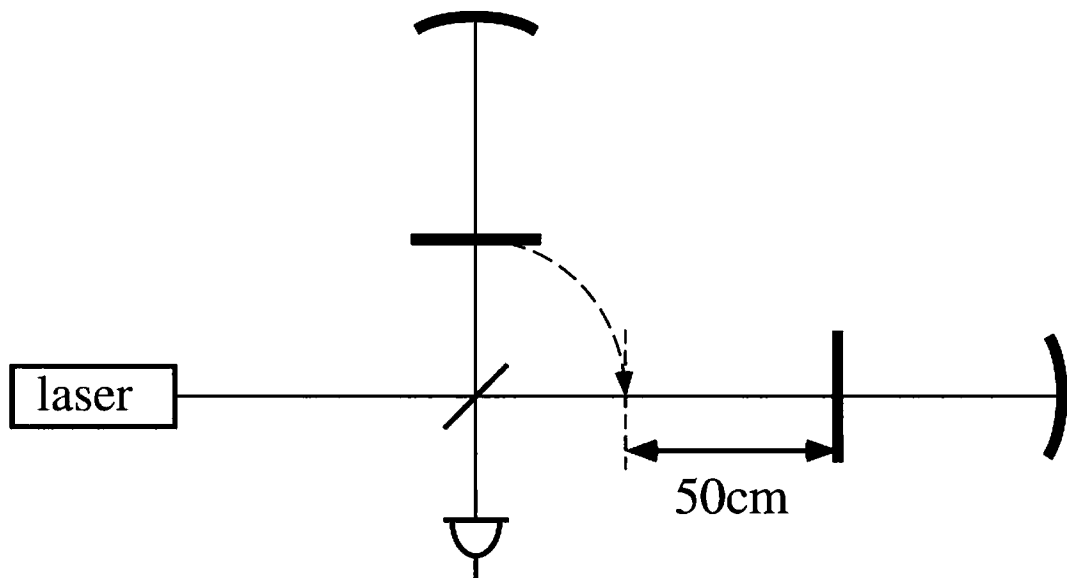


図 12: pre-modulation 法によって起こる干渉計の非対称性。beam splitter から 2 枚の front mirror までの距離に差ができてしまう。TAMA300 では 50[cm] の非対称性をつくる予定になっている。

となる。マッチング率が低くなると、この値が大きくなって干渉計のコントラストを悪化させる。実際に干渉計のコントラストを悪化させる主な要因としては sideband やミスアラインメントによって励起されるモードなどが考えられる。それらと比べてみないとマッチング率に制限を与えることは厳密にはできない。sideband の影響は変調指数にも依るし、ミスアラインメントの影響などもアラインメント制御の利得に依る。

ただ、マッチング率が極端に下がると光のエネルギーを損するわけで、例えばマッチング率が 90% なら 10% のエネルギーを無駄にしてしまうことになる。そこで、マッチング率に対する要求を 99% 以上ということにすると、 f_3 と f_4 の間隔に要求される精度は、

$$\pm 0.3[\text{mm}] \quad (134)$$

程度である。これはマイクロメーターを用いれば簡単に達成できる精度である。仮にマッチング率に要求する精度を緩めて 90% 以上ということにしても、要求される精度は

$$\pm 0.6[\text{mm}] \quad (135)$$

なので、いずれにしろ何らかの微調機構が必要な値である。結局、共振器の固有モードへのマッチング率が 99.7% というまずまずの値に達したので次の作業に進んだ。次に、Fabry-Perot 共振器を共振状態に持ち込む方法を説明する。EM タンクを開けて EM を吊ったサスペンションシステムをインストールする。まず、EM で反射した光が T2 に当たる

beam profiles after injection optical system

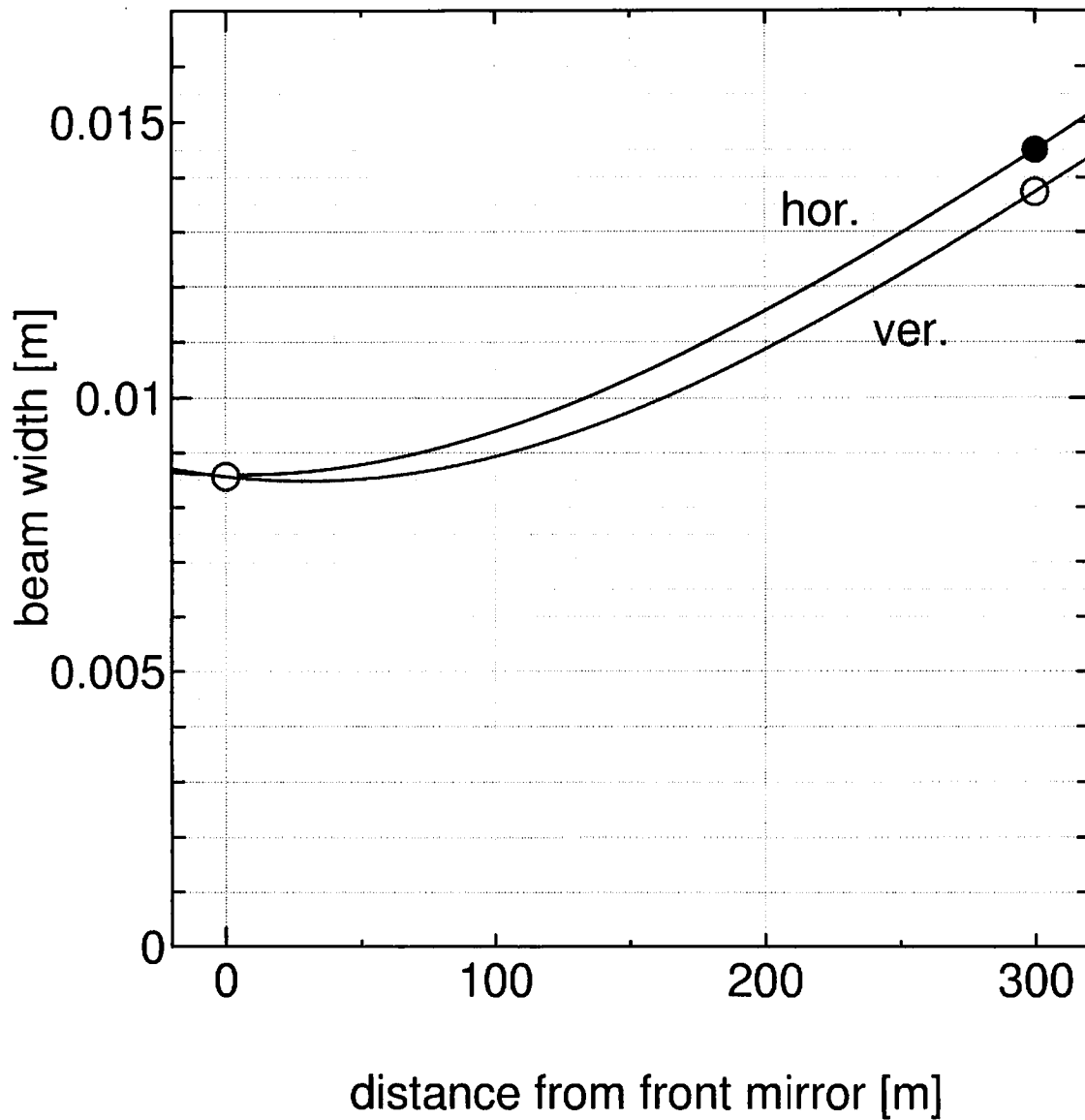


図 13: 真空パイプ内でのビームのプロファイルを表す。パイプの内部でのビーム径を測ることはできないので、front mirror と end mirror 付近の 2 箇所で測定した。

horizontal beam profiles after injection optical system

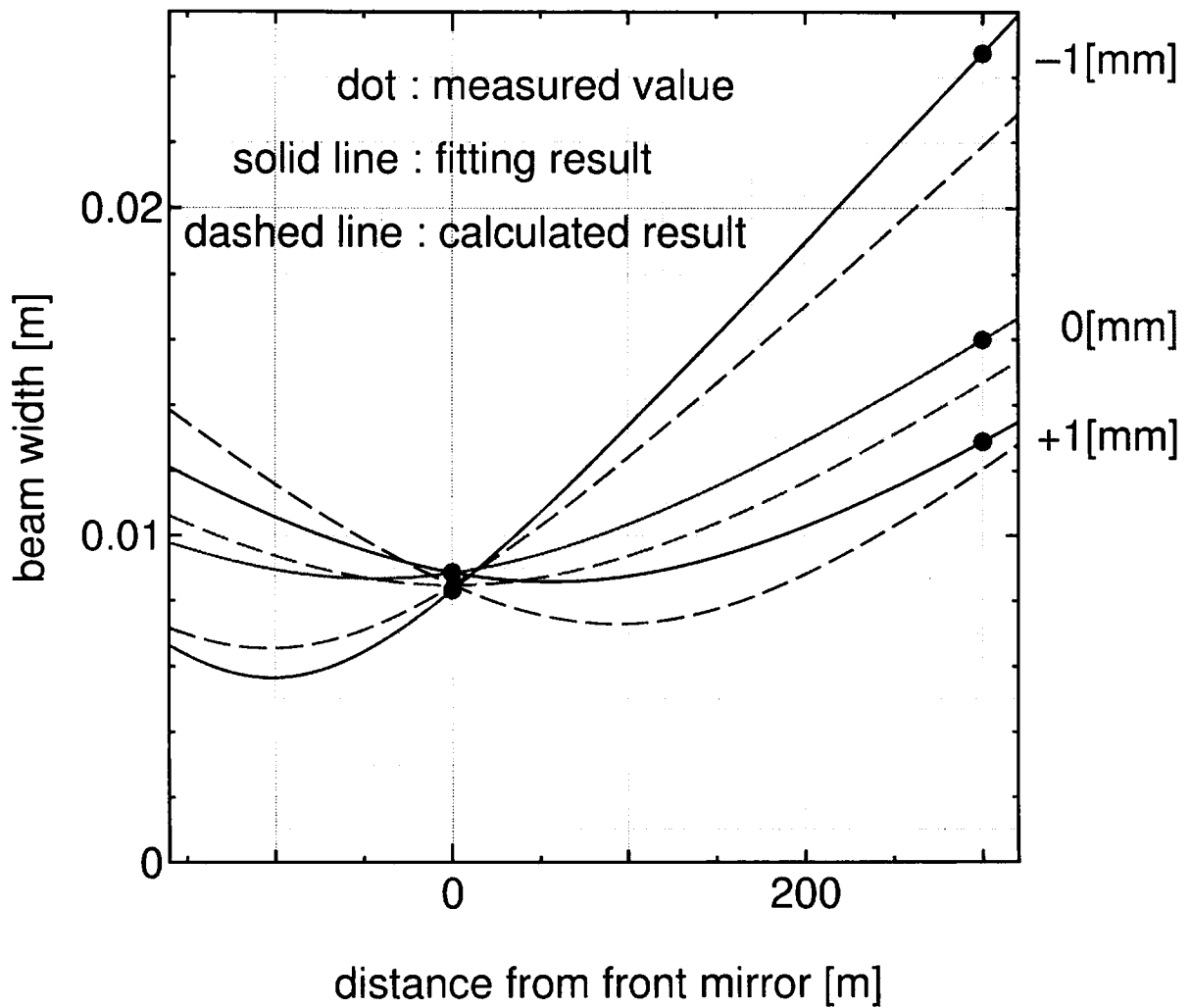


図 14: レンズ f3 と f4 の間の距離を正しい位置から $\pm 1[\text{mm}]$ ずつ動かしたときの beam profile の変化の測定及び計算結果。両者のプロファイルの変化のしかたが一致している。

beam profiles after injection optical system (calculated)

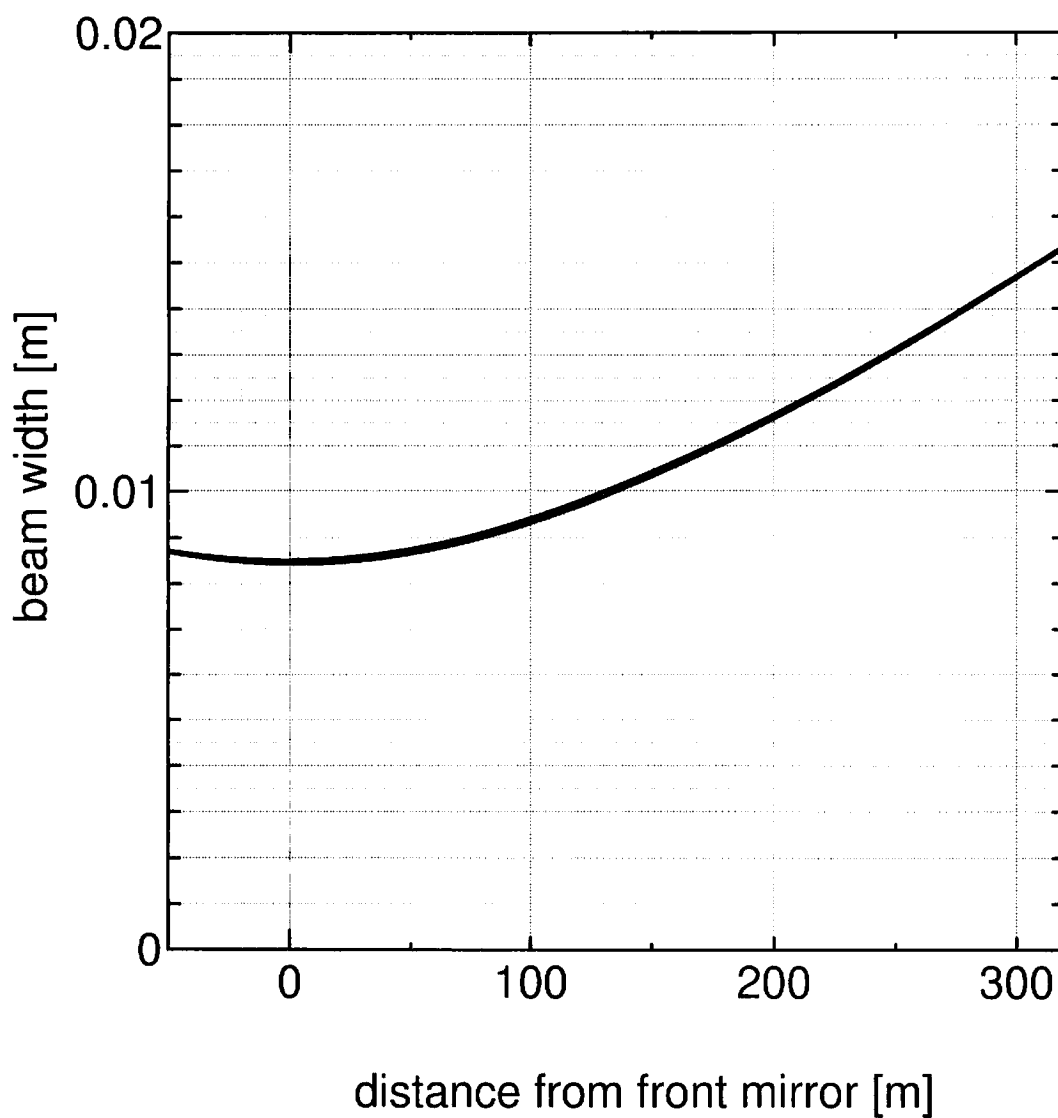


図 15: レンズ f3 と f4 間隔を変えずに、それらを正しい位置から ± 10 [cm] 動かした場合の beam profile の変化を表している。ほとんど影響がないので 3 つのグラフは重なってしまっている。

ようにする。ただし、先ほどのように T2 の高さを数 cm 低くしなければならない。さもないと、入射光が T2 に遮られて EM まで到達しなくなってしまうからである。

こうして、少し下げた T2 の中心に EM からの反射光を当てることができたら、EM からの反射光が T1 に当たるようにする。もちろん T1 の高さも T2 と同程度でなくてはならない (T2 のときと同じ理由で)。T1 に当てるためには、基本的には EM を pitch に関して動かせば良いはずである。失敗したら、また繰り返す。つまり、EM からの反射光を T2 に当てるところからである。運良く T1 に当たれば、EM を pitch に関して少しだけ動かせば EM からの反射光は FM タンクに戻ってくる。ここまできたら、EM タンクを真空にする。真空にすることによって鏡の位置がずれてしまうことがよくある。大幅にずれてしまった時は、真空を引き出す前の作業を繰り返す。うまくいったら EM のイニシャルアライメントは終わりである。

次に FM をインストールする。入射光は共振器に入る前に FM でほとんど反射される。まずはこの反射光を使って合わせる。すなわち、FM が入射光に対して垂直ならば反射光は入射光と同じ道筋を逆行するはずなので、両者が光学テーブルの上で一致するように FM のアライメントを合わせる。ここまできたら、FM タンクを真空にする。真空を引くときにまた鏡がずれるかもしれないが、もう 1 度光学テーブルの上で入射光と反射光が一致するように合わせればよい。ここまできると光は共振してるかもしれない。それをチェックするには、EM タンクからの透過光を CCD カメラでモニターすればよい。場合によってはセンサーカードでもスポットの点滅が見える。スポットが点滅するのは、鏡が揺れているために、たまたま共振条件を満たした瞬間だけ共振して透過光が見えるからである。

まだ共振していないようならば、EM のアライメントを合わせたときと同じようにすればよい。つまり、EM で反射された光を FM でもう一度反射させて、やや低い位置にある T1 に光を当てる。FM を pitch 方向に少し動かせば T2 に光が当たるであろう。更に少しだけ pitch 方向に FM を動かせばスポットの点滅が見えるようになるはずである。

あとは、点滅が少しでも明るくなるように、両方の鏡を yaw 及び pitch 方向にいろいろ動かす。これ以上明るくならないと思ったら、Initial Alignment は終了である。

6.4 Fabry-Perot 共振器の制御

Initial Alignment が終了したら、Pound-Drever 法を用いて Fabry-Perot 共振器を共振状態に制御することが可能である。図 16 は共振器の光路長制御系の概念図である。誤差信号のスペクトルを考えたとき、低い周波数成分に関しては、共振器長を制御することによって共振器を共振状態に保っている。共振器長制御をするためには鏡の位置を制御しなければならない。EM を実際に駆動するには磁場を用いている。図 17 のように鏡の裏面の 4 箇所に棒磁石を張り、棒磁石がコイルの中を通るようにコイルの位置を調整する。コイルに電流を流せば磁場が発生して棒磁石に力を加える。この性質を利用して鏡を駆動している。

これに対して誤差信号の高い周波数成分に関しては、レーザーの発振周波数を変えることによって共振器を共振状態に保っている。発振周波数を変化させるにはレーザーに附属のPZT素子に電圧を加える。PZTに電圧を加えてレーザー内部の共振器長を変化させることによって発振周波数を変化させる。

DBM

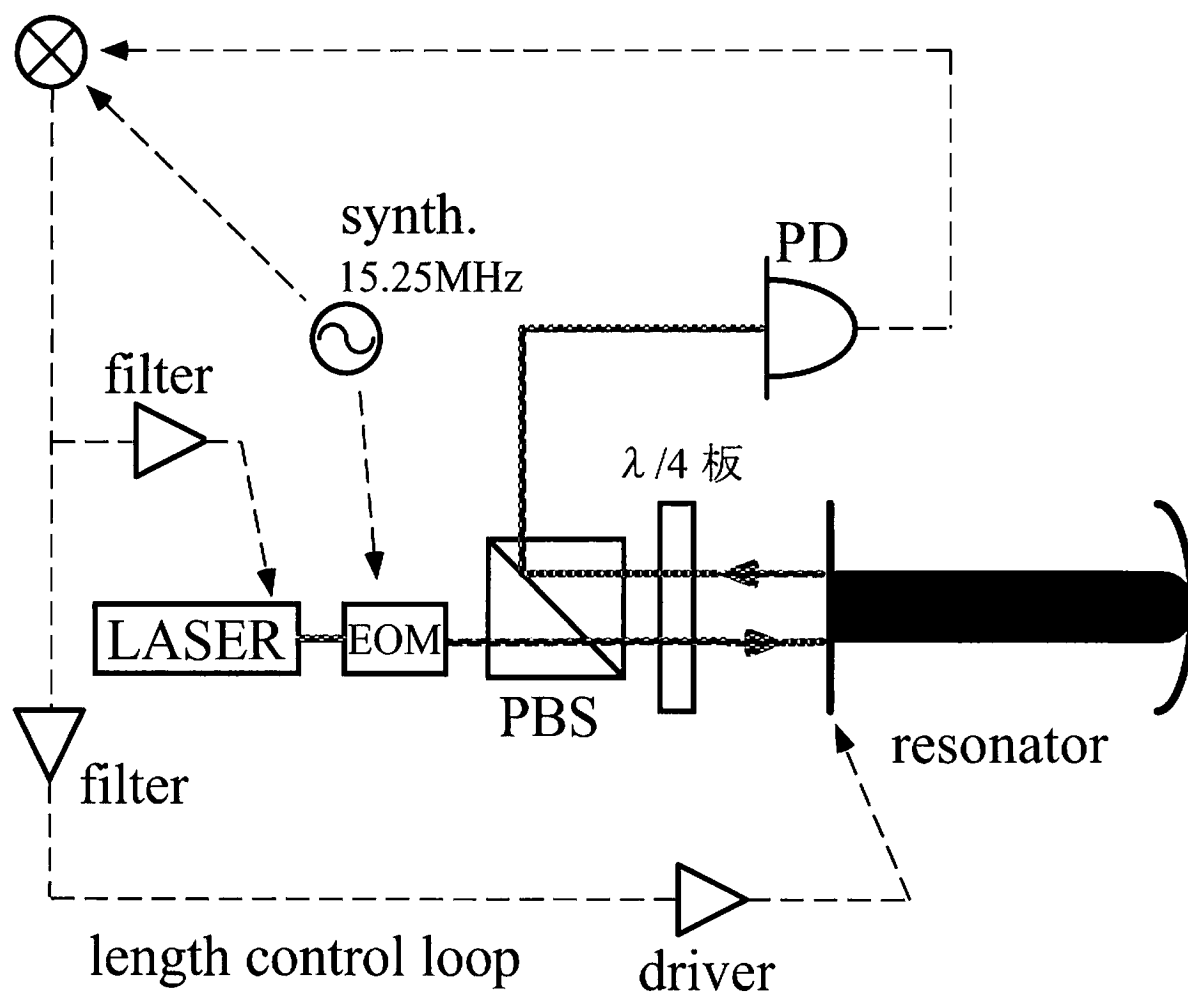


図 16: 300m Fabry-Perot 共振器の光路長制御系の概念図

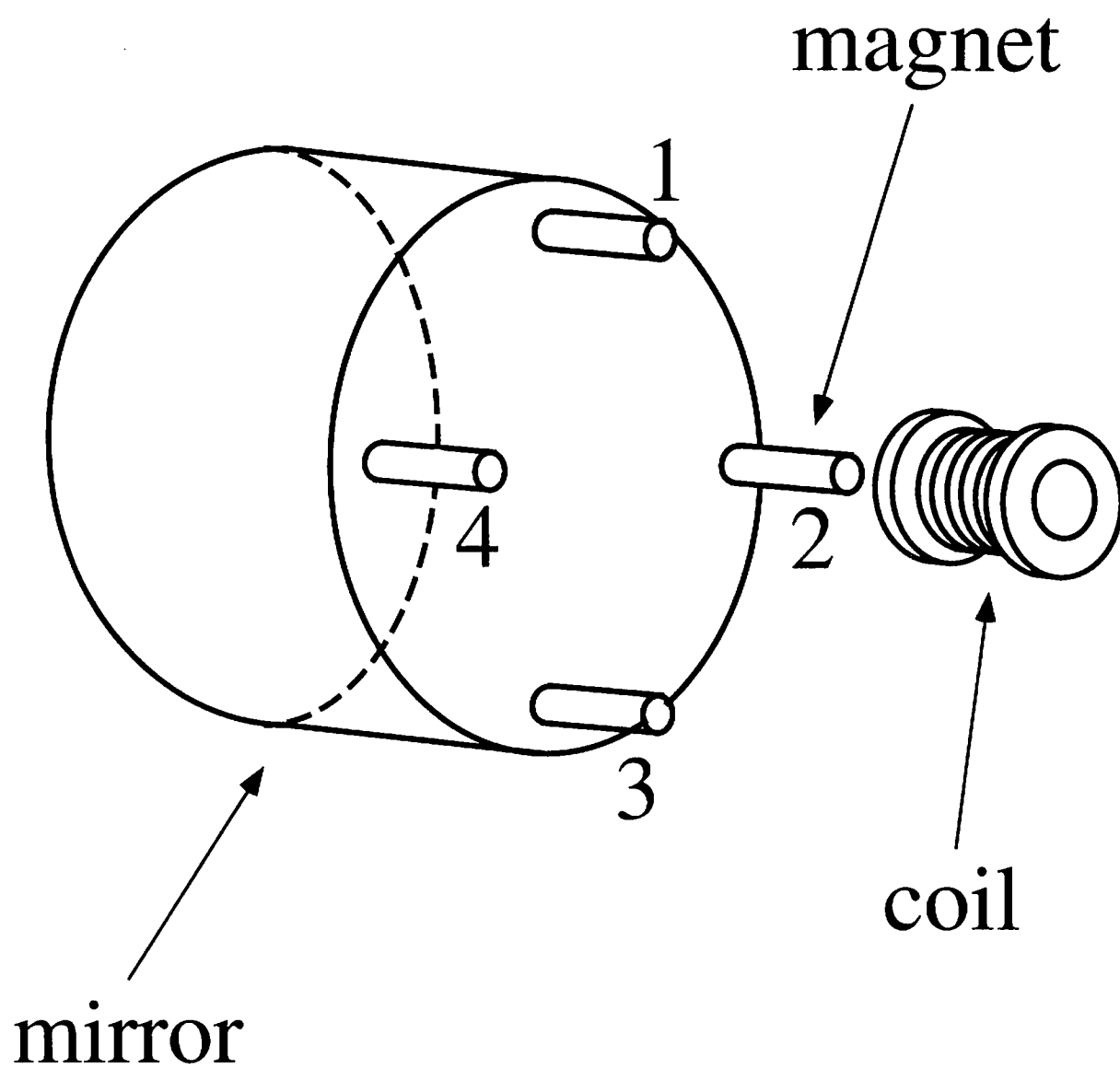


図 17: 鏡とアクチュエーター

共振器が安定に制御されるためには、フィードバック系の電気回路が正しく設計されていなければならない。図 18 は、負のフィードバックのない系 (上図) と、ある系 (下図) を簡単に表したのものである。 $G(\omega)$ は干渉計の周波数応答関数 (伝達関数) である。より正確な表現をするなら、コイルからエラーシグナルの取りだし点までの周波数応答関数だと言える。このような系への入力信号 $x(t)$ の Fourier 変換を $X(\omega)$ 、出力信号 $y(t)$ の Fourier 変換を $Y(\omega)$ とする。

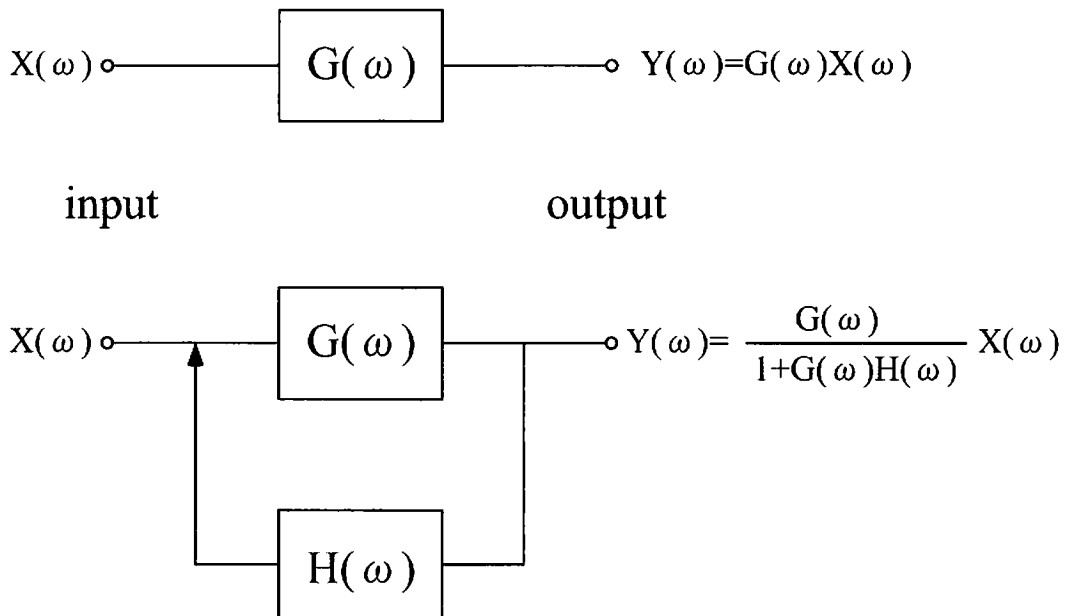


図 18: フィードバックのあるシステム

フィードバックがないときは、

$$Y(\omega) = G(\omega)X(\omega) \quad (136)$$

あるときは、

$$Y^{\text{FB}}(\omega) = \frac{G(\omega)}{1 + G(\omega)H(\omega)} X(\omega) = \frac{Y(\omega)}{1 + G(\omega)H(\omega)} \quad (137)$$

となる。これを見ると、負のフィードバックをかけることによって出力の変動を $1/(1 + G(\omega)H(\omega))$ 倍に抑えることができるのがわかる。

フィードバック系の安定判別法はいくつかあるが、簡単で充分な方法としては $G(\omega)H(\omega)$ を使って判定するものである。 $G(\omega)H(\omega)$ のことを Open Loop Transfer Function (開ループ伝達関数) と呼ぶ。 $|G(\omega)H(\omega)| = 1$ を満たす周波数 (Unity Gain Frequency) ω_{UG} において、

$$\theta \equiv \arg[G(\omega_{\text{UG}})H(\omega_{\text{UG}})] + \pi > 0 \quad (138)$$

を満たしていれば多くの場合系は安定である。ここで θ は phase margin と呼ばれている量である。 $G(\omega)$ は更に細かく分けることができ、例えば共振器長制御ループを考えた場合にはコイルの応答、振り子の応答、Fabry-Perot 共振器の応答 (H_{FP}) などを表す周波数応答関数が掛け合わされたものになっている。しかし、 $G(\omega)$ に大きな影響を与えるのは主に振り子の応答である。共振器を構成する鏡を吊る振り子は単振り子よりも複雑ではあるが、単振り子の周波数応答関数で代用できる。すると $G(\omega)$ は近似的に次のように表せる。

$$G(\omega) = \gamma \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (139)$$

この式からわかることであるが、 $\omega > \omega_0$ の領域では $\arg[G(\omega)] = -\pi$ となってしまう (位相が 180 度遅れてしまう) ので、共振器長制御ループの ($G(\omega)H(\omega)$ の)UGF を ω_0 より高くするならば、 ω_0 において位相を進めるようなフィルター $H(\omega)$ を設計しなければならない。ここで、位相を進めるフィルターとは、

$$0 < \arg[H(\omega_0)] < \pi \quad (140)$$

となるような周波数応答を持つフィルターのことである。

一方、PZT 制御ループは高い周波数で重要になってくる。全体の開ループ伝達関数を考える場合でも、UGF 付近の高い周波数領域ではほとんど PZT 制御ループのみが制御を担っている。共振器の周波数応答は LPF と同様であるので、 f_c (cut off frequency) より高い周波数では位相が遅れていく (-90 度に漸近していく) ことに注意して、PZT 制御ループのフィルターを設計しなければならない。

フィルターとしては、共振器長制御ループ、PZT 制御ループともに、市販のアンプを使用した。前者に用いたアンプの設定は、cut off frequency が 300[Hz] の Low Pass Filter である。後者は cut off frequency が 0.3[Hz] と 10[Hz] の Band Pass Filter として設定した。市販のアンプなので詳細は不明だが、位相を進める特性を持つアンプだということがわかった。例として後者の設定にしたアンプの周波数応答関数を載せた (図 20 と図 21)。

前にも述べたように、制御をかけることによって出力信号を $1/(1 + G(\omega)H(\omega))$ 倍に圧縮できることがわかった。つまり開ループ伝達関数 $G(\omega)H(\omega)$ が大きいほど tight に制御をかけることが可能である。一般に開ループ伝達関数は高い周波数にいくほど小さくなっていく。そこで、UGF をもって制御フィードバックの大きさの目安とすることが多い。もちろん、UGF が大きいほど tight に制御がかかる。また、UGF はフィードバック系が制御することのできる制御帯域を示す目安でもある。なぜならば、 $|G(\omega)H(\omega)|$ が 1 に比べて小さい周波数領域では

$$\left| \frac{1}{1 + G(\omega)H(\omega)} \right| \simeq 1 \quad (141)$$

なので、出力信号を圧縮することができないからである。図 19 は 300m Fabry-Perot 共振器の制御で使われている制御系の開ループ伝達関数である。1[kHz] 以下の周波数帯域

では測れていない。UGFは15[kHz]程度で、そこでの位相遅れは-160度程度であることがわかる。よって、約20度のphase marginが確保されている。

openloop transfer function

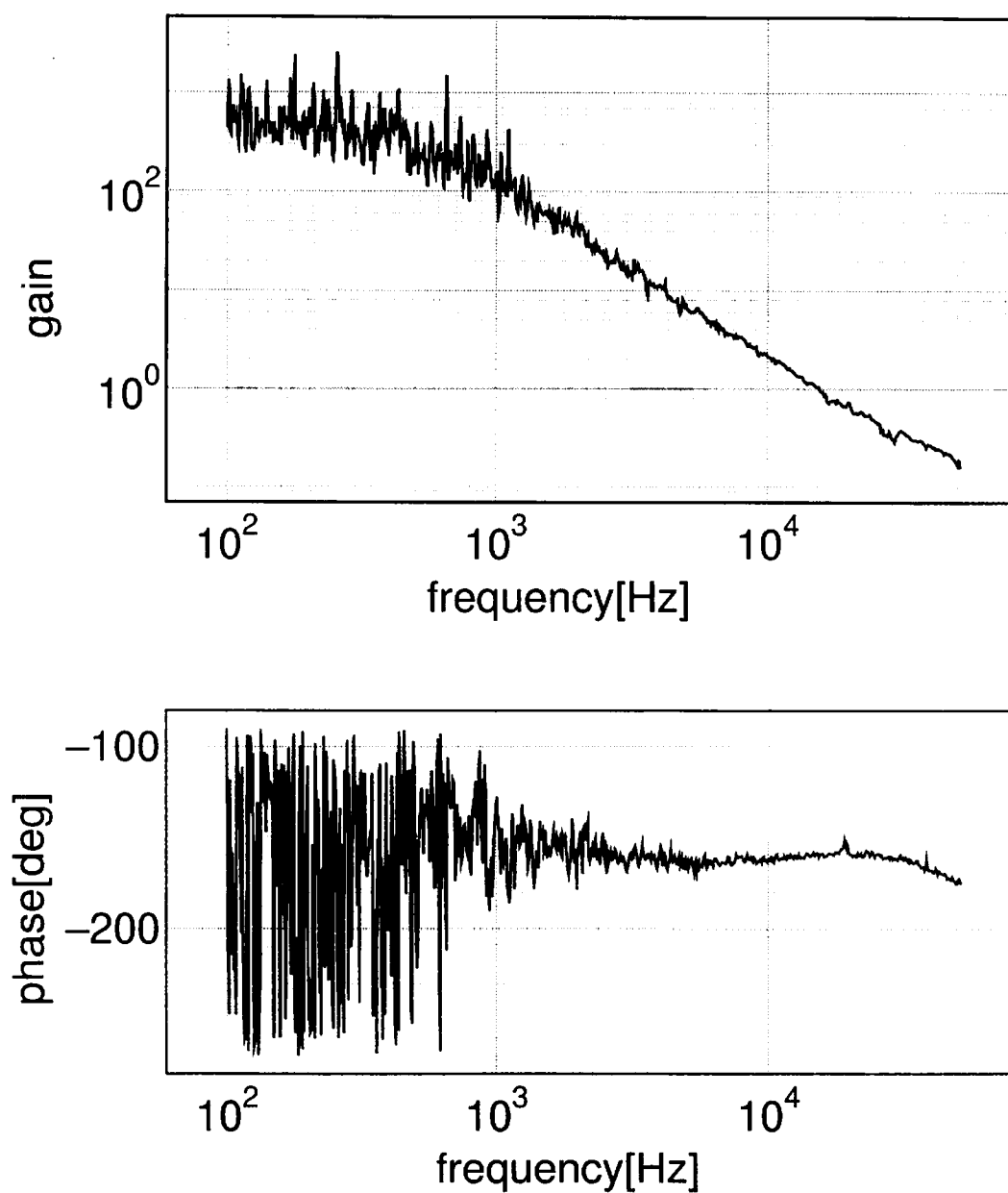


図 19: 300m Fabry-Perot 共振器の制御系の開ループ伝達関数。UGF は約 15[kHz], phase margin は約 20 度であることがわかる。1[kHz] 以下の周波数帯域では測れていない。

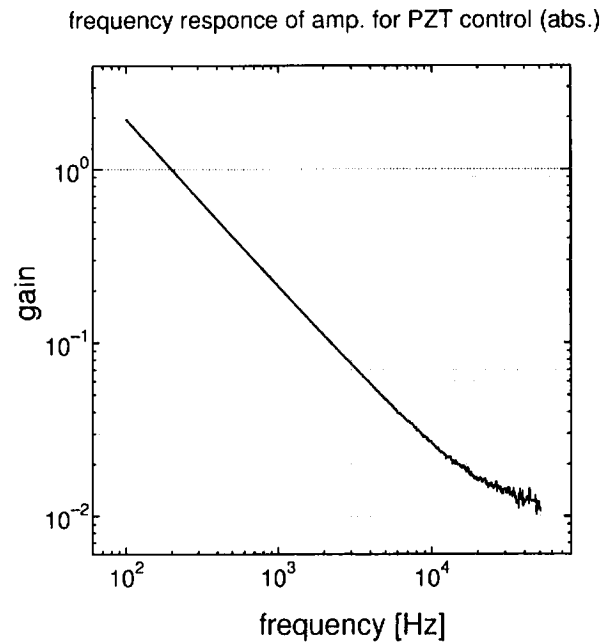


図 20: レーザーの発振周波数制御ループに用いたフィルターの周波数応答関数の絶対値。

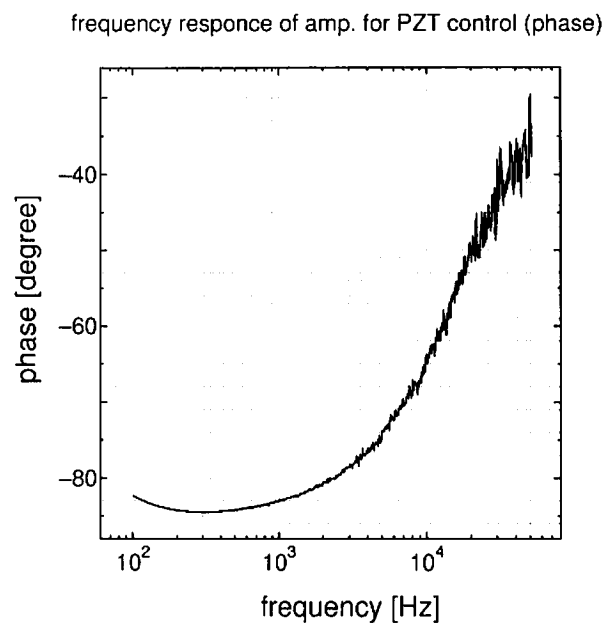


図 21: レーザーの発振周波数制御ループに用いたフィルターの周波数応答関数の位相。高い周波数では通常の LPT に比べて位相が進んでいる。このことが、全体の開ループ伝達関数の UGF での phase margin を生んでいる。

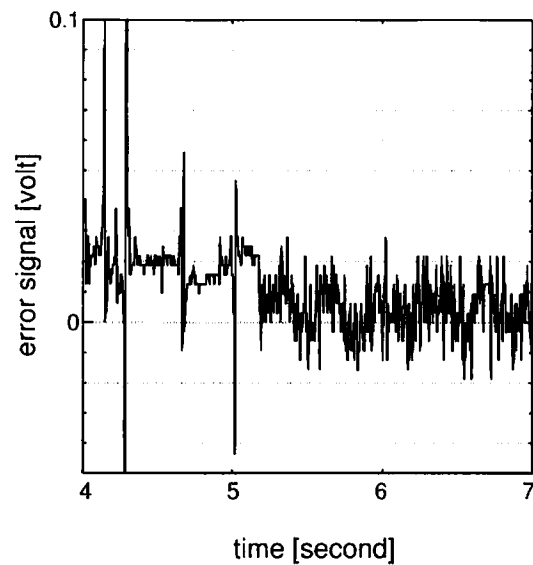


図 22: 制御がかかっている領域 ($t \geq 5.2[\text{sec}]$) では誤差信号は確かに 0 付近に落ち着いている。制御がかかっていない領域 ($t \leq 5.2[\text{sec}]$) において正しい誤差信号を表しているのは数本の鋭いピークである。0.02[volt] 付近の電圧は回路の雑音と考えられる。

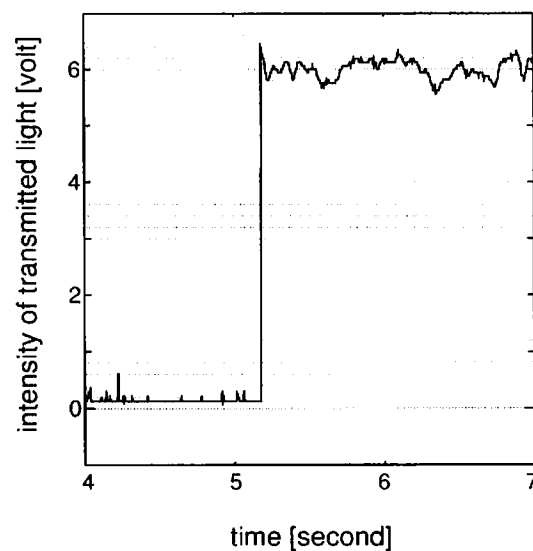


図 23: 制御がかかって共振器が共振状態に引き込まれると、光が End Mirror を透過するようになる。

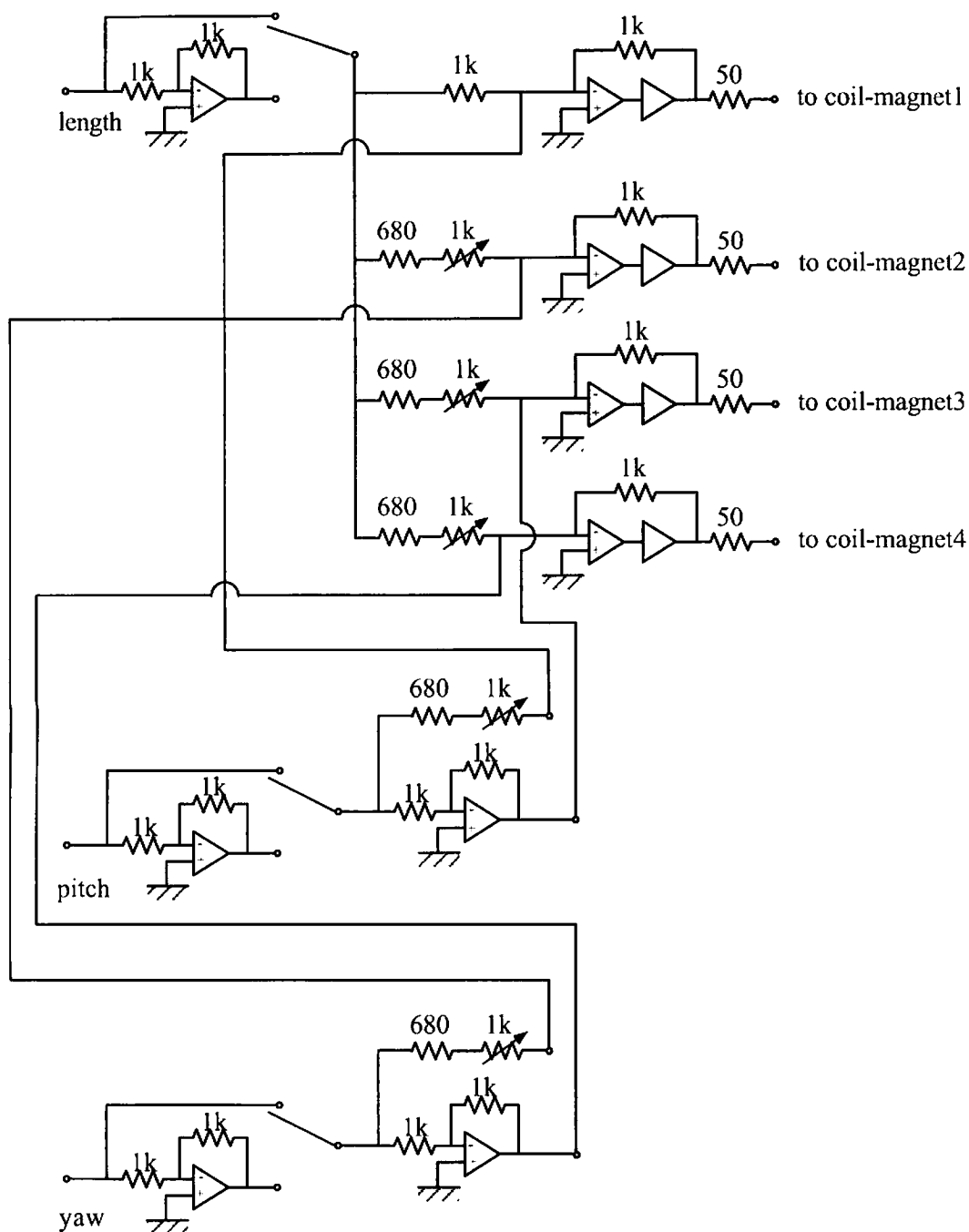


図 24: coil driver の回路図。入力はいくつで、そのうち1つが鏡の光路長制御、残りの2つが2自由度 (yaw,pitch) のアラインメント制御のためのものである。なお、図中の数値の単位は $[\Omega]$ である。

7 まとめ

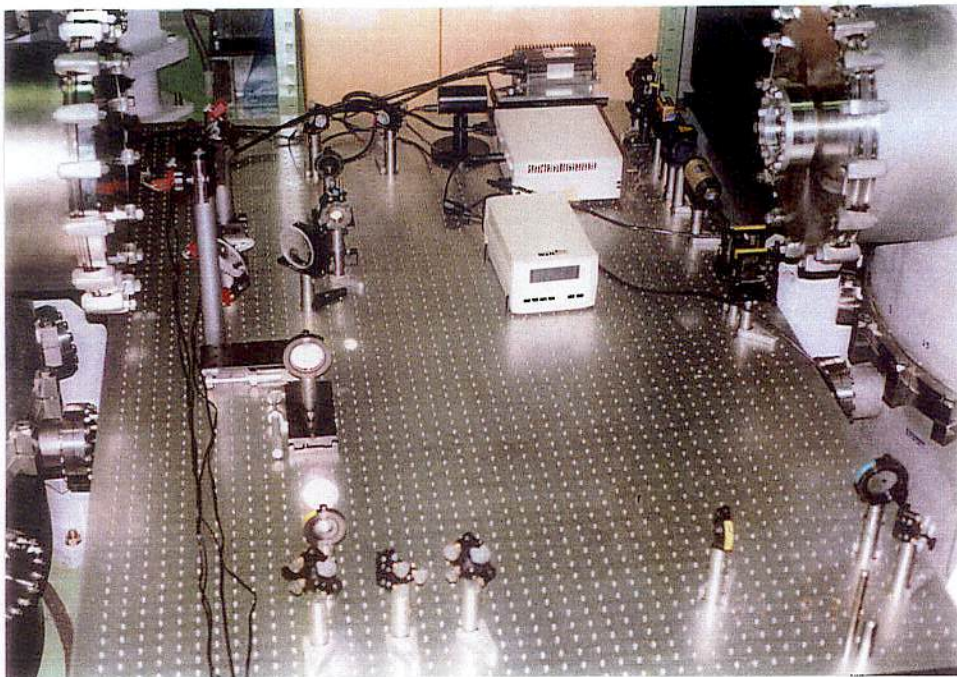
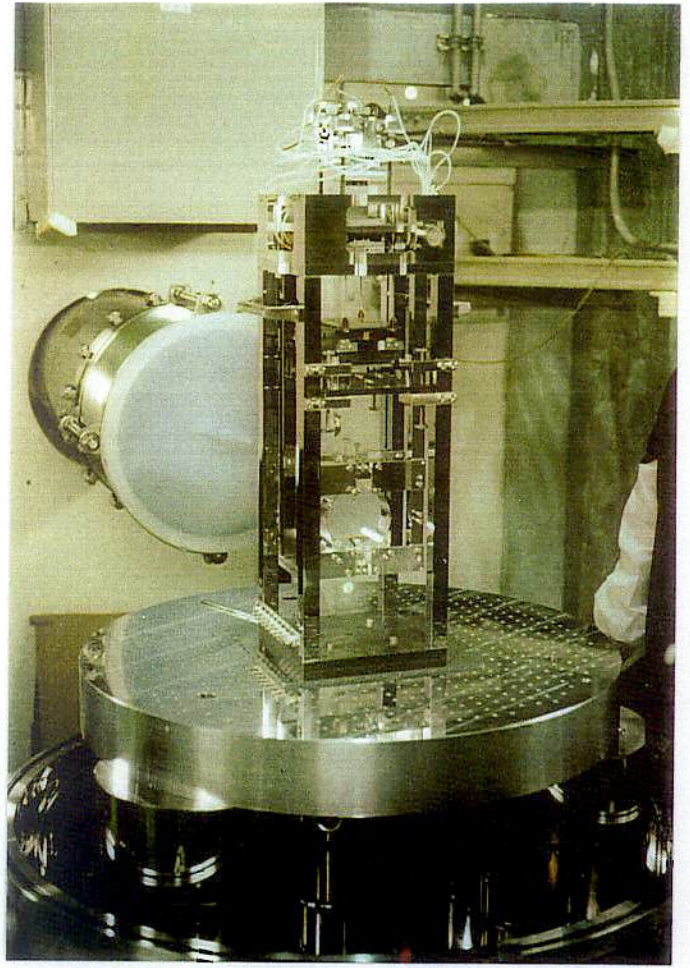
TAMA300 で用いられる 300m Fabry-Perot 共振器を、Pound-Drever 法を用いて共振状態に制御することに成功した。それに伴い、以下のことが明らかになった。

- レーザー光を 300m 共振器にマッチさせるための 2 枚のレンズ間距離の誤差は $\pm 0.1[\text{mm}]$ 以内には抑えたいので、どちらかのレンズの位置をマイクロメーターで調整できるようにしなければならない。ただし、それを用いれば共振器へのマッチング率が 99% 以上の入射光をつくることは難しくない。
- 赤外のレーザー光を 300[m] もの長さの真空パイプの中に通すのは容易ではないが、必ず通すことができるシステムティックな方法を見つけることができた。
- ローカルコントロールなどの補助的な制御をすることなしに共振状態に制御することが可能であることがわかった。

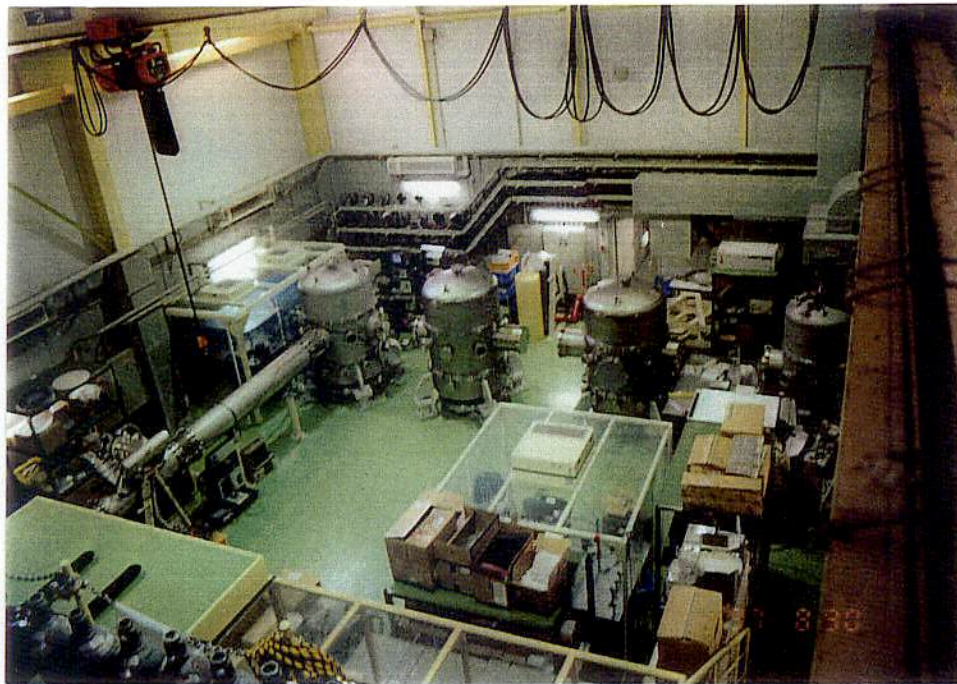
参考文献

- [1] 枡久保 邦治 : 修士論文 (1996)
- [2] 安東 正樹 : 修士論文 (1996)
- [3] 三尾 典克、大橋 正健 編 : 重力波アンテナ技術検討書 (1992)
- [4] H.Kogelnik and T.Li : Proc.of The IEEE.54,1312(1966)

suspension system



入射光学系



center room of TAMA300



300m vacuum tube