

修士論文

重力波望遠鏡 TOBA のための
結合光共振器を用いた角度信号増幅の実証

(Angular Signal Amplification
with a Coupled Cavity
for Torsion-Bar Gravitational-Wave Antenna)

東京大学 大学院理学系研究科 物理学専攻
大島 由佳

2022 年 1 月 6 日 第 1 版提出

2022 年 1 月 28 日 最終版提出

要旨

重力波とは、時空の歪みが光速で伝播する現象である。2015年、アメリカの重力波望遠鏡 Advanced LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) が初めて重力波の直接検出を達成した。現在稼働している地上のレーザー干渉計型重力波望遠鏡は 10 Hz–1 kHz で良い感度を得られるように設計されている。より低い周波数帯 (0.1 Hz–10 Hz) の重力波観測を目指し、ねじれ型重力波望遠鏡 TOBA (TOrsion-Bar Antenna) が考案されている。

TOBA は、棒状試験マスを水平に懸架した構成をしており、ねじれ振り子の回転を検出することで重力波を観測できる。TOBA が完成すれば、中間質量ブラックホール連星合体の検出、背景重力波の検出、従来よりも早い地震速報の実現ができると見込まれている。現在は 3 台目のプロトタイプ Phase-III TOBA の開発段階にある。Phase-III TOBA の散射雑音の要求値を達成するには、高感度な角度センサが必要である。

TOBA の角度センサとして、結合光共振器を用いた WaveFront Sensor (Coupled WFS) が考案されている。通常の WaveFront Sensor (WFS) は 2 枚のミラーで構成されるが、Coupled WFS は後ろにもう 1 枚ミラーを置いて補助共振器を構成する。補助共振器による位相補償によって角度信号を増幅できるという特長がある。さらに、ビームジッター雑音が小さいという利点もある。

本研究では、この Coupled WFS の性質解明のためのシミュレーションと、原理実証実験を行った。シミュレーションにより、Coupled WFS の信号強度と線形レンジが主共振器のフィネスおよび補助共振器の動作点に依存することを初めて示した。また、主共振器内の状態を直接モニタでき、補助共振器の外乱が小さい構成で Coupled WFS を製作し、主共振器・補助共振器ともに PDH 法で制御することに成功した。Coupled WFS を補助共振器の 00 モードと 10 モードの共振点まわりで動作させ、WFS に比べてそれぞれ 3.5 ± 0.9 倍、 2.9 ± 0.8 倍の角度信号増幅を観測した。本研究の成果により、Coupled WFS の TOBA への有用性を示し、制御手法を確立して開発への見通しを立てたといえる。

目次

目次	v
図目次	xi
表目次	xv
記号・略語一覧	xvii
第 1 章 はじめに	1
1.1 研究背景	1
1.2 本論文の構成	2
第 2 章 重力波とその検出	3
2.1 重力波の導出	3
2.1.1 計量テンソルと測地線方程式	3
2.1.2 Einstein 方程式	4
2.1.3 Einstein 方程式の線形近似	4
2.2 重力波の性質	6
2.2.1 重力波の伝播	6
2.2.2 自由質点に対する重力波の影響 (TT gauge)	7
2.2.3 自由質点に対する重力波の影響 (proper detector frame)	7
2.2.4 重力波の偏波	9
2.2.5 重力波の放射	9
2.3 重力波源	10
2.3.1 コンパクト連星合体	10
2.3.2 超新星爆発	12
2.3.3 パルサー	12
2.3.4 背景重力波	13

2.4	重力波の検出	13
2.4.1	共振型重力波望遠鏡	13
2.4.2	レーザー干渉計型重力波望遠鏡	13
2.4.3	宇宙重力波望遠鏡	14
2.4.4	パルサータイミング	14
2.4.5	ドップラートラッキング	14
2.5	本章のまとめ	14
第3章	ねじれ型重力波望遠鏡 TOBA	17
3.1	TOBA の原理	17
3.1.1	TOBA の重力波に対する応答	17
3.1.2	TOBA の周波数応答	19
3.2	TOBA の目標感度とパラメータ	21
3.3	重力波望遠鏡の中での TOBA の位置づけ	23
3.3.1	TOBA と地上のレーザー干渉計型重力波望遠鏡の比較	23
3.3.2	TOBA と宇宙重力波望遠鏡の比較	23
3.4	TOBA の観測対象	23
3.4.1	中間質量ブラックホール連星合体	24
3.4.2	背景重力波	24
3.4.3	重力勾配雑音	24
3.4.4	地震速報	25
3.5	Phase-I TOBA	25
3.5.1	Phase-I TOBA の構成	25
3.5.2	Phase-I TOBA の達成感度	26
3.6	Phase-II TOBA	27
3.6.1	Phase-II TOBA の構成	27
3.6.2	Phase-II TOBA の達成感度	28
3.7	地面振動雑音の伝達評価実験	28
3.7.1	地面振動雑音の伝達評価実験の構成	28
3.7.2	地面振動雑音の伝達評価実験の達成感度	29
3.8	Phase-III TOBA	29
3.8.1	Phase-III TOBA の観測対象	30
3.8.2	Phase-III TOBA の構成	30
3.8.3	Phase-III TOBA の目標感度と雑音源	32
3.9	TOBA の角度センサの開発	35

3.9.1	折り返し光共振器を用いた WaveFront Sensor (Folded WFS) の 原理実証実験	35
3.9.2	結合光共振器を用いた WaveFront Sensor (Coupled WFS) の原 理実証実験	36
3.10	本章のまとめ	38
第 4 章	結合光共振器を用いた wavefront sensor	39
4.1	WaveFront Sensor (WFS)	39
4.1.1	WFS の原理 (一般的な場合)	39
4.1.2	WFS の原理 (フラットなフロントミラーが傾いた場合)	46
4.2	結合光共振器を用いた WaveFront Sensor (Coupled WFS)	48
4.2.1	Coupled WFS の原理	48
4.2.2	Coupled WFS のビームジッターへの応答の原理	53
4.3	FINESSE を用いたシミュレーション	54
4.3.1	シミュレーションの目的と目標	54
4.3.2	シミュレーションの方法	54
4.3.3	シミュレーションの構成	55
4.3.4	Coupled WFS の角度信号増幅	57
4.3.5	WFS と Coupled WFS の信号強度の Gouy 位相依存性	58
4.3.6	WFS の信号強度と線形レンジのフィネス依存性	59
4.3.7	Coupled WFS の信号強度と線形レンジのフィネス依存性	60
4.3.8	Coupled WFS の信号強度と線形レンジの動作点依存性	62
4.3.9	Coupled WFS のビームジッターへの応答	63
4.4	本章のまとめ	65
4.4.1	WFS と Coupled WFS のまとめ	65
4.4.2	FINESSE を用いたシミュレーションのまとめ	65
第 5 章	実験装置	67
5.1	原理実証実験の目的と目標	67
5.2	原理実証実験の方法	67
5.3	実験装置全体の構成	68
5.4	入射光学系	70
5.5	結合光共振器	71
5.5.1	結合光共振器の設計	71
5.5.2	結合光共振器の製作	75

5.6	測定系	77
5.7	本章のまとめ	79
第 6 章	実験結果	81
6.1	アクチュエータ効率の測定	81
6.2	補助共振器の性能評価と制御	81
6.2.1	補助共振器の性能評価	81
6.2.2	補助共振器の制御	84
6.3	主共振器の性能評価と制御	86
6.3.1	主共振器の性能評価	86
6.3.2	主共振器の制御	87
6.4	Coupled WFS の制御	90
6.5	光てこの較正	94
6.6	Coupled WFS の角度信号増幅の測定	95
6.7	Coupled WFS のビームジッターへの応答の測定	97
6.8	本章のまとめ	97
第 7 章	考察	99
7.1	Coupled WFS の制御の考察	99
7.1.1	主共振器と補助共振器の固有モードのカップリング	99
7.1.2	補助共振器の制御の安定性	100
7.2	Coupled WFS の角度信号増幅の考察	101
7.2.1	主共振器のフィネスの測定誤差	101
7.2.2	RFQPD の位置 (Gouy 位相) のずれ	102
7.2.3	Coupled WFS のビームジッターへの応答の考察	103
7.3	本章のまとめ	104
第 8 章	結論	107
8.1	本研究の成果	107
8.2	今後の展望	108
8.2.1	さらに複雑な構成の干渉計におけるシミュレーション	108
8.2.2	フロントミラーの懸架による Coupled WFS の制御の安定化	108
8.2.3	Coupled WFS の TOBA への導入	108
補遺 A	Fabry-Pérot 共振器	109
A.1	反射率・透過率・共振器内パワー	109

A.2	共振条件	111
A.3	フリースペクトラルレンジとフィネス	111
A.4	共振器のローパス特性	113
A.5	ミラーの反射率による共振器の分類	113
A.5.1	オーバーカップル共振器	114
A.5.2	クリティカルカップル共振器	114
A.5.3	アンダーカップル共振器	114
A.5.4	共振器内パワーの比較	115
A.6	共振器内にロスが存在する場合のフィネス	117
A.7	3枚以上のミラーで構成される共振器のフィネス	117
補遺 B	Pound-Drever-Hall 法	119
B.1	実験系の構成	119
B.2	原理	120
B.3	PDH 信号	122
B.4	透過光を用いた PDH 法	122
補遺 C	フィードバック制御	123
C.1	フィードバック制御の原理	123
C.2	オープンループ伝達関数の測定方法	124
C.3	階層制御	125
補遺 D	共振型 RFPD の製作	127
D.1	RFPD の製作	127
D.2	共振周波数と Q 値の測定	128
D.3	プリント基板の浮遊キャパシタ	129
補遺 E	実験装置詳細	131
E.1	本実験で使用した部品・機器の一覧	131
E.2	結合光共振器の部品の一覧	133
	参考文献	137
	謝辞	145

目次

2.1	重力波の偏波	9
2.2	GW150914 の信号	11
2.3	O1 から O3b までに検出されたコンパクト連星合体	12
3.1	TOBA の概略図	18
3.2	TOBA の重力波への周波数応答	20
3.3	Final TOBA の設計感度	22
3.4	Final TOBA で中間質量ブラックホール連星合体を観測できる範囲	22
3.5	TOBA と他の重力波望遠鏡の感度の比較	23
3.6	Phase-I TOBA の構成	26
3.7	Phase-I TOBA の感度曲線	26
3.8	Phase-II TOBA の構成	27
3.9	Phase-II TOBA の感度曲線	28
3.10	地面振動の伝達評価実験の構成	29
3.11	地面振動の伝達評価実験の感度曲線	29
3.12	Phase-III TOBA の構成	31
3.13	Phase-III TOBA の写真	32
3.14	Phase-III TOBA の冷却曲線	33
3.15	Phase-III TOBA の感度曲線	33
3.16	Folded WFS の構成	36
3.17	Folded WFS の原理実証実験の結果	36
3.18	Coupled WFS の構成	37
3.19	Coupled WFS の原理実証実験の結果	38
4.1	WFS の原理 (一般的な場合)	40
4.2	WFS の原理 (フラットなフロントミラーが傾いた場合)	46
4.3	Coupled WFS の原理	49

4.4	補助共振器の 00 モードと 10 モードの反射位相と位相差	52
4.5	Coupled WFS の位相補償の可否	53
4.6	FINESSE で WFS をシミュレーションするときの構成	55
4.7	FINESSE で Coupled WFS をシミュレーションするときの構成	56
4.8	FINESSE で Coupled WFS をシミュレーションするときの主共振器と補助共振器の固有モード	57
4.9	Coupled WFS の角度信号増幅	58
4.10	WFS と Coupled WFS の信号強度の Gouy 位相依存性	59
4.11	WFS のミスアラインメントの量と信号強度のフィネス依存性	59
4.12	WFS の信号強度と線形レンジのフィネス依存性	60
4.13	Coupled WFS のミスアラインメントの量と信号強度のフィネス依存性	61
4.14	Coupled WFS の信号強度と線形レンジのフィネス依存性	61
4.15	Coupled WFS のミスアラインメントの量と信号強度の動作点依存性	62
4.16	Coupled WFS の信号強度と線形レンジの動作点依存性	63
4.17	FINESSE で WFS のビームジッターへの応答をシミュレーションするときの構成	63
4.18	FINESSE で Coupled WFS のビームジッターへの応答をシミュレーションするときの構成	64
4.19	Coupled WFS のビームジッターへの応答	64
4.20	WFS と Coupled WFS のビームジッターへの応答の Gouy 位相依存性	65
5.1	実験装置全体の構成	69
5.2	実験装置全体の写真	70
5.3	入射光学系の構成	71
5.4	入射光学系の写真	71
5.5	結合光共振器の構成	73
5.6	主共振器と補助共振器の固有モードと各ミラーの位置	73
5.7	補助共振器の 00 モードと 10 モードの反射位相差	74
5.8	Coupled WFS の位相補償に対する補助共振器内ロスの影響	74
5.9	共振器用アルミニウム製スペーサーの設計図	75
5.10	共振器用アルミニウム製スペーサーの写真	76
5.11	共振器用アルミニウム製スペーサーへのエンドミラーの取り付け方	76
5.12	結合光共振器の写真	77
5.13	測定系の構成	78
5.14	測定系の写真	78

6.1	補助共振器のキャビティスキャン	82
6.2	補助共振器の透過光の共振ピークのフィッティング	83
6.3	補助共振器の PDH 信号のフィッティング	84
6.4	補助共振器を単体で制御したときのブロックダイアグラム	85
6.5	補助共振器を単体で制御したときのオープンループ伝達関数	85
6.6	補助共振器の外乱のスペクトル	86
6.7	補助共振器の外乱のノイズバジェット	86
6.8	主共振器のキャビティスキャン	87
6.9	主共振器の制御のブロックダイアグラム	88
6.10	主共振器のオープンループ伝達関数	89
6.11	主共振器の外乱のスペクトル	89
6.12	主共振器の外乱のノイズバジェット	90
6.13	Coupled WFS を制御したときの時系列データ	91
6.14	CCD カメラでモニタした主共振器と補助共振器の透過光の様子	92
6.15	Coupled WFS を制御したときの補助共振器のブロックダイアグラム	92
6.16	Coupled WFS を制御したときの補助共振器のオープンループ伝達関数	93
6.17	主共振器と補助共振器の外乱のスペクトルの比較	94
6.18	光てこの較正	95
6.19	Coupled WFS の角度信号増幅の測定結果 (補助共振器の 10 モード共振点まわり)	96
6.20	Coupled WFS の角度信号増幅の測定結果 (補助共振器の 00 モード共振点まわり)	96
6.21	Coupled WFS のビームジッターへの応答の測定結果 (補助共振器 10 モード共振点まわり)	97
7.1	主共振器と補助共振器の PDH 信号のコヒーレンス	100
7.2	Coupled WFS の信号増幅の主共振器のフィネス依存性	102
7.3	RFQPD の位置と Gouy 位相の関係	103
7.4	WFS と Coupled WFS の信号強度の Gouy 位相依存性	103
7.5	Coupled WFS の信号増幅の RFQPD の位置依存性	104
7.6	Coupled WFS のビームジッターへの応答の RFQPD の位置依存性	104
A.1	Fabry-Pérot 共振器の模式図	109
A.2	Fabry-Pérot 共振器の共振器内パワーのフィネス依存性	113
A.3	Fabry-Pérot 共振器の共振器内パワーのカップリング依存性	115

A.4 Fabry-Pérot 共振器の反射光強度と透過光強度のカップリング依存性 . . .	116
B.1 PDH 法の実験系	119
B.2 PDH 信号	122
C.1 フィードバック制御のブロックダイアグラム	123
C.2 オープンループ伝達関数の測定方法	124
C.3 階層制御のブロックダイアグラム	126
D.1 共振型 RFPD の回路図	128
D.2 共振型 RFPD の伝達関数	129
E.1 共振器用アルミニウム製スペーサーの設計図 (詳細)	135
E.2 共振器用アルミニウム製スペーサーへのエンドミラーの取り付け方 (詳細)	135

表目次

3.1	Final TOBA の設計パラメータ	22
3.2	Phase-III TOBA のサイエンス	30
5.1	結合光共振器のパラメータ	72
6.1	補助共振器の性能評価	83
6.2	主共振器の性能評価	87
D.1	共振型 RFPD の共振周波数と Q 値	129
E.1	本実験で使用した光学素子	131
E.2	本実験で使用したレーザー光源・受光素子	132
E.3	本実験で使用した真空関連の部品・機器	132
E.4	本実験で使用したその他の部品・機器	133
E.5	結合光共振器に使用した部品	134

記号・略語一覧

記号

i	虚数単位 $i = \sqrt{-1}$
π	円周率 3.1415926535...
e	ネイピア数 2.71828182846...
c	光速 $c = 299\,792\,458$ m/s
G	万有引力定数 $G = 6.674 \times 10^{-11}$ m ³ /kg/s ²
\hbar	ディラック定数 $\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ J s
e	電荷素量 $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C
k_B	ボルツマン定数 $k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K
λ	レーザー光の波長 (本研究では 1064 nm)
ν	レーザー光の周波数 ($\nu = c/\lambda$)
ω_0	レーザー光の角周波数 ($\omega_0 = 2\pi\nu$)
ϕ	レーザー光の位相
ζ	レーザー光の Gouy 位相
\mathcal{F}	光共振器のフィネス
L	光共振器の長さ
ζ_{round}	光共振器の周回 Gouy 位相
ν_{FSR}	光共振器のフリースペクトラルレンジ
ν_{FWHM}	光共振器の共振ピークの半値全幅

略語

AR	anti-reflection
BS	beam splitter
Coupled WFS	Coupled wavefront sensor (結合光共振器を用いた wavefront sensor)
EOM	electro-optic modulator (電気光学変調器)
Folded WFS	Folded wavefront sensor (折り返し光共振器を用いた wavefront sensor)
FSR	free spectral range
FWHM	full width at half maximum (半値全幅)
HR	high-reflection
HWP	half-wave plate (1/2 波長板、 $\lambda/2$ 板)
PD	photo detector (光検出器)
PDH	Pound-Drever-Hall
PZT	lead zirconate titanate, $\text{Pb}(\text{Zr}_x, \text{Ti}_{1-x})\text{O}_3$ (ピエゾ素子)
QPD	quadrant photo detector (4 分割型光検出器)
QWP	quarter-wave plate (1/4 波長板、 $\lambda/4$ 板)
RF	radio frequency
TT	transverse traceless
UGF	unity gain frequency
WFS	wavefront sensor

第1章

はじめに

この章では、本研究の背景と本論文の構成を述べる。

1.1 研究背景

重力波とは、時空の歪みが光速で伝播する現象である。1916年に A. Einstein が一般相対性理論によってその存在を予言した [1, 2]。1974年には、R. A. Hulse と J. H. Taylor が連星パルサー PSR B1913+16 を観測し、重力波の存在が間接的に証明された [3, 4]。そして2015年9月14日、アメリカの重力波望遠鏡 Advanced LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) [5] が連星ブラックホール合体からの重力波をとらえ、初めて重力波の直接検出が達成された [6]。イタリアの重力波望遠鏡 Advanced Virgo [7] も加わり、2022年1月現在までに約90のコンパクト連星合体のイベントが検出された [8]。コンパクト連星合体からの重力波の直接観測によって、ブラックホールの質量や合体頻度などの天文学的知見や、一般相対論の検証などの宇宙論的知見が得られた [9–11]。

現在稼働している地上のレーザー干渉計型重力波望遠鏡 (Advanced LIGO, Advanced Virgo, KAGRA [12, 13]) は 10 Hz–1 kHz で良い感度を得られるように設計されている。初の直接検出によって重力波天文学が幕を開けた今、重力波望遠鏡の開発は、さらなる感度向上や周波数帯を広域化など、次の段階へと移りつつある。近年では、より低い周波数帯 (0.1 Hz–10 Hz) の重力波をねらう望遠鏡も多数計画・開発されている。低周波の重力波を検出することができれば、大質量ブラックホール形成過程や背景重力波の知見を得ることができる。低周波の重力波を検出するために、レーザー干渉計を宇宙へ打ち上げる LISA (Laser Interferometer Space Antenna) [14] や DECIGO (DECi-hertz Interferometer Gravitational Wave Observatory) [15] のような計画が進められているが、宇宙空間に打ち上げるためには多くの技術開発が必要であること、打ち上げに莫大な

費用がかかること、打ち上げ後のメンテナンスが難しいことなどの課題がある。

これを解決する低周波重力波望遠鏡として、ねじれ型重力波望遠鏡 TOBA (TOrsion-Bar Antenna) が考案されている [16]。TOBA は地上に棒状試験マスを水平に懸架する構成をしており、ねじれ振り子の回転を検出することで重力波を観測できる。TOBA を用いることで、中間質量ブラックホール連星合体の検出や背景重力波の検出が期待される。さらに、地震計を用いる従来の地震速報よりも早い地震速報を行うこともできる [17]。これまでに Phase-I TOBA と Phase-II TOBA と呼ばれる 2 つのプロトタイプ TOBA が製作され、背景重力波に制限をつけることに成功している [18, 19]。

現在は 3 台目のプロトタイプ Phase-III TOBA の開発段階にある [20]。その設計感度は、0.1 Hz 以下では地面振動雑音や懸架ワイヤの熱雑音に、0.1 Hz 以上では光の量子性に起因する散乱雑音に制限される。散乱雑音の要求値を達成するには、試験マスの回転を高感度に読み取る角度センサが必要である。そこで新しく考案されているのが、結合光共振器を用いた WaveFront Sensor (Coupled WFS) である。Coupled WFS は従来の WaveFront Sensor (WFS) を TOBA の目的に合わせて改良したものである。通常の WFS は 2 枚のミラーで構成されるが、Coupled WFS は後ろにもう 1 枚ミラーを置いて補助共振器を構成する。補助共振器で位相補償を行い、角度信号を増幅できるという特長がある。

本研究では、この Coupled WFS について、シミュレーションと原理検証実験を行った。

1.2 本論文の構成

第 2 章で重力波とその検出方法についてまとめる。第 3 章ではねじれ型重力波望遠鏡 TOBA の原理とこれまでに開発されたプロトタイプ TOBA、要素開発の先行研究についてまとめる。第 4 章では、Coupled WFS の原理を紹介し、FINESSE を用いたシミュレーション結果についても述べる。第 5 章では Coupled WFS の原理実証実験の装置について説明し、第 6 章でその実験結果を述べる。第 7 章では実験結果に対する考察を述べ、第 8 章で本研究で得られた成果と今後の展望をまとめる。

第 2 章

重力波とその検出

重力波とは、時空の歪みが光速で伝播する現象であり、1916 年に A. Einstein によって一般相対性理論の枠組みの中で導かれた [1, 2]。2015 年、アメリカの重力波望遠鏡 Advanced LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) [5] が連星ブラックホール合体からの重力波をとらえ、初めて重力波の直接検出が達成された [6]。この章ではまず、重力波の導出、重力波の存在下での質点の運動、重力波の放射と発生源について述べる*1。その後、主な重力波源と重力波の検出方法について紹介する。

2.1 重力波の導出

2.1.1 計量テンソルと測地線方程式

一般相対性理論では、4次元空間内の2点 x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ の間の距離 (線素) ds は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

で与えられる*2*3。 $g_{\mu\nu}$ を計量テンソルという。一般相対性理論では、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ が時空の幾何学的性質、すなわち重力を完全に特徴づける。

*1 計算の詳細は [21–23] を参照。

*2 ギリシャ文字の添え字は 0–3 の値をとることとする。すなわち、 $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ である。

*3 Einstein の縮約記法を採用する。すなわち、上下に繰り返された添え字については必ず和を取ることとし、和の記号を省略する。

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

例えば、重力場の存在しない平坦な時空 (Minkowski 時空) では、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

と書くことができる。計量テンソル $g_{\mu\nu}$ が時空の幾何学的性質を決めるため、自由質点の運動を求めることができる。質点が描く軌跡は測地線と呼ばれ、以下の測地線方程式で決まる。

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.3)$$

ここで、 τ は粒子の固有時間である。 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ は接続係数または Christoffel 記号と呼ばれ、以下のように定義される。

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\beta\delta} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} g_{\alpha\delta} - \frac{\partial}{\partial x^\delta} g_{\alpha\beta} \right) \quad (2.4)$$

2.1.2 Einstein 方程式

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は以下の Einstein 方程式に従う。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

ここで R は Ricci スカラーと呼ばれ、次のように定義される。

$$R \equiv R_\mu{}^\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} \quad (2.7)$$

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta} - \frac{\partial}{\partial x^\delta} \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\mu} \Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\delta\mu} \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} \quad (2.8)$$

$R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソル、 $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ は Riemann テンソルと呼ばれる。また、式 (2.5) における $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである。

2.1.3 Einstein 方程式の線形近似

式 (2.5) から重力波解を導くために、重力場が十分小さいと仮定して、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ に対して線形近似を行う。具体的には、Minkowski 時空に微小な摂動が加わったときの時空を考える。このとき計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は微小な摂動成分 $h_{\mu\nu}$ ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$) を用いて

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

と書ける。これを式 (2.5) に代入し、 $h_{\mu\nu}$ の 1 次まで考える。

このとき、Christoffel 記号は、式 (2.9) を式 (2.4) に代入して

$$\begin{aligned}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} &\simeq \frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}h_{\beta\delta} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}h_{\alpha\delta} - \frac{\partial}{\partial x^\delta}h_{\alpha\beta}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}h_{\beta}{}^\gamma + \frac{\partial}{\partial x^\beta}h_{\alpha}{}^\gamma - \frac{\partial}{\partial x^\gamma}h_{\alpha\beta}\right)\end{aligned}\quad (2.10)$$

となる。これを式 (2.8)、式 (2.7)、式 (2.6) に代入することで、Riemann テンソル、Ricci テンソル、Ricci スカラーはそれぞれ以下のように求まる。

$$\begin{aligned}R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} &\simeq \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Gamma^\alpha{}_{\beta\delta} - \frac{\partial}{\partial x^\delta}\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \quad (\because \Gamma\Gamma = \mathcal{O}(h^2)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h^\alpha{}_\delta}{\partial x^\beta\partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 h^\alpha{}_\gamma}{\partial x^\beta\partial x^\delta} + \frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha\partial x^\delta} - \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x_\alpha\partial x^\gamma}\right)\end{aligned}\quad (2.11)$$

$$R_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h^\alpha{}_\nu}{\partial x^\mu\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 h_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha\partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha\partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\right) \quad (h \equiv h_\alpha{}^\alpha) \quad (2.12)$$

$$R \simeq \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\mu\partial x^\nu} - \square h \quad (\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x_\alpha}) \quad (2.13)$$

これらを式 (2.5) に代入することで、以下の線形近似された Einstein 方程式を得ることができる。

$$\frac{\partial^2 h_{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha\partial x_\nu} + \frac{\partial^2 h^\alpha{}_\nu}{\partial x_\alpha\partial x^\mu} + \eta_{\mu\nu}\square h - \square h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^\mu\partial x^\nu} - \eta_{\mu\nu}\frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha\partial x^\beta} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.14)$$

ここで、式 (2.14) の表式を簡単にするために、以下の量を導入する。

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.15)$$

これを式 (2.14) に代入すると、

$$\frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha\partial x^\mu} - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha\partial x^\beta} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

となる。さらに、 h には座標変換に対して自由度が残っているが、ここでは以下の Lorentz gauge 条件を課す。

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.17)$$

すると、式 (2.16) は

$$-\square \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

と変形される。式 (2.18) より、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の $\eta_{\mu\nu}$ からのずれ $h_{\mu\nu}$ が源 T から発生し波として伝播すること、すなわち、重力波が存在することがわかる。

2.2 重力波の性質

2.2.1 重力波の伝播

真空中の重力波の伝播は式 (2.18) で $T_{\mu\nu} = 0$ とした方程式を考えることで求められる。このとき式 (2.18) は

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.19)$$

となり、解は明らかに平面波

$$\bar{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (2.20)$$

の形で表すことができる。 $\bar{h}_{\mu\nu}$ の性質から、振幅 $a_{\mu\nu}$ および波数ベクトル $k_\alpha = (\omega, k_x, k_y, k_z)$ は

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \quad (2.21)$$

$$a^{\mu\alpha} k_\alpha = 0 \quad (2.22)$$

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \quad (2.23)$$

を満たす。式 (2.22) は重力波が横波であることを表し、式 (2.23) は重力波が光速で伝わることを表す。さらに、まだ残っている座標変換の任意性を取り除くために、Transverse Traceless (TT) gauge 条件

$$h_{0\alpha} = 0 \quad (2.24)$$

$$h^j_j = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial h^{jk}}{\partial x^j} = 0 \quad (2.26)$$

を課す^{*4}。ここで、TT gauge では $\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0$ であるため、 $h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta}$ である^{*5}。重力波が z 軸方向に伝播するとき、 $k_\alpha = (\omega, 0, 0, \omega/c)$ であるから、 $a_{\mu\nu}$ は独立な2つの関数 h_+ と h_\times を用いて次のように表すことができる。

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

h_+ と h_\times のそれぞれに対応するモードをプラス (+) モードとクロス (×) モードと呼ぶ。以上より、一般相対性理論における重力波は光速で伝播し、2つの独立なモードをもつことがわかった。

^{*4} ラテン文字の添え字は 1-3 の値をとることとする。すなわち、 $x^j = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ である。

^{*5} これ以降、TT gauge では h と \bar{h} を区別しない。

2.2.2 自由質点に対する重力波の影響 (TT gauge)

TT gauge における自由質点に対する重力波の影響を考える。これは Minkowski 時空で静止している質点を考えることに対応する。 $\tau = 0$ に質点が静止しているとする

$$\left. \frac{dx^\mu}{d\tau} \right|_{\tau=0} = (1, 0, 0, 0) \quad (2.28)$$

が成り立つ。このとき測地線方程式は

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} &= -\Gamma^\mu_{00} \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial h_{0\alpha}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{\alpha 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。この式は、粒子には力が働かず、質点の座標が変化しないことを意味する。つまり、TT gauge とは粒子に働く力が打ち消されるように座標が変化する座標系である。

TT gauge における重力波の影響を調べるには、座標に依存しない固有距離を調べる必要がある。そこで、近接した 2 つの質点の距離の変化を考える。2 つの質点の座標を $(0, 0, 0, 0)$ と $(0, \epsilon, 0, 0)$ とおくと、この 2 点間の距離は

$$\begin{aligned} \delta l &= \int |ds^2|^{1/2} \\ &= \int |g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|^{1/2} \\ &= \int_0^\epsilon |g_{11}|^{1/2} dx^1 \\ &\simeq |g_{11}|^{1/2} \epsilon \\ &\simeq \left(1 + \frac{1}{2} h_{11} \right) \epsilon \end{aligned} \quad (2.30)$$

となる。2 点間の距離が重力波によって変化することがわかる。

2.2.3 自由質点に対する重力波の影響 (proper detector frame)

実際に観測を行う実験室系は、TT gauge のように質点の座標が変化しないような座標系ではない。そこで、座標 x まわりの十分小さな領域のみを考える。これによって導かれる実験室系を proper detector frame と呼ぶ。

ある点 x と微小距離 ξ だけ離れた地点 $x + \xi$ における測地線方程式はそれぞれ

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x + \xi) \frac{d(x^\alpha + \xi^\alpha)}{d\tau} \frac{d(x^\beta + \xi^\beta)}{d\tau} = 0 \quad (2.32)$$

となる。この2つの式の差を取り、 ξ^μ の一次の項まで残すと

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = -\xi^\sigma \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (2.33)$$

を得る。ただし、ここでは微小距離を考えているため $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ としてよく、 $g_{\mu\nu}$ の微分が0となるため、 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0$ となることを用いた。また、実験室系は十分ゆっくり動いていると考えれば

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau} = c \quad (2.34)$$

とできて、式 (2.33) の α, β については0成分のみを考えればよく、

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = -c^2 \xi^\sigma \frac{\partial \Gamma^\mu_{00}(x)}{\partial x^\sigma} \quad (2.35)$$

と書ける。さらに、式 (2.8) で $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\mu, 0, \sigma, 0)$ とすると

$$\begin{aligned} R^\mu_{0\sigma 0} &= \frac{\partial \Gamma^\mu_{00}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{0\sigma}}{\partial x^0} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \Gamma^\alpha_{00} - \Gamma^\mu_{\beta 0} \Gamma^\beta_{0\sigma} \\ &= \frac{\partial \Gamma^\mu_{00}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{0\sigma}}{\partial x^0} \\ &= \frac{\partial \Gamma^\mu_{00}}{\partial x^\sigma} \end{aligned} \quad (2.36)$$

となるため、式 (2.35) は

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = -c^2 \xi^\sigma R^\mu_{0\sigma 0} \quad (2.37)$$

と書き直せる。ここで、Riemann テンソルと重力波の関係は式 (2.11) より

$$R^\mu_{0\sigma 0} = -\frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 h^\mu_\sigma}{\partial t^2} \quad (2.38)$$

である。ただし、Riemann テンソルは gauge invariant であるため、重力波振幅 h_{ij} には TT gauge と同じものを使ってよい。したがって、

$$\ddot{\xi}^i = \frac{1}{2} \ddot{h}^i_j \xi^j \quad (2.39)$$

が proper detector frame での測地線方程式となる。' は時間 t での微分を表す。すなわち、実験室系で考えると、質量 m の自由粒子には重力波によって

$$F^i = \frac{1}{2} m \ddot{h}^i_j \xi^j \quad (2.40)$$

の力が働く。これが重力波が質点に及ぼす潮汐力である。

2.2.4 重力波の偏波

自由粒子の位置が重力波によってどのように変化するかを考える。式 (2.39) の $t \rightarrow \infty$ で発散しないような解を求めると

$$\delta\xi^i = \frac{1}{2}h^i_j \xi^j \quad (2.41)$$

となる。したがって、角振動数 ω をもった重力波が z 軸方向から到来したときの ξ の変化量は式 (2.20)、式 (2.27) より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta\xi^x \\ \delta\xi^y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^x \\ \xi^y \end{pmatrix} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2}h_+ \begin{pmatrix} \xi^x \\ -\xi^y \end{pmatrix} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] + \frac{1}{2}h_\times \begin{pmatrix} \xi^y \\ \xi^x \end{pmatrix} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

である。第1項と第2項はそれぞれ重力波のプラス (+) モードとクロス (×) モードの偏波を表している。これらのモードによる質点の動きを図示すると、図 2.1 のようになる。

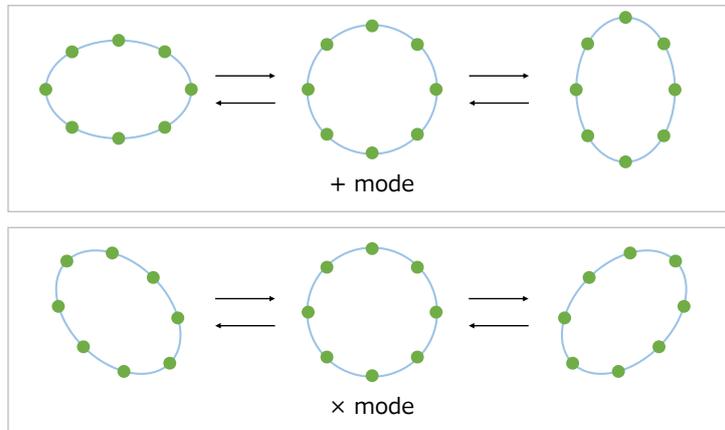


図 2.1: 重力波の偏波。重力波が紙面に垂直に入射したときの自由質点の動きをモードごとに表している。

2.2.5 重力波の放射

重力波源からの重力波の放射を考える。式 (2.18) を形式的に解くと、重力波の振幅は

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (2.43)$$

となる。特に、波源の速さが光速より十分小さく、重力波の波長に比べて十分遠方から観測するとき、式 (2.43) は次のように近似できる。

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \simeq \frac{4G}{c^4 r} \int T_{\mu\nu}(t - r/c, \mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \quad (2.44)$$

ここで、 $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ は観測地点から波源までの距離である。Lorentz gauge 条件から成り立つ $\partial T_{\mu\nu}/\partial x_\mu = 0$ より、4重極公式

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) \simeq \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{ij}(t - r/c) \quad (2.45)$$

を得る。ここで、 $\dot{}$ は時間 t での微分を表す。また、

$$Q_{ij}(t) = \int x_i x_j T_{00}(t, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad (2.46)$$

である。 $T_{00}(t, \mathbf{x})$ は重力波源のエネルギー密度である。

例えば、重力波が z 軸方向から到来するとき、

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) \simeq \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{ij}(t - r/c) \quad (2.47)$$

$$Q_{ij}(t) = \int T_{00}(t, \mathbf{x}) \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x^i x^j \right) d^3 \mathbf{x} \quad (2.48)$$

となる。

以上より、重力波の放射には単極子と双極子は存在せず、最低次が4重極放射であることがわかる。したがって、重力波は波源の非軸対称な運動から放射される。

2.3 重力波源

2.2.5 節で述べたように、重力波は4重極モーメントの時間変化によって放射される。そのため、私たちの周囲でも重力波は絶えず発生しており、人工的に生成することも可能であるが、その振幅は検出するにはあまりにも小さい。大きい振幅を得るためには、波源の質量と加速度が大きいことが要求され、観測可能な波源は天体現象に限られる。

以下では、重力波源となりうる天体現象の紹介を行う。

2.3.1 コンパクト連星合体

コンパクト星とは、ブラックホールや中性子星といった比較的小さな天体を指す。コンパクト星からなる連星系は軌道運動によって重力波を放出する。重力波の放出にともなってエネルギーを失うため、軌道半径は徐々に減少しやがて連星は合体する。このとき、重力波の波形は軌道半径の減少にともなって周波数と振幅が増大していくチャープ波形となる(図 2.2)。連星の合体が終わると重力波の放出も終了する。波形の理論予測が可能であるため、理論予測と観測結果の比較から、連星の質量やスピンといった様々な情報を得ることができる。また、波形から中性子星の状態方程式に制限をつけたり、一般相対性理論を検証したりすることもでき、サイエンスへの応用も幅広い。

現時点で重力波が検出されたのはコンパクト連星合体のみであり、そのイベント数は2022年1月時点で約90である(図2.3) [8]。初めて検出されたのはブラックホール連星合体である [6]。その後、中性子連星合体、ブラックホール-中性子星連星合体の検出も報告された [24, 25]。

重いコンパクト連星合体ほど低周波の重力波を放射する [26]。現在稼働中の地上のレーザー干渉計型重力波望遠鏡は10 Hz–1 kHzの周波数帯で高感度に設計されている(2.4.2節を参照)。この周波数帯をコンパクト星の質量に換算すると $1 M_{\odot}$ – $100 M_{\odot}$ に対応し、恒星質量ブラックホールや中性子星の連星合体の検出に適していることがわかる。より重いコンパクト連星(中間質量ブラックホールなど)の合体からの重力波をとらえるには、低周波に良い感度をもつ重力波望遠鏡が必要である。

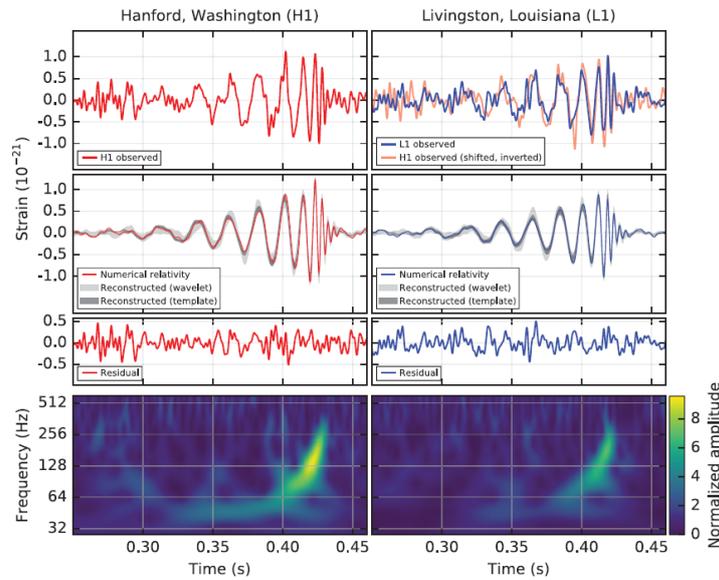


図 2.2: GW150914 の信号 [6]。

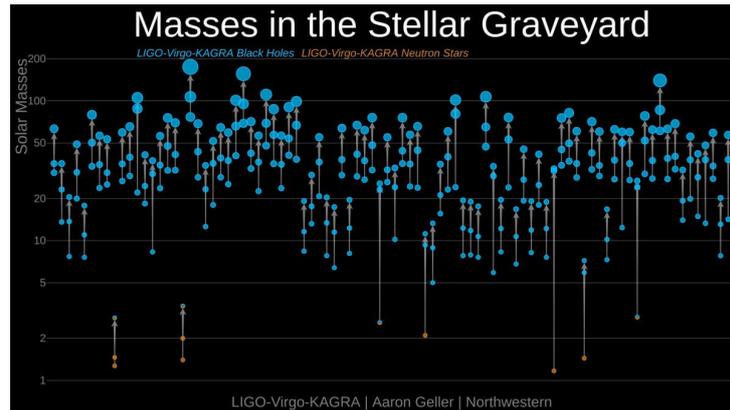


図 2.3: Observation 1 から Observation 3b までに検出されたコンパクト連星合体 [27]。縦軸はブラックホールまたは中性子星の質量を表す。青色の丸がブラックホール、オレンジ色の丸が中性子星である。検出された順番に左から並んでいる。

2.3.2 超新星爆発

超新星爆発とは、星内部の高エネルギー反応や重力崩壊などによって起こる爆発のことである。超新星爆発は激しい質量の移動をともなうため、重力波源の候補として期待されている。完全に球対称な爆発爆発では重力波は放射されないが、自転などによる非対称性がある場合には重力波が放射される。その波形は爆発メカニズムに大きく依存するため、いまだに明らかになっていないが、1 kHz 付近の高周波数帯でバースト的に放射されると考えられている [28–30]。電磁波では見えない超新星内部の情報を得られる可能性があり、爆発メカニズムの解明に貢献できると期待されている。重力波観測のためには、望遠鏡での突発的なノイズと超新星爆発の信号を区別するために、複数台での同時観測が必要となる。

2.3.3 パルサー

パルサーとは、高速に回転しながら磁軸方向に電磁波を放射する中性子星のことである。回転軸に対して磁軸が傾いているため、中性子星の自転に同期して周期的な電磁波の放射が観測される。パルサーにわずかな凹凸などが存在し、回転軸に対して完全に対称ではない場合、パルサーの回転周波数で重力波が放射される。回転にともなう周波数の変化は小さいため、連続波に近い重力波を放出すると考えられている。

2.3.4 背景重力波

背景重力波とは、宇宙論的起源と天文学的起源の2つの側面から存在が予測されている重力波である。

前者は、原始重力波とも呼ばれる。初期宇宙での量子揺らぎから生まれ、ビッグバンやインフレーションの情報を含むと考えられている。原始重力波の観測は、初期宇宙を直接観測することができる唯一の方法である。それゆえ、原始重力波は宇宙論的に大きな意義をもつ観測対象である。

後者は、白色矮星連星などから放射される振幅の小さな重力波に起因する。波源が多数あるため個々の波形として分離できず、その重ね合わせが背景重力波として存在すると考えられている。

背景重力波の波形はいまだに明らかになっていないが、等方的・無偏波・定常的で低周波で振幅が大きいと考えられている。

2.4 重力波の検出

2.4.1 共振型重力波望遠鏡

共振型重力波望遠鏡とは、重力波の潮汐力によって励起される弾性体の共振モードを測定することで重力波をとらえる望遠鏡である。また、世界で最初に製作された重力波望遠鏡でもある [31]。観測周波数帯は、原理的に共振モード付近の周波数に限られるため、コンパクト連星合体のチャープ波形のような周波数が変化する信号の検出には向いていない。パルサーからの重力波のような連続重力波の検出に向いている。

2.4.2 レーザー干渉計型重力波望遠鏡

レーザー干渉計型重力波望遠鏡は、現在の重力波望遠鏡の主流であり、実際に重力波を直接検出することに成功した唯一の望遠鏡である。ミラーを振り子で懸架することで、ミラーは振り子の共振周波数以上で自由質点とみなすことができ、重力波に応答する。ミラー間の距離の変化を Michelson 干渉計で読み取ることで重力波を検出する。基本原理は Michelson 干渉計であるが、基線長を実質的に伸ばして感度を向上させるために、両腕は Fabry-Pérot 共振器になっている。その他にも、地面振動を低減する多段振り子、腕共振器内の光量を上げるパワーリサイクリング、重力波信号を効率よく取り出すシグナルリサイクリングなどの技術を用いて、高感度化・広帯域化を行っている。

2022年1月現在、地上のレーザー干渉計型重力波望遠鏡として、アメリカの Advanced LIGO [5]、ヨーロッパの Advanced Virgo [7]、日本の KAGRA [12, 13] が稼働している。

これらはいずれも 3 km–4 km の腕共振器をもつ巨大なレーザー干渉計である。観測帯域は 10 Hz–1 kHz である。この帯域より低周波数の感度は地面振動雑音、高周波数の感度は光の量子性に起因する散乱雑音によって制限されている。

2.4.3 宇宙重力波望遠鏡

宇宙重力波望遠鏡は、地上のレーザー干渉計型重力波望遠鏡では観測が困難な低周波数帯を観測するために考案された。宇宙では試験マスを懸架する必要はなく、地面振動雑音も存在しないため、低周波数帯で良い感度を得られる。

現在計画が進んでいるのは、ヨーロッパの LISA (Laser Interferometer Space Antenna) [14] や日本の DECIGO (DECi-hertz Interferometer Gravitational Wave Observatory) [15] である。これらは、宇宙に打ち上げた 3 台の衛星にミラーを搭載し、正三角形上にレーザー干渉計を構成する。観測周波数帯は、LISA が 1 mHz–1 Hz、DECIGO が 0.1 Hz–10 Hz である。背景重力波や、これまでに検出されたものよりも重たいコンパクト連星合体からの重力波検出を目指している。

2.4.4 パルサータイミング

パルサータイミングとは、パルサーからのパルスの到着時間が重力波によって変化することを用いて重力波を検出する手法である [32]。1 nHz–1 μ Hz という低周波数帯に良い感度を持ち、観測するパルサーの個数を増やすことで感度を向上させることができる。主に背景重力波を観測対象としている。

2.4.5 ドップラートラッキング

ドップラートラッキングとは、地球と人工衛星の間を往復する電磁波のドップラーシフトによって重力波を検出する手法である [33]。人工衛星として、土星探査機 Cassini などを用いることで 1 AU–10 AU という非常に長い基線長を実現している。観測周波数帯は 1 μ Hz–1 mHz、主な観測対象は背景重力波である。

2.5 本章のまとめ

- 重力波は線形近似した Einstein 方程式から導かれる。
- 重力波は光速で伝播し、プラスモードとクロスモードという 2 つの独立な偏波をもつ。
- 重力波の放射の最低次は 4 重極放射である。

-
- コンパクト連星合体からの重力波はすでに観測されている。他の重力波源の候補として、超新星爆発・パルサー・背景重力波といった天体現象がある。
 - 重力波の検出方法には様々なものがある。現在の主流は地上のレーザー干渉計型重力波望遠鏡である。

第 3 章

ねじれ型重力波望遠鏡 TOBA

ねじれ型重力波望遠鏡 TOBA (TOrsion-Bar Antenna) [16] とは、0.1 Hz–10 Hz の周波数帯をねらう地上の重力波望遠鏡である。本章では、ねじれ型重力波望遠鏡 TOBA の原理、最終的な目標感度について述べる。次に、他の重力波望遠鏡と比較しながら、重力波望遠鏡の中での TOBA の位置づけを述べ、TOBA で期待される観測対象についてまとめる。その後、Phase-I TOBA と Phase-II TOBA と呼ばれるプロトタイプ TOBA の構成や達成された感度について述べる。最後に、現在開発中であるプロトタイプ TOBAPhase-III TOBA について、設計感度と雑音源、雑音を低減するために必要な開発項目に注目しながら紹介する。また、本研究の主題である TOBA のための角度センサの先行研究の結果についても述べる。

3.1 TOBA の原理

ねじれ振り子を用いた重力波の検出原理を説明する。まず、重力波の影響下での運動方程式を考えることで、重力波により試験マスが回転することを確認する。次に、ねじれ振り子の共振周波数より高い周波数帯では重力波のクロスモードに対して一定の回転応答を示すことを述べる。

3.1.1 TOBA の重力波に対する応答

図 3.1 のようなねじれ振り子を考える。ねじれ振り子の重心を原点に取り、懸架方向を z 軸、試験マスの水平回転面を xy 平面とする。

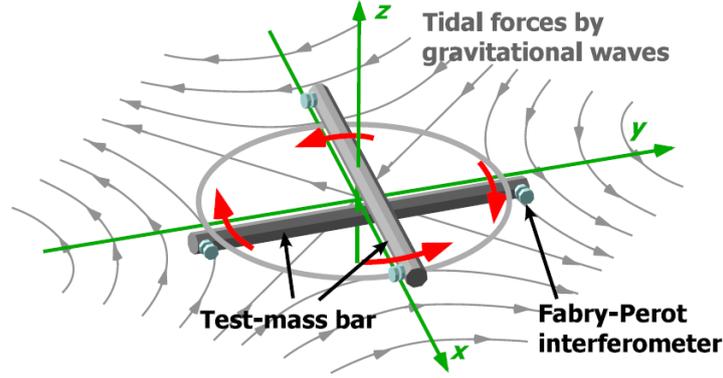


図 3.1: TOBA の概略図 [16]。クロスモードの重力波に対する応答を示している。

z 軸まわりの回転 (yaw 回転) に関する運動方程式は、

$$I\ddot{\theta}(t) + \gamma\dot{\theta}(t) + \kappa\theta(t) = N_{\text{ext}}(t) \quad (3.1)$$

と表される。ここで、 $\theta(t)$ は試験マスのねじれ回転角、 I は yaw 方向の慣性モーメント、 γ は散逸、 κ はワイヤの復元力によるバネ定数、 $N_{\text{ext}}(t)$ は外力によるトルクである。また、 $\dot{\cdot}$ は時間 t での微分を表す。

いま、 z 軸方向から到来する重力波を考える。重力波は図 3.1 のように潮汐力として働くため、試験マスは回転する。式 (2.40) より、座標 ξ^j まわりの微小体積 dV に重力波が与える力 F は、

$$F_i dV = \frac{1}{2} \rho \ddot{h}_{ij} \xi^j dV \quad (3.2)$$

で与えられる。ここで、 ρ は試験マスの密度を表す。重力波によって微小体積 dV が蓄えるエネルギーは、

$$dU = - \int_{\xi} \frac{\rho \ddot{h}_{ij} dV}{2} \xi^j d\xi^j \quad (3.3)$$

となる。これを試験マス全体にわたって積分することで全エネルギーを得ることができ、

$$\begin{aligned} U &= - \int_V \int_{\xi} \frac{\rho \ddot{h}_{ij} dV}{2} \xi^j d\xi^j \\ &= - \frac{1}{4} \ddot{h}_{ij} \int_V \rho \xi^i \xi^j d\xi^j \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる。ただし、重力波の波長は試験マスの大きさより十分大きいと仮定して、重力波振幅 h が場所によらないとした。

重力波が試験マスに与えるトルク N_{GW} は、試験マスの位置を z 軸まわりに微小回転させたときのエネルギー変化率であるから、

$$N_{\text{GW}} = - \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{1}{4} \ddot{h}_{ij} q^{ij} \quad (3.5)$$

と表される。ここで、 q^{ij} は試験マスの四重極モーメント

$$q^{ij} = \int \rho \left(\xi^i w^j + \xi^j w^i - \frac{2}{3} \delta^{ij} \xi^k w^k \right) dV \quad (3.6)$$

である。 w^i はモード関数と呼ばれ、考えているモードに対して試験マスの各点がどのように動くかを表す。 xy 平面内でのねじれ回転の場合は

$$w^i = (-y, x, 0) \quad (3.7)$$

となるから

$$q^{11} = -q^{22} = - \int \rho(2xy) dV \equiv q_+ \quad (3.8)$$

$$q^{12} = q^{21} = \int \rho(x^2 - y^2) dV \equiv q_\times \quad (3.9)$$

である。

式 (3.1)、式 (3.5) より、重力波のもとでの試験マスの z 軸まわりの回転に関する運動方程式は、

$$I\ddot{\theta}(t) + \gamma\dot{\theta}(t) + \kappa\theta(t) = \frac{1}{4}\ddot{h}_{ij}q^{ij} \quad (3.10)$$

と導かれる。

3.1.2 TOBA の周波数応答

重力波が到来したときのねじれ振り子の周波数応答を考える。いま、 z 軸方向から以下のような振幅をもつ重力波が到来することを考える。

$$h_{ij}(t) = \begin{pmatrix} h_+(t) & h_\times(t) & 0 \\ h_\times(t) & -h_+(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

式 (3.8)、式 (3.9)、式 (3.11) を式 (3.10) に代入すると、重力波のもとでの試験マスの z 軸まわりの回転に関する運動方程式は、

$$I\ddot{\theta}(t) + \gamma\dot{\theta}(t) + \kappa\theta(t) = \frac{1}{2} \left(\ddot{h}_+(t)q_+ + \ddot{h}_\times(t)q_\times \right) \quad (3.12)$$

となる。この両辺をフーリエ変換すると以下ようになる。

$$-I\omega^2\tilde{\theta}(\omega) + i\omega\gamma\tilde{\theta}(\omega) + \kappa\tilde{\theta}(\omega) = -\frac{1}{2}\omega^2 \left(\tilde{h}_+(\omega)q_+ + \tilde{h}_\times(\omega)q_\times \right) \quad (3.13)$$

したがって、重力波の各偏波から試験マスの回転までの伝達関数は

$$H_\alpha(\omega) = \frac{\tilde{\theta}(\omega)}{\tilde{h}_\alpha(\omega)} = \frac{q_\alpha}{2I} \frac{\omega^2}{\omega^2 - i\omega\omega_0/Q - \omega_0^2} \quad (3.14)$$

となる。 $\alpha = (+, \times)$ は重力波の偏波モードを表し、

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad (3.15)$$

$$Q \equiv \frac{\omega_0 I}{\gamma} \quad (3.16)$$

はそれぞれねじれ振り子の回転方向の共振角周波数と Q 値を表す。伝達関数 $H_\alpha(\omega)$ を図示すると図 3.2 のようになる。

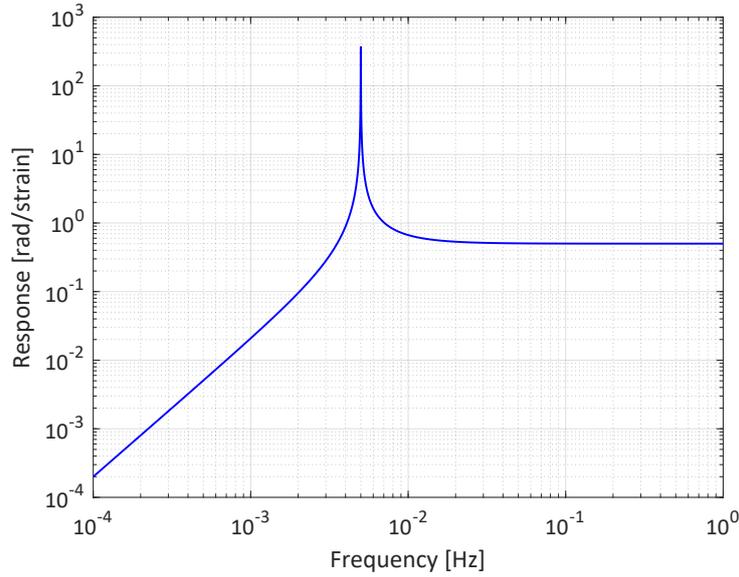


図 3.2: TOBA の重力波への周波数応答。 $q_\alpha = I, f_0 \equiv \omega_0/2\pi = 5 \text{ mHz}, Q = 1000$ を仮定した。

伝達関数 $H_\alpha(\omega)$ は、共振周波数より十分に低い周波数帯 ($\omega \ll \omega_0$) では

$$H_\alpha(\omega) \simeq -\frac{q_\alpha \omega^2}{2I \omega_0^2} \quad (3.17)$$

のようにふるまう。図 3.2 からわかるように、周波数が小さくなるにつれて周波数の 2 乗に比例して応答が小さくなる。これは、低周波数帯では試験マスが地面 (または懸架ワイヤ) に束縛されるためである。

一方、共振周波数より十分に高い周波数帯 ($\omega \gg \omega_0$) では、伝達関数 $H_\alpha(\omega)$ は

$$H_\alpha(\omega) \simeq \frac{q_\alpha}{2I} \quad (3.18)$$

と一定値を示す。試験マスの回転モードが束縛から解放され、自由質点に近いふるまいをするためである。

したがって、試験マスを自由質点として応答させ重力波の観測を行うためには、観測周波数帯よりも試験マスの回転モードの共振周波数を低く設計する必要がある。一般に、回転モードの共振周波数は並進モードの共振周波数よりも低いため、ねじれ振り子は低周波数帯の重力波観測に有利である。

より具体的に、 x 軸方向に長い直方体状の試験マスを考える。式 (3.8)、式 (3.9) より

$$q_+ = 0 \quad (3.19)$$

$$q_\times \simeq \int \rho x^2 dV \quad (3.20)$$

$$I \simeq \int \rho x^2 dV \quad (3.21)$$

となる。これらを式 (3.14) に代入して

$$H_+(\omega) = 0 \quad (3.22)$$

$$H_\times(\omega) \simeq \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega^2 - i\omega\omega_0/Q - \omega_0^2} \quad (3.23)$$

を得る。 x 軸方向に長い試験マスは重力波のクロスモードにのみ応答することがわかる。これは図 3.1 からも理解できる。また、式 (3.23) より、共振周波数以上 ($\omega \gg \omega_0$) での試験マスのクロスモードに対する応答の大きさは、試験マスの大きさによらず $1/2$ であることもわかる。

3.2 TOBA の目標感度とパラメータ

最終段階の TOBA (Final TOBA) の目標感度は、0.1 Hz において重力波振幅換算で $1 \times 10^{-19} / \sqrt{\text{Hz}}$ である。Final TOBA の設計感度を図 3.3 に示す。0.1 Hz 以下では輻射圧雑音、0.1 Hz 以上では散乱雑音によって感度が制限されている。この目標感度が達成されれば、図 3.4 に示すように 1 Gpc–10 Gpc までの中間質量ブラックホール連星合体を観測することができる。また、1 年間の観測により背景重力波の密度パラメータに対して $\Omega_{\text{GW}} < 10^{-7}$ の上限値をつけることができる。

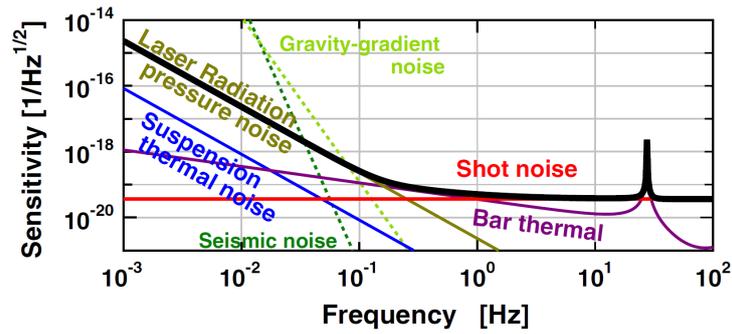


図 3.3: Final TOBA の設計感度 [16]。

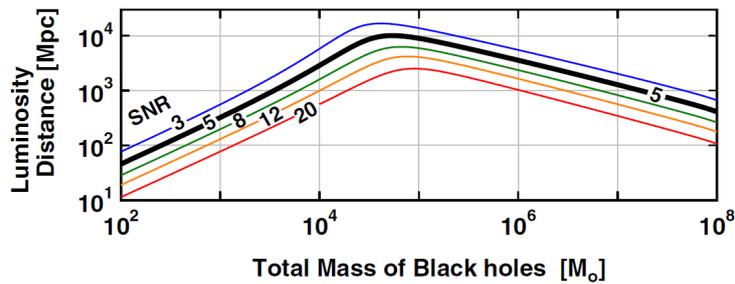


図 3.4: Final TOBA で中間質量ブラックホール連星合体を観測できる範囲 [16]。

目標感度を達成するための Final TOBA の設計パラメータを表 3.1 に示す。10 m の試験マスを用い、懸架系を 4 K まで冷却する設計である。

表 3.1: Final TOBA の設計パラメータ。

パラメータ	値
試験マスの長さ	10 m
試験マスの質量	7600 kg
試験マスと懸架系の温度	4 K
懸架ワイヤの Q 値	10^7
慣性モーメント	$6.4 \times 10^4 \text{ kg m}^2$
共振周波数	1 mHz

3.3 重力波望遠鏡の中での TOBA の位置づけ

3.3.1 TOBA と地上のレーザー干渉計型重力波望遠鏡の比較

現在の主流である地上のレーザー干渉計型重力波望遠鏡は、10 Hz–1 kHz の重力波観測には適しているが、それ以下の重力波に対しては感度が低い (図 3.5)。この理由は、試験マスが振り子で懸架されており、振り子の共振周波数 (~ 1 Hz) 以下では防振効果が得られず重力波への応答が低下するためである。

一方、TOBA では試験マスをねじれ振り子で懸架する。ねじれ回転の共振周波数は ~ 1 mHz まで下げることが容易である。また、回転地面振動も並進地面振動に比べて小さい。それゆえ、TOBA は 0.1 Hz–10 Hz の低周波数帯の重力波を検出することができる。

3.3.2 TOBA と宇宙重力波望遠鏡の比較

TOBA は、同じく 0.1 Hz–10 Hz の重力波観測をねらう宇宙の重力波望遠鏡 LISA (Laser Interferometer Space Antenna) [14] や DECIGO (DECi-hertz Interferometer Gravitational Wave Observatory) [15] と比べると、設計感度は劣る (図 3.5)。しかし、開発にかかる費用が少ない、運用中のメンテナンスが簡単といった利点がある。また、地上で観測を行うため、第 3 世代重力波望遠鏡の主要な雑音になり得る重力勾配雑音のモデル検証や、従来より早い地震速報を行うことも期待される。

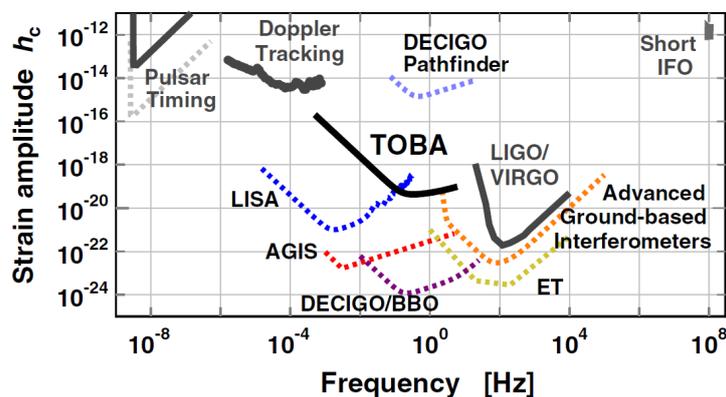


図 3.5: TOBA と他の重力波望遠鏡の感度の比較 [16]。

3.4 TOBA の観測対象

TOBA は、ねじれ振り子の回転モードの共振周波数が低いことを利用して、0.1 Hz–10 Hz の重力波と重力場変動に対して良い感度をもつ。想定されている TOBA の観測対象は以下の 4 つである。重力波望遠鏡としてだけでなく、重力勾配計としてのサイエンス

も期待される。

- 中間質量ブラックホール連星合体
- 背景重力波
- 重力勾配雑音
- 地震速報

3.4.1 中間質量ブラックホール連星合体

中間質量ブラックホールとは、 $10^2 M_{\odot}$ – $10^5 M_{\odot}$ の質量をもつブラックホールである。恒星質量ブラックホール ($< 10^2 M_{\odot}$) と超大質量ブラックホール ($10^6 M_{\odot}$ – $10^9 M_{\odot}$) の間の質量をもつ。

GW190521 は、 $66 M_{\odot}$ と $85 M_{\odot}$ の質量をもつブラックホールの合体イベントである [34]。合体後のブラックホールの質量は $142 M_{\odot}$ であり、中間質量ブラックホールの存在が初めて直接検出された。中間質量ブラックホールの形成過程には様々な説があり [35, 36]、GW190521 のような恒星質量ブラックホール連星合体もその 1 つであるが、いまだに完全には明らかになっていない。

2.3.1 節で述べたように、質量の大きいブラックホールほど合体直前に放射する重力波の周波数は低い*1。特に、中間質量ブラックホール連星合体からの重力波の周波数は 0.1 Hz 程度であるため、TOBA での検出が期待されている。

3.4.2 背景重力波

2.3.4 節で述べたように、初期宇宙での量子揺らぎや白色矮星連星などに起因する背景重力波の存在が予測されている。その波形はいまだに明らかになっていないが、低周波で振幅が大きいと考えられているため、TOBA での上限値の更新や検出が期待されている。

3.4.3 重力勾配雑音

重力勾配雑音 (Newtonian noise または gravity gradient noise) とは、地面や大気の揺らぎによってニュートン重力が変動する雑音である。重力波のような波動的なふるまいはしないものの、実際に試験マスを揺らすため原理的に重力波信号と見分けがつかない。それゆえ、将来的に地上に低周波数帯で感度の良い第 3 世代重力波望遠鏡 (Einstein Telescope や Cosmic Explorer など) が建設されたとき、主要な雑音になると見込まれて

*1 恒星質量ブラックホール連星合体からも低周波重力波は放射されるが、振幅が小さいため他の重力波と分離して検出するのは難しいと考えられる。

いる。そこで、周囲のニュートン重力場変動をモニタし、重力勾配雑音を打ち消す研究が進められている。重力勾配雑音は大きな周波数依存性をもち、周波数の -3 から -5 乗に比例して低周波数で振幅が大きくなると予想されている。特に、 0.1 Hz では重力波振幅換算で $10^{-15} / \sqrt{\text{Hz}}$ と見積もられている [37]。

重力勾配雑音は、これまで理論予測がなされただけであり、実際に観測された例はない。TOBA で初の直接観測を達成すれば、重力勾配雑音の性質の理解、低減手法の実証という次の段階に進むことができ、将来の重力波望遠鏡の感度向上への貢献が期待される。

3.4.4 地震速報

地震の断層破壊による重力場変動を検出することで、従来より早い地震速報が可能になる。

現在使われている地震速報システムは、地震波 (P 波・S 波) の速度差を利用している。地震計で P 波 (伝播速度 6 km/s 程度) を観測し、振幅が大きく甚大な被害をもたらす S 波 (伝播速度 4 km/s 程度) が到来する前に警報を出す。この手法では、震源から 100 km 離れた場所では、S 波が到来する約 10 秒前に速報を出すことが限界である。

地震の断層破壊による重力場変動は光速で伝播するため、現在の手法に比べて早く警報を出すことができる。地震発生時の重力場変動はすでに計算されている。 0.1 Hz で重力波振幅に対し $1 \times 10^{-15} / \sqrt{\text{Hz}}$ の感度をもつ重力勾配計を用いれば、信号処理時間や信号積分時間が十分に短い場合、マグニチュード 7.0 以上の地震において、震源から 100 km 離れた地点で地震発生から 10 秒以内に検出できる [17, 38]。これは、現在の地震波を計測する手法よりも 5 秒早い。

3.5 Phase-I TOBA

Phase-I TOBA とは、 2009 年から 2011 年ごろにかけて製作された最初のプロトタイプ TOBA である。Phase-I TOBA は背景重力波に $\Omega_{\text{GW}}(f = 0.2 \text{ Hz}) < 4.3 \times 10^{17}$ の上限値を与えた [18]。

3.5.1 Phase-I TOBA の構成

Phase-I TOBA の構成は図 3.6 のようになっている。上部にある超伝導体を冷却し、超伝導磁気浮上によりネオジム磁石を支えている。これにより、共振周波数を 5 mHz まで下げ、懸架による熱雑音を低減することができた。試験マスはアルミニウム製で、大きさは 20 cm であった。Michelson 干渉計によって試験マスの角度を読み取った。

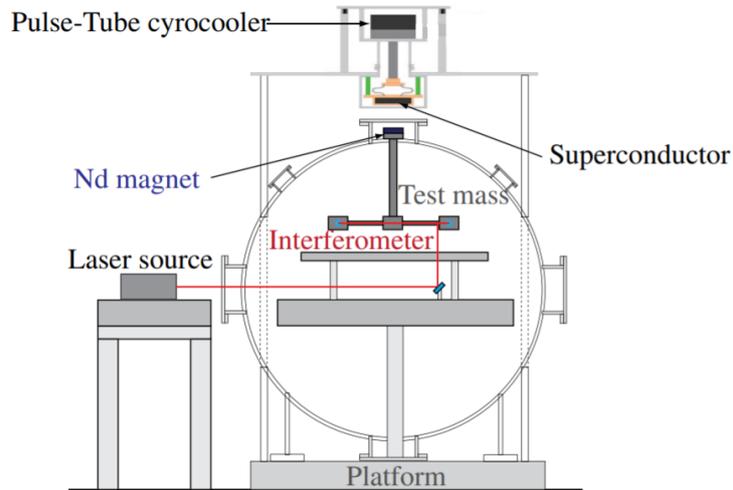


図 3.6: Phase-I TOBA の構成 [39]。

3.5.2 Phase-I TOBA の達成感度

図 3.7 は Phase-I TOBA の感度曲線である。0.1 Hz で $1 \times 10^{-8} / \sqrt{\text{Hz}}$ を達成した。0.1 Hz 以下では、磁場雑音が感度を制限している。この磁場雑音の原因は、環境磁場の変動が試験マスにトルクを与えることである。0.1 Hz 以上では、地面振動雑音が感度を制限している。角度読み取りを行う Michelson 干渉計の 2 つのミラーが平行に取り付けられていないため、並進地面振動がねじれ振り子の回転運動に伝達してしまうことが原因である。

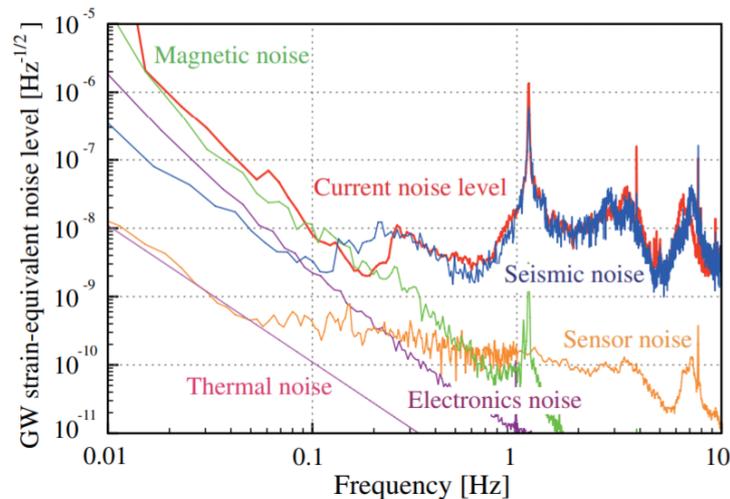


図 3.7: Phase-I TOBA の感度曲線 [39]。赤色の線が達成された感度、他の色の線はノイズバジェットを表す。

3.6 Phase-II TOBA

Phase-II TOBA とは、2016 年ごろに製作された 2 つ目のプロトタイプ TOBA である。

Phase-II TOBA は背景重力波の密度パラメータに $h_0^2 \Omega_{\text{GW}}(f = 2.58 \text{ Hz}) < 6.0 \times 10^{18}$ (frequentist), $h_0^2 \Omega_{\text{GW}}(f = 2.58 \text{ Hz}) < 1.2 \times 10^{20}$ (bayesian) の上限値を与えた [19]。さらに、質量 $200 M_\odot$ の中間質量ブラックホール連星合体は $1.2 \times 10^{-4} \text{ pc}$ 以内に存在しないという制限を与えた [40]。

3.6.1 Phase-II TOBA の構成

Phase-II TOBA の構成は図 3.8 のようになっている。0.1 Hz 以下における Phase-I TOBA の感度が磁場雑音で制限されていたことを踏まえて、Phase-II TOBA では懸架ワイヤの材質にタングステンを採用した。光学ベンチが懸架され、懸架点では能動防振を行った。試験マスはアルミニウム製で、大きさは 24 cm であった。光ファイバで光学ベンチへ入射光を導入し、Michelson 干渉計で角度読み取りを行った。また、水平回転方向以外の信号も読み出す方式を採用した。

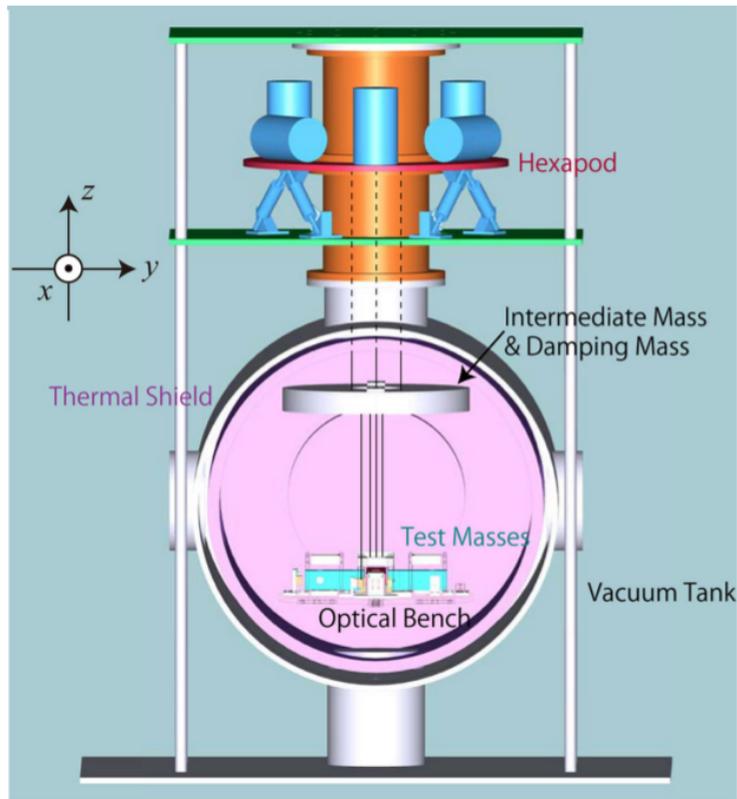


図 3.8: Phase-II TOBA の構成 [41]。

3.6.2 Phase-II TOBA の達成感度

図 3.9 は Phase-II TOBA の感度曲線である。7 Hz で $1 \times 10^{-10} / \sqrt{\text{Hz}}$ を達成した。7 Hz における Phase-I TOBA の感度を 100 倍程度向上させる結果である。感度は Michelson 干渉計の位相雑音によって制限されている。この位相雑音の原因は、ファイバビームスプリッタの振動雑音だと考えられる。

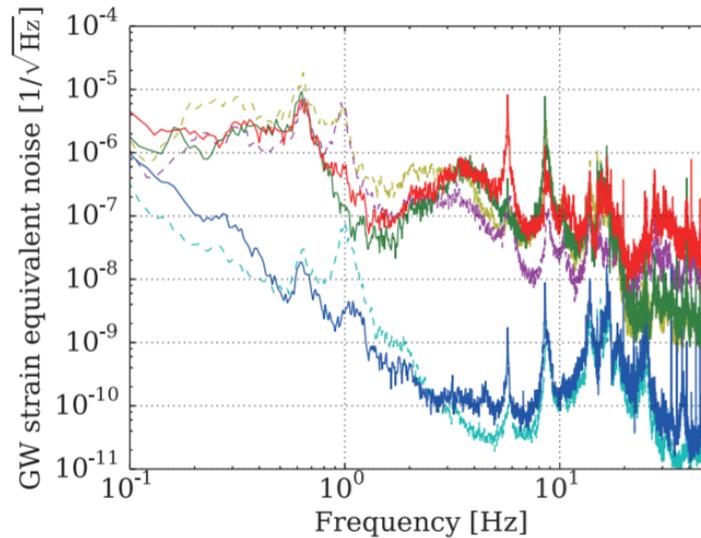


図 3.9: Phase-II TOBA の感度曲線 [40]。青色の線が水平回転方向の感度を表す。

3.7 地面振動雑音の伝達評価実験

Phase-I TOBA と Phase-II TOBA の感度が地面振動雑音によって制限されていたことを踏まえて、並進地面振動からねじれ振り子の回転運動への伝達を評価する実験が行われた [42]。

3.7.1 地面振動雑音の伝達評価実験の構成

地面振動雑音の伝達評価実験の構成は図 3.10 のようになっている。試験マスは熔融石英製で、大きさは 20 cm であった。試験マスに直接反射コーティングをほどこし、端面をミラーとして使用することで、ミラーの設置の非平行度を $1 \mu\text{rad}$ 以下に抑え、並進地面振動からの伝達を低減している。

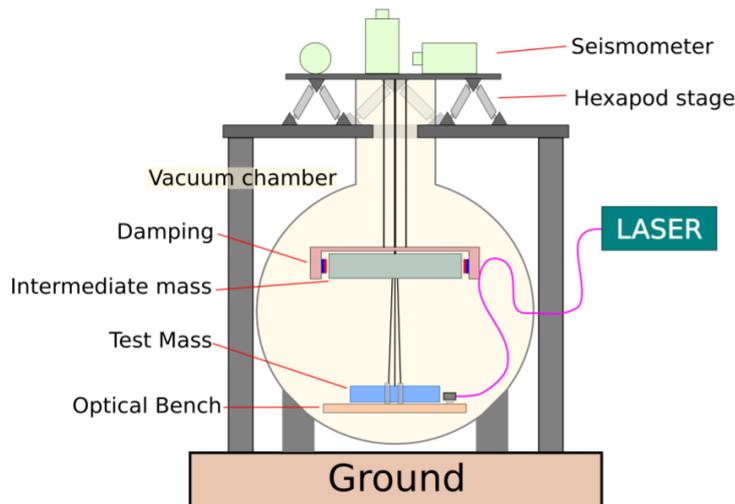


図 3.10: 地面振動の伝達評価実験の構成 [42]。

3.7.2 地面振動雑音の伝達評価実験の達成感度

図 3.11 は伝達評価実験の感度曲線である。0.5 Hz–1 Hz で $1.3 \times 10^{-9} / \sqrt{\text{Hz}}$ を達成し、この周波数帯での Phase-I TOBA と Phase-II TOBA の感度を更新した。コイル-コイルアクチュエータの雑音が感度を制限している。

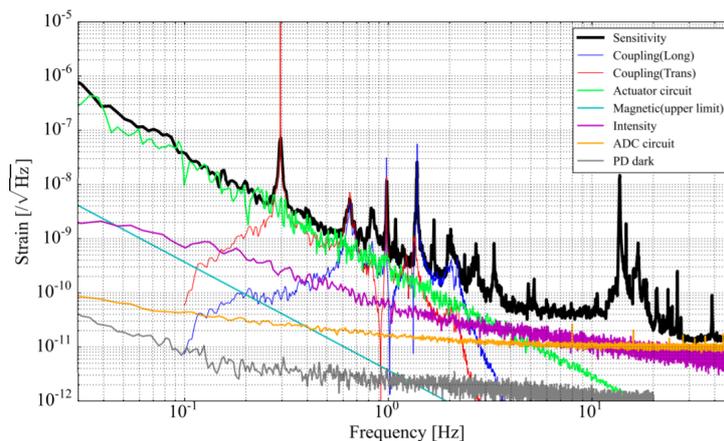


図 3.11: 地面振動の伝達評価実験の感度曲線 [42]。黒色の線は達成された感度、他の色の線はノイズバジェットを表す。

3.8 Phase-III TOBA

現在は 3 台目のプロトタイプ Phase-III TOBA を開発している段階である。35 cm の試験マスを使用し、そのまま 10 m までスケールアップすれば Final TOBA の目標感度

が達成されるレベルまで雑音を低減することを目標としている。具体的には、0.1 Hz で $1 \times 10^{-15} / \sqrt{\text{Hz}}$ が目標感度である。そのために様々な要素開発項目が挙げられ、実証が進められている。

3.8.1 Phase-III TOBA の観測対象

Phase-III TOBA の目標感度 0.1 Hz で $1 \times 10^{-15} / \sqrt{\text{Hz}}$ が達成されると、表 3.2 のようなサイエンスが可能になる。

表 3.2: Phase-III TOBA のサイエンス。

観測対象	値
中間質量ブラックホール連星合体	1 Mpc (天の川銀河とその近傍) 以内の探査
背景重力波	$\Omega_{\text{GW}} (f \sim 0.1 \text{ Hz}) < 10$ の制限
重力勾配雑音	大気由来の重力勾配雑音の初の直接観測
地震速報	マグニチュード 7.0 以上の地震を 震源から 100 km 離れた地点で 地震発生から 10 秒以内に検出

3.8.2 Phase-III TOBA の構成

Phase-III TOBA の構成は図 3.12 のようになっている。図 3.13 は Phase-III TOBA の写真である。Phase-III TOBA の構成は、懸架系、冷却系、防振系、光学系の 4 つに分けることができる。最初の 3 つは雑音低減のため、光学系は試験マスの水平回転の読み取りのために用いられる。

懸架系

懸架系は、試験マスと懸架ワイヤで構成される。試験マスの長さは 35 cm であり、基材には銅またはシリコンを用いる。試験マスは 2 段振り子で懸架される。現在、低温で高い Q 値をもつ懸架ワイヤを開発中である [43]。

冷却系

冷却系は、試験マスと懸架ワイヤを冷却し、熱雑音を低減するために用いられる。真空槽内には 2 層の輻射シールドが入っており、パルスチューブ冷凍機によってそれぞれ 50 K と 4 K まで冷却される。4 K の輻射シールドはヒートリンクを介して中段マスを冷却する。さらに、中段マスから懸架ワイヤを伝って試験マスも冷却する。現段階では、6 K ま

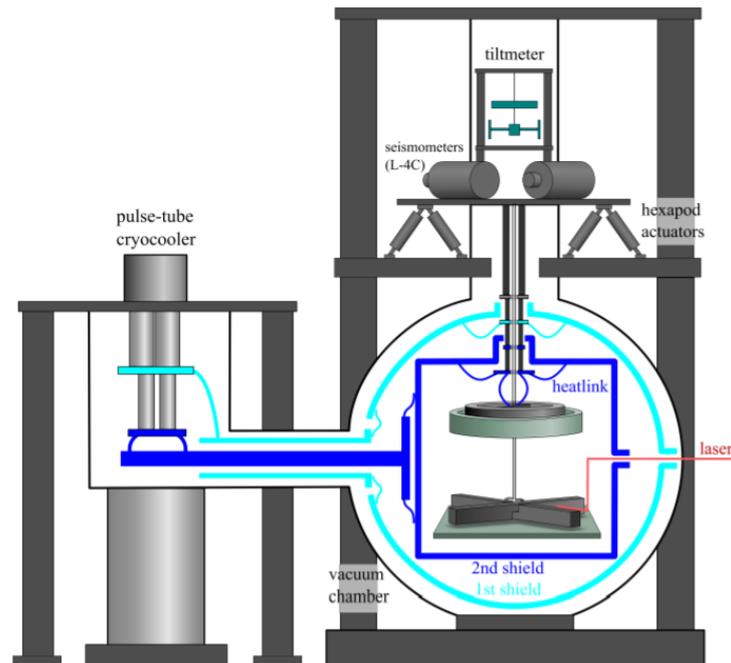


図 3.12: Phase-III TOBA の構成 [40]。

での冷却に成功している (図 3.14)。

防振系

防振系は、振動雑音を低減するために導入される。一般に、地面振動雑音は低周波数帯で大きいため、低周波数帯で高感度をねらう TOBA には大きな障害となる。これまでのプロトタイプ TOBA でも地面振動雑音の問題となっていた。また、Phase-III TOBA では冷凍機からの振動も伝わってしまうので、これもあわせて防振する必要がある。試験マスの振動を抑えるには、2 段振り子で懸架する受動防振に加えて、振動を読み取りフィードバック制御を行う能動防振を導入する必要がある。Phase-III TOBA では、真空槽の上に 6 つの地震計を配置して振動を読み取り、6 つの piezo アクチュエータにフィードバック信号を返して制御する構成となっている [44]。

光学系

光学系は、試験マスの水平回転を読み取るために用いられる。TOBA のための高感度な角度センサとして、折り返し光共振器を用いた WaveFront Sensor (Folded WFS) と結合光共振器を用いた WaveFront Sensor (Coupled WFS) が考案され、原理実証実験が行われた [17, 45]。原理や構成、実証実験の結果については 3.9 節で詳しく述べる。



図 3.13: Phase-III TOBA の写真。

3.8.3 Phase-III TOBA の目標感度と雑音源

Phase-III TOBA の感度曲線を図 3.15 に示す。0.1 Hz で $1 \times 10^{-15} / \sqrt{\text{Hz}}$ が目標感度である。0.1 Hz 以下の感度は地面振動雑音と熱雑音に、0.1 Hz 以上の感度は散射雑音に制限される。並進地面振動からの伝達係数は系に依存するので、並進地面振動雑音は増減しうる。以下では、Phase-III TOBA の目標感度を制限する雑音について紹介する。

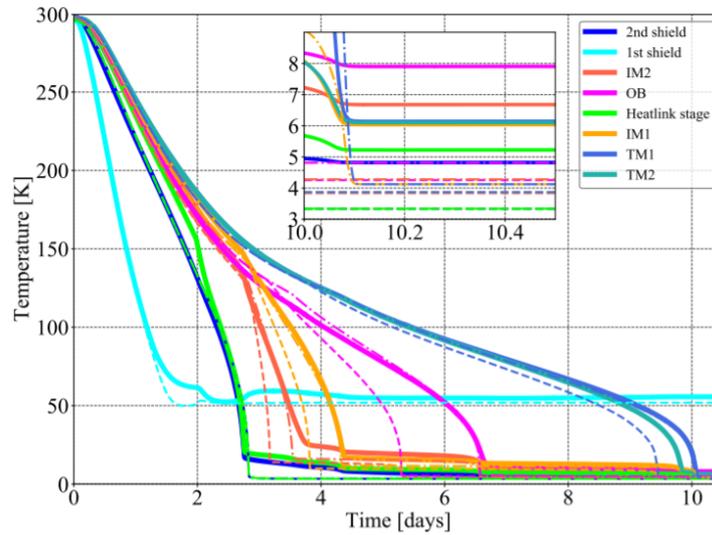


図 3.14: Phase-III TOBA の冷却曲線 [40]。実線は測定結果、点線は計算値を表す。試験マスが 10 日間で 6 K まで冷却されたことがわかる。

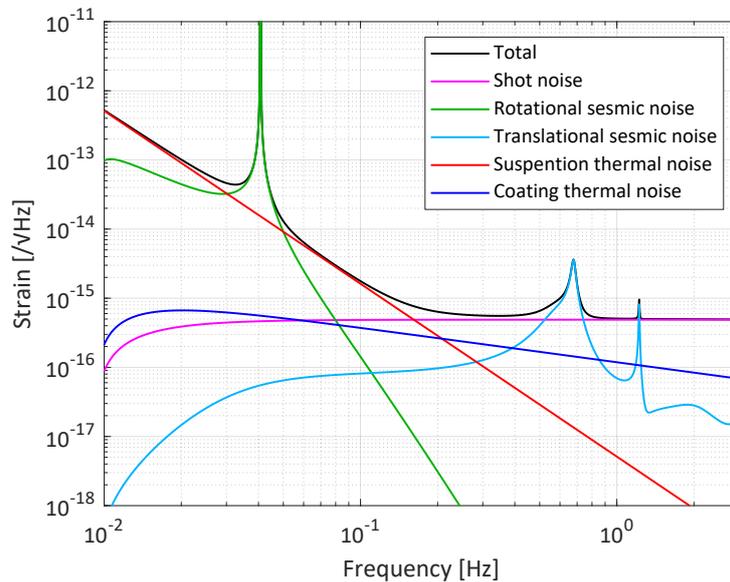


図 3.15: Phase-III TOBA の感度曲線。黒色の線が合計の設計感度、他の色の線はノイズバジェットを表す。

地面振動雑音

地面振動雑音を水平回転成分と並進成分に分け、それぞれの伝達経路を考える。

水平回転成分については、ねじれ振り子によってねじれ回転の共振周波数を ~ 1 mHz まで小さくすることができ、2 段振り子による受動防振で比較的簡単に防振できることが知られている。

一方、並進成分については、原理的には試験マスの回転運動を生み出さないが、実際には試験マスの重心の位置ずれやミラーの平行取り付け精度などから、回転運動に伝達する。Phase-III TOBA の 35 cm スケールの振り子では、並進方向の共振周波数は ~ 1 Hz であり、低周波数帯では受動防振が行えない。それゆえ、傾き調整によって伝達係数を小さくすることと、振動を読み取り能動防振を行うことが不可欠である。これらについては調査・開発が進んでいる [42, 44]。

懸架ワイヤの熱雑音

試験マスが懸架ワイヤを介して熱浴と接しているため、懸架ワイヤの熱雑音が生じる。揺動散逸定理より、熱雑音のスペクトルは以下のように表される [46]。

$$\begin{aligned}\sqrt{S_\theta(f)} &= \sqrt{-\frac{4k_B T}{2\pi f} \operatorname{Im} \left[\frac{\tilde{\theta}}{\tilde{N}} \right]} \\ &= \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi^3 I f} \frac{\phi f_0^2}{(f^2 - f_0^2)^2 + \phi^2 f_0^2}}\end{aligned}\quad (3.24)$$

ここで、 T は系の温度、 I は回転方向の慣性モーメント、 ϕ は損失係数 (Q 値の逆数)、 f_0 はねじれ回転の共振周波数である。共振周波数よりも十分に大きい周波数帯 ($f \ll f_0$) では、

$$\sqrt{S_\theta(f)} \simeq \sqrt{\frac{k_B T \phi f_0^2}{2\pi^3 I f^5}}\quad (3.25)$$

となる。Phase-III TOBA では $I \sim 0.1 \text{ kg m}^2$ 、 $f_0 \sim 5 \text{ mHz}$ であるから、これらを代入すると、温度と損失係数の積に要求値を課すことができる。Phase-III TOBA の要求値は

$$T < 4 \text{ K}\quad (3.26)$$

$$\phi < 1 \times 10^{-8}\quad (3.27)$$

となっている。

散光雑音

散光雑音とは、光検出器 (PD) に入る光子数が量子的に揺らぐことによる雑音である。PD に光電流 I_{DC} が流れているとき、散光雑音は

$$\delta I_{\text{shot}} = \sqrt{2e I_{\text{DC}}}\quad (3.28)$$

となる。入射光強度を P_{in} とおくと、散光雑音は

$$\delta P_{\text{shot}} = \sqrt{\frac{2\hbar\omega_0 P_{\text{in}}}{\eta}}\quad (3.29)$$

となる。 η は PD の量子効率と呼ばれ、光子 1 個を電子に変換する効率を表す。散射雑音をねじれ回転角度換算にすると

$$\delta\theta_{\text{shot}} = \frac{\delta P_{\text{shot}}}{\partial R(\theta)/\partial\theta} \quad (3.30)$$

となる。 $R(\theta)$ は入射光強度で規格化した角度に対する応答関数である。散射雑音を低減するには、入射光強度を大きくし、角度応答の大きいセンサを使う必要があることがわかる。Phase-III TOBA の要求値は

$$\delta\theta_{\text{shot}} = 5 \times 10^{-16} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (3.31)$$

となっている。

3.9 TOBA の角度センサの開発

TOBA のための高感度な角度センサとして、折り返し光共振器を用いた WaveFront Sensor (Folded WFS) と結合光共振器を用いた WaveFront Sensor (Coupled WFS) が考案され [47]、2017 年から 2019 年に原理実証実験が行われた [17, 45]。この節では、2 つの角度センサの原理を簡単に紹介し、原理実証実験の成果および問題点についてまとめる。光共振器については補遺 A を、WFS と Coupled WFS の原理の詳細については第 4 章を参照のこと。

3.9.1 折り返し光共振器を用いた WaveFront Sensor (Folded WFS) の原理実証実験

折り返し光共振器を用いた WaveFront Sensor (Folded WFS) の構成は、図 3.16 のようになっている。一般に、ミラー 2 枚で構成される Fabry-Pérot 共振器の周回 Gouy 位相 ζ_{round} は $0 < \zeta_{\text{round}} < 2\pi$ であるため、00 モードと高次モードは同時に共振しない。しかし、曲率のついたミラーで共振器を折り返すことにより、周回 Gouy 位相を 2π にすることができる。このとき、00 モードと高次モードが同時に共振する。Folded WFS では、角度信号である 10 モードも共振器内で共振するため、WFS よりも大きな信号を得られる。

原理実証実験により、周回 Gouy 位相が 2π となるところで WFS 信号が増幅することが観測された (図 3.17)。これにより、Folded WFS の原理実証が完了した。

Folded WFS は、Coupled WFS に比べて制御が簡単である。しかし、冷却により共振器長が収縮した場合に、周回 Gouy 位相が 2π となるように共振器長を調整しなければならず、共振器長の収縮に弱いという課題がある。Phase-III TOBA と Final TOBA では、

4 K という低温下で動作させる計画であるため、Folded WFS の TOBA への導入が実現可能であるかどうかは検討する必要がある。

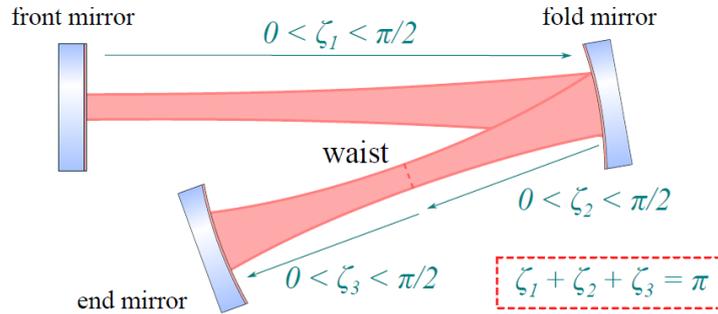


図 3.16: Folded WFS の構成 [17]。

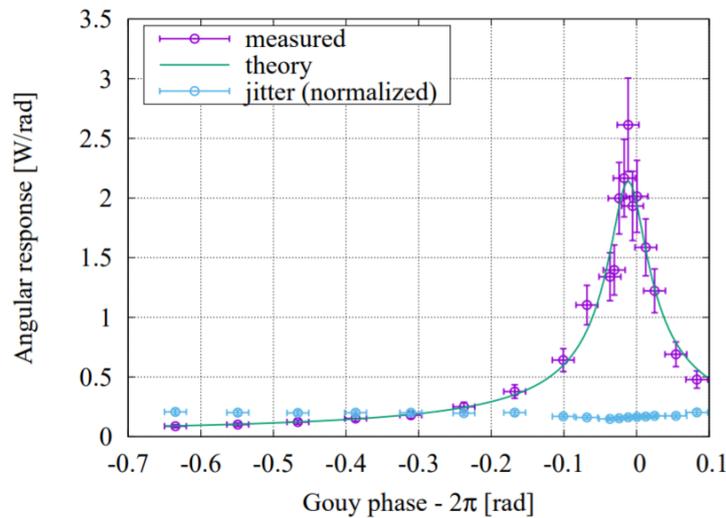


図 3.17: Folded WFS の原理実証実験の結果 [17]。緑色の実線は計算値、ピンク色の点は測定値を表す。青色の点はビームジッターに対する応答の測定値である。

3.9.2 結合光共振器を用いた WaveFront Sensor (Coupled WFS) の原理実証実験

結合光共振器を用いた WaveFront Sensor (Coupled WFS) の構成は、図 3.18 のようになっている。ミラー 2 枚で構成される Fabry-Pérot 共振器の後ろにもう 1 枚ミラーを置いて補助共振器を製作する。補助共振器を 1 枚のミラー (ただし複素数の反射率をもつ) とみなしたとき、共振点付近では反射位相が急激に変化する。補助共振器を 00 モードまたは 10 モード共振点付近に制御することにより、主共振器の 00 モードと 10 モードの位相差を打ち消すことができ、主共振器内で 00 モードと 10 モードが同時に共振する。

Coupled WFS では、角度信号である 10 モードも共振器内で共振するため、WFS よりも大きな信号を得られる。

Coupled WFS は、2 つの共振器長を制御する必要があるため、Folded WFS に比べて制御手法が難しいという課題がある一方で、冷却による共振器長の収縮に強いという利点がある。位相補償を行うには、共振器長をレーザー光の波長程度調整できれば十分だからである。

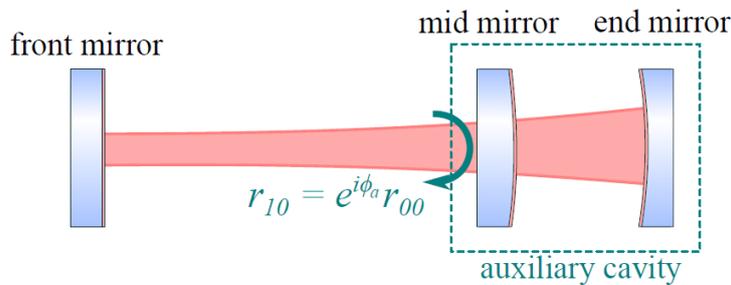


図 3.18: Coupled WFS の構成 [17]。

原理実証実験により、10 モード共振点まわりで角度信号が増幅することが観測された (図 3.19)。

一方で、この先行研究には以下の 3 つの問題点があった。

- DCQPD を用いて信号を取得したため、WFS 信号ではなく QPD 信号の増幅を観測した。
- 補助共振器を肩ロックで制御したため、補助共振器の共振点での制御が困難であった。
- 信号増幅が理論予測に比べて小さかった。

2 点目の補助共振器の制御について詳しく説明する。肩ロックとは、共振器の透過光をエラー信号として用い、共振点の半分程度の光量が得られる点へ制御をかける手法である。共振点では線形なエラー信号を取得できないため、制御が不安定になる。そのため、大きな信号増幅を得られ、最も安定に動作する補助共振器の共振点で Coupled WFS を動作させることができないという問題があった。

3 点目の信号増幅が理論予測に比べて小さかった理由は、エンドミラーのミスアラインメントだと考えられている。共振器長 (~ 1 cm) に対してミラーの曲率半径が ~ 20 m と大きかったためにアラインメント要求精度が非常に高かった。また、ミラーをミラーマウントに固定していたためにアラインメントがずれやすかった。そのため、良いアラインメント状態が保たれるのが数十分程度と短かった。その結果、WFS 信号の測定前後で共振器のアラインメントが変化してしまい、信号増幅を定量的に評価できないという問題が

あった。

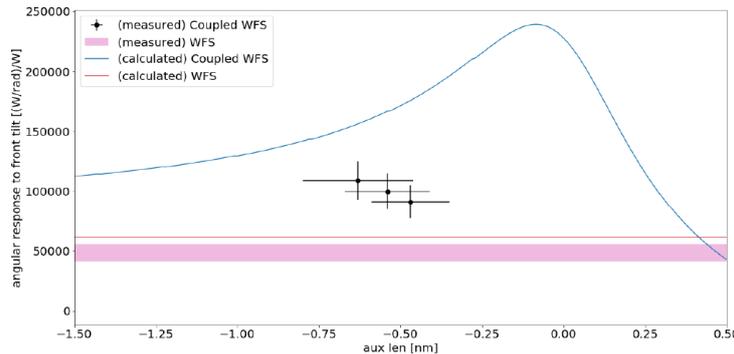


図 3.19: Coupled WFS の原理実証実験の結果 [45]。赤色の実線が WFS の計算値、青色の実線が Coupled WFS の計算値、ピンク色の帯が WFS の測定値、黒色の点が Coupled WFS の測定値である。

3.10 本章のまとめ

- 0.1 Hz–10 Hz の重力波観測を目指しねじれ型重力波望遠鏡 TOBA の開発が進められている。
- TOBA はねじれ振り子の共振周波数以上においてクロスモードの重力波に対して一定の応答を示す。
- TOBA の最終的な目標感度は、0.1 Hz で $1 \times 10^{-19} / \sqrt{\text{Hz}}$ である。観測対象は中間質量ブラックホールの連星合体、背景重力波、重力勾配雑音、地震速報である。
- これまでに Phase-I TOBA と Phase-II TOBA というプロトタイプ TOBA が製作され、原理実証および背景重力波の上限値の更新が行われた。
- 現在は Phase-III TOBA の開発段階にある。目標感度は 0.1 Hz で $1 \times 10^{-15} / \sqrt{\text{Hz}}$ である。目標感度達成のための要素開発と雑音低減が進められている。
- TOBA のための角度センサとして、Folded WFS と Coupled WFS が考案された。Coupled WFS は冷却による系の収縮に強いという利点があるが、制御手法に課題が残っている。

第 4 章

結合光共振器を用いた wavefront sensor

本章ではまず、WaveFront Sensor (WFS) の原理を紹介する。その後、TOBA の角度センサとして考案されている結合光共振器を用いた WaveFront Sensor (Coupled WFS) の原理を説明する。また、Coupled WFS の性質解明を目的として行った FINESSE によるシミュレーションについても本章で述べる。

4.1 WaveFront Sensor (WFS)

Fabry-Pérot 共振器 (補遺 A を参照) を構成するミラーが傾いていない場合、共振器の固有モードと入射光の基本モードは十分一致するように光学系が設計される。しかし現実には、共振器のミラーが微小に傾いてしまう。これにより、共振器軸 (ミラーの曲率中心を結んだ線) は入射光軸からずれる。WaveFront Sensor (WFS) とは、共振器軸と入射光軸の差をみることでミラーの傾きの量に比例した信号を検出する手法である [50, 51]。

一般に、Fabry-Pérot 共振器の長さは Pound-Drever-Hall (PDH) 法 [48, 49] と呼ばれる手法で制御されることが多い (補遺 B を参照)。WFS では、この際に用いられる位相変調をそのまま利用してミラーの傾きの信号も得ることができる。機械的に静かであり、新たな位相変調を必要としないという利点がある。

4.1.1 WFS の原理 (一般的な場合)

入射光が進む方向を z 軸とし、 z 軸の原点をビームウエストにとる。共振器を構成するミラーが x 軸の方向に微小に傾いたときを考える。傾くのはフロントミラーでもエンドミラーでもこれら両方でもよい。図 4.1 はフロントミラーが傾いたときの例である。この

とき、共振器軸が入射光軸に対して $\delta\theta$ だけ傾き、 x 軸方向に δx だけ平行移動したとする。さらに、反射光軸が共振器軸に対して $\delta\theta_r$ だけ傾き、 x 軸方向に δx_r だけ平行移動したとする*1。以下では、このとき得られる WFS 信号強度を計算する*2。

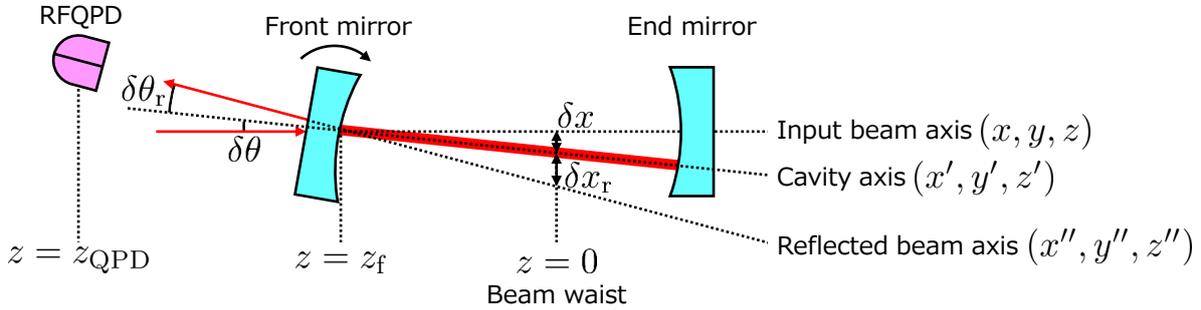


図 4.1: WFS の原理 (一般的な場合)。この図ではフロントミラーが傾いたと仮定している。

Hermite-Gaussian モード

規格化された*3 Hermite-Gaussian モードの表式は以下のようなになる [21, 55, 56]。

$$U_{mn} = U_m(x, z)U_n(y, z) \exp [i(1 + m + n)\zeta(z)] \quad (4.1)$$

$$U_m(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w^2(z)} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{2^m m!}} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \exp \left[-\frac{x^2}{w^2(z)} - i \frac{k_0 x^2}{2R(z)} \right] \quad (4.2)$$

ここで、 m, n は非負整数である。 U_{mn} を mn モード (または $m+n$ 次のモード) と呼ぶ。00 モードを基本モード、それ以外をまとめて高次モードと呼ぶこともある。

$H_n(x)$ は Hermite 多項式であり、以下のように定義される。

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) \quad (4.3)$$

$$H_0(x) = 1 \quad (4.4)$$

$$H_1(x) = 2x \quad (4.5)$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad (4.6)$$

⋮

*1 フロントミラーまたはエンドミラーの傾き角と共振器軸のずれの具体的な表式は [52] を参照のこと。

*2 [52-54] を参考にした

*3 [21] の式 (A-70) は規格化されていないので注意。

また、各記号の定義は以下の通りである。

$$z_R = \frac{k_0 w_0^2}{2} \quad (4.7)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (4.8)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2 \right] \quad (4.9)$$

$$\zeta(z) = \arctan \frac{z}{z_R} \quad (4.10)$$

w_0 は実パラメータであり、ビームウエスト半径と呼ばれる。 z_R を Rayleigh レンジ、 $w(z)$ をビーム半径またはスポットサイズ、 $R(z)$ を等位相面の曲率半径、 $\zeta(z)$ を Gouy 位相と呼ぶ。

Gouy 位相は 00 モードと高次モードの位相差を表す。Gouy 位相があるため、一般には共振器内で 00 モードと高次モードは同時に共振しない。

逆行するビーム

z 軸上を順行するビームを明示的に $U_{mn \rightarrow}$ と書くことにする。 z 軸上を逆行するビームは

$$\begin{aligned} U_{mn \leftarrow}(x, y, z) &= U_{mn \rightarrow}(x, y, -z) \\ &= U_m(x, -z) U_n(y, -z) \exp [i(1 + m + n)\zeta(-z)] \\ &= U_m^*(x, z) U_n^*(y, z) \exp [-i(1 + m + n)\zeta(z)] \\ &= U_{mn \rightarrow}^*(x, y, z) \end{aligned} \quad (4.11)$$

となり、順行するビームの複素共役で表せる。

ビームの平行移動と回転

x 軸方向に δx だけ平行移動した座標系 (x', y', z') での $z' = 0$ まわりで 00 モードと 10 モードを展開すると以下のようなになる [53]。

$$U_{00}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{00}(x', y', 0) + \left(\frac{\delta x}{w_0}\right) U_{10}(x', y', 0) \quad (4.12)$$

$$U_{10}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{10}(x', y', 0) - \left(\frac{\delta x}{w_0}\right) U_{00}(x', y', 0) \quad (4.13)$$

また、 y 軸を中心に $\delta\theta$ だけ回転した座標系 (x', y', z') で展開すると以下のようなになる [53]。

$$U_{00}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{00}(x', y', 0) + i \left(\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \right) U_{10}(x', y', 0) \quad (4.14)$$

$$U_{10}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{10}(x', y', 0) + i \left(\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \right) U_{00}(x', y', 0) \quad (4.15)$$

ここで、 α_0 はビームの広がり角であり、

$$\alpha_0 = \frac{2}{k_0 w_0} \quad (4.16)$$

と表される。

行列表現

レーザー光の電場は、Hermite-Gaussian ビームの 00 モードと 10 モードを考えると

$$E(t, x, y, z) = (U_{00} \ U_{10}) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} E_0 \exp(i\omega_0 t - ik_0 z) \quad (4.17)$$

のように表せるから、式 (4.12) から式 (4.15) を行列で書き直すと便利である。 x 軸方向に δx だけ平行移動した座標系への変換は

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta x/w_0 \\ -\delta x/w_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

となる。 y 軸を中心に $\delta\theta$ だけ回転した座標系への変換は

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i\delta\theta/\alpha_0 \\ i\delta\theta/\alpha_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

となる。この2つの行列をかければ、 x 軸方向に δx だけ平行移動し y 軸を中心に $\delta\theta$ だけ回転した座標系へ変換できる。 $\gamma \equiv \delta x/w_0 + i\delta\theta/\alpha_0$ とおき、 γ の1次までとると

$$M(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma^* & 1 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

となる。ここまでの行列はすべて z 軸を順行するビームに対する変換行列である。逆行するビームに対しては複素共役をとればよい。

アラインしている共振器の反射行列

フロントミラー上で入射光が反射されるときの変換行列について考える。入射光軸と共振器軸は一致しているとする。さらに、入射光の波面の曲率半径とミラーの曲率半径も一致しているとする。フロントミラー、エンドミラーの振幅反射率、振幅透過率をそれぞれ

r_f, t_f, r_e, t_e とおく。また、共振器長を L 、共振器の周回 Gouy 位相を ζ_{round} 、ビームウエスト ($z = 0$) からフロントミラー ($z = z_f$) までの Gouy 位相を ζ_f とおく。00 モードが共振器を往復するときを得る位相変化は $\phi \equiv 2\omega_0 L/c - \zeta_{\text{round}}$ となる。

共振器の 00 モードに対する反射率は

$$r_{c0} = -r_f + \frac{t_f^2 r_e e^{i\phi}}{1 - r_f r_e e^{i\phi}} \quad (4.21)$$

となる。10 モードの位相は 00 モードと ζ_{round} だけ異なるため、共振器の 10 モードに対する反射率は

$$r_{c1} = -r_f + \frac{t_f^2 r_e e^{i(\phi - \zeta_{\text{round}})}}{1 - r_f r_e e^{i(\phi - \zeta_{\text{round}})}} \quad (4.22)$$

となる。

フロントミラーでの入射光のモードは

$$U_{mn \rightarrow}(x, y, z_f) = U_m(x, z_f) U_n(y, z_f) \exp[i(1 + m + n)\zeta_f] \quad (4.23)$$

である。したがって、フロントミラーでの反射光のモードは

$$U_{mn \leftarrow}(x, y, z_f) = U_m(x, z_f) U_n(y, z_f) \exp[2i(1 + m + n)\zeta_f] \quad (4.24)$$

となる。

以上より、入射光軸と共振器軸が一致しているときの共振器の反射行列は

$$R_{\text{align}} = \begin{pmatrix} r_{c0} & 0 \\ 0 & r_{c1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\zeta_f} & 0 \\ 0 & e^{2i\zeta_f} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

となる。

ミスアラインしている共振器の反射行列

いま、共振器の座標系は入射光の座標系に対して $\gamma \equiv \delta x/w_0 + i\delta\theta/\alpha_0$ だけずれている。また、反射光の座標系は共振器の座標系に対して $\gamma_r \equiv \delta x_r/w_0 + i\delta\theta_r/\alpha_0$ だけずれている。入射光を

$$E_i = (U_{00} \quad U_{10}) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} E_0 \exp(i\omega_0 t - ik_0 z) \quad (4.26)$$

とすると、反射光は

$$E_r = (U_{00} \quad U_{10}) M^*(\gamma_r) R_{\text{align}} M(\gamma) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} E_0 \exp(i\omega_0 t - ik_0 z) \quad (4.27)$$

となる。したがって、共振器を構成するミラーが傾いたときの反射行列は γ と γ_r の 1 次まで考えて

$$\begin{aligned} R_{\text{misalign}} &= M^*(\gamma_r)R_{\text{align}}M(\gamma) \\ &= \begin{pmatrix} r_{c0}e^{i\zeta_f} & r_{c0}\gamma e^{i\zeta_f} + r_{c1}\gamma_r^* e^{2i\zeta_f} \\ -r_{c0}\gamma_r e^{i\zeta_f} - r_{c1}\gamma^* e^{2i\zeta_f} & r_{c1}e^{2i\zeta_f} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.28)$$

となる。入射光には 00 モードしか含まれないと仮定して $(a_0, a_1) = (1, 0)$ とすると

$$E_r = [r_{c0}U_{00} - (r_{c0}\gamma_r e^{i\zeta_f} + r_{c1}\gamma^* e^{2i\zeta_f})]E_0 \exp(i\omega_0 t - ik_0 z) \quad (4.29)$$

となる。ここで、

$$r_c \equiv r_{c0}U_{00} - (r_{c0}\gamma_r e^{i\zeta_f} + r_{c1}\gamma^* e^{2i\zeta_f}) \quad (4.30)$$

と定義する。

WFS 信号強度

WFS 信号は、PDH 法と同様に、共振器の入射光に位相変調をかけ、反射光を RFPD で検出し復調することで得られる。それゆえ、WFS 信号強度の計算には、PDH 法の信号強度の表式をそのまま使える。ただし、PDH 法では 00 モードのみを考えるが、WFS では高次モードも考え、添え字として明記する。PDH 信号の表式は、式 (B.9) より

$$P_{\text{PDH}} = P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \text{Im}[r_c r_s^* - r_c^* r_s] \quad (4.31)$$

である。この式の r_c に式 (4.30) の r_c を代入する。サイドバンドの反射光についてもキャリアと同様に考えることができるので、 r_s には式 (4.30) の r_c の添え字を変えたものを代入すればよい。

$$C \equiv r_{c0}\gamma_r e^{i\zeta_f} + r_{c1}\gamma^* e^{2i\zeta_f} \quad (4.32)$$

$$S \equiv r_{s0}\gamma_r e^{i\zeta_f} + r_{s1}\gamma^* e^{2i\zeta_f} \quad (4.33)$$

とにおいて、

$$\begin{aligned} r_c r_s^* - r_c^* r_s &= [U_{00}r_{c0} - U_{10}C]^* [U_{00}r_{s0} - U_{10}S] - [U_{00}r_{c0} - U_{10}C][U_{00}r_{s0} - U_{10}S]^* \\ &= U_{00}U_{00}^* (r_{c0}^* r_{s0} - r_{c0} r_{s0}^*) \\ &\quad + U_{00}U_{10}^* (r_{c0}S^* - r_{s0}C^*) + U_{00}^*U_{10} (r_{s0}^*C - r_{c0}^*S) \end{aligned} \quad (4.34)$$

となる。式 (4.34) の第 1 項は PDH 信号であり、共振時には 0 になる。第 2 項と第 3 項は 00 モードと 10 モードの干渉を表し、これが WFS 信号である。PDH 信号によって共

振器が共振状態に制御されているとすると、各反射率 $r_{c0}, r_{c1}, r_{s0}, r_{s1}$ は実数とみなしてよい。第2項と第3項の和を W とおいて計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
W &= U_{00}U_{10}^*(r_{c0}S^* - r_{s0}C^*) + U_{00}^*U_{10}(r_{s0}C - r_{c0}^*S) \\
&= U_{00}U_{10}^*[r_{c0}(r_{s0}\gamma_r^*e^{-i\zeta_f} + r_{s1}\gamma e^{-2i\zeta_f}) - r_{s0}(r_{c0}\gamma_r^*e^{-i\zeta_f} + r_{c1}\gamma e^{-2i\zeta_f})] \\
&\quad + U_{00}^*U_{10}[r_{s0}(r_{c0}\gamma_r e^{i\zeta_f} + r_{c1}\gamma^*e^{2i\zeta_f}) - r_{c0}(r_{s0}\gamma_r e^{i\zeta_f} + r_{s1}\gamma^*e^{2i\zeta_f})] \\
&= U_{00}U_{10}^*(r_{c0}r_{s1} - r_{s0}r_{c1})\gamma e^{-2i\zeta_f} + U_{00}^*U_{10}(r_{s0}r_{c1} - r_{c0}r_{s1})\gamma^*e^{2i\zeta_f} \\
&= (r_{c0}r_{s1} - r_{s0}r_{c1})(U_{00}U_{10}^*\gamma e^{-2i\zeta_f} - U_{00}^*U_{10}\gamma^*e^{2i\zeta_f}) \tag{4.35}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&U_{00}U_{10}^*\gamma e^{-2i\zeta_f} - U_{00}^*U_{10}\gamma^*e^{2i\zeta_f} \\
&= (U_{00}U_{10}^*\gamma e^{-2i\zeta_f}) - (U_{00}U_{10}^*\gamma e^{-2i\zeta_f})^* \\
&= 2i\text{Im}[U_{00}U_{10}^*\gamma e^{-2i\zeta_f}] \\
&= 2i\text{Im}\left[U_0U_0e^{i\zeta_{\text{QPD}}}U_1^*U_0^*e^{-2i\zeta_{\text{QPD}}}\left(\frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0}\right)e^{-2i\zeta_f}\right] \\
&= -2iU_0U_0U_1^*U_0^*\left[\frac{\delta x}{w_0}\sin(\zeta_{\text{QPD}} - 2\zeta_f) - \frac{\delta\theta}{\alpha_0}\cos(\zeta_{\text{QPD}} - 2\zeta_f)\right] \tag{4.36}
\end{aligned}$$

である。ただし、 ζ_{QPD} はビームウエスト ($z = 0$) から RFQPD ($z = z_{\text{QPD}}$) までの Gouy 位相である。

以上より、WFS 信号は式 (4.31) に共振状態という条件を課したものであり、式 (4.31)、式 (4.35)、式 (4.36) より

$$\begin{aligned}
P_{\text{WFS}} &= iP_0J_0(\beta)J_1(\beta)W \\
&= 2P_0J_0(\beta)J_1(\beta)U_0U_0U_1^*U_0^*(r_{c0}r_{s1} - r_{s0}r_{c1}) \\
&\quad \times \left[\frac{\delta x}{w_0}\sin(\zeta_{\text{QPD}} - 2\zeta_f) - \frac{\delta\theta}{\alpha_0}\cos(\zeta_{\text{QPD}} - 2\zeta_f)\right] \tag{4.37}
\end{aligned}$$

となる。

RFQPD での検出

式 (4.37) より、 P_{WFS} が $U_0(x, z)U_0(y, z)U_1^*(x, z)U_0^*(y, z) \equiv V(x, y, z)$ に比例することがわかった。式 (4.2) より、

$$U_0(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w^2(z)}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{x^2}{w^2(z)} - i\frac{k_0x^2}{2R(z)}\right] \tag{4.38}$$

$$U_1(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w^2(z)}\right)^{1/4} \frac{2x}{w(z)} \exp\left[-\frac{x^2}{w^2(z)} - i\frac{k_0x^2}{2R(z)}\right] \tag{4.39}$$

であるから、 P_{WFS} は x に関して奇関数である。このため、通常の光検出器 (PD) で受光してもミラーの傾きに比例した信号を得ることができない。そこで、WFS では 4 分割型光検出器 (QPD) を用いて $x > 0$ と $x < 0$ の領域の信号を別々にとり、これらの差をとることでミラーの傾きに比例した信号を得る。高周波成分の検出が必要であることとあわせて、RFQPD を用いることが一般的である。差分信号を計算すると、

$$\begin{aligned}
 V(x > 0) - V(x < 0) &= 2 \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy V(x, y, z) \\
 &= 2 \int_0^{\infty} dx U_0(x, z) U_1^*(x, z) \\
 &= 2 \int_0^{\infty} dx \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \frac{2x}{w(z)} \exp\left(-\frac{2x^2}{w^2(z)}\right) \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned}
 P_{\text{WFS, total}} &= -\sqrt{\frac{8}{\pi}} P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) (r_{c0} r_{s1} - r_{s0} r_{c1}) \\
 &\quad \times \left(\frac{\delta x}{w_0} \sin(\zeta_{\text{QPD}} - 2\zeta_f) - \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \cos(\zeta_{\text{QPD}} - 2\zeta_f) \right)
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

となる。これが最終的に得られる WFS 信号強度である。式 (4.41) に $\delta x_r, \delta \theta_r$ が含まれていないことから、WFS は原理的に共振器軸と入射光軸の差をみる手法であり、反射光軸とは無関係であることがわかる。RFQPD 前に配置したステアリングミラーや RFQPD が地面振動などで揺れても WFS 信号には影響しない。

4.1.2 WFS の原理 (フラットなフロントミラーが傾いた場合)

次の 4.2.1 節で Coupled WFS の原理を紹介する。その比較のために、フロントミラーがフラットで、フロントミラーのみが傾くという簡単な場合を考える (図 4.2)。

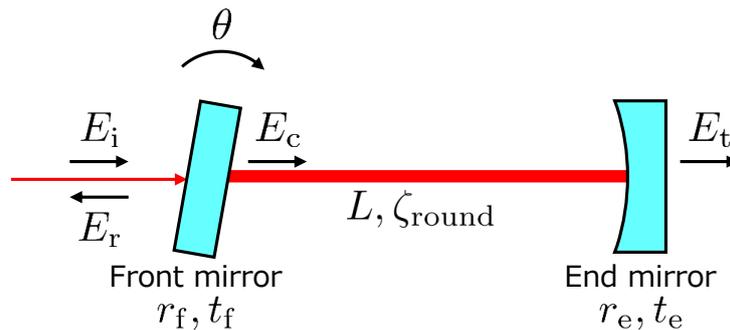


図 4.2: WFS の原理 (フラットなフロントミラーが傾いた場合)。

入射光軸と共振器軸が一致している状態から、フロントミラーが θ だけ傾いたとする。
4.1.1 節では、入射光軸と共振器軸が一致しているときの共振器の反射率を r_{c0}, r_{c1} とおいたが、ここからは、ミスアラインしているときの共振器の反射率を r_{c0}, r_{c1} とおく。

このとき、WFS 信号強度は、ビームウエストから RFQPD までの Gouy 位相 ζ_{QPD} を用いて

$$P_{\text{WFS, total}} = -\sqrt{\frac{8}{\pi}} P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \text{Im}[(r_{c0} r_{s1} - r_{s0} r_{c1}) e^{-i\zeta_{\text{QPD}}}] \quad (4.42)$$

となる。

入射電場を E_i 、反射電場を E_r 、共振器内電場を E_c 、透過電場を E_t とおく。00 モードと 10 モードを考え、添え字として明記する。入射光には 00 モードしか含まれないとし、 $E_i \equiv E_{i0}$ とすると、それぞれの電場は以下の関係を満たす。

$$E_{c0} = t_f E_{i0} + r_f r_e e^{-i\phi_0} E_{c0} + \beta r_f r_e e^{-i\phi_1} E_{c1} \quad (4.43)$$

$$E_{c1} = \beta r_f r_e e^{-i\phi_0} E_{c0} + r_f r_e e^{-i\phi_1} E_{c1} \quad (4.44)$$

$$E_{r0} = -r_f E_{i0} + t_f r_e e^{-i\phi_0} E_{c0} \quad (4.45)$$

$$E_{r1} = \beta r_f E_{i0} + t_f r_e e^{-i\phi_1} E_{c1} \quad (4.46)$$

$$E_{t0} = t_e e^{-i\phi_0/2} E_{c0} \quad (4.47)$$

$$E_{t1} = t_e e^{-i\phi_1/2} E_{c1} \quad (4.48)$$

ただし、 r_f, t_f, r_e, t_e はそれぞれフロントミラーとエンドミラーの振幅反射率と振幅透過率であり、 $\beta = 2i\theta/\alpha_0$ である。また、共振器長を L 、周回 Gouy 位相を ζ_{round} とし、

$$\phi_0 = \frac{2L\omega_0}{c} - \zeta_{\text{round}} \quad (4.49)$$

$$\phi_1 = \frac{2L\omega_0}{c} - 2\zeta_{\text{round}} \quad (4.50)$$

である。これらの式から r_{c0}, r_{c1} を求めると、

$$r_{c0} \equiv \left| \frac{E_{r0}}{E_{i0}} \right| = -r_f + \frac{t_f^2 r_e e^{-i\phi_0}}{1 - r_f r_e e^{-i\phi_0}} \quad (4.51)$$

$$r_{c1} \equiv \left| \frac{E_{r1}}{E_{i0}} \right| = \beta r_f + \frac{\beta t_f^2 r_f r_e^2 e^{-i\phi_0} e^{-i\phi_1}}{(1 - r_f r_e e^{-i\phi_0})(1 - r_f r_e e^{-i\phi_1})} \quad (4.52)$$

となる。

共振器が 00 モードの共振状態にあるとき、 $\phi_0 = 0, \phi_1 = -\zeta_{\text{round}}$ が成り立ち、

$$r_{c0} = -r_f + \frac{t_f^2 r_e}{1 - r_f r_e} \quad (4.53)$$

$$r_{c1} = \beta r_f + \frac{\beta t_f^2 r_f r_e^2 e^{i\zeta_{\text{round}}}}{(1 - r_f r_e)(1 - r_f r_e e^{i\zeta_{\text{round}}})} \quad (4.54)$$

となる。 r_{c0} はフロントミラーが傾いていない場合と変わらない。 r_{c1} には、共振器内で 00 モードが増幅される効果 $1/(1 - r_f r_e)$ と共振器内で 10 モードが増幅される効果 $1/(1 - r_f r_e e^{i\zeta_{\text{round}}})$ が表れている。しかし一般に、ミラー 2 枚で構成される Fabry-Pérot 共振器の周回 Gouy 位相 ζ_{round} は $0 < \zeta_{\text{round}} < 2\pi$ であるため、 $1/(1 - r_f r_e e^{i\zeta_{\text{round}}}) \simeq 1$ であり、共振器内で 10 モードは増幅されない。

$r_f \simeq 1, r_e = 1$ のとき、フィネス $\mathcal{F} \simeq \pi/(1 - r_f)$ を用いて r_{c0} と r_{c1} を簡単に表せて、

$$r_{c0} \simeq 1 \quad (4.55)$$

$$r_{c1} \simeq \beta \left(1 + \frac{2e^{i\zeta_{\text{round}}}}{1 - (1 - \pi/\mathcal{F})e^{i\zeta_{\text{round}}}} \right) \quad (4.56)$$

となる。

4.2 結合光共振器を用いた WaveFront Sensor (Coupled WFS)

結合光共振器を用いた WaveFront Sensor (Coupled WFS) の構成は、図 4.3 (上) のようになっている。ミラー 2 枚で構成される Fabry-Pérot 共振器の後ろにもう 1 枚ミラーを置いて補助共振器を製作する。このような構成により、補助共振器で位相補償を行い、主共振器内で 00 モードと 10 モードを同時に共振させることができる。Coupled WFS では、角度信号である 10 モードが共振器内で増幅するため、WFS よりも大きな信号を得られる。

本節では、Coupled WFS は主共振器内で 10 モードを増幅できることを示す。その後、補助共振器で位相補償を行える設計が存在することと、補助共振器で位相補償を行えないのはどのような場合であるかについて述べる。最後に、ビームジッター雑音は増幅しないという Coupled WFS の利点を紹介する。

4.2.1 Coupled WFS の原理

Coupled WFS に対しても、4.1.2 節と同様に、フロントミラーがフラットで、フロントミラーのみが傾くという簡単な場合を考える (図 4.3)。この時の WFS 信号強度の表式も同様に式 (4.42) となる。以下では、 r_{c0}, r_{c1} を求める。

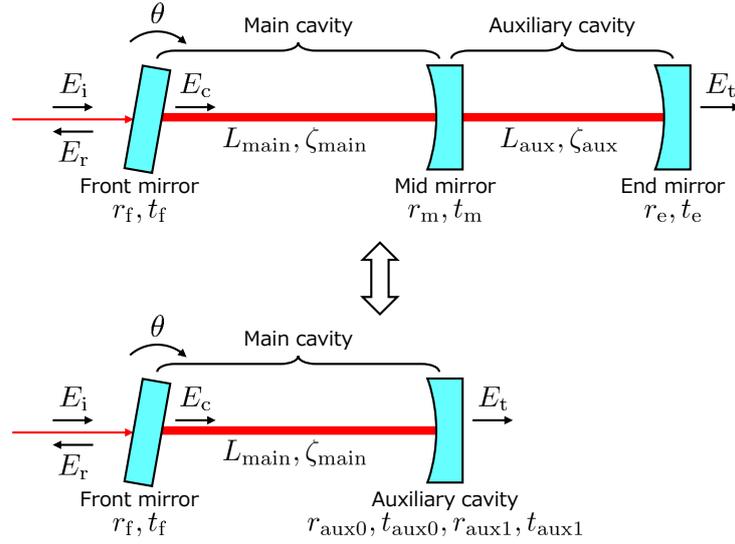


図 4.3: Coupled WFS の原理。上: Coupled WFS の構成。下: 補助共振器を 1 枚のミラーとみなしたときの構成。

補助共振器はアラインメントが完璧な状態であるため、補助共振器の 00 モードと 10 モードのキャリアに対する振幅反射率 r_{aux0}, r_{aux1} を計算すると以下ようになる。

$$r_{aux0} = -r_m + \frac{t_m^2 r_e e^{-i\phi_{aux0}}}{1 - r_m r_e e^{-i\phi_{aux0}}} \quad (4.57)$$

$$r_{aux1} = -r_m + \frac{t_m^2 r_e e^{-i\phi_{aux1}}}{1 - r_m r_e e^{-i\phi_{aux1}}} \quad (4.58)$$

ただし、 r_m, t_m, r_e, t_e はそれぞれ中間ミラーとエンドミラーの振幅反射率と振幅透過率である。また、補助共振器長を L_{aux} 、補助共振器の周回 Gouy 位相を ζ_{aux} とし、

$$\phi_{aux0} = \frac{2L_{aux}\omega_0}{c} - \zeta_{aux} \quad (4.59)$$

$$\phi_{aux1} = \frac{2L_{aux}\omega_0}{c} - 2\zeta_{aux} \quad (4.60)$$

である。

このときの主共振器の 00 モードと 10 モードのキャリアに対する振幅反射率 r_{main0}, r_{main1} を計算する。補助共振器を 1 枚のミラー (ただし複素数の振幅反射率をもち、それらは 00 モードと 10 モードに対して異なる) とみなせば、主共振器はフロントミラーと補助共振器ミラーの 2 枚で構成される (図 4.3)。そのため、式 (4.51) と式 (4.52) のエンドミラーの振幅反射率 r_e (実数) を補助共振器の 00 モードと 10 モードに対する振幅反射率 r_{aux0}, r_{aux1} (複素数) に変更するだけでよい。ただし、00 モード 10 モードに注

意して文字を代入すべきことに注意。

$$r_{\text{main}0} = -r_f + \frac{t_f^2 r_{\text{aux}0} e^{-i\phi_{\text{main}0}}}{1 - r_f r_{\text{aux}0} e^{-i\phi_{\text{main}0}}} \quad (4.61)$$

$$r_{\text{main}1} = \beta r_f + \frac{\beta t_f^2 r_f r_{\text{aux}0} r_{\text{aux}1} e^{-i\phi_{\text{main}0}} e^{-i\phi_{\text{main}1}}}{(1 - r_f r_{\text{aux}0} e^{-i\phi_{\text{main}0}})(1 - r_f r_{\text{aux}1} e^{-i\phi_{\text{main}1}})} \quad (4.62)$$

ここで、主共振器長を L_{main} 、主共振器の周回 Gouy 位相を ζ_{main} とし、

$$\phi_{\text{main}0} = \frac{2L_{\text{main}}\omega_0}{c} - \zeta_{\text{main}} \quad (4.63)$$

$$\phi_{\text{main}1} = \frac{2L_{\text{main}}\omega_0}{c} - 2\zeta_{\text{main}} \quad (4.64)$$

である。

主共振器内で 00 モードと 10 モードが同時に共振する条件は、 n, m を整数として、以下の 2 式が両方成り立つことである。

$$\arg(r_{\text{aux}0}) - \phi_{\text{main}0} = 2n\pi \quad (4.65)$$

$$\arg(r_{\text{aux}1}) - \phi_{\text{main}1} = 2m\pi \quad (4.66)$$

これらの条件を書き換えると、

$$\arg(r_{\text{aux}0}) - \phi_{\text{main}0} = 2n\pi \quad (4.67)$$

$$\arg(r_{\text{aux}0}) - \arg(r_{\text{aux}1}) = \zeta_{\text{main}} \quad (4.68)$$

となる。式 (4.67) は主共振器内で 00 モードが共振状態であることを示し、式 (4.68) は補助共振器の 00 モードと 10 モードの反射位相差が主共振器の周回 Gouy 位相と一致することを示す。すなわち、補助共振器による位相補償が実現し、主共振器内で 10 モードも共振することを示す。

主共振器内で 00 モードと 10 モードが同時に共振しているとき、補助共振器の 00 モードと 10 モードに対する振幅反射率の大きさが $r'_{\text{aux}0}, r'_{\text{aux}1}$ であるとすると、

$$r_{\text{main}0} = -r_f + \frac{t_f^2 r'_{\text{aux}0}}{1 - r_f r'_{\text{aux}0}} \quad (4.69)$$

$$r_{\text{main}1} = \beta r_f + \frac{\beta t_f^2 r_f r'_{\text{aux}0} r'_{\text{aux}1}}{(1 - r_f r'_{\text{aux}0})(1 - r_f r'_{\text{aux}1})} \quad (4.70)$$

となる。 $r_{\text{main}1}$ には、主共振器内で 00 モードが増幅される効果 $1/(1 - r_f r'_{\text{aux}0})$ と主共振器内で 10 モードが増幅される効果 $1/(1 - r_f r'_{\text{aux}1})$ が表れている。 $r'_{\text{aux}0}, r'_{\text{aux}1}$ が十分 1 に近ければ*4、これらは 1 より十分大きな値をとり、主共振器内で 00 モードと 10 モードが両方増幅されることがわかる。

*4 $r'_{\text{aux}0}, r'_{\text{aux}1}$ は補助共振器の構成や制御点によっては 0 に近い値を取り得る。このとき主共振器のフィネスが小さくなるため、信号増幅度が小さくなる。

$r_e = 1$ のとき、補助共振器の振幅反射率の大きさは制御点に関わらず常に 1 となる ($r'_{\text{aux}0} = r'_{\text{aux}1} = 1$)。 $r_f \simeq 1$ も成り立つとき、主共振器のフィネス $\mathcal{F} \simeq \pi/(1 - r_f)$ を用いて $r_{\text{main}0}$ と $r_{\text{main}1}$ を簡単に表せて、

$$r_{c0} \simeq 1 \quad (4.71)$$

$$r_{c1} \simeq \beta \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \quad (4.72)$$

となる。

次に、補助共振器による位相補償が行えることを確認する。図 4.4 (上) に補助共振器の 00 モードと 10 モードの反射位相を示した。補助共振器長が 0 deg と 9 deg のあたりで補助共振器の 00 モードと 10 モードの反射位相が急激に変化することがわかる。0 deg は補助共振器の 00 モード共振点まわり、9 deg は補助共振器の 10 モード共振点まわりである。図 4.4 (下) より、この 2 点で補助共振器の 00 モードと 10 モードの反射位相差と主共振器の Gouy 位相が一致する。このとき、式 (4.68) が満たされるため、主共振器内で 00 モードと 10 モードが同時に共振することができる。

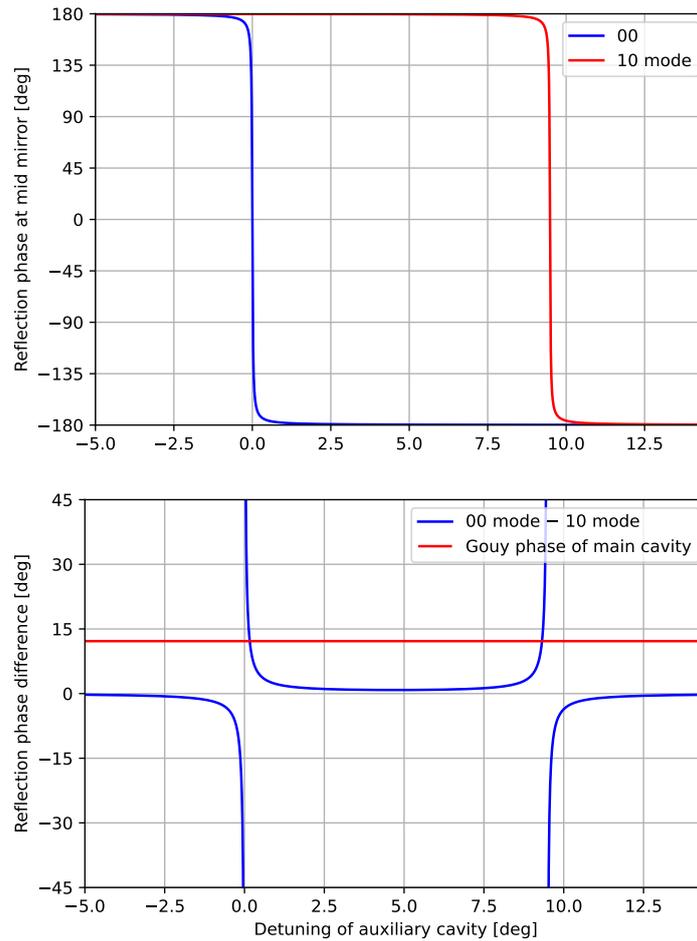


図 4.4: 補助共振器の 00 モードと 10 モードの反射位相 (上) と位相差 (下)。

しかし、00 モードと 10 モードの同時共振はどのような設計の共振器でも実現されるわけではない。図 4.5 は主共振器と補助共振器の幾何学的構成を固定し、中間ミラーとエンドミラーの強度反射率を変化させたときに位相補償が実現できる範囲を示した図である^{*5}。共振器の設計によっては位相補償が実現できない場合があることがわかる。

^{*5} 位相補償の可否は主共振器と補助共振器の幾何学的構成と、中間ミラーとエンドミラーの強度反射率で決まる。フロントミラーの強度反射率は関係ないことに注意。

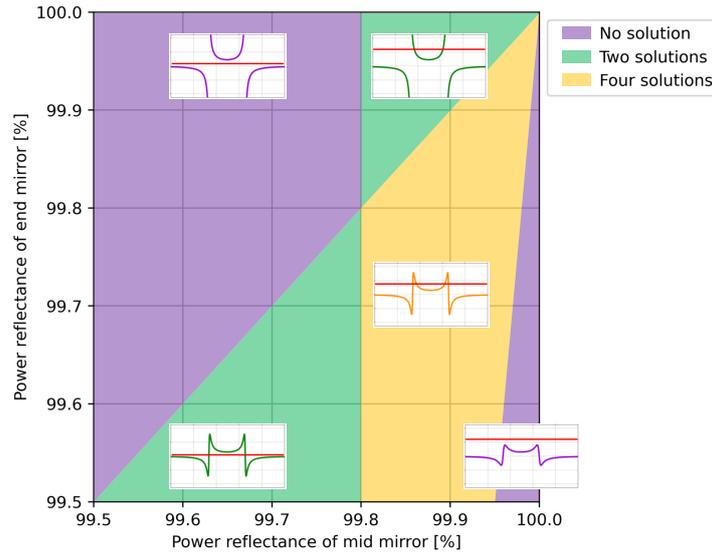


図 4.5: Coupled WFS の位相補償の可否。主共振器と補助共振器の幾何学的構成は、主共振器長 10 cm、補助共振器長 7.5 cm、フロントミラーはフラット、中間ミラーの曲率半径は 35.8 m、エンドミラーの曲率半径は 20.6 m である。このとき、主共振器と補助共振器の固有モードが一致し、ビームウエストがフロントミラー上にあり 800 μm である。横軸が中間ミラーの強度反射率、縦軸がエンドミラーの強度反射率である。緑色とオレンジ色のエリアは補助共振器の 00 モードと 10 モードの反射位相差と主共振器の Gouy 位相が交点をもつため位相補償できる。紫色のエリアは交点をもたないため位相補償できない。

4.2.2 Coupled WFS のビームジッターへの応答の原理

Coupled WFS にはビームジッターは増幅しないという性質がある。これにより、ビームジッター雑音に対して良い信号雑音比を得ることができる。この性質は TOBA に導入する際の利点となる。

ビームジッターがあるとき、入射光には 00 モードだけでなく 10 モードも含まれる。これらを E_{i0} , E_{i1} とおく。4.2.1 節と同様にして、それぞれの電場は以下の関係を満たす。

$$E_{c0} = t_f E_{i0} + r_f r_e e^{-i\phi_0} E_{c0} + \beta r_f r_e e^{-i\phi_1} E_{c1} \quad (4.73)$$

$$E_{c1} = t_f E_{i1} + \beta r_f r_e e^{-i\phi_0} E_{c0} + r_f r_e e^{-i\phi_1} E_{c1} \quad (4.74)$$

$$E_{r0} = -r_f E_{i0} + \beta r_f E_{i1} + t_f r_e e^{-i\phi_0} E_{c0} \quad (4.75)$$

$$E_{r1} = -r_f E_{i1} + \beta r_f E_{i0} + t_f r_e e^{-i\phi_1} E_{c1} \quad (4.76)$$

$$E_{t0} = t_e e^{-i\phi_0/2} E_{c0} \quad (4.77)$$

$$E_{t1} = t_e e^{-i\phi_1/2} E_{c1} \quad (4.78)$$

反射光の 10 モードの電場 E_{r1} について解くと、

$$E_{r1} = -r_f E_{i1} + \beta r_f E_{i0} + \frac{t_f^2 r_{aux1} e^{-i\phi_{main1}}}{1 - r_f r_{aux1} e^{-i\phi_{main1}}} \left(\frac{\beta r_f r_{aux0} e^{-i\phi_{main0}}}{1 - r_f r_{aux0} e^{-i\phi_{main0}}} E_{i0} + E_{i1} \right) \quad (4.79)$$

となる。主共振器内で 00 モードと 10 モードが同時に共振しており、 $r_f \simeq 1, r_e = 1$ が成り立つとき、主共振器のフィネス $\mathcal{F} \simeq \pi/(1 - r_f)$ を用いて

$$E_{r1} \simeq \beta \frac{2\mathcal{F}}{\pi} E_{i0} + E_{i1} \quad (4.80)$$

となる。第 1 項はフロントミラーの傾きによって生まれた 10 モードを表す。主共振器のフィネスがかかっていることから、主共振器内で増幅されることがわかる。一方、第 2 項はビームジッターによる 10 モードを表し、主共振器内で増幅されないことがわかる。

ビームジッターを増幅しないという Coupled WFS の性質は、直感的に次のように理解できる。フロントミラーの傾きによって共振器内で生まれた 10 モードは、主共振器内で増幅されて反射光へ抜けていく。それゆえ、主共振器で 10 モードが共振できるときの反射光の 10 モードの光量は、10 モードが共振しないときに比べて大きくなる。一方で、ビームジッターに含まれる 10 モードは、主共振器で 10 モードが共振できるかできないかに関わらず、一定の光量である。したがって、Coupled WFS はビームジッター雑音に対して信号雑音比が良い。

4.3 FINESSE を用いたシミュレーション

本節では、干渉計シミュレーションソフト FINESSE [57] を用いたシミュレーションの目的・方法・結果について述べる。

4.3.1 シミュレーションの目的と目標

本研究におけるシミュレーションの目的は、Coupled WFS の性質、特に、これまで計算されていない Coupled WFS の線形レンジについて明らかにすることである。

シミュレーションの具体的な目標は、Coupled WFS の信号強度が WFS の信号強度より大きいことを確認した上で、Coupled WFS の線形レンジを計算することである。

4.3.2 シミュレーションの方法

WFS の線形レンジには解析解が存在しない。また、Coupled WFS は結合光共振器というやや複雑な構成からなる。

そこで、本研究では、FINESSE [57] を用いて計算を行った。FINESSE とは、重力波分

野でよく用いられている干渉計シミュレーションソフトである*6。光学素子などを配置すると、レーザー光を Hermite-Gaussian モードで展開し、ミラー間の電場振幅を計算してくれる。複雑な構成の干渉計の計算や、解析解の存在しない計算を行う際に有用である。

本研究では、FINESSE を用いて Coupled WFS を構築し、着目するパラメータを変えながら WFS 信号強度を計算した。

線形レンジを計算する際には、ミラーのミスアラインメントの量を大きくしながら WFS 信号強度を計算する。以下では、WFS 信号強度が線形フィッティングから 10% 離れるミスアラインメントの量を線形レンジと定義する。

4.3.3 シミュレーションの構成

図 4.6 に WFS のシミュレーション構成、図 4.7 に Coupled WFS のシミュレーション構成を示す。数値が書き込まれているものは固定パラメータであり、本節のすべてのシミュレーションで共通する条件である。書き込まれていないものは可変パラメータであり、シミュレーションで調べたい性質によって固定したり変化させたりする。可変パラメータの条件はそれぞれの結果とともに示すこととする。

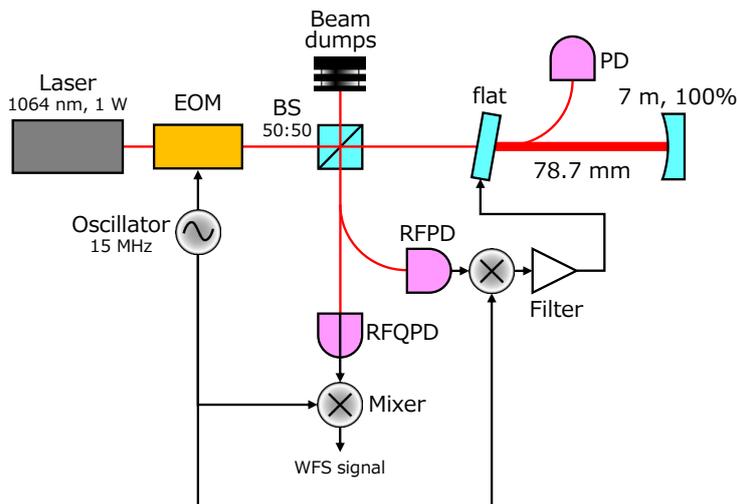


図 4.6: FINESSE で WFS をシミュレーションするときの構成。

*6 使い方は [58, 59] を参照のこと

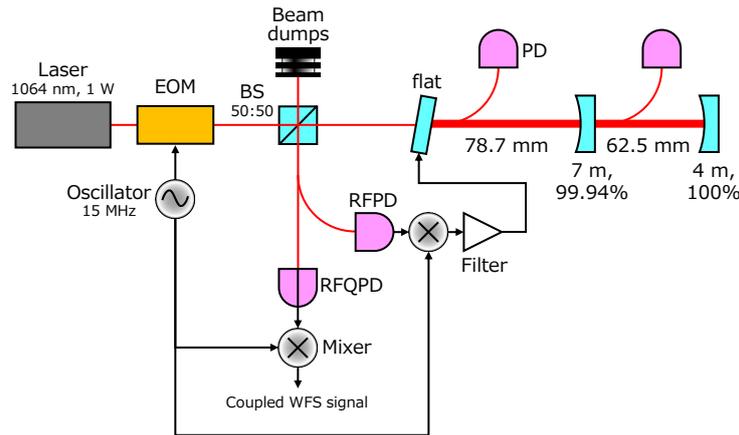


図 4.7: FINESSE で Coupled WFS をシミュレーションするときの構成。

シミュレーションの構成は、できる限り本研究の実験装置に近づけた。主共振器長、補助共振器長、ミラーの曲率半径は実験と同様である。ただし、簡単のために主共振器は折り返しの構成にせず、線形共振器にした。また、補助共振器を1枚のミラー（ただし複素数の振幅反射率をもつ）とみなしたときの振幅反射率の大きさが常に1になるように、エンドミラーの強度反射率を100%とした。これにより、補助共振器の制御点に関わらず主共振器のフィネスが一定値となり、Coupled WFSの信号増幅のフィネス依存性を定量的に評価することができる。主共振器と補助共振器の内部に置かれた光検出器 (PD) は、共振器が共振状態に保たれているかを確認するために用いた。

Coupled WFSのシミュレーションを行うためには、結合光共振器を用意する必要がある。しかし FINESSE では、主共振器と補助共振器の固有モードを自動的に一致させる機能はない。そこで、あらかじめ主共振器と補助共振器の固有モードが一致するような構成を計算した (図 4.8)。

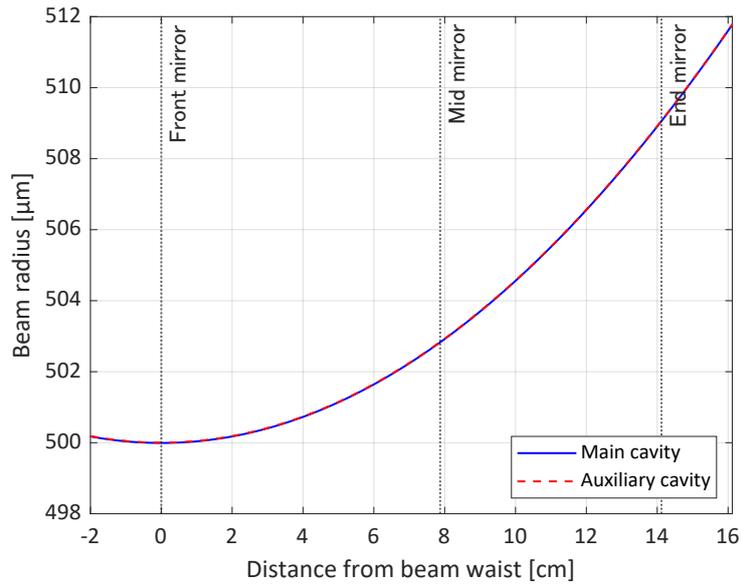


図 4.8: FINESSE で Coupled WFS をシミュレーションするときの主共振器と補助共振器の固有モード。

4.3.4 Coupled WFS の角度信号増幅

フロントミラーの強度反射率を 98.2%、フロントミラーのミスアラインメントの量を 1 mrad に固定した。また、RFQPD での Gouy 位相は、WFS では 100 deg、Coupled WFS では 145 deg に固定した。これらの Gouy 位相は信号強度が最大になるところに選ばれている。Coupled WFS のエンドミラーの位置を動かし、Coupled WFS の信号強度を得た。信号強度の結果を図 4.9 に示す。位相補償が起きる補助共振器の 00 モード共振点まわりと 10 モード共振点まわりにおいて、WFS 信号より Coupled WFS 信号が大きくなっており、角度信号が増幅することがわかる。

また、図 4.9 から、エンドミラーの位置が 0.15 deg と 9.32 deg のあたりに置いて、Coupled WFS の信号強度が 0 になっていることがわかる。このような現象が起きた理由を解明するためには、さらなる調査が必要である。現時点では、反射光強度が 0 になったわけではなく、00 モードと 10 モードの干渉によって信号強度が 0 になったことがわかっている。

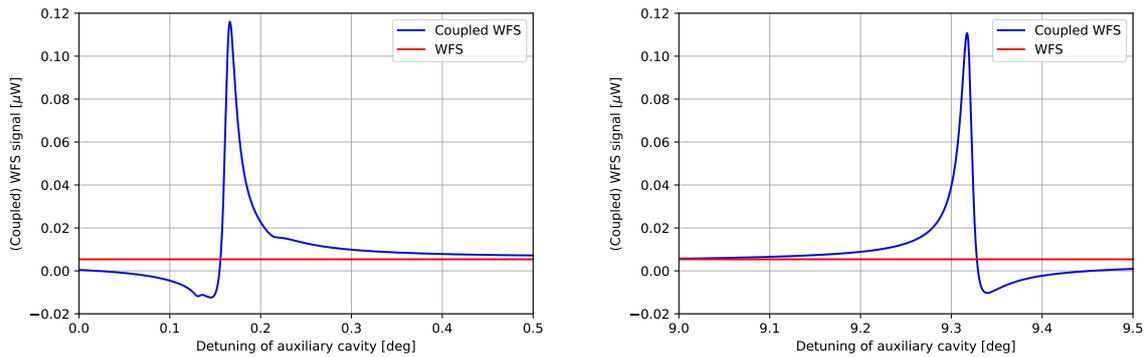


図 4.9: Coupled WFS の角度信号増幅。右: 補助共振器の 00 モード共振点まわり。左: 補助共振器の 10 モード共振点まわり。

4.3.5 WFS と Coupled WFS の信号強度の Gouy 位相依存性

フロントミラーの強度反射率を 98.2%、フロントミラーのミスアラインメントの量を 1 nrad に固定した。また、Coupled WFS のエンドミラーの位置は、10 モード共振点まわりで信号増幅が確認された 9.3 deg に固定した。RFQPD での Gouy 位相を動かし、WFS と Coupled WFS の信号強度を得た。信号強度を規格化した結果を図 4.10 に示す。なお、WFS 信号強度の最大値は 5.4×10^{-9} W、Coupled WFS 信号強度の最大値は 9.7×10^{-8} W であり、Coupled WFS による角度信号増幅が行われている。

図 4.10 より、共振器の幾何学的構成が同じであるにも関わらず、WFS と Coupled WFS で Gouy 位相依存性が異なることがわかる。この理由は、4.2.1 節で述べたように、Coupled WFS はミラーの傾きの信号を増幅するがビームジッターは増幅しないためである。

また、WFS のシミュレーション結果と解析解が厳密には一致していない原因は、解析解では 00 モードと 10 モードのみを考慮して解を求めている一方、シミュレーションでは 3 次のモードまで考慮に入れて計算しているためである。

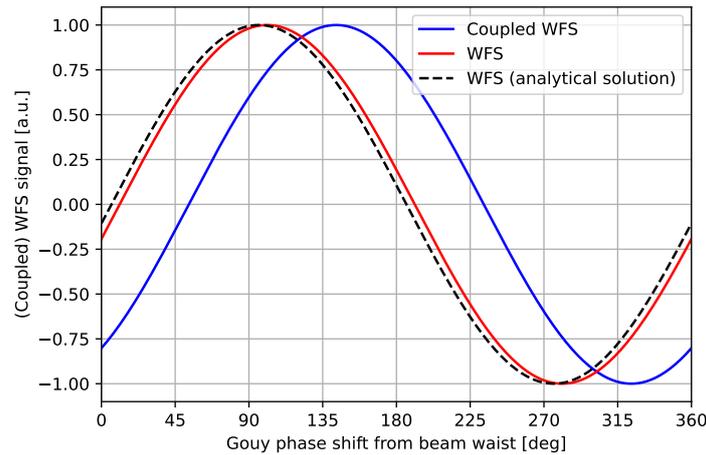


図 4.10: WFS と Coupled WFS の信号強度の Gouy 位相依存性。

4.3.6 WFS の信号強度と線形レンジのフィネス依存性

WFS の信号強度と線形レンジのフィネス依存性を調べる。RFQPD での Gouy 位相は 100deg に固定した。この Gouy 位相は信号強度が最大になるところに選ばれている。フロントミラーの強度反射率を、共振器のフィネスが $\mathcal{F} = (100, 200, 300, 500, 1000, 2000, 3000)$ になるように選んだ。このそれぞれの条件に対して、フロントミラーのミスアラインメントの量を 0rad–100 μrad まで変化させて WFS の信号強度を得た (図 4.11)。

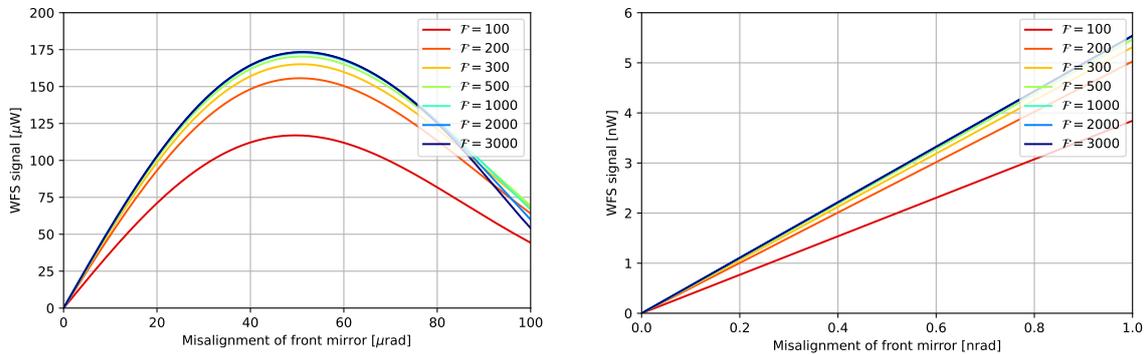


図 4.11: WFS のミスアラインメントの量と信号強度のフィネス依存性。右図は左図の原点まわりの拡大図である。

図 4.11 に対して線形フィッティングを行い線形レンジを求めた。信号強度と線形レンジの関係を図 4.12 に示す。フィネスが十分に大きい場合 ($\mathcal{F} > 300$)、信号強度と線形レンジがフィネスに依存せず一定であることがわかる。このような結果が得られた理由は、

WFS では 10 モードが増幅しないからであると理解できる。

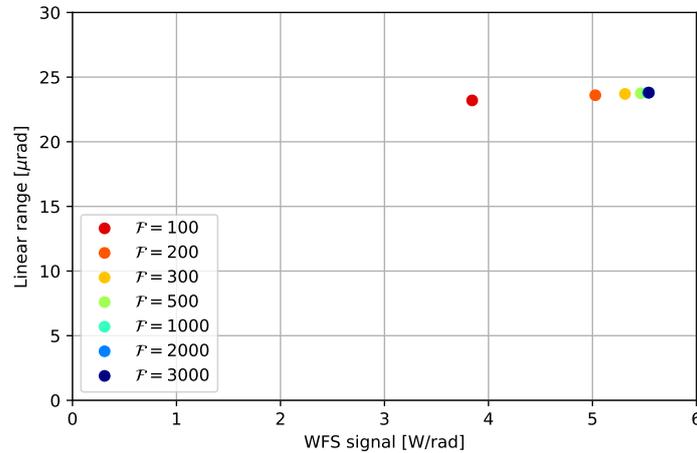


図 4.12: WFS の信号強度と線形レンジのフィネス依存性。

4.3.7 Coupled WFS の信号強度と線形レンジのフィネス依存性

Coupled WFS の信号強度と線形レンジのフィネス依存性を調べる。RFQPD での Gouy 位相は 145 deg に固定した。この Gouy 位相は信号強度が最大になるところに選ばれている。また、エンドミラーの位置は、10 モード共振点まわりで信号増幅が確認された 9.3 deg に固定した。フロントミラーの強度反射率を、主共振器のフィネスが $\mathcal{F} = (100, 200, 300, 500, 1000, 2000, 3000)$ になるように選んだ。このそれぞれの条件に対して、フロントミラーのミスアラインメントの量を 0 rad–10 μ rad まで変化させて Coupled WFS の信号強度を得た*7。図 4.13 に結果を示す。

なお、 $\mathcal{F} = 100$ の計算結果については、8 μ rad あたりで信号強度が 0 になっている。これは、フロントミラーのミスアラインメントの量が大きくなったことにより、共振器の制御がうまく行えなくなったために起きたと考えられる。しかし、既に線形レンジから外れているため、シミュレーション結果には影響しない。

*7 ミスアラインメントの量が WFS の 0 rad–100 μ rad よりも小さいのは、ミスアラインメントの量を大きくすると制御がかからなくなるからである。

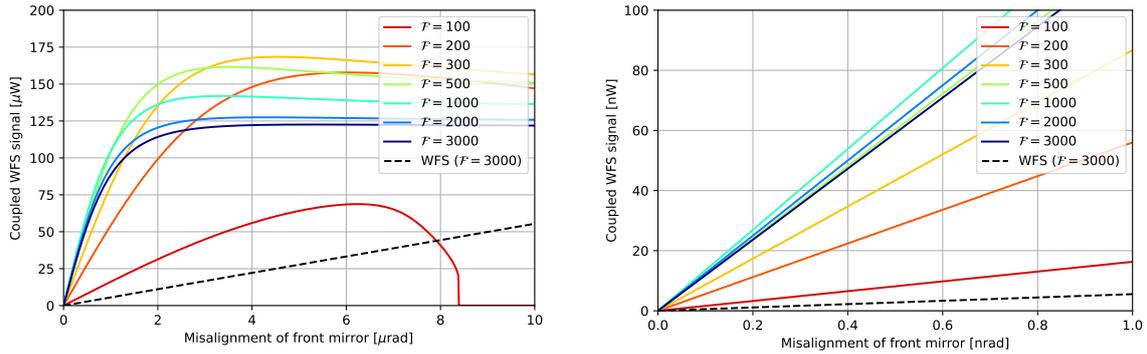


図 4.13: Coupled WFS のミスアラインメントの量と信号強度のフィネス依存性。右図は左図の原点まわりの拡大図である。

図 4.13 に対して線形フィッティングを行い線形レンジを求めた。信号強度と線形レンジの関係を図 4.14 に示す。フィネスが大きくなると信号強度が大きくなるが、線形レンジが減少することがわかる。すなわち、信号強度と線形レンジはトレードオフの関係にある。このような結果が得られた理由は、10 モードが増幅する代わりに 00 モードの光量がミスアラインメントの増加に対して早く減少するからであると理解できる。

また、図 4.14 から、フィネスが 2000 と 3000 のとき、フィネス 1000 のときに比べて信号強度が減少していることがわかる。このような現象が起きた理由は、今回のシミュレーションでは補助共振器の動作点と RFQPD での Gouy 位相を固定しているからである。フィネスによって信号強度が最大となる補助共振器の動作点と RFQPD での Gouy 位相はわずかに異なる。フィネスの値を変えるたびに補助共振器の動作点と RFQPD での Gouy 位相を最適化すれば、フィネスが 1000 より大きい場合においてもフィネスが大きくなるほど信号強度も大きくなるという結果が得られると期待される。

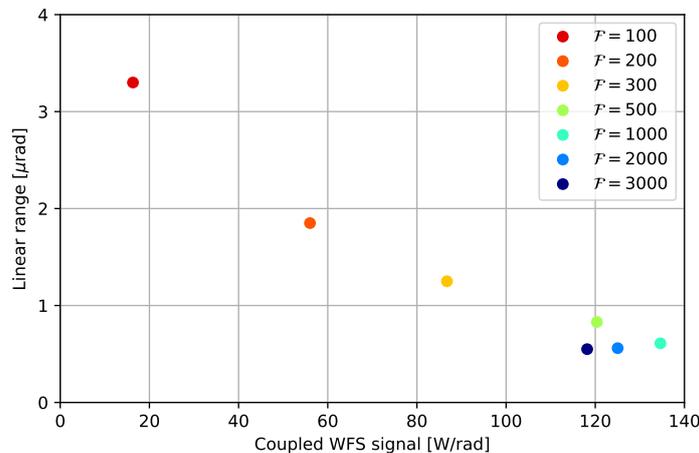


図 4.14: CoupledWFS の信号強度と線形レンジのフィネス依存性。

4.3.8 Coupled WFS の信号強度と線形レンジの動作点依存性

Coupled WFS の信号強度と線形レンジの動作点依存性を調べる。フロントミラーの強度反射率を 98.2% に固定した。また、RFQPD での Gouy 位相は 145deg に固定した。この Gouy 位相は信号強度が最大になるところに選ばれている。エンドミラーの位置を 10 モード共振点まわりで信号増幅が確認された $\phi = (9.27 \text{ deg}, 9.28 \text{ deg}, 9.29 \text{ deg}, 9.30 \text{ deg}, 9.31 \text{ deg}, 9.317 \text{ deg})$ に固定した。さらに、2 次のモードの共振点と 3 次のモードの共振点の中間程度であり、信号増幅が起きない $\phi = 20 \text{ deg}$ も条件に加えた*8。このそれぞれの条件に対して、フロントミラーのミスアラインメントの量を 0rad-100 μrad まで変化させて Coupled WFS の信号強度を得た。図 4.15 に結果を示す。

なお、 $\phi = (9.27 \text{ deg}, 9.28 \text{ deg}, 9.29 \text{ deg}, 9.30 \text{ deg}, 9.31 \text{ deg}, 9.317 \text{ deg})$ の計算結果については、15 μrad -25 μrad あたりで信号強度が 0 になっている。これは、フロントミラーのミスアラインメントの量が大きくなったことにより、共振器の制御がうまく行えなくなったために起きたと考えられる。しかし、既に線形レンジから外れているため、シミュレーション結果には影響しない。

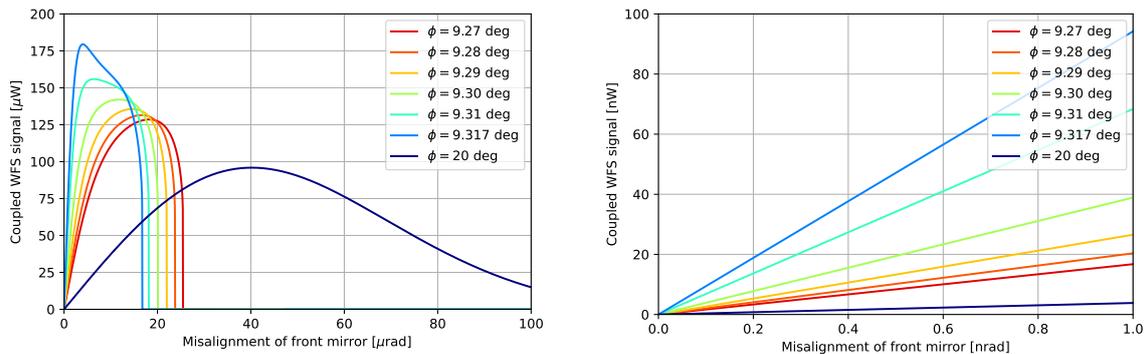


図 4.15: Coupled WFS のミスアラインメントの量と信号強度の動作点依存性。右図は左図の原点まわりの拡大図である。

図 4.15 に対して線形フィッティングを行い線形レンジを求めた。信号強度と線形レンジの関係を図 4.16 に示す。エンドミラーの位置を変化させることで信号強度と線形レンジを選べるようになる。すなわち、1つの Coupled WFS を製作すれば、補助共振器の動作点を調整することで、信号強度と線形レンジを変えながら様々な使い方をできるということである。これは、Coupled WFS の実用上の利点である。

*8 補助共振器の周回 Gouy 位相が小さいため、00 モード共振点と 10 モード共振点から十分遠い点を選んだ。

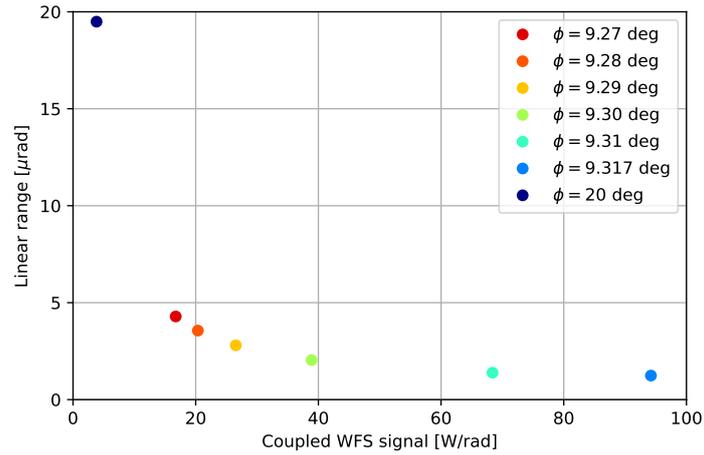


図 4.16: CoupledWFS の信号強度と線形レンジの動作点依存性。

4.3.9 Coupled WFS のビームジッターへの応答

WFS と Coupled WFS のビームジッターへの応答についても FINESSE でシミュレーションを行った。ビームジッターをもつ光を共振器に入射するために、共振器の手前にステアリングミラーを配置し、1 nrad だけミスアラインさせた (図 4.17、図 4.18)。

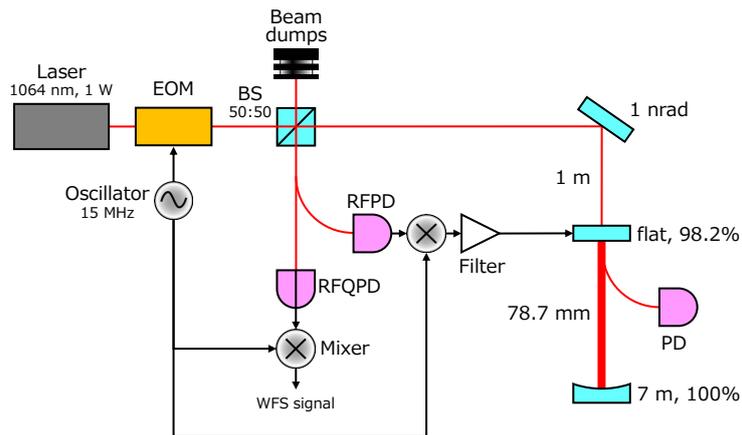


図 4.17: FINESSE で WFS のビームジッターへの応答をシミュレーションするときの構成。

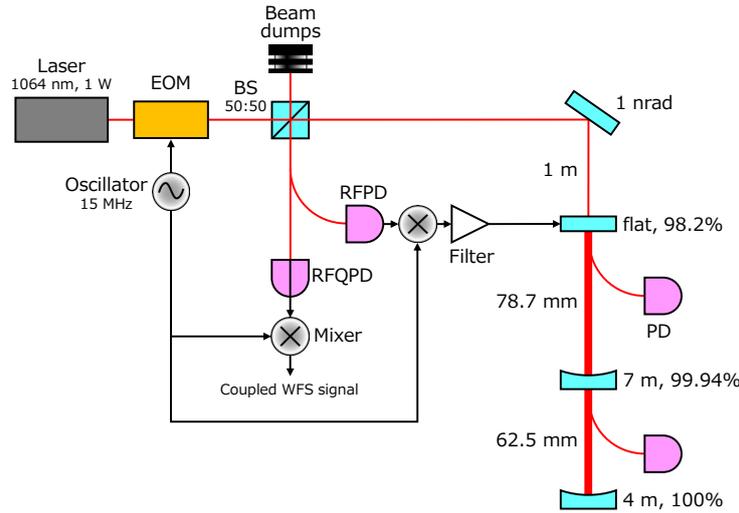


図 4.18: FINESSSE で Coupled WFS のビームジッターへの応答をシミュレーションするときの構成。

まず、10 モード共振点まわりでの信号増幅を調べた。フロントミラーの強度反射率を 98.2% に固定した。また、RFQPD での Gouy 位相は、WFS では 75 deg、Coupled WFS では 135 deg に固定した。これらの Gouy 位相は信号強度が最大になるように選ばれている。Coupled WFS のエンドミラーの位置を動かして、Coupled WFS の信号強度を得た。信号強度の結果を図 4.19 に示す。補助共振器長を 10 モード共振点まわりで変化させたとき、信号が増幅しないことがわかる。

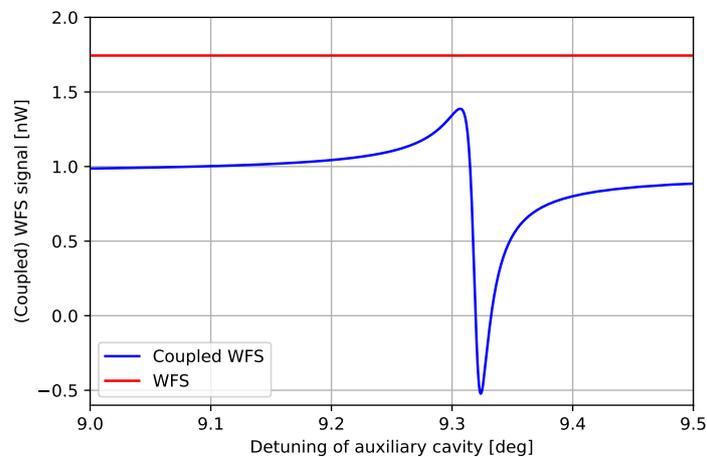


図 4.19: Coupled WFS のビームジッターへの応答。

次に、信号強度の Gouy 位相依存性を調べた。フロントミラーの強度反射率を 98.2% に固定した。また、Coupled WFS のエンドミラーの位置は、10 モード共振点まわりであ

る 9.3 deg に固定した。RFQPD での Gouy 位相を動かし、WFS と Coupled WFS の信号強度を得た。信号強度を規格化した結果を図 4.20 に示す。なお、WFS 信号強度の最大値は 1.7×10^{-9} W、Coupled WFS 信号強度の最大値は 1.1×10^{-9} W であり、Coupled WFS のビームジッターへの応答が増幅しない。

図 4.20 より、共振器の幾何学的構成が同じであるにも関わらず、Gouy 位相依存性が異なることがわかる。この理由は、4.2.1 節で述べたように、Coupled WFS はミラーの傾きの信号を増幅するがビームジッターは増幅しないためである。

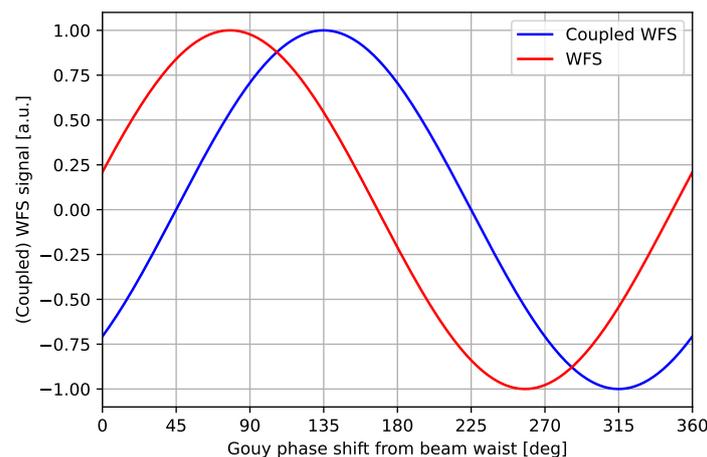


図 4.20: WFS と Coupled WFS のビームジッターへの応答の Gouy 位相依存性。

4.4 本章のまとめ

4.4.1 WFS と Coupled WFS のまとめ

- WFS とは、共振器軸と入射光軸の差をみることでミラーの傾きの量に比例した信号を検出する手法である。
- Coupled WFS では、補助共振器で位相補償を行い主共振器内で 10 モードを増幅させることで、WFS よりも大きな信号を得ることができる。
- Coupled WFS の位相補償は、補助共振器の 00 モード共振点まわりと 10 モード共振点まわりにおいて行える。ただし、共振器の構成によっては位相補償を実現できない。
- Coupled WFS には、ビームジッター雑音が小さいという利点もある。

4.4.2 FINESSE を用いたシミュレーションのまとめ

- Coupled WFS の線形レンジを明らかにすることを目的として、FINESSE を用い

たシミュレーションを行い、以下の結果を得た。

- Coupled WFS の角度信号は、補助共振器の 00 モード共振点まわりと 10 モード共振点まわりで増幅する。
- 共振器の幾何学的構成が同じ場合でも、WFS と Coupled WFS の信号強度の Gouy 位相依存性は異なる。
- WFS の信号強度と線形レンジは共振器のフィネスに依存しない。
- Coupled WFS の信号強度と線形レンジは主共振器のフィネスに依存する。
- Coupled WFS の信号強度と線形レンジは補助共振器の動作点に依存する。
- Coupled WFS はビームジッターを増幅しない。

第 5 章

実験装置

Coupled WFS の制御手法の確立と角度信号増幅の定量的な評価を目的として原理実証実験を行った。本実験で用いた装置は、真空槽にレーザー光を導入する入射光学系、主要な部分である光結合共振器、角度信号を検出するための測定系の 3 つに分けられる。本章では、原理実証実験の目的・方法を述べた後、実験装置の構成について詳しく述べる。なお、使用した機器・部品の詳細については補遺 E を参照のこと。

5.1 原理実証実験の目的と目標

本研究における原理実証実験の目的は、Coupled WFS の制御手法を確立すること、および、Coupled WFS の角度信号増幅を定量的に評価することである。

原理実証実験の具体的な目標は、Coupled WFS を製作し主共振器・補助共振器を共振点に制御する^{*1}ことと、Coupled WFS 信号が WFS 信号より大きいことを実験で実証することである。

5.2 原理実証実験の方法

原理実証実験の目的を達成するために、本研究では、主共振器・補助共振器ともに PDH 法 (補遺 B を参照) で制御を行う。また、共振器のアラインメントが変化しにくい構成で Coupled WFS を製作する。

3.9.2 節で述べたように、先行研究 [45] では、肩ロックによって補助共振器を制御していた。そのため、大きな信号増幅を得られ、最も安定に動作する補助共振器の 10 モード

^{*1} 信号増幅は補助共振器の 00 モードと 10 モードの共振点付近で起きる。共振点を選んだ理由は、共振点では十分な信号増幅が得られ、かつ、共振点では透過光強度がふらつかないため最も安定に動作するからである

の共振点で Coupled WFS を動作させることができないという問題があった。本研究では主共振器・補助共振器ともに PDH 法 (補遺 B を参照) で制御を行い、主共振器・補助共振器を共振点に制御することを目指す。

また、3.9.2 節で述べたように、先行研究 [45] では、共振器のアラインメントが数十分程度で悪化してしまうため、WFS 信号の測定前後でアラインメントが変化してしまい、信号増幅を定量的に評価できないという問題があった。本研究では共振器用のアルミニウム製スペーサーを使用して、共振器のアラインメントが変化しにくい構成で Coupled WFS を製作する。

5.3 実験装置全体の構成

実験装置全体の構成を図 5.1 に、実験装置全体の写真を図 5.2 に示す。大気中に構築された入射光学系には、レーザー光源、電気光学変調器 (EOM) などを設置した。光ファイバを用いて大真空槽 E-1 内へレーザー光を導入した。大真空槽 E-1 内には、結合光共振器や光検出器 (PD) などを設置した。大真空槽 E-1 の底面と真空ポンプがベローズによってつながっている。



図 5.2: 実験装置全体の写真。右側の光学定盤が入射光学系、左側が直径 1 m の大真空槽 E-1 である。左下に真空ポンプを配置した。

5.4 入射光学系

入射光学系の構成を図 5.3 に、入射光学系の写真を図 5.4 に示す。入射光学系には、レーザー光源、ファラデー素子、EOMなどを配置した。光ファイバを用いて大真空槽 E-1 内へレーザー光を導入した。光ファイバの手前には、モードマッチ用のレンズとアライメント用のステアリングミラーを配置した。光ファイバの透過率(入射光学系のコリメータ直前から大真空槽 E-1 内のコリメータ直後)は $\sim 70\%$ であった。

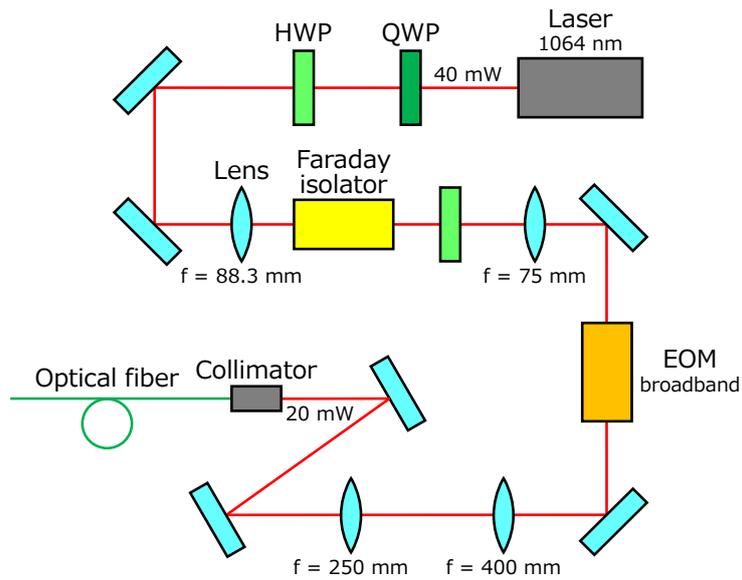


図 5.3: 入射光学系の構成。

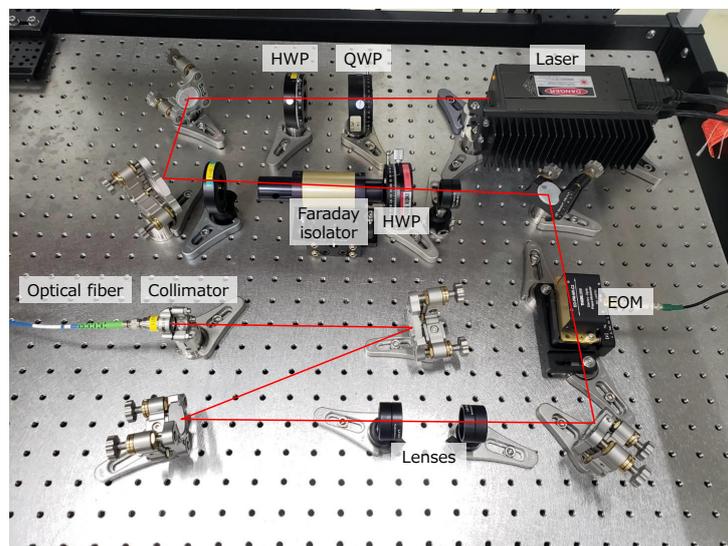


図 5.4: 入射光学系の写真。

5.5 結合光共振器

5.5.1 結合光共振器の設計

結合光共振器のパラメータを表 5.1 に示す。なお、ミラーの強度反射率と曲率半径の誤差は Layertec による設計値であり、共振器のフィネスと周回 Gouy 位相の誤差はここから計算した値である。結合光共振器の構成を図 5.5 に示す。

このような設計により、主共振器と補助共振器の固有モードが一致するため (図 5.6)、両方の共振器で高いモードマッチ率を得られることが期待できる。

また、それぞれの共振器用の PDH 信号のサイドバンド周波数は、それぞれの共振器の共振ピークの FWHM よりも大きくなるように選んだ (補遺 B を参照)。また、補助共振器用の PDH 信号のサイドバンド周波数は、主共振器内に入射できるように、主共振器の共振ピークの FWHM よりも小さく設計した。

表 5.1: 結合光共振器のパラメータ。

パラメータ	設計値
フロントミラー 強度反射率	$(99.4 \pm 0.3)\%$
折り返しミラー 強度反射率	$(99.4 \pm 0.3)\%$
中間ミラー 強度反射率	$(99.94 \pm 0.02)\%$
エンドミラー 強度反射率	$(99.90 \pm 0.02)\%$
フロントミラー 曲率半径	∞ (フラット)
折り返しミラー 曲率半径	∞ (フラット)
中間ミラー 曲率半径	$7\text{ m} \pm 2\%$ (エンドミラー側に凸)
エンドミラー 曲率半径	$4\text{ m} \pm 1\%$ (中間ミラーと反対側に凸)
主共振器長	78.7 mm
補助共振器長	62.5 mm
主共振器 フィネス	337^{+330}_{-112}
主共振器 FSR	3.81 GHz
主共振器 共振ピークの FWHM	11.3 MHz
主共振器 周回 Gouy 位相	$(12.2 \pm 0.1)\text{deg}$
主共振器用 PDH 信号 サイドバンド周波数	15 MHz
補助共振器 フィネス	$(3.93^{+1.30}_{-0.79}) \times 10^3$
補助共振器 FSR	4.8 GHz
補助共振器 共振ピークの FWHM	1.22 MHz
補助共振器 周回 Gouy 位相	$(9.49^{+0.22}_{-0.24})\text{deg}$
補助共振器用 PDH 信号 サイドバンド周波数	3.51 MHz

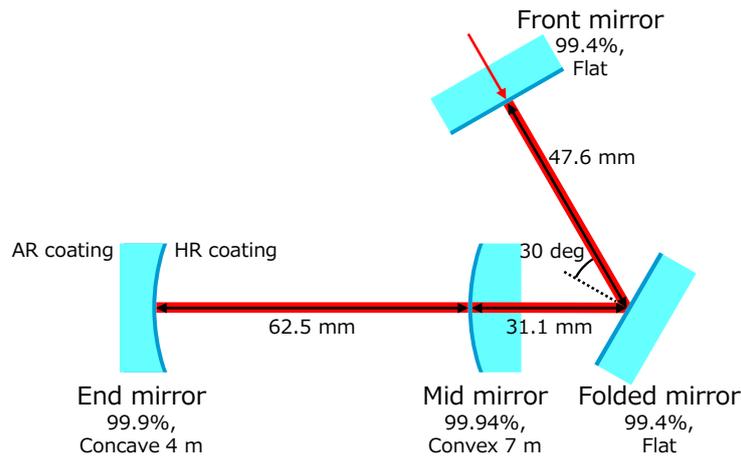


図 5.5: 結合光共振器の構成。

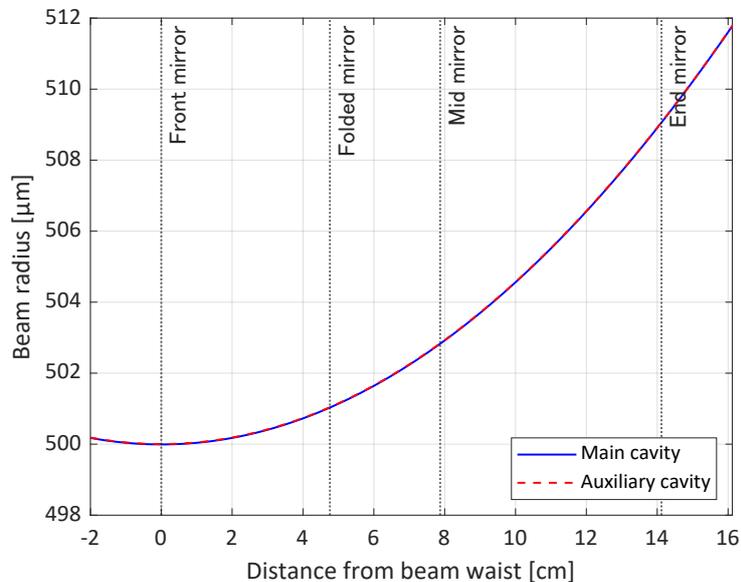


図 5.6: 主共振器と補助共振器の固有モードと各ミラーの位置。

上記のような共振器の設計により、図 5.7 に示すように、補助共振器の 00 モードと 10 モードの反射位相差が主共振器の Gouy 位相と交点をもつため、補助共振器による位相補償が可能であり、主共振器内で 00 モードと 10 モードが同時に共振することができる。

4.2.1 節で述べたように、補助共振器による位相補償は常に行えるわけではない。位相補償の可否は補助共振器を構成するミラーの強度反射率に大きく依存するため、補助共振器内にロスがある場合には、位相補償が行えなくなる可能性がある。それゆえ、補助共振器内の光のロスを小さくする必要がある。そこで、中間ミラーの HR コーティング面をエンドミラー側に向ける設計にした (図 5.5)。これにより、中間ミラーの AR コーティングが主共振器側を向くため、主共振器内のロスは大きくなると予想されるが、信号増幅度が

小さくなるだけで位相補償の可否には影響しない。

中間ミラーとエンドミラーの強度反射率が変化した場合に位相補償が行えるかどうかを図 5.8 に示した。補助共振器内に 0.1% のロスがあっても位相補償が可能であるような構成であることがわかる*2。本実験に用いた Layertec 製の特注ミラーについては、HR コーティングを向かい合わせて共振器を製作した場合には共振器内ロスが 0.1% 以下であることが先行研究で確認されている [60]。

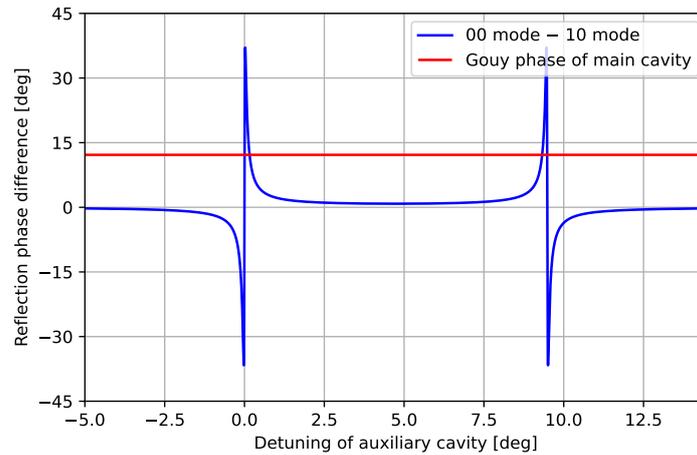


図 5.7: 補助共振器の 00 モードと 10 モードの反射位相差。

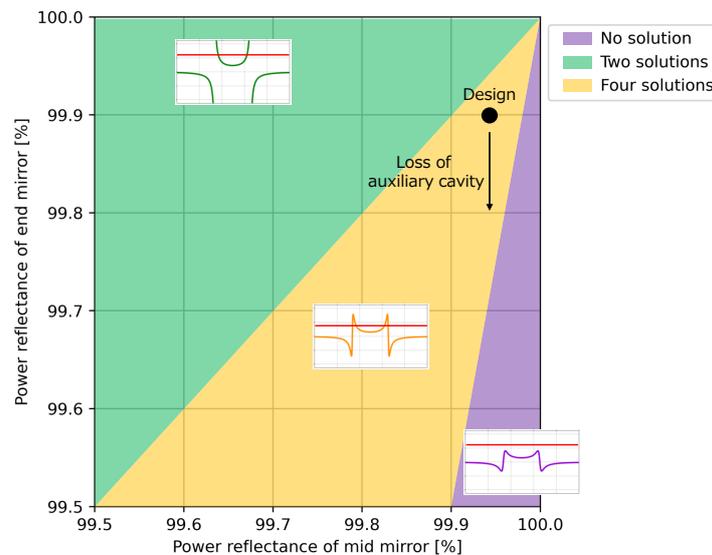


図 5.8: Coupled WFS の位相補償に対する補助共振器内ロスの影響。

*2 補助共振器のロスはエンドミラーの強度透過率に含めることができる。

5.5.2 結合光共振器の製作

フロントミラー以外のミラーは、アラインメントの安定化と制御の安定化のために、アルミニウム製スペーサーに固定した。アルミニウム製スペーサーの設計は、[61]を参考にした。共振器用アルミニウム製スペーサーの設計図を図 5.9 に、写真を図 5.10 に示す。

エンドミラーには長さ制御のための piezo 素子をつけた。スペーサーに piezo 素子を接着し、piezo 素子の上からミラー、Oリング、治具の順に並べてねじで固定した (図 5.11)。Oリングは piezo 素子が伸び縮みする際にばねの役割を果たす。piezo 素子の貼り付け位置の精度を向上させるために、スペーサーを 2 mm 彫りこんでいる (図 5.10 (左))。また、piezo 素子の長さの個体差と接着の際の傾きを補正するために、シムプレートを 2 箇所挿入した (図 5.11 (上))。スペーサーを板で上から押さえつけて光学定盤に固定した (図 5.11 (上)、図 5.12)。共振器用スペーサーとスペーサー固定用板はツバタに製作していただき、ミラー固定用治具は東京大学大学院理学系研究科試作室に製作していただいた。共振器の部品については、E.2 節を参照のこと。

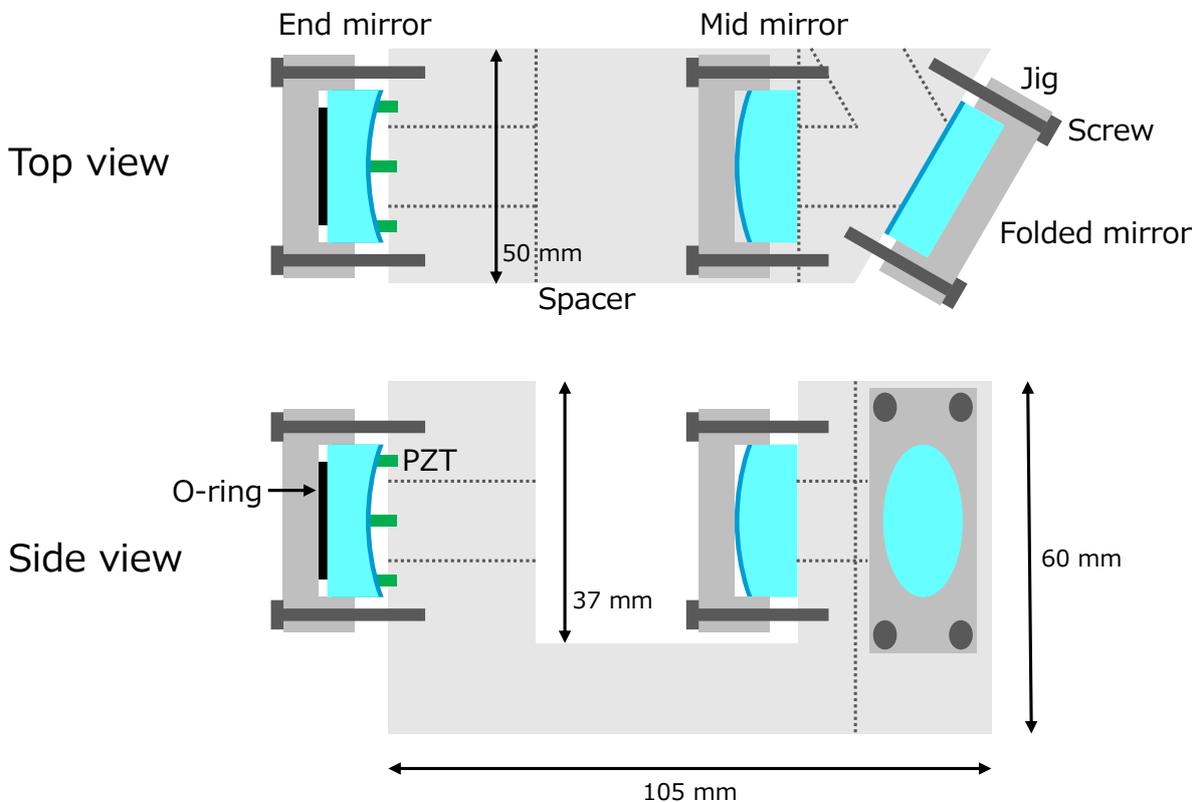


図 5.9: 共振器用アルミニウム製スペーサーの設計図。上: 上から見た図。下: 横から見た図。

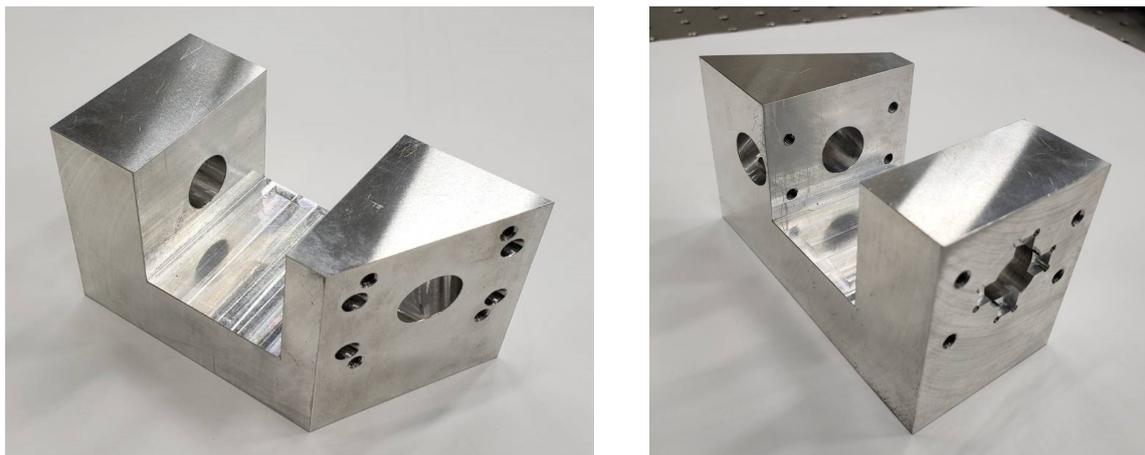


図 5.10: 共振器用アルミニウム製スペーサーの写真。左: 折り返しミラー側から見た写真。右: エンドミラー側から見た写真。

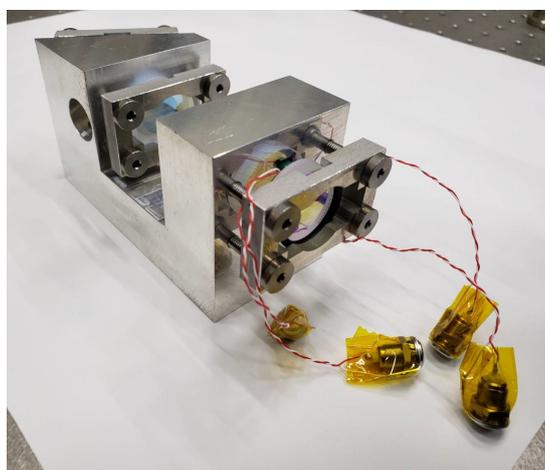
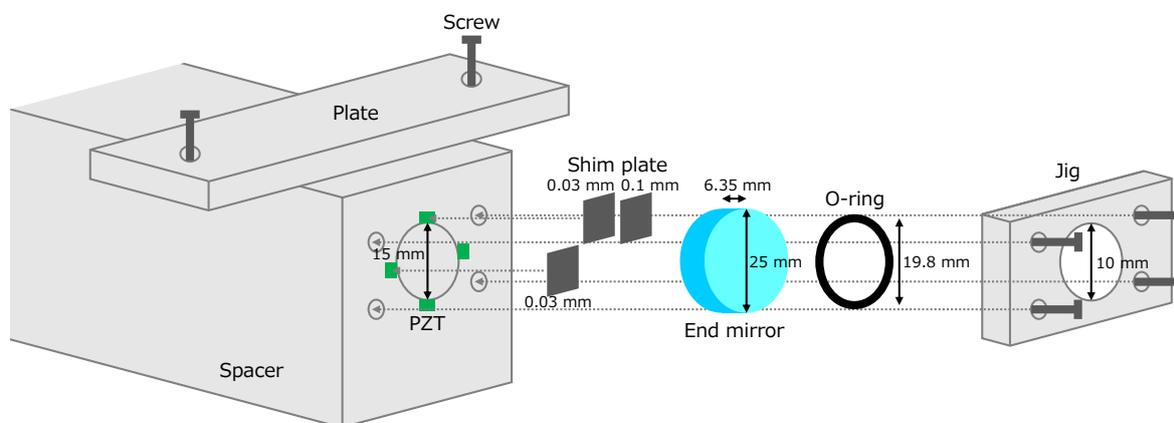


図 5.11: 共振器用アルミニウム製スペーサーへのエンドミラーの取り付け方。上: 構成。下: 写真。



図 5.12: 結合光共振器の写真。

5.6 測定系

測定系の構成を図 5.13 に、測定系の写真を図 5.14 に示す。

コリメータ直後に 10:90 のピックオフビームスプリッタ (BS) を置き、光検出器 (PD) で入射光量をモニタした。折り返しミラーからの透過光を PD とカメラでモニタすることで、主共振器の共振状態を確認することができる。補助共振器の共振状態は、エンドミラーからの透過光で確認した。

補助共振器長の制御に用いる RFPD の配置場所の候補には、反射ポート (フロントミラーの反射光を受光する場所) と折り返しポート (折り返しミラーからの透過光を受光する場所) の 2 箇所が挙げられる。本実験の共振器の設計では、反射ポートに RFPD を置く方が大きな PDH 信号を得られる^{*3}ため、反射ポートに RFPD の配置した。

フロントミラーの反射光の位置に WFS 信号を取得するための RFQPD を配置した。また、角度信号を WFS とは独立に測定し較正を行うために、フロントミラーに斜めに光を入射し、QPD で光を受けることでフロントミラーの角度を測定した (光てこ)。

^{*3} 主共振器がアンダーカップルであるため、共振時には透過光量よりも反射光量の方が大きくなるからである (A.5 節を参照)。

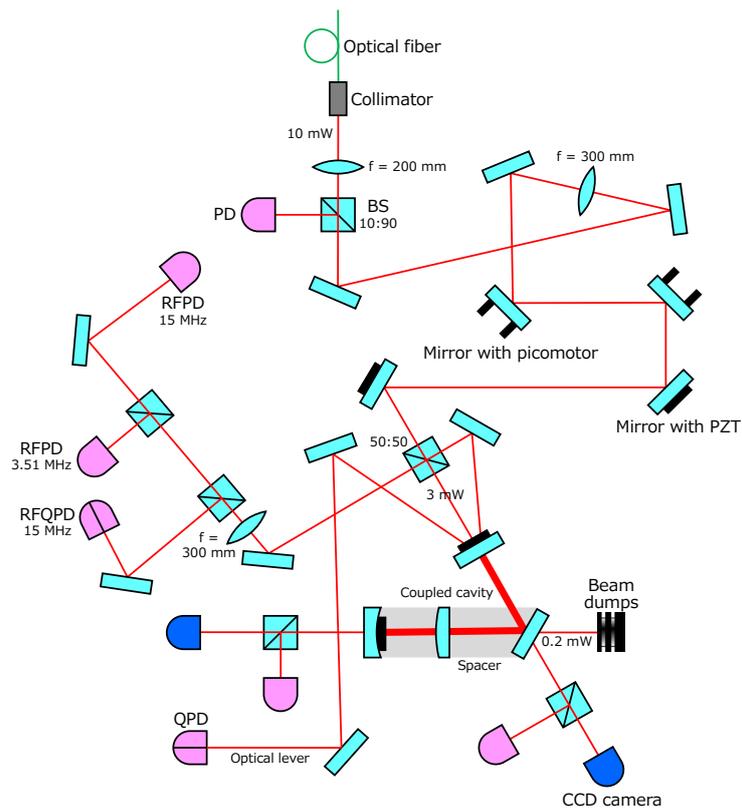


図 5.13: 測定系の構成。

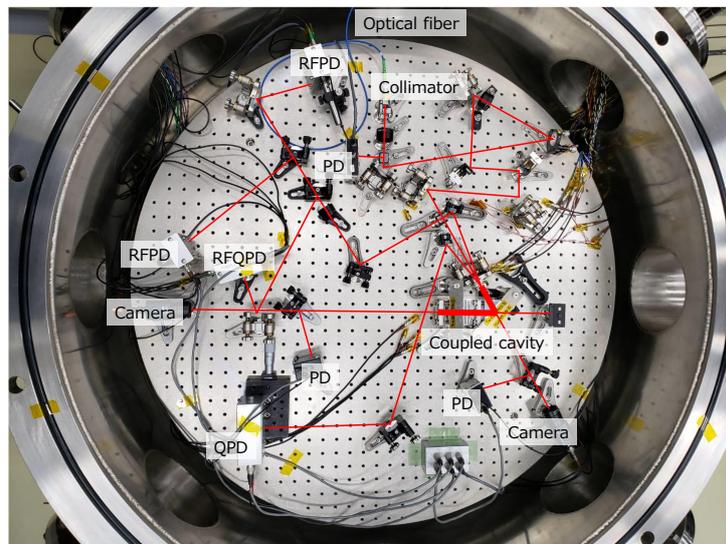


図 5.14: 測定系の写真。

5.7 本章のまとめ

- Coupled WFS の制御手法の確立と角度信号増幅の定量的な評価を目的として原理実証実験を行った。
- 実験装置は入射光学系、光結合共振器、測定系から構成される。
- 主共振器と補助共振器の固有モードが一致し、補助共振器に 0.1% のロスがあっても位相補償が行えるように光結合共振器のパラメータを設計した。
- 共振器のアライメントが長時間変化しないようにフロントミラー以外のミラーはアルミニウム製スペーサーに固定した。

第 6 章

実験結果

6.1 アクチュエータ効率の測定

フィードバック制御に重要なアクチュエータ効率をキャビティスキャン (レーザー周波数を時間的に変えながら共振器の透過光強度を取得すること) によって測定した。

フロントミラーとエンドミラーに取り付けた piezo 素子の効率は

$$A_{\text{mirror,PZT}} = (2.8 \pm 0.3) \times 10^{-8} \text{ m/V} \quad (6.1)$$

と求めた。この値は、Thorlabs のスペック値と誤差の範囲で一致する。

レーザー光源の周波数変調ポート (温度) の効率は

$$A_{\text{laser,temp}} = 5.2 \pm 0.8 \text{ GHz/V} \quad (6.2)$$

と求めた。

レーザー光源の周波数変調ポート (piezo 素子) の効率は

$$A_{\text{laser,PZT}} = 6.3 \pm 0.5 \text{ MHz/V} \quad (6.3)$$

と求めた。

6.2 補助共振器の性能評価と制御

まずは、フロントミラーを置かずに補助共振器のみで動作させて性能評価と制御を行った。このとき、PDH 信号のサイドバンド周波数は 15 MHz とした。

6.2.1 補助共振器の性能評価

レーザー光源の周波数変調ポート (温度) にランプ波を印加し、キャビティスキャンを取得した (図 6.1、図 6.2)。このとき、EOM に大きな振幅 ($\sim 10 \text{ V}$) の正弦波を入れてサ

イドバンドの共振ピークを立てた。このサイドバンドの共振ピークを周波数較正に用いて、00モードの共振ピークのFWHMを測定した。共振器長の設計値からFSRを計算し、FWHMとFSRの比をとってフィネスを求めた^{*1}。誤差は10回の測定による。

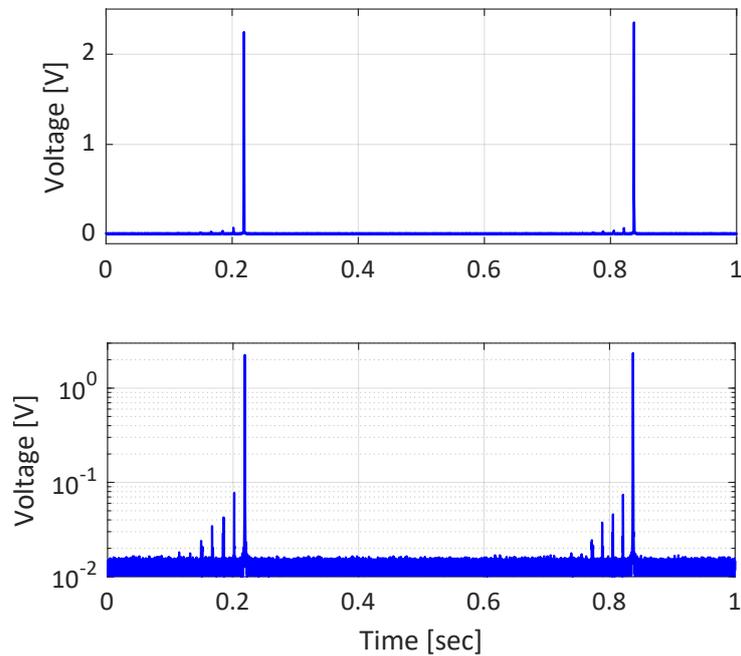


図 6.1: 補助共振器のキャビティスキャン。上: リニアスケール。下: セミログスケール。

^{*1} FSR もキャビティスキャンから測定することができるが、周波数変調が線形でない影響により誤差が大きくなる。本実験では、共振器長がスペーサーの製作精度 0.1 mm で決まるので、FSR は共振器長の設計値から計算した方が良いと判断した。

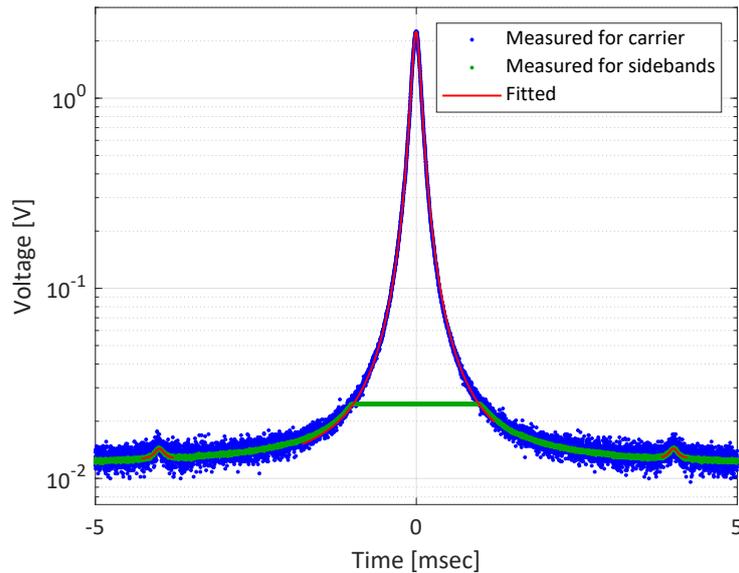


図 6.2: 補助共振器の透過光の共振ピークのローレンツ関数によるフィッティング (緑色の実線)。サイドバンドの共振ピークは小さいため、00 モードの共振ピークを測定するための電圧のレンジでは量子化誤差の影響を受けやすい (青色の点)。そこで、サイドバンドの共振ピークは電圧のレンジを最小の 1 mV/div にして測定した (赤色の点)。このとき、00 モードの共振ピークは飽和して測れていないことがわかる。

補助共振器の性能評価の結果を表 6.1 にまとめる。比較のために設計値を表 5.1 より再掲する。フィネスの測定値が設計値と一致しており、補助共振器内のロスが十分小さいため、位相補償が可能である。周回 Gouy 位相の測定値も誤差の範囲で設計値と一致した。本論文では、モードマッチ率を

$$M = \frac{\text{00 モードと 1 次のモードの共振ピークの光強度の和}}{\text{全モードの共振ピークの光強度の和}} \quad (6.4)$$

と定義している*2。実際の解析では、共振ピークが明確に確認できた 4 次のモードまでを採用した。

表 6.1: 補助共振器の性能評価。

パラメータ	設計値	測定値
フィネス	$(3.93^{+1.30}_{-0.79}) \times 10^3$	$(4.1 \pm 0.2) \times 10^3$
周回 Gouy 位相	$(9.49^{+0.22}_{-0.24}) \text{deg}$	$9.54 \pm 0.04 \text{ deg}$
モードマッチ率	–	$94 \pm 2 \%$

*2 モードマッチ率の分子を 00 モードのみとする流儀もある。1 次のモードは主にミスアラインメントによって生まれる [53, 56] ため、本論文では分子に 1 次のモードも加えた。

6.2.2 補助共振器の制御

PDH 信号のフィッティング (図 6.3) により、補助共振器のセンサ効率は

$$S_{\text{aux},1} = (1.6 \pm 0.2) \times 10^8 \text{V/m} \quad (6.5)$$

と求まった。

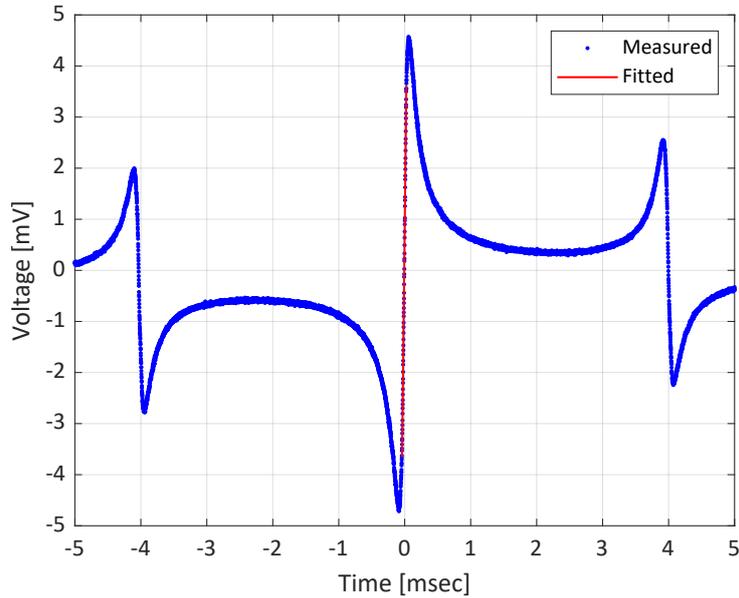


図 6.3: 補助共振器の PDH 信号のフィッティング。

補助共振器の制御時のブロックダイアグラムを図 6.4 に示す。

オープンループ伝達関数を図 6.5 に示す。UGF は $\sim 3 \text{kHz}$ 、位相余裕は $\sim 90 \text{deg}$ であり、安定な制御を行えている (補遺 C を参照)。

PDH 信号を測定して適切に較正することで外乱の信号を得た。外乱のスペクトルを図 6.6 に示す。2 Hz 以下の外乱は 10Pa と 10^5Pa で 1 桁程度異なることから、大気の揺れが支配的だと考えられる。50 Hz 付近で RMS を大きく増やしている原因は東日本の電源由来の雑音であると考えられる。

外乱のノイズバジェットを図 6.7 に示す。電気回路の寄与は小さく、大気の揺れや地面振動、機械共振が支配的であると考えられる。

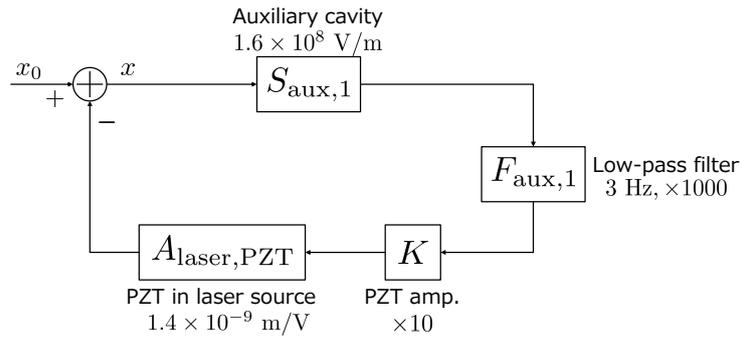


図 6.4: 補助共振器を単体で制御したときのブロックダイアグラム。

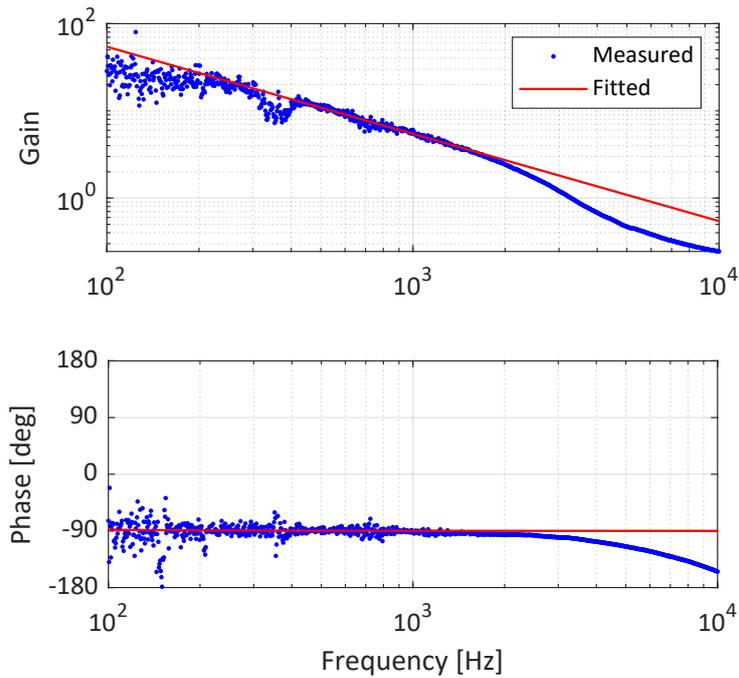


図 6.5: 補助共振器を単体で制御したときのオープンループ伝達関数。

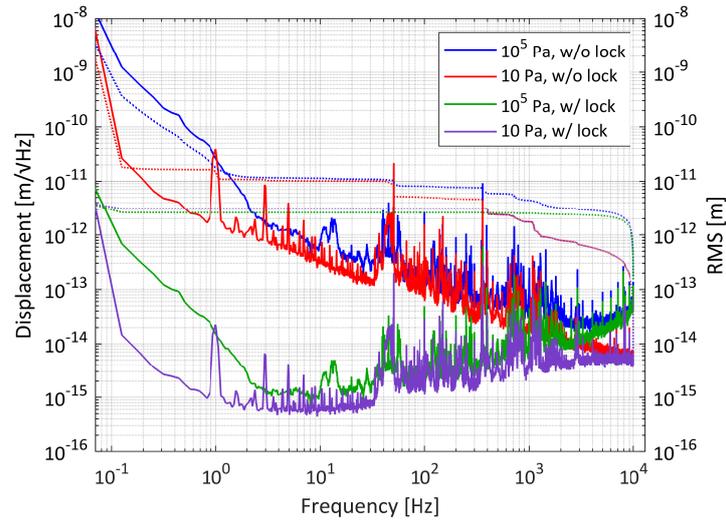


図 6.6: 補助共振器の外乱のスペクトル (変位換算)。

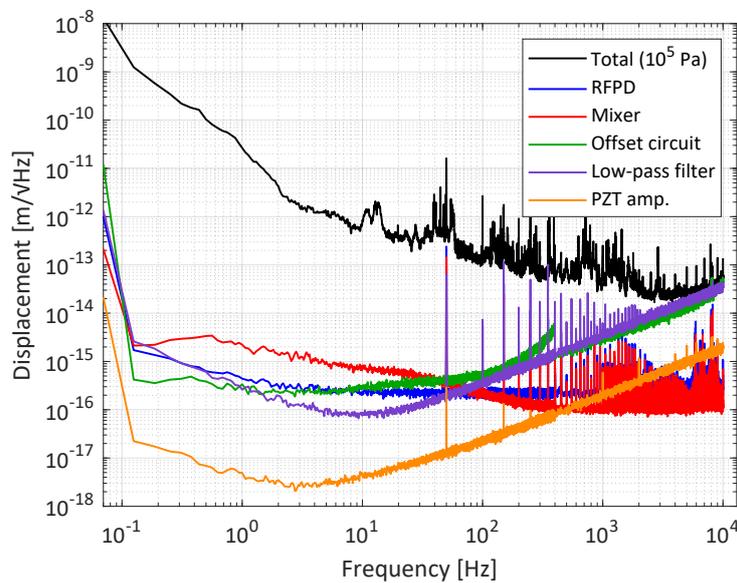


図 6.7: 補助共振器の外乱のノイズバジェット (変位換算)。

6.3 主共振器の性能評価と制御

6.3.1 主共振器の性能評価

レーザー光源の周波数変調ポート (温度) にランプ波を印加し、キャビティスキャンを取得した (図 6.8)。このとき、フィネスが小さいためにサイドバンドの共振ピークが 00 モードの共振ピークに埋もれてしまい、サイドバンド周波数を周波数較正に用いることは

できなかった。それゆえ、隣りあう 00 モードの共振ピークから FSR を測定した。FSR と FWHM の比からフィネスを測定した。誤差は 10 回の測定による。

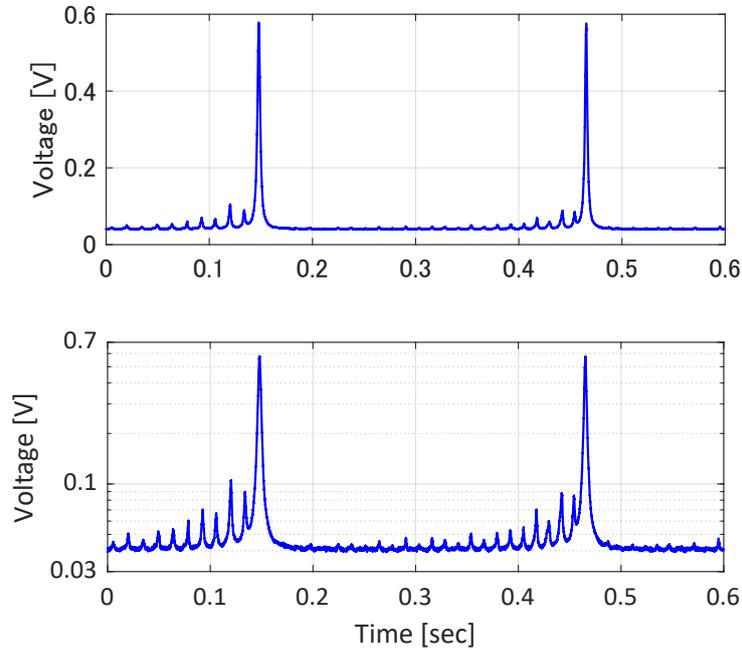


図 6.8: 主共振器のキャビティスキャン。上: リニアスケール。下: セミログスケール。

主共振器の性能評価の結果を表 6.2 にまとめる。比較のために設計値を表 5.1 より再掲する。フィネスの測定値が誤差の範囲で設計値と一致していない原因は、中間ミラーの AR コーティング面が主共振器側にある (図 5.5) ことによる光のロスだと考えられる。このロスは主共振器内であるため、位相補償の可否には影響しない。周回 Gouy 位相の測定値は誤差の範囲で設計値と一致した。モードマッチ率の測定では、共振ピークが明確に確認できた 5 次のモードまでを採用した。

表 6.2: 主共振器の性能評価。

パラメータ	設計値	測定値
フィネス	337^{+330}_{-112}	$(2.0 \pm 0.2) \times 10^2$
周回 Gouy 位相	$(12.2 \pm 0.1)\text{deg}$	$12.1 \pm 1.0 \text{ deg}$
モードマッチ率	–	$87 \pm 2 \%$

6.3.2 主共振器の制御

PDH 信号のフィッティングにより、主共振器のセンサ効率

$$S_{\text{main}} = (6.4 \pm 0.7) \times 10^5 \text{V/m} \quad (6.6)$$

と求まった。

主共振器の制御時のブロックダイアグラムを図 6.9 に示す。低周波数帯の信号はフロントミラーの piezo 素子に、高周波数帯の信号はレーザー光源の周波数変調ポート (piezo 素子) に返している。

オープンループ伝達関数を図 6.10 に示す。図 6.9 の P_1 から信号を注入して $G_1/(1+G_2)$ を測定し、 P_2 から信号を注入して $G_2/(1+G_1)$ を測定した。全体としてのオープンループ伝達関数 G_1+G_2 の UGF は ~ 4 kHz、位相余裕は ~ 90 deg である。 G_1 と G_2 のゲインが等しくなるのは ~ 20 Hz であり、この点での位相差は ~ 80 deg である。以上から、安定な制御を行えているといえる (補遺 C を参照)。また、 G_1 と G_2 のゲインを見比べることで、20 Hz 以下の信号はフロントミラーの piezo 素子に、20 Hz 以上の信号はレーザー光源の周波数変調ポートに返され、役割分担が行われていることも確認できる。

図 6.9 の P_0 で PDH 信号を測定し、適切に較正することで外乱の信号を得た。外乱のスペクトルを図 6.11 に示す。1 Hz 以下の外乱は 10 Pa と 10^5 Pa で 1 桁程度異なることから、大気の揺れが支配的だと考えられる。600 Hz 付近で RMS を大きく増やしている原因は、フロントミラーの piezo 素子とミラーマウントによって生じる寄生共振であると考えられる [44, 62]。50 Hz 付近で RMS を大きく増やしている原因は東日本の電源由来の雑音であると考えられる。

外乱のノイズバジェットを図 6.12 に示す。電気回路の寄与は小さく、大気の揺れや地面振動、機械共振が支配的であると考えられる。

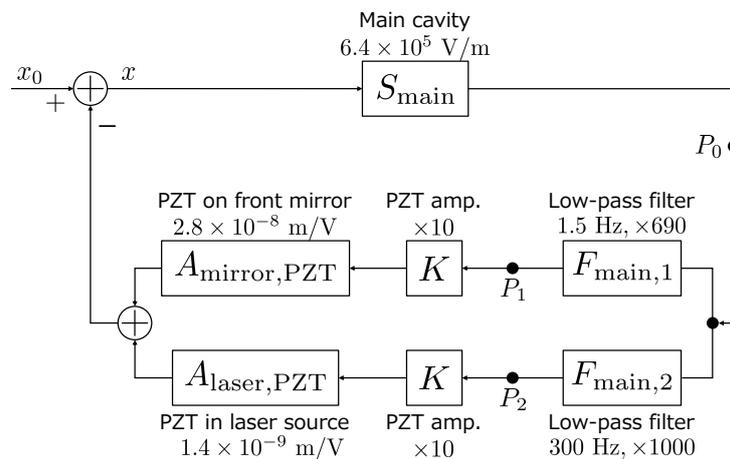


図 6.9: 主共振器の制御のブロックダイアグラム。

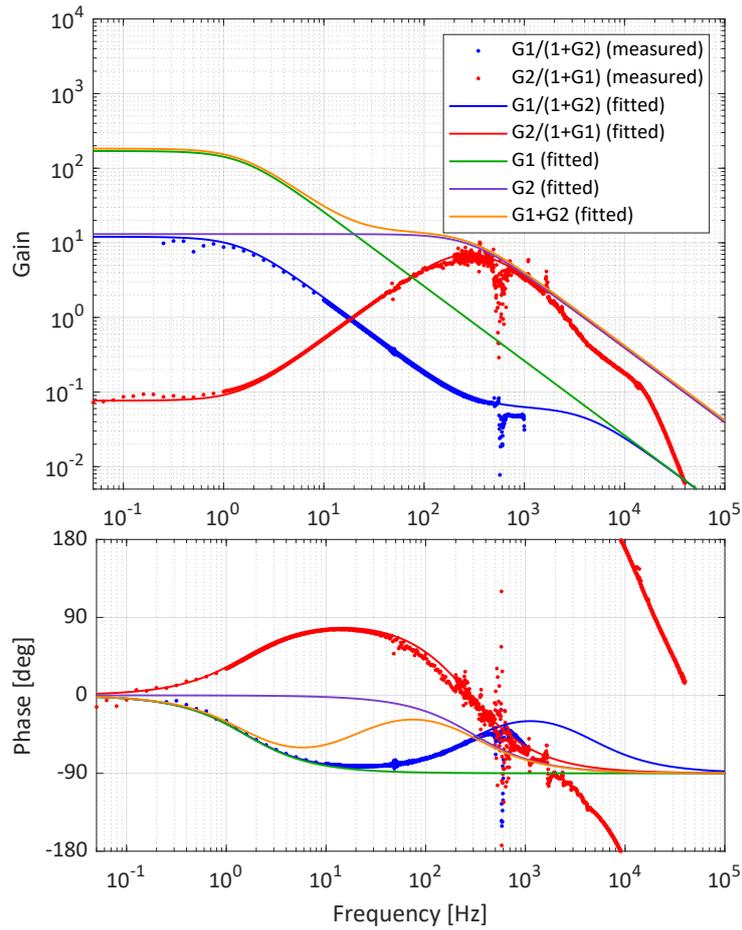


図 6.10: 主共振器のオープンループ伝達関数。

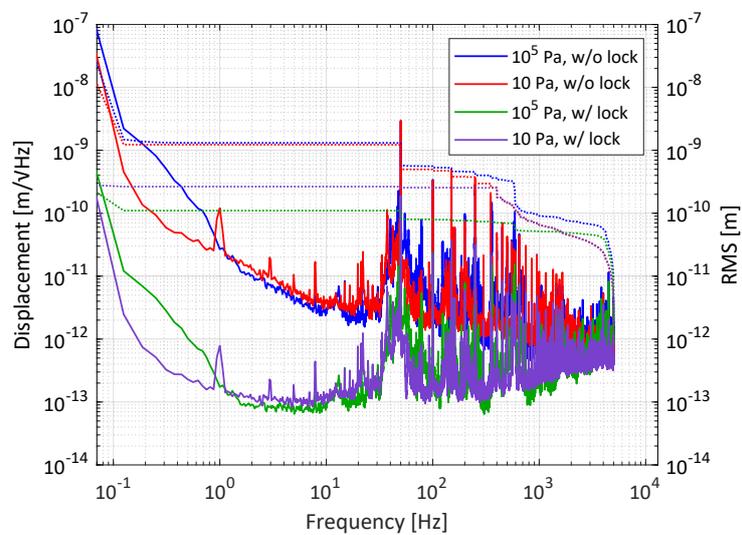


図 6.11: 主共振器の外乱のスペクトル (変位換算)。

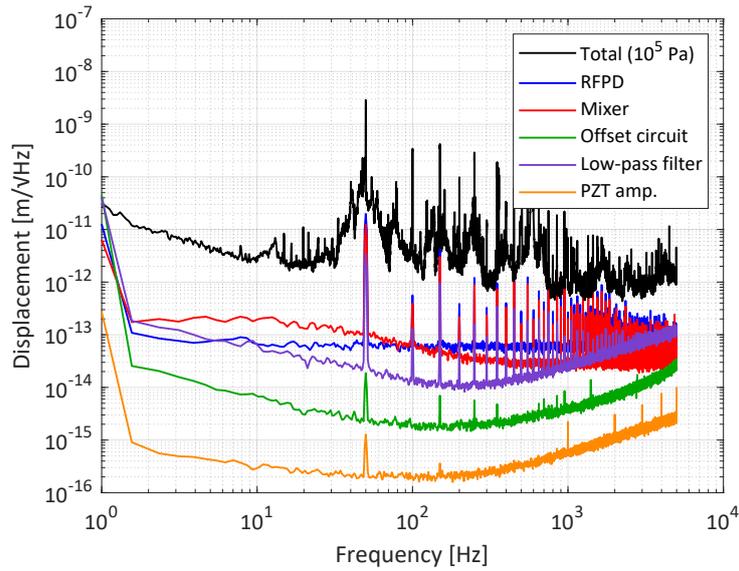


図 6.12: 主共振器の外乱のノイズバジェット (変位換算)。

6.4 Coupled WFS の制御

主共振器を制御した状態で補助共振器の制御を行った。これにより、Coupled WFS の制御が実現した。

制御の時系列データを図 6.13 に示す。11 秒付近で主共振器の制御が行われ、43 秒付近で補助共振器の制御も行われたことがわかる。また、主共振器の 2 つのフィードバック信号を見比べることで、高周波数帯の信号はレーザー光源の周波数変調ポートに、低周波数帯の信号はフロントミラーのピエゾ素子に返されていることも確認できる。Coupled WFS を制御したときに主共振器と補助共振器の透過光量がふらついている理由については、第 7 章で考察する。

また、CCD カメラで主共振器と補助共振器の透過光をモニタした様子を図 6.14 に示す。補助共振器の 00 モード共振点まわりと 10 モード共振点まわりを選んで制御を行った理由は、この 2 点において位相補償が行われ、主共振器内で 00 モードと 10 モードが同時に増幅するからである (4.2.1 節を参照)。

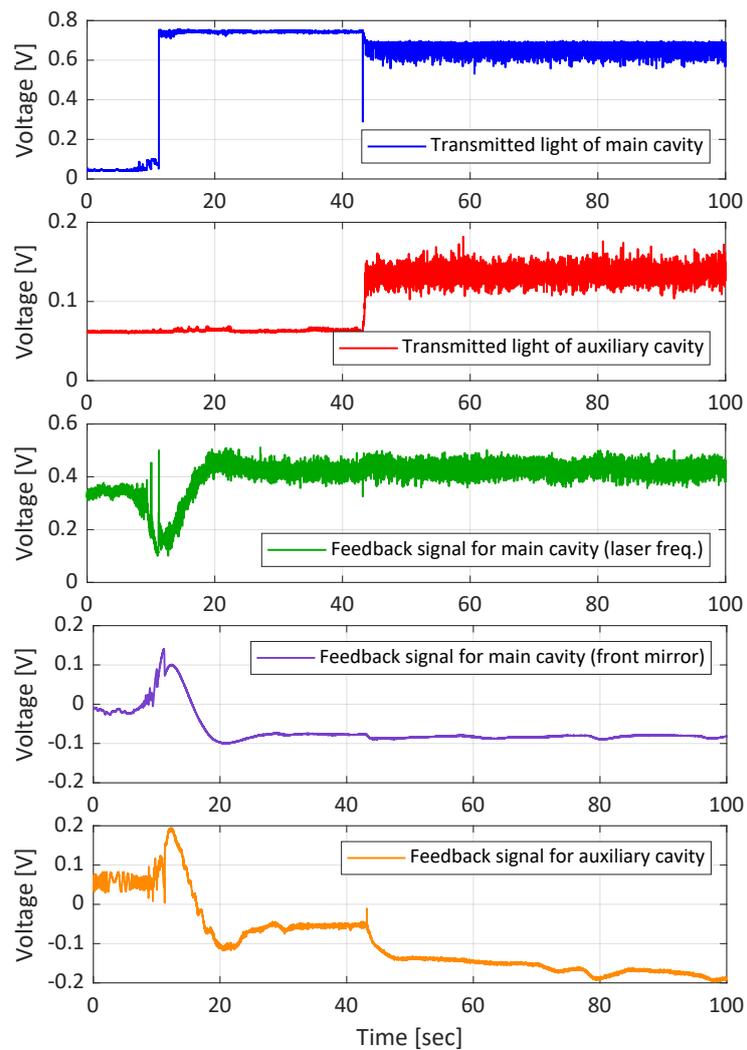


図 6.13: Coupled WFS を制御したときの時系列データ。上から順に、主共振器の透過光、補助共振器の透過光、主共振器のフィードバック信号 (レーザー光源の周波数変調ポート、高周波数帯)、主共振器のフィードバック信号 (フロントミラーのピエゾ素子、低周波数帯) 補助共振器のフィードバック信号である。

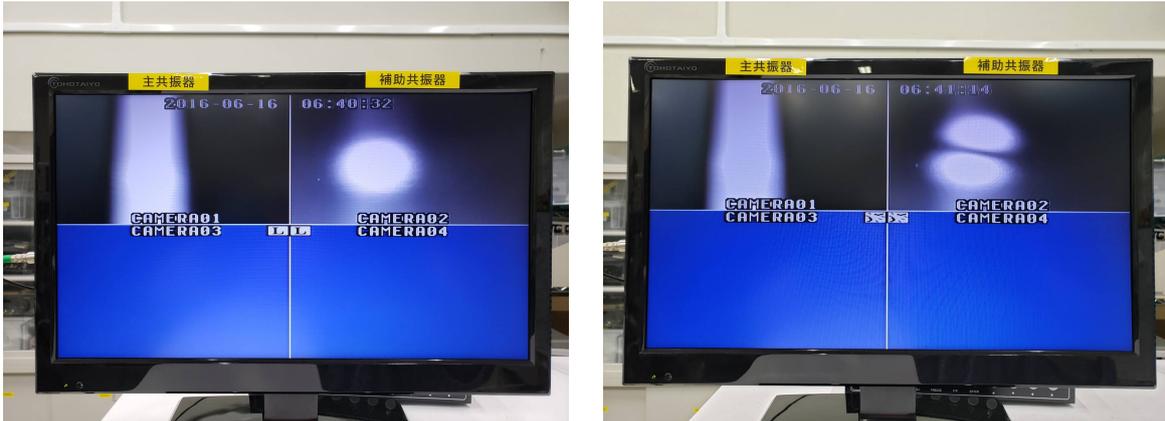


図 6.14: CCD カメラでモニタした主共振器と補助共振器の透過光の様子。画面左上が主共振器の透過光、右上が補助共振器の透過光である。左: 補助共振器を 00 モード共振点まわりに制御したとき。右: 補助共振器を 10 モード共振点まわりに制御したとき。

Coupled WFS 制御時の主共振器のブロックダイアグラムは図 6.9 のままである。Coupled WFS 制御時の補助共振器のブロックダイアグラムを図 6.15 に示す。なお、補助共振器のセンサ効率 $S_{aux,2}$ は、オープンループゲインとエンドミラーの piezo 素子の効率の測定値から求めた。

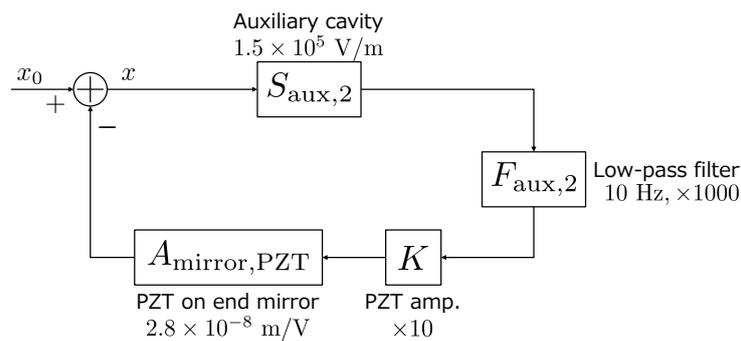


図 6.15: Coupled WFS を制御したときの補助共振器のブロックダイアグラム。

Coupled WFS 制御時の補助共振器のオープンループ伝達関数を図 6.16 に示す。UGF は ~ 200 Hz、位相余裕は ~ 90 deg であり、安定な制御を行えている (補遺 C を参照)。

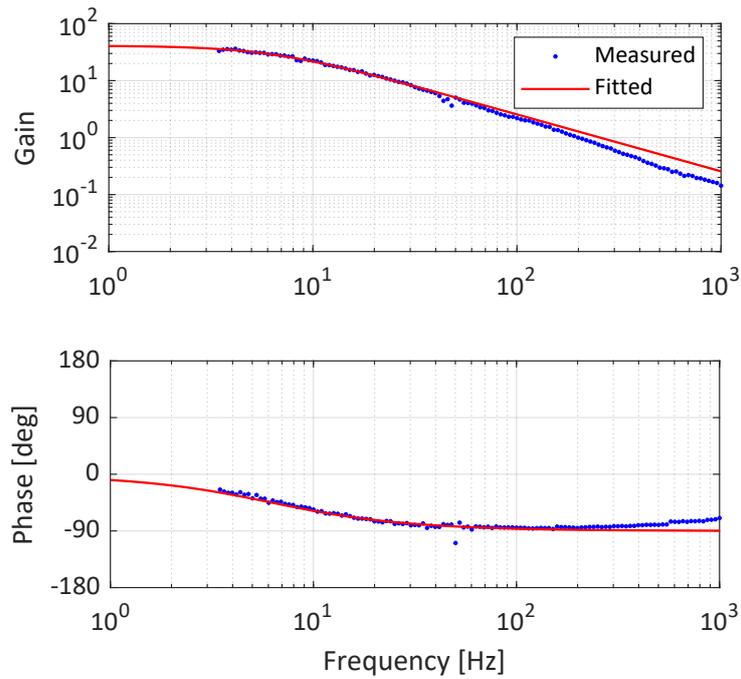


図 6.16: Coupled WFS を制御したときの補助共振器のオープンループ伝達関数。

外乱のスペクトルを図 6.17 に示す。1 Hz 以上では、補助共振器よりも主共振器の外乱の方が大きくなっている。この理由は、補助共振器を構成するミラーはアルミニウム製スペーサーに固定されているのに対し、主共振器のフロントミラーはミラーマウントに固定されているため地面振動や機械共振の影響を大きく受けるからだと考えられる。1 Hz 以上の外乱は、主共振器と補助共振器で同程度である。大気の揺れが支配的であるためだと考えられる。

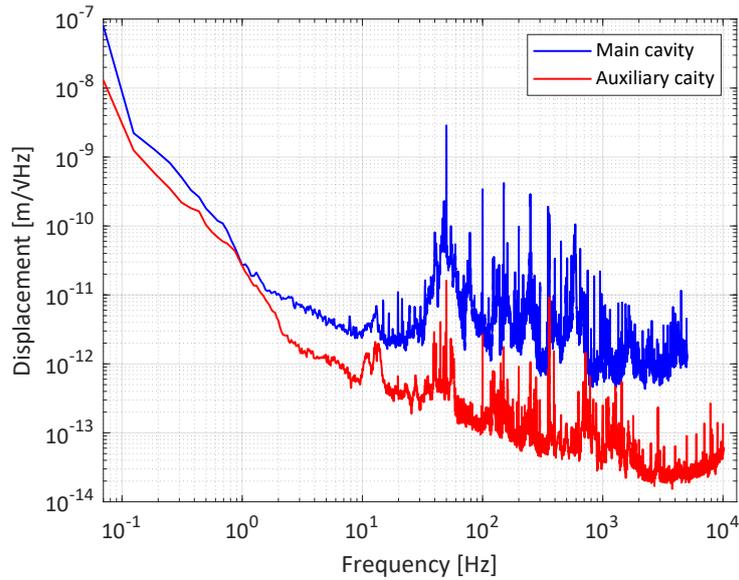


図 6.17: 主共振器と補助共振器の外乱のスペクトルの比較。大気中で測定を行い、制御を行っていない状態での変位に換算したときの外乱である (図 6.6、図 6.11)。

6.5 光てこの較正

光てこに用いた QPD は、マイクロステージの上に設置されている。マイクロステージを x 軸方向 (yaw 方向) に動かし、QPD の x 軸方向の信号を取得することで光てこの較正を行った (図 6.18)。測定値のフィッティングを行い、光てこの応答は

$$-1.15 \pm 0.03 \text{V/mm} \quad (6.7)$$

と求まった。フロントミラーと QPD の間の距離が $66 \pm 3 \text{cm}$ であったこととあわせて、フロントミラーの傾きから光てこの信号への応答は

$$-0.76 \pm 0.04 \text{mV}/\mu\text{rad} \quad (6.8)$$

と求まった。

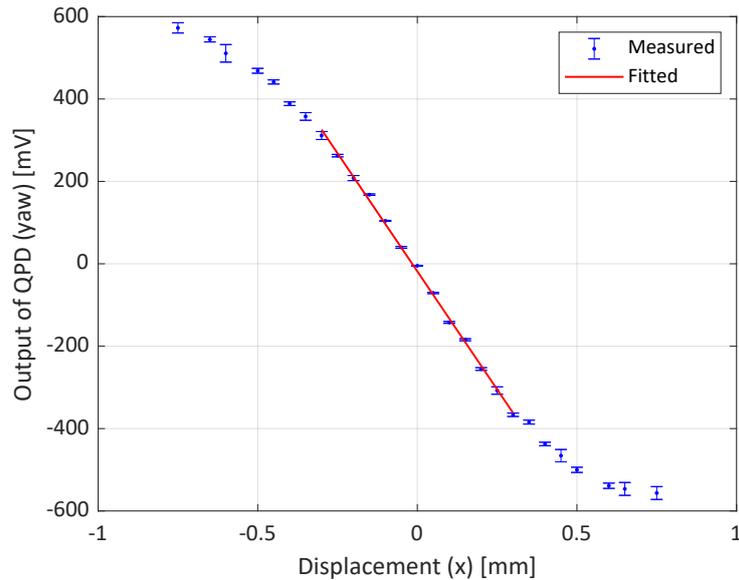


図 6.18: 光てこの較正。

6.6 Coupled WFS の角度信号増幅の測定

主共振器を 00 モード共振点に制御し、補助共振器を 00 モード共振点まわり、または、10 モード共振点まわりに制御して、フロントミラーを加振して角度信号の測定を行った。補助共振器の制御点をこのように選んだ理由は、補助共振器の 00 モード共振点まわりと 10 モード共振点まわりにおいて位相補償が行われ、主共振器内で 00 モードと 10 モードが同時に増幅するからである (4.2.1 節を参照)。

具体的な測定方法を述べる。20 Hz–100 Hz の正弦波をフロントミラーに取り付けたピエゾ素子に印加し、光てこと WFS (または Coupled WFS) 信号の伝達関数を同時に測定した。光てこの信号強度を基準として、WFS 信号と Coupled WFS 信号の強度比を算出した。このとき、50 Hz 付近では測定精度が悪化した。そこで、同じ周波数での 10 回での測定のコヒーレンスが 0.9 以上となった周波数の測定値のみを用いた。様々な周波数での測定結果から誤差をつけた*3。

また、主共振器を制御した状態でエンドミラーを動かして取得した補助共振器のキャビティスキャンから補助共振器の最大の透過光量を測定した。角度信号増幅の測定時に補助共振器の透過光量もモニタした。この透過光量と最大の透過光量から補助共振器長の較正を行った。

補助共振器を 10 モード共振点まわりに制御したときの角度信号増幅の結果を図 6.19 に

*3 コヒーレンスが 0.9 以上となった周波数の測定値のみを用いたため、同じ周波数での 10 回での測定による誤差は、様々な周波数での測定結果からつけた誤差よりも十分に小さい。

示す。Coupled WFS は WFS に比べて 2.9 ± 0.8 倍角度信号を増幅することを観測した。測定点が誤差の範囲で計算値と一致していない理由については、第7章で考察する。

補助共振器を 00 モード共振点まわりに制御したときの角度信号増幅の結果を図 6.20 に示す。Coupled WFS は WFS に比べて 3.5 ± 0.9 倍角度信号を増幅することを観測した。00 モード共振点付近では補助共振器の透過光量の計算値を算出することができないため、横軸方向にのみフィッティングを行っている。

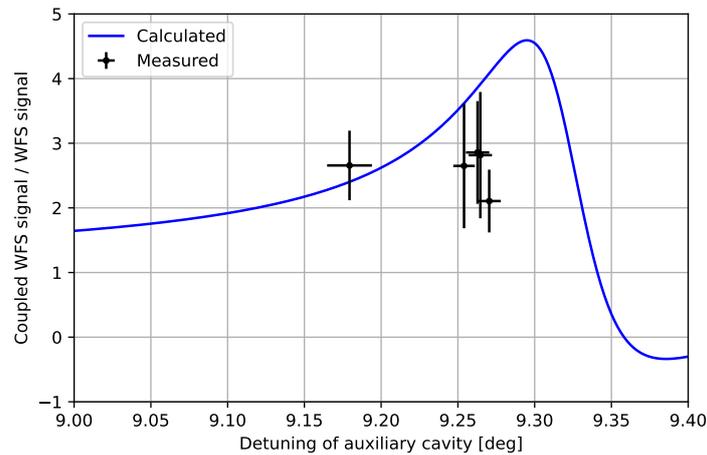


図 6.19: Coupled WFS の角度信号増幅の測定結果 (補助共振器の 10 モード共振点まわり)。青線は FINESSE による計算値を表す。

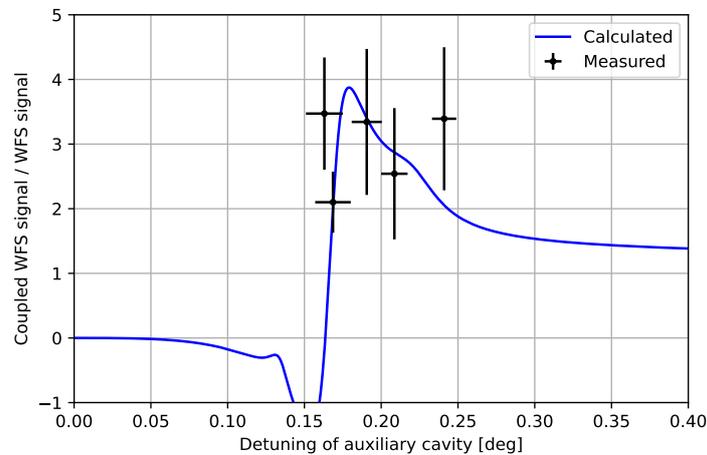


図 6.20: Coupled WFS の角度信号増幅の測定結果 (補助共振器の 00 モード共振点まわり)。青線は FINESSE による計算値を表す。横軸方向にのみフィッティングを行っている。

6.7 Coupled WFS のビームジッターへの応答の測定

20 Hz–100 Hz の正弦波をステアリングミラーに取り付けた piezo 素子に印加した。その他については、角度信号増幅の測定と同様である。補助共振器を 10 モード共振点まわりに制御したときの Coupled WFS のビームジッターへの応答の測定結果を図 6.21 に示す。Coupled WFS が WFS に比べてビームジッターを増幅しないことを観測した。測定点が誤差の範囲で計算値と一致していない理由については、第 7 章で考察する。

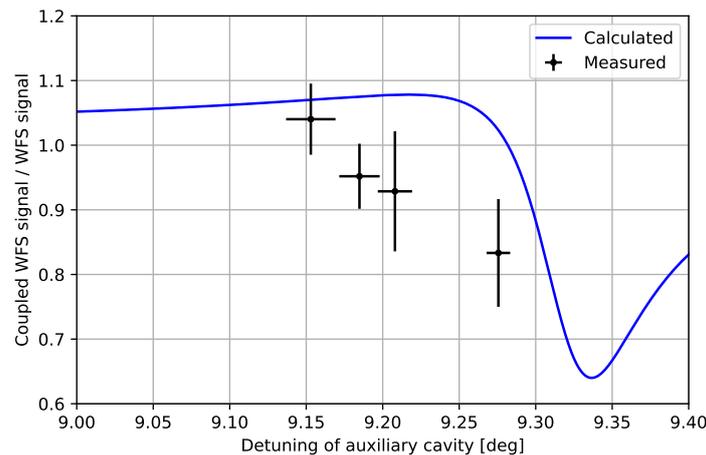


図 6.21: Coupled WFS のビームジッターへの応答の測定結果 (補助共振器 10 モード共振点まわり)。青線は FINESSE による計算値を表す。

6.8 本章のまとめ

- Coupled WFS を製作し、共振器の性能評価を行った。補助共振器のフィネス・主共振器と補助共振器の周回 Gouy 位相の測定値が誤差の範囲で設計値と一致した。主共振器のフィネスの測定値は設計値より小さな値であったが、これは位相補償の可否に影響しない。
- PDH 法によって、主共振器単体・補助共振器単体・2 つの共振器同時の制御を安定に行うことができた。主共振器の制御には階層制御を導入した。
- フロントミラーを加振し、Coupled WFS の角度信号増幅を測定した。補助共振器の 10 モード共振点まわりで WFS に比べて 2.9 ± 0.8 倍、補助共振器の 00 モード共振点まわりで WFS に比べて 3.5 ± 0.9 倍の角度信号増幅を観測した。
- ステアリングミラーを加振して Coupled WFS のビームジッターへの応答を測定した。補助共振器の 10 モード共振点まわりでは Coupled WFS はビームジッターを増幅しないという結果を得た。

第7章

考察

この章では、Coupled WFS を制御したときに主共振器と補助共振器の透過光量がふらついた原因と、Coupled WFS の角度信号の増幅度の測定値が計算値と誤差の範囲で一致しなかった原因を考察する。

7.1 Coupled WFS の制御の考察

図 6.13 より、Coupled WFS を制御したときに主共振器と補助共振器の透過光量がふらついた。この原因について、以下の2点から考察する。

- 主共振器と補助共振器の固有モードのカップリング
- 補助共振器の制御の安定性

7.1.1 主共振器と補助共振器の固有モードのカップリング

本実験では、折り返しミラー、中間ミラー、エンドミラーがアルミニウム製スペーサーに固定されており、アラインメントを調整できるのはフロントミラーとステアリングミラーのみである。Coupled WFS の製作を完了した後にステアリングミラーを調整すると、補助共振器だけでなく主共振器のアラインメントも変化してしまう。そのため、Coupled WFS の製作完了後は、フロントミラーのアラインメントを調整するのみにとどめ、補助共振器のアラインメントは調整しなかった。これにより、主共振器と補助共振器の固有モードのカップリングが悪くなってしまい、補助共振器に入射する補助共振器にとっての 10 モードの光量が大きくなったと考えられる。

このような状況下で補助共振器の 10 モードの共振点に制御しようとする、主共振器内の光量が大きく減少し、主共振器の制御が不安定になった。本実験では、補助共振器の共振点に制御することはできず、オフセット回路を用いてフィードバック信号にオフセッ

トを足し、共振点から少しずれた点に制御をかけた。以上のような理由により、補助共振器の透過光量が1次でふらつき、主共振器の透過光量もふらついたと考えられる。

この問題の解決策について述べる。ステアリングミラーとフロントミラーのアライメント調整を繰り返し、主共振器と補助共振器の固有モードのカップリングを改善することで解決できると考えられる。固有モードのカップリングが良くなれば、補助共振器の10モードの光量が減るため、主共振器の光量が大きい状態を保ったまま補助共振器の10モードの共振点に制御することができると考えられる。ただし、このとき、補助共振器のPDH信号が小さくなるのを防ぐために、反射光を取得するRFPDのトランスインピーダンスを大きくする、制御のフィルターのゲインを大きくすると行った工夫が必要になる。

7.1.2 補助共振器の制御の安定性

図 6.16 より、補助共振器のオープンループ伝達関数の位相余裕は ~ 90 deg であるので、オープンループゲインを大きくしたり UGF を大きくしたりして、あと 60 deg 程度小さくしてもよい。しかし、図 7.1 に示すように、 40 Hz 以上では補助共振器と主共振器の PDH 信号が有意な相関をもつことから、これ以上高周波数帯までフィードバック信号を返すと、補助共振器長を余計に揺らしてしまい、制御が不安定になった。

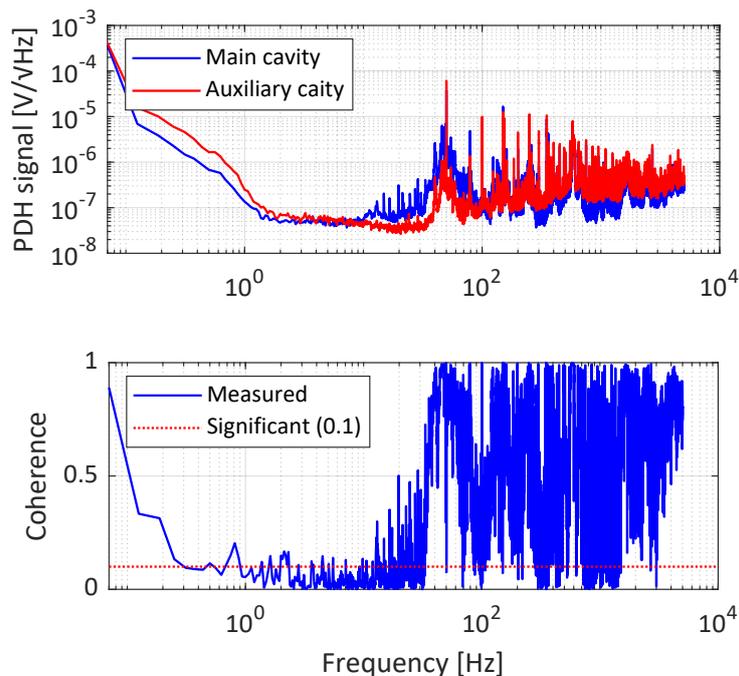


図 7.1: 主共振器と補助共振器の PDH 信号のコヒーレンス。赤点線は有意な相関の閾値を示す [63]。

主共振器と補助共振器の PDH 信号が 40 Hz 以上で有意な相関をもつ原因は、主共振器

の高周波数帯のフィードバック信号をレーザー光源の周波数変調ポートに返したことにより、補助共振器に主共振器の外乱が伝達したためと考えられる。それに対して、40 Hz 以下では PDH 信号のコヒーレンスが小さくなった理由は、主共振器の低周波数帯のフィードバック信号をフロントミラーのピエゾ素子に返したことにより、主共振器の制御を補助共振器とは独立に行えているからであると考えられる。

補助共振器の制御をより安定に行うための解決策について述べる。フロントミラーを振り子で吊り高周波数帯での外乱を小さくし、さらに、主共振器のフィードバック信号をフロントミラーのみに返す(レーザー光源にフィードバックしない)ことにより、2つの共振器の PDH 信号の相関が小さくなり、補助共振器を安定に制御できると考えられる。補助共振器と主共振器の PDH 信号を引き算するといった手法も有効である。

また、エンドミラーに取り付けたピエゾ素子が傾いており、長さ方向の制御を行うつもりが角度方向に揺らしてしまっているという影響もあると考えられる。アルミニウム製スペーサーの設計をピエゾ素子を精度よく貼り付けられるように変更する、アルミニウム製スペーサーの設計をピエゾ素子の傾きを調整できるように変更する、フィードバック信号を返すときにピエゾ素子の応答の個体差を補正する行列をかけるといった解決策が考えられる。

7.2 Coupled WFS の角度信号増幅の考察

図 6.19 より、Coupled WFS の角度信号の増幅度の測定値が計算値と誤差の範囲で一致しなかった。この原因について、以下の2点から考察する。

- 主共振器のフィネスの測定誤差
- RFQPD の位置 (Gouy 位相) のずれ

00 モード共振点付近では補助共振器の透過光量の計算値を算出することができず、横軸方向にフィッティングを行う必要があるため、10 モード共振点まわりの測定値を用いて考察する。

7.2.1 主共振器のフィネスの測定誤差

主共振器のフィネスの測定誤差の影響について考察する。表 6.2 より、主共振器のフィネスの測定値は 200 ± 20 であり、10% の誤差がついている。図 4.12 からわかるように WFS の信号強度は共振器のフィネスに依存しないが、図 4.14 からわかるように Coupled WFS の信号強度は主共振器のフィネスに依存するため、主共振器の測定誤差を考慮することで Coupled WFS の角度信号の増幅度の測定値と計算値の差を説明できる可能性が

ある。

しかし、主共振器のフィネスの測定誤差を考慮して信号増幅を計算したが、増幅度はほとんど変化せず、測定値と計算値は誤差の範囲で一致しなかった (図 7.2)。

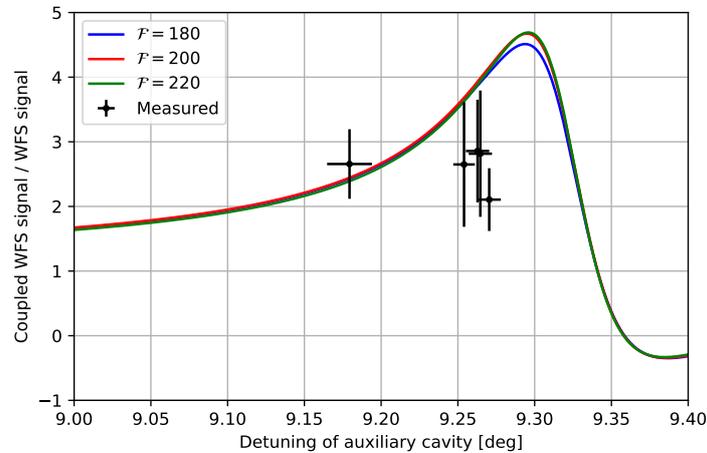


図 7.2: Coupled WFS の信号増幅の主共振器のフィネス依存性。

7.2.2 RFQPD の位置 (Gouy 位相) のずれ

RFQPD の位置ずれによる Gouy 位相の影響を考える。本実験では、RFQPD をフロントミラーから 74.6 cm の位置に置き、Gouy 位相を 124 deg とすることが目標値であった。しかし、RFQPD の位置は 2 cm 程度ずれうると考え、 $\Delta d = (0 \text{ mm}, -5 \text{ mm}, -10 \text{ mm}, -15 \text{ mm}, -20 \text{ mm})$ ずれていた場合の Gouy 位相を求めた (図 7.3)。図 7.4 のように、WFS と Coupled WFS で Gouy 位相依存性が異なり、Gouy 位相 124 deg では逆相に変化する。そのため、図 7.5 に示すように、RFQPD の位置変化が Coupled WFS の信号増幅度に大きく影響する。これと測定データを重ねると、 $\Delta d = (-5 \text{ mm}, -10 \text{ mm}, -15 \text{ mm}, -20 \text{ mm})$ ずれている場合、1 点を除いて誤差の範囲で一致した (図 7.5)。

この問題の解決策について述べる。RFQPD をマイクロステージの上に載せることで、RFQPD の位置を $\sim 1 \text{ cm}$ 調整することができる。Coupled WFS の信号増幅を測定しながら RFQPD の位置を調整すれば、計算値と一致する信号増幅度を得られると期待できる。

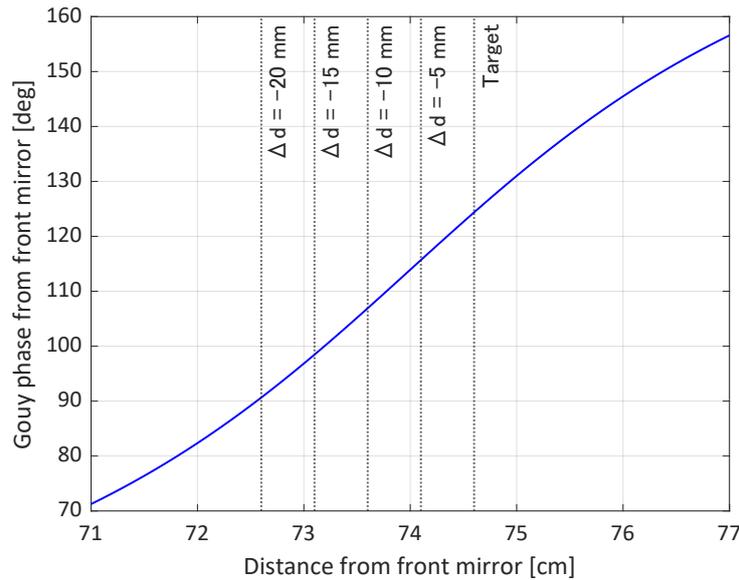


図 7.3: RFQPD の位置と Gouy 位相の関係。

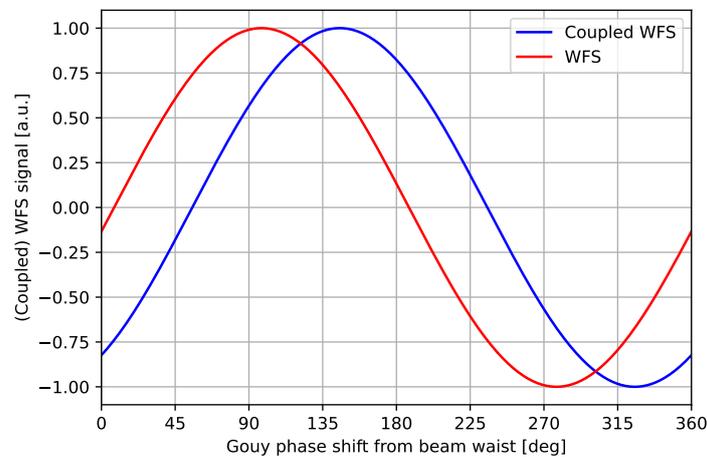


図 7.4: WFS と Coupled WFS の信号強度の Gouy 位相依存性。

7.2.3 Coupled WFS のビームジッターへの応答の考察

図 6.21 より、Coupled WFS のビームジッターへの応答の測定値も計算値と誤差の範囲で一致しなかった。この原因も RFQPD の位置のずれによって説明できる。

Coupled WFS のビームジッターへの応答の測定値についても、RFQPD の位置が $\Delta d = -20 \text{ mm}$ ずれている場合、 $\Delta d = 0 \text{ mm}$ の場合に比べて測定値のふるまいが計算値に近くなり、1 点を除いて誤差の範囲で一致した (図 7.6)。

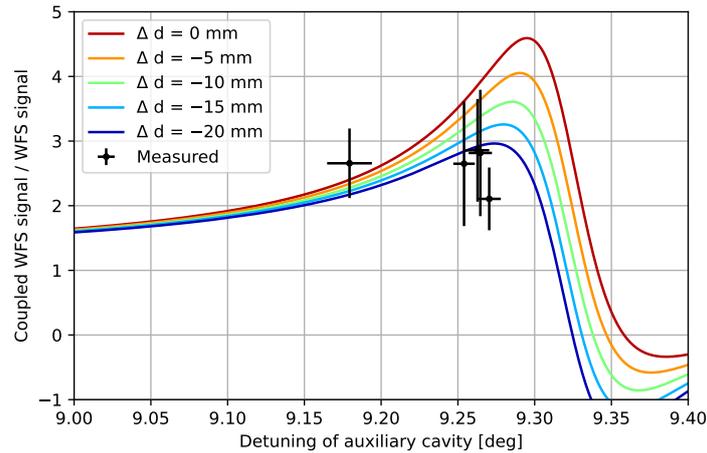


図 7.5: Coupled WFS の信号増幅の RFQPD の位置依存性。

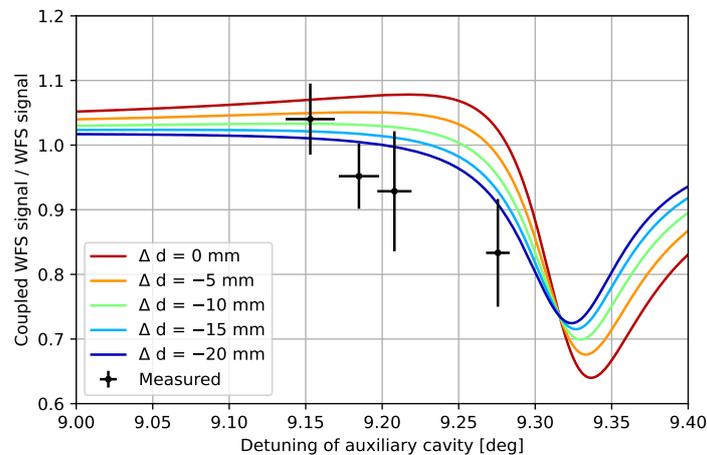


図 7.6: Coupled WFS のビームジッターへの応答の RFQPD の位置依存性。

7.3 本章のまとめ

- Coupled WFS の制御時に主共振器と補助共振器の透過光量がふらついた原因として、主共振器と補助共振器の固有モードのカップリングが悪かったということが考えられる。共振器のアライメント調整によって改善できる。
- Coupled WFS の制御時に主共振器と補助共振器の透過光量がふらついた原因として、補助共振器の制御の安定性が悪かったということが考えられる。フロントミラーを振り子で吊って防振し、フロントミラーのみにフィードバックすることによって改善が見込まれる。
- Coupled WFS の角度信号の増幅度の測定値が計算値と誤差の範囲で一致しなかつ

た原因として、主共振器のフィネスの測定誤差が挙げられる。しかし、本実験ではこれは原因ではなかった。

- Coupled WFS の角度信号の増幅度の測定値が計算値と誤差の範囲で一致しなかった原因は、RFQPD の 2 cm 程度の位置のずれであったと考えられる。RFQPD の位置調整を行うことで改善できる。
- Coupled WFS のビームジッターの測定値が計算値と誤差の範囲で一致しなかった原因も、RFQPD の 2 cm 程度の位置のずれであったと考えられる。

第 8 章

結論

この章では、本研究で得られた成果と今後の展望を述べる。

8.1 本研究の成果

本研究では、ねじれ振り子型重力波望遠鏡 TOBA の角度センサとして考案された結合光共振器を用いた WaveFront Sensor (Coupled WFS) のシミュレーションと原理実証実験を行った。本研究で得られた成果を以下に示す。

- シミュレーションにより、Coupled WFS の信号強度と線形レンジが主共振器のフィネスに依存することを示した。
- シミュレーションにより、Coupled WFS の信号強度と線形レンジは補助共振器の動作点に依存することを示した。
- シミュレーションにより、Coupled WFS はビームジッターを増幅しないことを示した。
- 主共振器内の状態を直接モニタでき、補助共振器の外乱が小さい構成で結合光共振器を製作した。
- 結合光共振器を主共振器・補助共振器ともに PDH 法で制御した。
- Coupled WFS を補助共振器の 10 モード共振点まわりで動作させ、WFS に比べて 2.9 ± 0.8 倍の角度信号増幅を観測した。
- Coupled WFS を補助共振器の 00 モード共振点まわりで動作させ、WFS に比べて 3.5 ± 0.9 倍の角度信号増幅を観測した。
- Coupled WFS を補助共振器の 10 モード共振点まわりで動作させ、WFS に比べてビームジッターを増幅しないことを観測した。

これらの成果により、Coupled WFS の TOBA への有用性を示し、制御手法を確立し

て開発への見通しを立てたといえる。

8.2 今後の展望

8.2.1 さらに複雑な構成の干渉計におけるシミュレーション

今後は、さらに複雑な構成のシミュレーションを行うことを目指す。例えば、KAGRA は多くのミラー・複数の変調周波数からなる複雑な構成であるが、パワーリサイクリングミラー、インプットミラー、エンドミラーからなる結合光共振器が存在し、WFS によってミラーのアラインメント制御を行っている [13]。そのため、本研究のシミュレーションの手法は KAGRA の WFS 信号の計算などに応用できると期待される。

8.2.2 フロントミラーの懸架による Coupled WFS の制御の安定化

今後は、Coupled WFS の制御をより安定にするために、フロントミラーを振り子で懸架する。これにより、主共振器の高周波数帯での外乱が低減し、補助共振器をより高周波数帯まで制御することができるようになると見込まれる。また、主共振器のフィードバック信号をレーザー光源の周波数変調ポートに返すのをやめ、フロントミラーのみに返すことで、主共振器の外乱が補助共振器へ伝達することも防ぐことができる。

8.2.3 Coupled WFS の TOBA への導入

本研究は原理実証実験という位置づけであったため、TOBA に有用な構成に近づけつつも実験をしやすい設計を採用した。今後は、TOBA の要求値を満たせる設計 (レーザーの光量、共振器長、ミラーの強度反射率、ミラーの曲率半径、スパーサーやミラーの基材) を考案し、開発を進めていく必要がある。特に、本研究では低温下での動作については確認されていないため、さらなる開発が必要である。さらに、散射雑音で制限される高い感度を実現するためには、入射光強度の安定化、地面振動の防振、光学系のモノリシック化を行うのが良いと考えられる。

補遺 A

Fabry-Pérot 共振器

Fabry-Pérot 共振器とは、2 枚の向かい合ったミラーからなる共振器である。ミラーの間を光が何度も往復することにより、光強度を増幅することができる。この章では、Fabry-Pérot 共振器に関する表式や性質についてまとめる^{*1}。

A.1 反射率・透過率・共振器内パワー

Fabry-Pérot 共振器の固有基本モードだけを考え、空間モードは考えないこととする。図 A.1 のような共振器を考え、共振器内部の電場や共振器を透過または反射される電場を考える。光の入射側のミラーをフロントミラー、もう一方のミラーをエンドミラーと呼ぶことにする。フロントミラーとエンドミラーの振幅反射率と振幅透過率をそれぞれ r_f, t_f, r_e, t_e とおく^{*2}。ここで、共振器内部側からの反射率を r_j 、外側の反射率を $-r_j$ であるとする ($j = f, e$) [64]。また、共振器の長さを L 、共振器の周回 Gouy 位相を ζ_{round} とする。

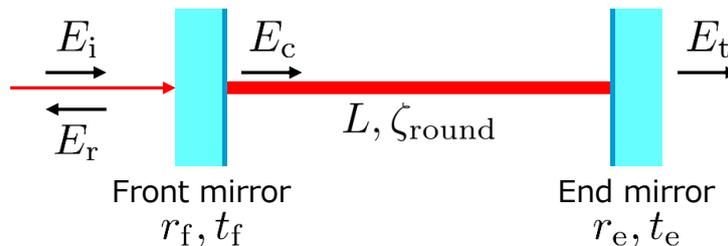


図 A.1: Fabry-Pérot 共振器の模式図。

^{*1} [55, 56] を参考にした。

^{*2} 一般に強度反射率、強度透過率は R, T のように大文字で表すことが多く、 $R = r^2, T = t^2$ である。

入射電場 E_i がフロントミラーのところで

$$E_i = E_0 e^{i\omega_0 t} \quad (\text{A.1})$$

と表されているとする。

このとき共振器内部の電場 E_c は、共振器 1 周で得る位相

$$\phi \equiv 2\omega_0 L/c - \zeta_{\text{round}} \quad (\text{A.2})$$

を用いて

$$\begin{aligned} E_c &= E_i t_f + E_i t_f r_e r_f e^{-i\phi} + E_i t_f r_e^2 r_f^2 e^{-2i\phi} + \dots \\ &= E_i t_f \sum_{n=0}^{\infty} (r_f r_e e^{-i\phi})^n \\ &= E_i \frac{t_f}{1 - r_f r_e e^{-i\phi}} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

と書ける*3。

同様に、透過する電場 E_t と反射する電場 E_r も

$$\begin{aligned} E_t &= E_i t_f t_e e^{-i\phi/2} + E_i t_f r_e r_f t_e e^{-3i\phi/2} + E_i t_f r_e^2 r_f^2 t_e e^{-5i\phi/2} + \dots \\ &= E_i t_f t_e e^{-i\phi/2} \sum_{n=0}^{\infty} (r_f r_e e^{-i\phi})^n \\ &= E_i \frac{t_f t_e e^{-i\phi/2}}{1 - r_f r_e e^{-i\phi}} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} E_r &= E_i (-r_f) + E_i t_f^2 r_e e^{-i\phi} + E_i t_f^2 r_e^2 r_f e^{-2i\phi} + E_i t_f^2 r_e^3 r_f^2 e^{-3i\phi} + \dots \\ &= E_i (-r_f) + E_i t_f^2 r_e e^{-i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} (r_f r_e e^{-i\phi})^n \\ &= E_i \left(-r_f + \frac{t_f^2 r_e e^{-i\phi}}{1 - r_f r_e e^{-i\phi}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

のようになる。

また、共振器内の光、透過光、反射光の強度をそれぞれ P_c, P_t, P_r とすると、式 (A.3)、

*3 式 (A.3) で $E_i t_f$ をひとかたまりとしてみると、共振器内部に生成される電場は $1/(1 - r_f r_e e^{-i\phi})$ だけ増幅されることがわかる。

式 (A.4)、式 (A.5) より、

$$\begin{aligned} P_c &= |E_c|^2 \\ &= |E_i|^2 \frac{t_f^2}{(1 - r_f r_e)^2 + 4r_f r_e \sin^2(\phi/2)} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} P_t &= |E_t|^2 \\ &= |E_i|^2 \frac{(t_f t_e)^2}{(1 - r_f r_e)^2 + 4r_f r_e \sin^2(\phi/2)} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} P_r &= |E_r|^2 \\ &= |E_i|^2 \frac{\{(r_f^2 + t_f^2)r_e - r_f\}^2 + 4r_f r_e (r_f^2 + t_f^2) \sin^2(\phi/2)}{(1 - r_f r_e)^2 + 4r_f r_e \sin^2(\phi/2)} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

となる。共振器に光のロスがないとき ($r_j^2 + t_j^2 = 1$)、

$$P_t + P_r = |E_i|^2 \quad (\text{A.9})$$

となり、エネルギー保存則が成り立つことが確認できる。

A.2 共振条件

共振器内の光、透過光の強度が最大になるとき、入射光と Fabry-Pérot 共振器が共振しているという。共振条件は整数 n を用いて

$$\phi = 2n\pi \quad (\text{A.10})$$

となる。この条件は式 (A.2) と光の周波数と波長の関係を用いれば

$$2L = n\lambda \quad (\text{A.11})$$

と書き直すことができ、共振器の往復長 $2L$ が光の波長 λ の整数倍になるときに共振することがわかる。

共振付近では ϕ のわずかな変化に対して反射光の位相は大きく変化する。これは光が共振器内を何度も往復することにより ϕ の変化が増幅されたためだと理解することができる。この性質があるため、Fabry-Pérot 共振器はミラー間の距離や光の周波数を精密に測定する干渉計として用いられている。

A.3 フリースペクトラルレンジとフィネス

式 (A.11) の共振条件は

$$\nu = n \frac{c}{2L} \quad (\text{A.12})$$

と書き直すこともできる。共振器長 L を固定してレーザー光の周波数を変化させると、一定の間隔で共振することがわかる。共振が起こる周波数の間隔をフリースペクトラルレンジ (FSR) といいこれを ν_{FSR} と表せば

$$\nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{2L} \quad (\text{A.13})$$

である。

また、共振器内パワーの共振ピークの半値全幅 ν_{FWHM} は式 (A.6) より求めることができ、

$$\frac{1}{(1 - r_f r_e)^2 + 4r_f r_e \sin^2(\pi L \nu_{\text{FWHM}}/c)} = \frac{1}{2} \quad (\text{A.14})$$

を解けばよい。ここで

$$\frac{\pi L \nu_{\text{FWHM}}}{c} = \frac{\pi \nu_{\text{FWHM}}}{2 \nu_{\text{FSR}}} \ll 1 \quad (\text{A.15})$$

とすると*4

$$\sin(\pi L \nu_{\text{FWHM}}/c) \simeq \pi L \nu_{\text{FWHM}}/c \quad (\text{A.16})$$

と近似でき、

$$\nu_{\text{FWHM}} = \frac{c(1 - r_f r_e)}{2\pi L \sqrt{r_f r_e}} \quad (\text{A.17})$$

と求まる。 ν_{FSR} と ν_{FWHM} の比は共振の鋭さを表し、フィネスという。フィネスの表式は

$$\mathcal{F} = \frac{\nu_{\text{FSR}}}{\nu_{\text{FWHM}}} = \frac{\pi \sqrt{r_f r_e}}{1 - r_f r_e} \quad (\text{A.18})$$

となる。ミラーの反射率を 1 に近づけるほどフィネスは大きくなる。図 A.2 からわかるように、フィネスが大きいほど共振器内パワーは大きくなり、共振は鋭くなる。

*4 一般に共振器を用いるときはフィネス (式 (A.18) を参照) を 1 より十分大きくとるのでこの仮定は妥当である。

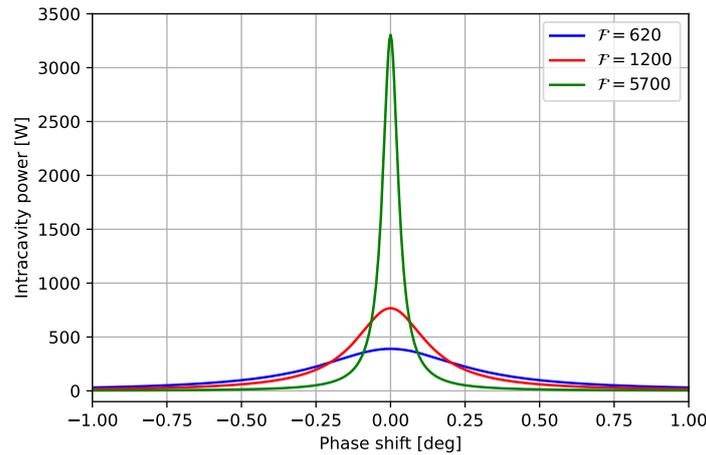


図 A.2: Fabry-Pérot 共振器の共振器内パワーのフィネス依存性。エンドミラーの強度反射率を 100% で固定し、フロントミラーの強度反射率を変化させてフィネスを変えながら共振器内パワーを計算した。共振器の幾何学的構成は一致している。

A.4 共振器のローパス特性

共振器は 1 次のローパスフィルタの性質をもつ [52, 56]。そのカットオフ周波数はキャビティポール周波数と呼ばれ、

$$f_c = \frac{\nu_{\text{FWHM}}}{2} = \frac{\nu_{\text{FSR}}}{2\mathcal{F}} = \frac{c}{4L\mathcal{F}} \quad (\text{A.19})$$

である。

実験室スケールを想定し、 $L = 10 \text{ cm}$, $\mathcal{F} = 300$ を代入すると、 $f_c = 2.5 \text{ MHz}$ となる。一般的な観測周波数帯に比べて大幅に高いので、実験室スケールでは共振器のローパス特性は無視できる。

一方で、 $L = 3 \text{ km}$, $\mathcal{F} = 150$ を代入すると、 $f_c = 32 \text{ Hz}$ となる。重力波望遠鏡のような大きなスケールでは、共振器のローパス特性を考慮する必要がある。

A.5 ミラーの反射率による共振器の分類

フィネスは共振器に光をためる能力を表す物理量であるが、フィネスが同じ共振器でも、フロントミラーとエンドミラーの反射率の大小関係によって共振器内パワーが異なる。フロントミラーとエンドミラーの反射率の大小関係によって、クリティカルカップル（またはインピーダンスマッチド）、オーバーカップル、アンダーカップルの 3 つに分類することができる [65]。

A.5.1 オーバーカップル共振器

フロントミラーの反射率よりエンドミラーの反射率が高い ($r_f < r_e$) 共振器をオーバーカップル共振器と呼ぶ。共振器に光のロスがないとき ($r^2 + t^2 = 1$)、共振器内の光の強度は式 (A.6) より

$$P_c = |E_i|^2 \frac{1 - r_f^2}{(1 - r_f r_e)^2} > |E_i|^2 \frac{1}{1 - r_f r_e} \quad (\text{A.20})$$

となる。この式は、共振器内の光の強度が大きくなる、すなわち、共振器内に光がたまりやすいことを表している。重力波望遠鏡の腕共振器では、散射雑音を低減するために共振器内パワーが大きい方が望ましく、オーバーカップル共振器が使用されている [13]。

A.5.2 クリティカルカップル共振器

フロントミラーとエンドミラーの反射率が等しい ($r_f = r_e$) 共振器をクリティカルカップル共振器と呼ぶ。 $r_f = r_e \equiv r, t_f = t_e \equiv t$ とすると、共振状態のときの透過光と反射光の強度は、式 (A.7) と式 (A.8) より

$$P_t = |E_i|^2 \left(\frac{t^2}{1 - r^2} \right)^2 \quad (\text{A.21})$$

$$P_r = |E_i|^2 r^2 \left(\frac{r^2 + t^2 - 1}{1 - r^2} \right)^2 \quad (\text{A.22})$$

となる。

特に、共振器に光のロスがないとき ($r^2 + t^2 = 1$)、

$$P_t = |E_i|^2 \quad (\text{A.23})$$

$$P_r = 0 \quad (\text{A.24})$$

が成り立つ。これは共振器に入射した光のエネルギーがすべて透過光として共振器から抜けていくことを示しており、共振器は単なる光の遅延装置として働く。KAGRA のモードクリーナーはクリティカルカップル共振器となるように設計されている [66]。

共振器内の光の強度は式 (A.6) より

$$P_c = |E_i|^2 \frac{1}{1 - r^2} \quad (\text{A.25})$$

となる。

A.5.3 アンダーカップル共振器

フロントミラーの反射率よりエンドミラーの反射率が小さい ($r_f > r_e$) 共振器をアンダーカップル共振器と呼ぶ。共振器に光のロスがないとき ($r^2 + t^2 = 1$)、共振器内の光の

強度は式 (A.6) より

$$P_c = |E_i|^2 \frac{1 - r_f^2}{(1 - r_f r_e)^2} < |E_i|^2 \frac{1}{1 - r_f r_e} \quad (\text{A.26})$$

となる。この式は、共振器内に光がたまりにくいことを表している。光がたまりにくい理由は、フロントミラーの反射率が大きいため、共振器の中に光が入りにくいためだと理解できる。

A.5.4 共振器内パワーの比較

干渉計シミュレーションソフト FINESSE [57] を用いてオーバーカップル共振器、クリティカルカップル共振器、アンダーカップル共振器それぞれの共振器内パワー、反射光強度、透過光強度を計算した。オーバーカップル共振器は $(r_f^2, r_e^2) = (98\%, 99.9\%)$ 、クリティカルカップル共振器は $(r_f^2, r_e^2) = (99\%, 99\%)$ 、アンダーカップル共振器は $(r_f^2, r_e^2) = (99.9\%, 98\%)$ とした。これにより、共振器のフィネスはすべて 300 となる。また、共振器の幾何学的構成は一致させた。

共振器内パワーの計算結果を図 A.3 に示す。共振器のフィネスが同じでも、フロントミラーとエンドミラーの反射率のカップリングの違いによって共振器内パワーが異なることがわかる。

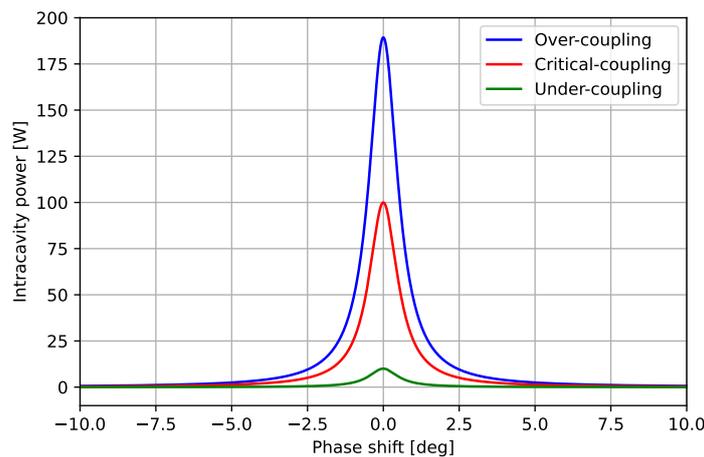


図 A.3: Fabry-Pérot 共振器の共振器内パワーのカップリング依存性。

反射光強度と透過光強度の計算結果を図 A.4 に示す。オーバーカップル共振器とアンダーカップル共振器では共振時に反射光量は 0 にはならないが、理想的な (ロスがない) クリティカルカップル共振器では共振時に入射光がすべて透過光として共振器から抜けていくことがわかる。

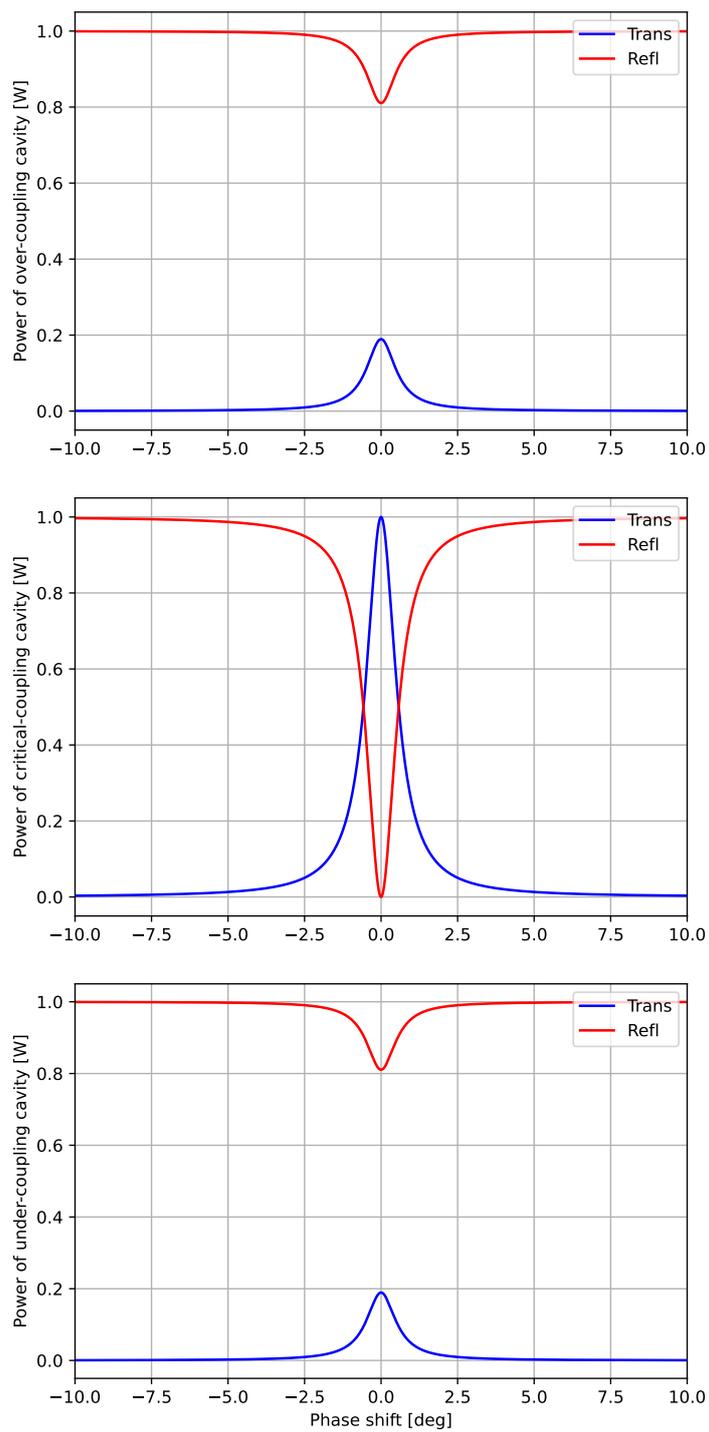


図 A.4: Fabry-Pérot 共振器の反射光強度と透過光強度のカップリング依存性。上から順に、オーバーカップル共振器、クリティカルカップル共振器、アンダーカップル共振器。

A.6 共振器内にロスが存在する場合のフィネス

共振器に光のロスがなく ($r_j^2 + t_j^2 = 1$)、ミラーの反射率が十分大きい ($t_f \ll 1$ かつ $t_e \ll 1$) ときには、式 (A.18) は

$$\mathcal{F} \simeq \frac{2\pi}{1 - r_f^2 r_e^2} = \frac{2\pi}{t_f^2 + t_e^2} \quad (\text{A.27})$$

と近似することができる。ここまでは、共振器での光のロスがミラーの透過成分のみである理想的な状況を考えていた。ミラーの透過成分以外にも共振器内を周回する間に光が l^2 だけ損失するとした場合を考えると、フィネスは

$$\mathcal{F} \simeq \frac{2\pi}{t_f^2 + t_e^2 + l^2} \quad (\text{A.28})$$

と表すことができる。

A.7 3枚以上のミラーで構成される共振器のフィネス

実際の実験系では、2枚のミラーからなる線形共振器だけでなく、リング共振器や折り返し共振器を製作する場合がある。3枚以上のミラーで構成される共振器に対しても同様に、透過率や反射率、フリースペクトラルレンジやフィネスを考えることができる。

共振器の周回長を L とすると、フリースペクトラルレンジは

$$\nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{L} \quad (\text{A.29})$$

である。

共振器が N 枚のミラーで構成されるとし、それぞれのミラーの振幅反射率、振幅透過率を $r_1, \dots, r_N, t_1, \dots, t_N$ とおく。共振器を1周する間にすべてのミラーで1回だけ反射されるとすると、この共振器のフィネスは

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{r_1 \cdots r_N}}{1 - r_1 \cdots r_N} \simeq \frac{2\pi}{t_1^2 + \cdots + t_N^2} \quad (\text{A.30})$$

となる。

補遺 B

Pound-Drever-Hall 法

Pound-Drever-Hall (PDF) 法 [48, 49] は、Fabry-Pérot 共振器の長さ変動信号を得る手法である。共振器長のフィードバック制御によく用いられる。共振器長を制御するためには、共振器が共振状態のとき 0 であり、共振器長の変動に 1 次で比例する信号が必要である。PDH 法では、レーザー光に位相変調をかけ、発生したサイドバンドとキャリアの干渉によって上の条件を満たす信号を取り出す。ここでは、PDH 法の構成・原理などについて簡単にまとめる*1。

B.1 実験系の構成

PDH 法は図 B.1 のような実験系で行う。レーザー光に位相変調をかけ、発生したサイドバンドとキャリアの干渉を RFPD で検出する。ミキサで復調することによって PDH 信号を得られる。PDH 信号を適切なフィルタを通し、共振器長やレーザー周波数に返すことによってフィードバック制御を行うことができる。

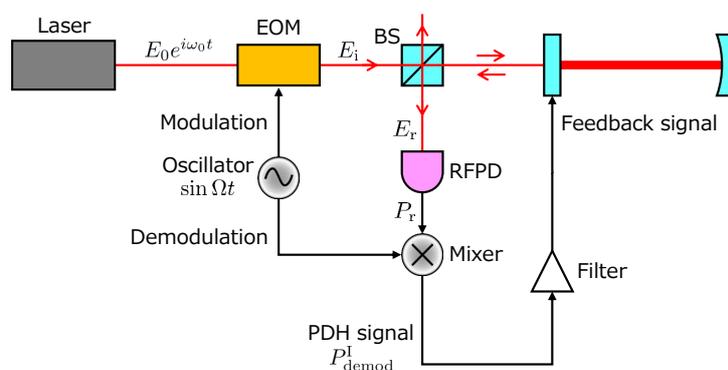


図 B.1: PDH 法の実験系。

*1 [52, 67] を参考にした。

B.2 原理

レーザー光の電場を $E_0 e^{i\omega_0 t}$ とおく。電気光学変調器 (EOM) で周波数 Ω の位相変調をかけるとき、EOM 通過後の電場 E_i は

$$\begin{aligned} E_i &= E_0 e^{i(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t)} \\ &= E_0 e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{in\Omega t} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

と書ける。ただし、 $J_n(\beta)$ は第 1 種 Bessel 関数、 β は変調指数である。 $\beta \ll 1$ として近似を行うと、

$$\begin{aligned} E_i &\simeq E_0 e^{i\omega_0 t} \{J_0(\beta) + 2iJ_1(\beta) \sin \Omega t\} \\ &= E_0 \left\{ J_0(\beta) e^{i\omega_0 t} + J_1(\beta) e^{i(\omega_0 + \Omega)t} - J_1(\beta) e^{i(\omega_0 - \Omega)t} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

となる。この式には 3 つの周波数成分が含まれている。元の光の周波数 ω_0 の成分をキャリアと呼ぶ。 $\omega_0 \pm \Omega$ の成分はそれぞれ ± 1 次のサイドバンドと呼ばれる。

式 (A.5) より、共振器の振幅反射率は

$$r = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\phi}} \quad (\text{B.3})$$

となる。式 (A.2) より、 ϕ はレーザー光の周波数 ω_0 に依存するから、 r も ω_0 に依存する。レーザー周波数が ω のとき $r = r(\omega)$ とすると、反射光の電場は

$$E_r = E_0 \left\{ r(\omega_0) J_0(\beta) e^{i\omega_0 t} + r(\omega_0 + \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega_0 + \Omega)t} - r(\omega_0 - \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega_0 - \Omega)t} \right\} \quad (\text{B.4})$$

となる。反射光を PD で検出すると、その出力 P_r は

$$\begin{aligned} P_r &= |E_r|^2 \\ &= P_0 \left\{ |J_0(\beta) r(\omega_0)|^2 + |J_1(\beta) r(\omega_0 + \Omega)|^2 + |J_1(\beta) r(\omega_0 - \Omega)|^2 \right\} \\ &\quad + 2P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \text{Re} \left[\{ r(\omega_0) r^*(\omega_0 + \Omega) - r^*(\omega_0) r(\omega_0 - \Omega) \} e^{-i\Omega t} \right] \\ &\quad + (2\Omega \text{ terms}) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

となる。ここで、 $P_0 = |E_0|^2$ とした。この式の第 1 項が DC 成分である。第 2 項は変調周波数成分であり、一般に高周波数であるため、取得には RFPD を用いる。第 2 項を in

phase (レーザー光の位相変調と同じ $\sin \Omega t$) で復調^{*2*3}すると PDH 信号が得られ、

$$P_{\text{demod}}^I = P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \text{Im}[r(\omega_0) r^*(\omega_0 + \Omega) - r^*(\omega_0) r(\omega_0 - \Omega)] \quad (\text{B.7})$$

である。なお、quadrature phase ($\cos \Omega t$) で復調すると

$$P_{\text{demod}}^Q = P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \text{Re}[r(\omega_0) r^*(\omega_0 + \Omega) - r^*(\omega_0) r(\omega_0 - \Omega)] \quad (\text{B.8})$$

となる。

一般に、変調周波数は共振のピーク幅に対して十分大きく選ぶ ($\Omega \gg \nu_{\text{FWHM}}$)。キャリアの共振付近では、 $\omega_0 \pm \Omega$ の周波数をもつサイドバンドは共振器でほとんど反射されるため、 $r(\omega_0 + \Omega) \simeq r^*(\omega_0 - \Omega) \simeq r_s (\simeq -1)$ が成り立つ。また、キャリアの反射率 $r(\omega_0) \equiv r_c$ とおく。これらを式 (B.7) に代入すると、

$$P_{\text{demod}}^I = P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \text{Im}[r_c r_s^* - r_c^* r_s] \quad (\text{B.9})$$

となる。

キャリアの共振付近 $\phi = 2n\pi + \delta\phi$ (n は整数, $\delta\phi \ll 1$) での PDH 信号を具体的に計算すると、 $r_s \simeq -1$ として

$$\begin{aligned} P_{\text{demod}}^I &\simeq 2P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \text{Im}[r_c] \\ &= 2P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \frac{t_1^2 r_2 \sin \phi}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \phi} \\ &= 4P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \frac{t_1^2 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \delta\phi \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

となる。PDH 信号は共振器が共振状態のとき 0 であり、共振付近で $\delta\phi$ に比例した信号となっていることがわかる。

ここで、

$$\delta\phi \propto \omega \delta L + L \delta\omega \quad (\text{B.11})$$

なので、 $\delta\omega = 0$ ならば、共振器長の変動に比例した信号が得られる。しかし、一般に $\delta\omega \neq 0$ であり、PDH 法では共振器長の変動と周波数の変動は区別がつかない。

^{*2} ミキサを用いて $\sin \Omega t$ をかけた後にローパスフィルタに通して DC 成分を取り出すことで復調することができる。

$$A \sin \Omega t \times \sin \Omega t = (A - A \cos 2\Omega t)/2 \quad (\text{B.6})$$

より、復調すると元の係数の半分になる。

^{*3} 実際の実験で復調を行う際には、ケーブルや回路による位相遅れが発生するので、PDH 信号を見ながら復調位相を調整する必要がある。

B.3 PDH 信号

干渉計シミュレーションソフト FINESSE [57] を用いて PDH 信号を図示すると図 B.2 のようになる。quadrature phase で復調した信号も示した。

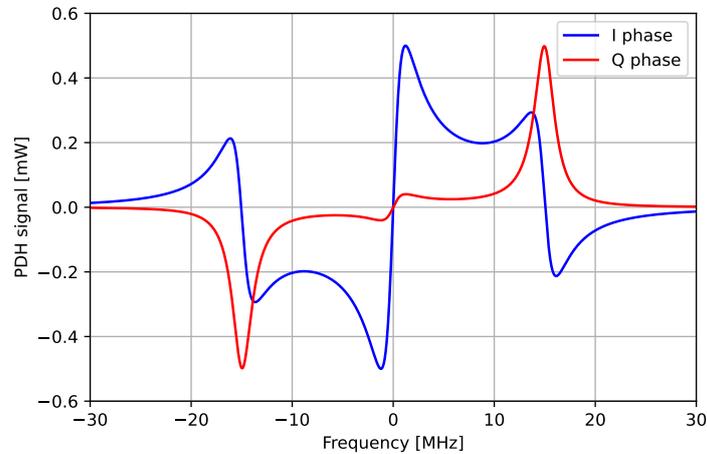


図 B.2: PDH 信号。共振点を 0 Hz とし、 $\Omega = 15$ MHz, $\nu_{\text{FWHM}} = 2.4$ MHz, $\beta = 0.001$ として計算した。

図から、復調位相を正しく選ぶことで PDH 信号を得られることがわかる。また、フィードバック制御時に符号を間違えるとサイドバンドの方に制御されることもわかる。制御時には、フィルタの符号を反転させて制御を試し、正しい符号の方を選ぶ必要がある。

B.4 透過光を用いた PDH 法

B.1 節において、PDH 法では一般に変調周波数を共振のピーク幅に対して十分大きく選ぶ ($\Omega \gg \nu_{\text{FWHM}}$) と述べた。このように変調周波数を選ぶ理由は、共振器の内部に入り共振する光 (キャリア) と共振器内に入らず反射される光 (サイドバンド) の干渉をみることで共振状態を判定するからである。

透過光にはサイドバンドはほとんど現れないため、透過光を使って PDH 信号を得ることは難しい。しかし、透過光にもサイドバンドはわずかに現れるため、透過光を使って PDH 法を行うこともある。実際、Advanced Virgo では透過光を用いた PDH 法を採用している [68]。また、共振のピーク幅が変調周波数に比べて広い場合には ($\Omega < \nu_{\text{FWHM}}$)、透過光にもサイドバンドが十分出てくるので、このように実験する場合もある。サイドバンドが透過光に現れるか否かについては、共振器のローパス特性で理解することができる (A.4 節を参照)。

補遺 C

フィードバック制御

ここでは、本論文を読むにあたって必要なフィードバック制御の基本について簡単にまとめる。より詳しく知りたい場合には [69] などを参照のこと。

C.1 フィードバック制御の原理

線形システム^{*1}によるフィードバック制御について考える。フィードバック制御のブロックダイアグラムは、図 C.1 のように表される。制御対象物の制御したい物理量 x_0 をセンサ S で検出し、フィルタ F を通した後、アクチュエータ A により制御対象物にフィードバックされる。このフィードバック制御により、元の変動量 x_0 は、残留変動 x まで抑えられる。なお、センサで残留変動を検出した信号 $v_{er} = Sx$ をエラー信号と呼び、アクチュエータに返す信号 $v_{fb} = FSx$ をフィードバック信号と呼ぶ。

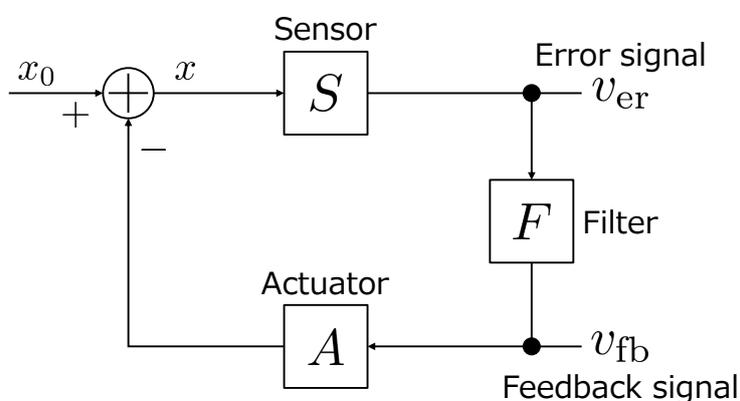


図 C.1: フィードバック制御のブロックダイアグラム。

^{*1} 線形システムについては [64] が詳しい。

残留変動をブロックダイアグラムにより計算すると、

$$x = x_0 - SFAx \quad (\text{C.1})$$

であり、オープンループ伝達関数 $G = AFS$ として

$$x = \frac{1}{1+G}x_0 \quad (\text{C.2})$$

となる。したがって、オープンループゲイン $|G|$ を十分大きくすることで、残留変動を小さく抑えることが可能になる。

フィードバック制御が安定であるかを判定する方法の1つに、Nyquist 判定法がある。オープンループゲインが1、すなわち $|G| = 1$ となる周波数を Unity Gain Frequency (UGF) と呼ぶ。UGF での位相 $\arg G$ の -180 deg からの差を位相余裕と呼ぶ。経験的に、位相余裕が 30 deg 以上あるとき、十分安定なフィードバック制御を行うことができる。

Fabry-Pérot 共振器の長さの制御を行うとき、エラー信号を取得する手法として PDH 法 (第 B 章を参照) がよく用いられる。一般に、共振器長変動は低周波数帯で大きいため、PDH 信号をローパスフィルタに通してフィードバック制御を行う。このとき、UGF 以下の周波数帯では制御によって共振器長変動が抑えられ、UGF 以上の周波数帯では共振器長変動はそのままフィードバックされる。位相余裕が小さい場合 ($\arg G \sim -180 \text{ deg}$) には、UGF 付近の周波数帯において共振器長変動を増幅するようにフィードバックしてしまうため、制御が不安定になる。

C.2 オープンループ伝達関数の測定方法

フィードバックループ中に信号を注入して、その前後の信号の比をとることで、オープンループ伝達関数 G を測定できる。

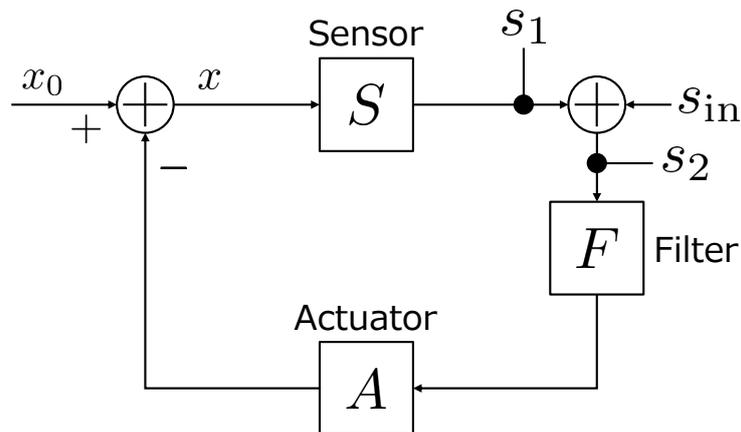


図 C.2: オープンループ伝達関数の測定方法。

図 C.2 のようなフィードバックループを考え、センサとフィルタの間に信号 s_{in} を注入する。このとき、ループ内の信号 x は、

$$x = x_0 - AF(Sx + s_{\text{in}}) \quad (\text{C.3})$$

を満たすので

$$x = \frac{x_0 - As_{\text{in}}}{1 + G} \quad (\text{C.4})$$

である。したがって、信号を注入した前後の信号はそれぞれ

$$s_1 = \frac{SFx_0 - Gs_{\text{in}}}{1 + G} \quad (\text{C.5})$$

$$s_2 = \frac{SFx_0 + s_{\text{in}}}{1 + G} \quad (\text{C.6})$$

となる。注入する信号が十分大きく、 $s_{\text{in}} \gg SFx_0$ が成り立つとき、

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{SFx_0 - Gs_{\text{in}}}{SFx_0 + s_{\text{in}}} \simeq -G \quad (\text{C.7})$$

であり、信号を注入した前後の信号の比を取ることで、オープンループ伝達関数を測定することができる。

C.3 階層制御

フィードバックループが複数あるとき、そのフィードバック制御は階層制御と呼ばれる。

階層制御を行う目的は様々である。例えば、長時間の測定が必要となる実験において、アクチュエータのダイナミックレンジが不足しているために長時間の制御が行えないとき、ダイナミックレンジが大きいアクチュエータを導入して階層制御を行うことで解決できる [70]。また、本実験のように、変動の原因となっている制御対象物そのものにフィードバックすることにより、他の実験系を余計に乱さないようにするという目的で導入されることもある。

ここでは図 C.3 のような二重にループが組まれたフィードバック制御を考える。

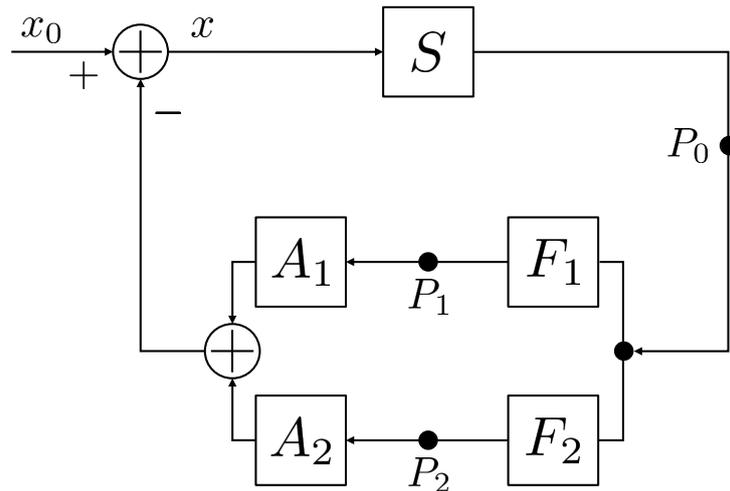


図 C.3: 階層制御のブロックダイアグラム。

まず、このフィードバック制御の残留変動 x について考える。1つのフィードバックループのときと比べて、 $AF = A_1F_1 + A_2F_2$ となっているので、

$$x = \frac{1}{1 + G_1 + G_2} x_0 \quad (\text{C.8})$$

と計算できる。ただし、 $G_1 = A_1F_1S$, $G_2 = A_2F_2S$ とした。

また、同様に考えて、点 P_0 に信号を注入し前後の信号の比を取ることでオープンループ伝達関数を測定すると、 $-G_1 - G_2$ を測定することができる。次に、各ループの内部の点 P_1, P_2 に信号を注入する場合考える。 A_1F_1S のループは、伝達関数としては $S/(1 + G_1)$ である。したがって、点 P_2 においてオープンループ伝達関数を測定すると、 $G_2/(1 + G_1)$ の測定結果を得る。同様に、点 P_1 においてオープンループ伝達関数を測定すると、 $G_1/(1 + G_2)$ の測定結果を得る。

安定なフィードバック制御であるといえる条件は、1つのフィードバックループのときと同様に全体のオープンループ伝達関数 $G_1 + G_2$ に対して位相余裕が 30 deg 以上あることに加え、2つの制御ループのゲインが等しくなる ($|G_1| = |G_2|$) 周波数において、2つの制御ループの相対的な位相差が 180 deg と比べて十分離れていることである。

実験的には、全体のオープンループ伝達関数 $G_1 + G_2$ は大きいため、直接測定することは難しい。 $G_1/(1 + G_2)$ と $G_2/(1 + G_1)$ を測定し、その結果から G_1 と G_2 を求めることが多い。

補遺 D

共振型 RFPD の製作

共振器を PDH 法で制御するために、プリント基板 RFPD ver.2 [71] を用いて共振型 RFPD を製作した。この章では、RFPD の製作方法、共振周波数と Q 値の測定結果、プリント基板の浮遊キャパシタについてまとめる。

D.1 RFPD の製作

図 D.1 のように素子をプリント基板 RFPD ver.2 にはんだ付けで付けた。プリント基板には可変コンデンサ CV1 用の穴が 4 つ用意されている。しかし、使用した可変コンデンサの足は 2 本だった (Vishay, BFC280905217)。そこで、可変コンデンサ用の残りの 2 本の足を利用し、 $C1'$ を $C1$, $L1$ と並列になるように付けた。

主共振器用の 15 MHz の RFPD では、 $(C1', C1, L1) = (22 \text{ pF}, 33 \text{ pF}, 1 \mu\text{H})$ とした。最大容量 18 pF の可変コンデンサ (Vishay, BFC280905217) を調整することにより、共振周波数 14.1 MHz–15.2 MHz を実現することができた。

補助共振器用の 3.51 MHz の RFPD では、 $(C1', C1, L1) = (51 \text{ pF}, 2.2 \text{ nF}, 1 \mu\text{H})$ とした。最大容量 18 pF の可変コンデンサ (Vishay, BFC280905217) を調整することにより、共振周波数 3.51 MHz–3.52 MHz を実現することができた。

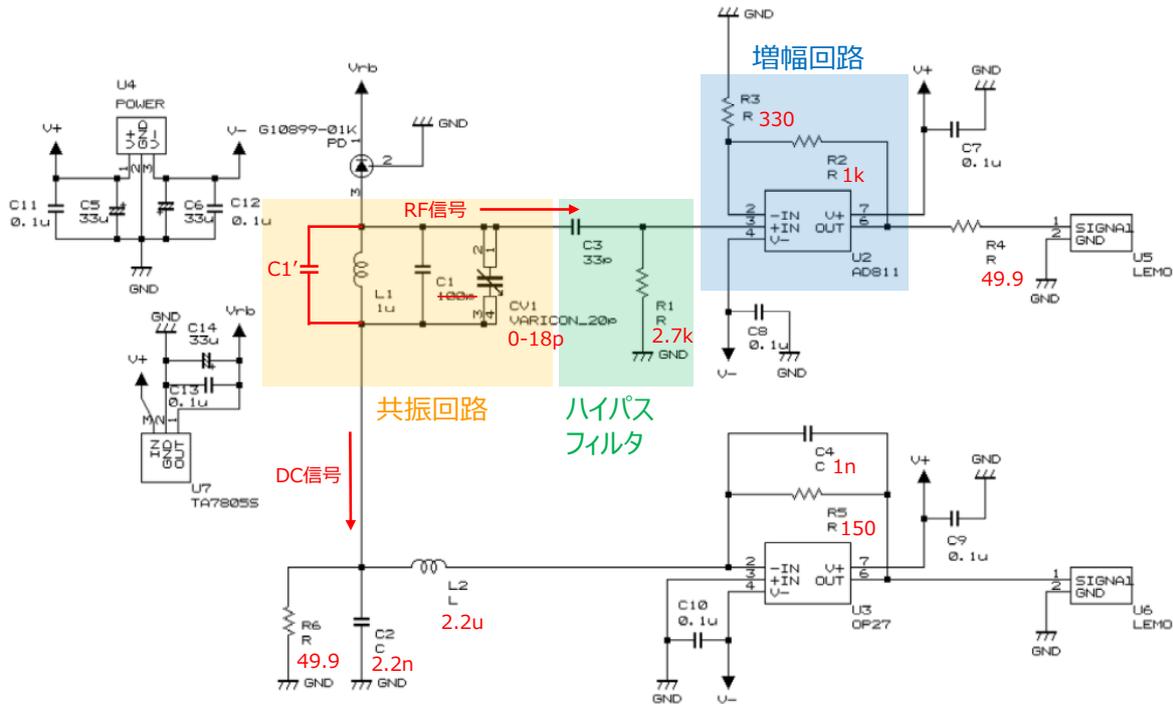


図 D.1: 共振型 RFPD の回路図 ([71] より改変)。

D.2 共振周波数と Q 値の測定

製作した共振型 RFPD の共振周波数と Q 値を Moku:Lab を用いて測定した。Moku:Lab から正弦波を赤外 LED に入力し、赤外 LED からの光を RFPD に入射した。RFPD の RF 信号の出力を Moku:Lab に入力することで伝達関数を測定した。結果は図 D.2 と表 D.1 のようになった。

なお、伝達関数の測定結果のフィッティングには、LC 共振回路の伝達関数に定数倍の自由度を与えた関数

$$H(f) = a \times \frac{f}{\sqrt{(f^2 - f_0^2)^2 + b^2 f^2}} \quad (\text{D.1})$$

を用いた^{*1}。 f_0 は共振周波数である。Q 値は $H(f) = a/2$ となる $f_1, f_2 (f_1 < f_2)$ を用いて

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \quad (\text{D.2})$$

で求められる。

*1 式の導出は [72] を参照。

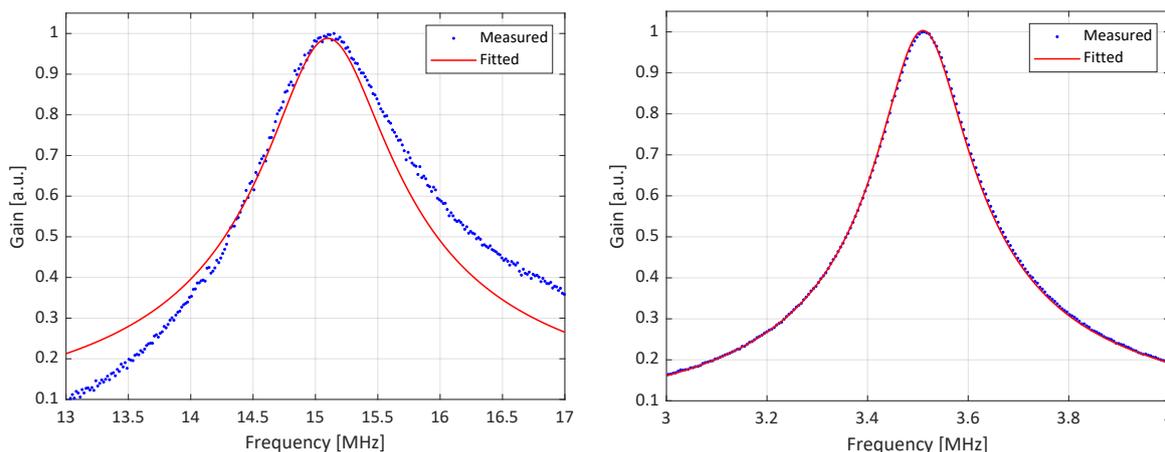


図 D.2: 共振型 RFPD の伝達関数。左: 主共振器用。右: 補助共振器用。

表 D.1: 共振型 RFPD の共振周波数と Q 値。

RFPD	共振周波数	Q 値
主共振器用	15.1 MHz	9.94
補助共振器用	3.51 MHz	11.2

D.3 プリント基板の浮遊キャパシタ

$(C1', C1, L1) = (22 \text{ pF}, 33 \text{ pF}, 1 \mu\text{H})$ としたとき、理論的には RFPD の共振周波数は 21.4 MHz となるが、実際には 15.2 MHz であった。また、 $(C1', C1, L1) = (51 \text{ pF}, 100 \text{ pF}, 1 \mu\text{H})$ としたとき、理論的には RFPD の共振周波数は 13.0 MHz となるが、実際には 11.3 MHz であった。

これらの結果から、プリント基板 RFPD ver.2 の浮遊キャパシタは $\sim 50 \text{ pF}$ であると求まった。なお、同じ受光素子 (浜松ホトニクス, G10899-01K) を用いているため、 $\sim 50 \text{ pF}$ にはプリント基板だけでなく受光素子の容量も寄与している可能性がある。今後、プリント基板 RFPD ver.2 に他の受光素子を付けることによってどちらが大きくしているのか確認できると見込まれる。

補遺 E

実験装置詳細

ここでは、本実験で使用した実験装置の詳細についてまとめる。

E.1 本実験で使用した部品・機器の一覧

本実験で使用した機器・部品の品名、メーカー、品番を以下の表にまとめた。なお、共振器用の部品については次の E.2 節を参照のこと。

表 E.1: 本実験で使用した光学素子。

品名	メーカー	品番
共振器 フロントミラー	Layertec	109852
共振器 折り返しミラー	Layertec	109852
共振器 中間ミラー	Layertec	170391
共振器 エンドミラー	Layertec	170393
その他のミラー	Thorlabs	BB1-E03-10
ビームスプリッタ (キューブ)	Thorlabs	BS005
ビームスプリッタ (プレート)	Thorlabs	BSW11
ピックオフビームスプリッタ	Thorlabs	BS041
レンズ	Thorlabs	LSB04-C
電気光学変調器	Thorlabs	EO-PM-NR-C2
ビームダンパ	Thorlabs	LB1/M
ファイバコリメータ	Thorlabs	F230APC-1064
偏波保持ファイバ	Thorlabs	P3-1064PM-FC-1

表 E.2: 本実験で使用したレーザー光源・受光素子。

品名	メーカー	品番
レーザー光源	Lightwave Electronics	126-1064-50
PD の受光素子	浜松ホトニクス	S3759
RFPD の受光素子	浜松ホトニクス	G10899-01K
RFQPD の受光素子	浜松ホトニクス	G6849

表 E.3: 本実験で使用した真空関連の部品・機器。

品名	メーカー	品番
真空ポンプ	檜山工業	NeoDry30E
真空計	キャノンアネルバ	M-336MX
真空計コントローラ	キャノンアネルバ	M-601GC
真空光ファイバフィードスルー	光貿易	特注
真空側ソケットコンタクト	コスモ・テック	SAC16
大気側ソケットコンタクト	コスモ・テック	SVC16
真空側 絶縁インサート	コスモ・テック	VSPI22GA
LEMO 端子付きフランジ	コスモ・テック	特注
異形変換継手	コスモ・サイエンス	VCN-JIS150/NW40-VF

表 E.4: 本実験で使用したその他の部品・機器。

品名	メーカー	品番
ビームプロファイラ	CINOGY	CMOS-1202
パワーメータ	Thorlabs	S132C
データロガー	横河計測	DL850E
スペクトル・サーボアナライザ	小野測器	DS2000
透過光モニタ用 CCD カメラ	ワテック	WAT-902H3 SUPREME
透過光モニタ用ディスプレイ	TOHOTAIYO	TH-TV16TW01
画面分割器	ブロードウォッチ	SEC-DIV-4CH
ファンクションジェネレータ	Tektronix	AFG3052C
ファンクションジェネレータ	Tektronix	AFG3102C
ファンクションジェネレータ	Tektronix	AFG31000
フィルター付きプリアンプ	Stanford Research Systems	SR560
ピエゾアンプ	Thorlabs	MDT693B
RF スプリッタ	Mini Circuits	ZFRSC-2050+
RF スプリッタ	Mini Circuits	ZMSC-4-1+
ミキサ	Mini Circuits	ZX05-1LHW-S+
復調用ローパスフィルタ	Mini Circuits	BLP-1.9+
ピコモータドライバ	New Focus	8742
ピコモータハンドパッド	New Focus	8758

E.2 結合光共振器の部品の一覧

本研究の共振器の設計は独創性が高いため、使用した部品や設計について特に詳しく述べる。共振器の製作については、5.5.2 節を参照のこと。

使用した部品を以下の表にまとめた。共振器用スペーサーとスペーサー固定用板はツバタに製作していただき、ミラー固定用治具は東京大学大学院理学系研究科試作室に製作していただいた。

表 E.5: 結合光共振器に使用した部品。

品名	メーカー	品番
スペーサー	ツバタ	特注
スペーサー固定用板	ツバタ	特注
ミラー固定用治具	試作室	特注
ピエゾ素子	Thorlabs	PC4WL
O リング	MiSUMi	NPA20
段付きボルト	MiSUMi	DBS4-8-6
段付きボルト	MiSUMi	DBS4-8-8
段付きボルト	MiSUMi	DBS4-10-8

共振器の設計図の詳細を図 E.1 に、エンドミラーの固定方法の詳細を図 E.2 に示す。使用した部品のメーカーと品番も書き込まれている。スペーサー固定用板とミラー固定用治具をとめるためのねじには、位置決定精度を向上させるために MiSUMi の段付きボルトを使用した。治具の厚み・他の治具との干渉防止などに応じて使用する段付きボルトの長さを変えている。また、折り返しミラーと中間ミラーを固定するための段付きボルトが干渉しないように、折り返しミラーの治具は他のものより大きく設計されている (図 E.1 (下))。

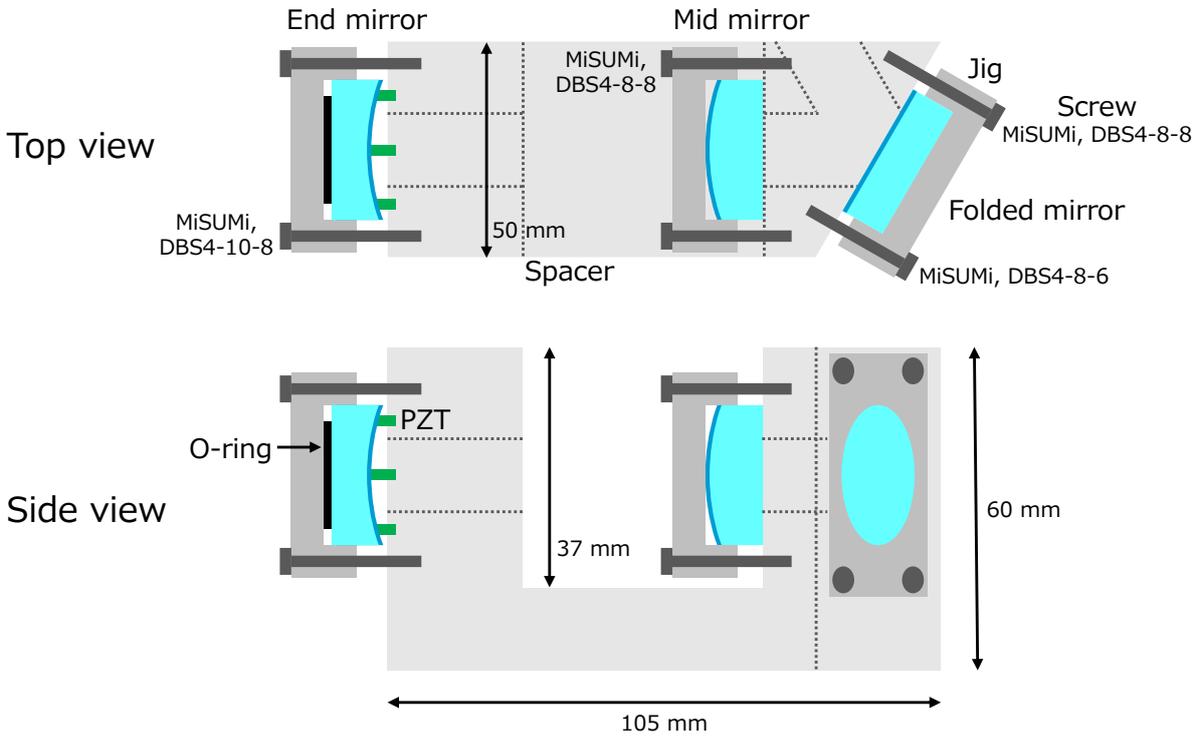


図 E.1: 共振器用アルミニウム製スペーサーの設計図 (詳細)。上: 上から見た図。下: 横から見た図。

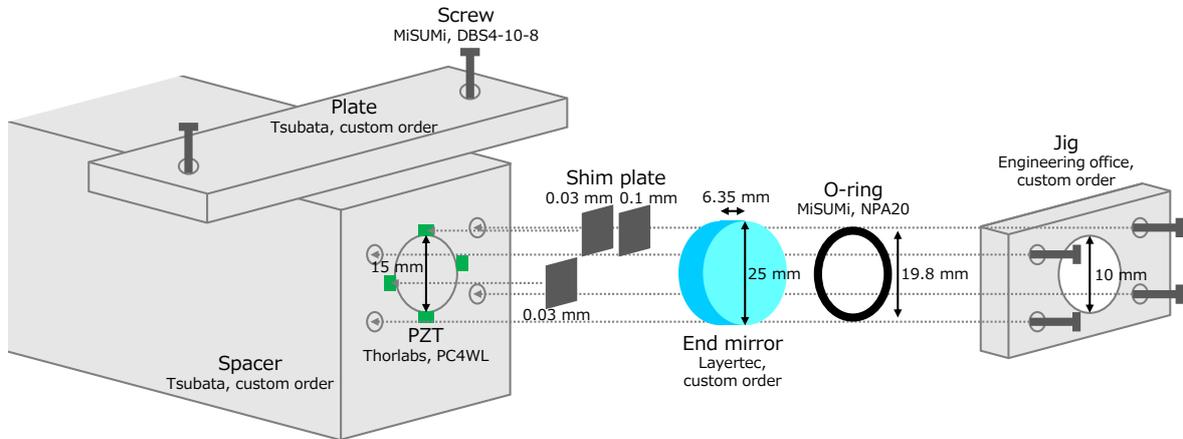


図 E.2: 共振器用アルミニウム製スペーサーへのエンドミラーの取り付け方 (詳細)。

参考文献

第 1 章 はじめに

- [1] A. Einstein, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, **1**, 688–696 (1916).
Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation.
- [2] A. Einstein, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, **1**, 154–167 (1918).
Über Gravitationswellen.
- [3] R. A. Hulse and J. H. Taylor, The Astrophysical Journal, **195**, L51–L53 (1975).
Discovery of a pulsar in a binary system.
- [4] J. H. Taylor and J. M. Weisberg, The Astrophysical Journal, **253**, 908–920 (1982).
A new test of general relativity: Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16.
- [5] J. Aasi *et al.*, Classical and Quantum Gravity, **32**, 074001 (2015).
Advanced LIGO.
- [6] B. P. Abbott *et al.*, Physical Review Letters, **116**, 061102 (2016).
Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger.
- [7] F. Acernese *et al.*, Classical and Quantum Gravity, **32**, 024001 (2015).
Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector.
- [8] R. Abbott *et al.*, [arXiv:2111.03606v2](https://arxiv.org/abs/2111.03606v2) [gr-qc] (2021).
GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run.
- [9] B. S. Sathyaprakash and B. F. Schutz, Living Reviews in Relativity, **12** (2009).
Physics, astrophysics and cosmology with gravitational waves.
- [10] N. Yunes and X. Siemens, Living Reviews in Relativity, **16** (2013).

- Gravitational-wave tests of general relativity with ground-based detectors and pulsar-timing arrays.*
- [11] B. P. Abbott *et al.*, Physical Review Letters, **116**, 221101 (2016).
Tests of General Relativity with GW150914.
- [12] K. Somiya, Classical and Quantum Gravity, **29**, 124007 (2012).
Detector configuration of KAGRA—the Japanese cryogenic gravitational-wave detector.
- [13] Y. Aso *et al.*, Physical Review D, **88**, 043007 (2013).
Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector.
- [14] K. Danzmann *et al.*, Classical and Quantum Gravity, **13**, A247–A250 (1996).
LISA: laser interferometer space antenna for gravitational wave measurements.
- [15] S. Kawamura *et al.*, Classical and Quantum Gravity **23**, S125–S131 (2006).
The Japanese space gravitational wave antenna - DECIGO.
- [16] M. Ando *et al.*, Physical Review Letters, **105**, 161101 (2010).
Torsion-Bar Antenna for Low-Frequency Gravitational-Wave Observations.
- [17] T. Shimoda, Doctoral Thesis, University of Tokyo (2019).
Cryogenic Torsion Pendulum for Observing Low-frequency Gravity Gradient Fluctuation.
http://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/theses/shimoda_d.pdf
- [18] A. Shoda, *et al.*, Physical Review D, **89**, 027101 (2014).
Search for a stochastic gravitational-wave background using a pair of torsion-bar antennas.
- [19] Y. Kuwahara, *et al.*, Physical Review D, **94**, 042003 (2016).
Search for a stochastic gravitational wave background at 1–5 Hz with a torsion-bar antenna.
- [20] T. Shimoda, *et al.*, International Journal of Modern Physics D, **29**, 1940003 (2020).
Torsion-Bar Antenna: A ground-based mid-frequency and low-frequency gravitational wave detector.

第2章 重力波とその検出

- [21] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健 編著, 『重力波をとらえる』, 京都大学学術出版会 (1998).
- [22] M. Maggiore, *Gravitational Waves. Vol.1, Theory and Experiments*, Oxford Univ. Press (2008).

- [23] J. D. Creighton and W. G. Anderson, *Gravitational-Wave Physics and Astronomy*, John Wiley & Sons (2012).
- [24] B. P. Abbott *et al.*, Physical Review Letters, **119**, 161101 (2017).
GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral.
- [25] R. Abbott *et al.*, The Astrophysical Journal Letters, **915**, L5 (2021).
Observation of Gravitational Waves from Two Neutron Star-- Black Hole Coalescences.
- [26] C. Hann *et al.*, [arXiv:0801.4297v2](https://arxiv.org/abs/0801.4297v2) [gr-qc] (2008).
Method to estimate ISCO and ring-down frequencies in binary systems and consequences for gravitational wave data analysis.
- [27] *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, Gallery.*
<https://www.ligo.caltech.edu/gallery>
- [28] E. Müller *et al.*, The Astrophysical Journal, **603**, 221 (2004).
Toward Gravitational Wave Signals from Realistic Core-Collapse Supernova Models.
- [29] C. D. Ott *et al.*, Physical Review Letters, **96**, 201102 (2006).
A New Mechanism for Gravitational-Wave Emission in Core-Collapse Supernovae.
- [30] C. D. Ott, Classical and Quantum Gravity, **26**, 063001 (2009).
The gravitational-wave signature of core-collapse supernovae.
- [31] J. Weber, Physical Review Letters, **20**, 1307 (1968).
Gravitational-Wave-Detector Events.
- [32] A. Sesana *et al.*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **390**, 192–209 (1968).
The stochastic gravitational-wave background from massive black hole binary systems: implications for observations with Pulsar Timing Arrays.
- [33] K. S. Thorne and V. B. Braginsky, The Astrophysical Journal, **204**, L1–L6 (1975).
Gravitational-wave bursts from the nuclei of distant galaxies and quasars: Proposal for detection using Doppler tracking of interplanetary spacecraft.

第 3 章 ねじれ型重力波望遠鏡 TOBA

- [34] R. Abbott *et al.*, Physical Review Letters, **125**, 101102 (2020).
GW190521: A Binary Black Hole Merger with a Total Mass of $150 M_{\odot}$.

- [35] M. C. Miller and D. P. Hamilton, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **330**, 232–240 (2002).
Production of intermediate-mass black holes in globular clusters.
- [36] M. C. Miller and E. J. M. Colbert, International Journal of Modern Physics D, **13**, 1–64 (2004).
Intermediate-mass black holes.
- [37] J. Harms *et al.*, Physical Review D, **88**, 122003 (2013).
Low-frequency terrestrial gravitational-wave detectors.
- [38] K. Juhel *et al.*, Journal of Geophysical Research: Solid Earth, **123**, 889–901 (2018).
Earthquake Early Warning Using Future Generation Gravity Strainmeters.
- [39] K. Ishidoshiro *et al.*, Physical Review Letters, **106**, 161101 (2011).
Upper Limit on Gravitational Wave Backgrounds at 0.2 Hz with a Torsion-Bar Antenna.
- [40] A. Shoda, Doctoral Thesis, University of Tokyo (2014).
Development of a High-Angular-Resolution Antenna for Low-Frequency Gravitational-Wave Observation.
https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/shoda/Thesis_shoda.pdf
- [41] A. Shoda *et al.*, Physical Review D, **95**, 082004 (2017).
Ground-based low-frequency gravitational-wave detector with multiple outputs.
- [42] 下田智文, 修士論文, 東京大学 (2017).
「ねじれ型重力波望遠鏡 TOBA のための地面振動雑音低減法の研究」
https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/theses/shimoda_m.pdf
- [43] Ching Pin Ooi, Master Thesis, University of Tokyo (2018).
Mechanical Loss of Crystal Fibres for Torsion Pendulum Experiments.
https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/theses/ooi_m.pdf
- [44] 高野哲, 修士論文, 東京大学 (2018).
「ねじれ型重力波望遠鏡 TOBA のための能動防振系の開発」
http://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/theses/takano_m.pdf
- [45] 宮崎祐樹, 修士論文, 東京大学 (2019).
「ねじれ型重力波望遠鏡 TOBA のための高感度角度センサの開発」
http://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/theses/miyazaki_m.pdf
- [46] H. B. Callen and T. A. Welton, Physical Review, **83**, 34 (1951).
Irreversibility and Generalized Noise.
- [47] T. Shimoda, Ando Lab Seminar, University of Tokyo (2017).

Improved wave front sensor using a Gouy phase compensation cavity.

https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/shimoda/presentation/rinko171222_shimoda.pdf

第 4 章 結合光共振器を用いた wavefront sensor

- [48] R. W. P. Drever *et al.*, Applied Physics B, **31**, 97–105 (1983).
Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator.
- [49] E. D. Black, American Journal of Physics, **69**, 79 (2001).
An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization.
- [50] E. Morrison *et al.*, Applied Optics, **33**, 5041–5049 (1994).
Automatic alignment of optical interferometers.
- [51] E. Morrison *et al.*, Applied Optics, **33**, 5037–5040 (1994).
Experimental demonstration of an automatic alignment system for optical interferometers.
- [52] 麻生洋一, 修士論文, 東京大学 (2001).
「補助干渉計による Fabry-Perot 干渉計の安定化」
https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/theses/aso_m.pdf
- [53] 柄久保邦治, 修士論文, 東京大学 (1995).
「Fabry-Perot 共振器のアラインメント制御」
https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/theses/tochikubo_m.pdf
- [54] 道村唯太, Technical Note, 東京大学 (2011).
「Wavefront Sensor 法の原理」
<https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/michimura/document/noteWFS.pdf>
- [55] 道村唯太, Technical Note, 東京大学 (2012).
「光共振器基礎」
<https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/michimura/document/noteOpticalCavity.pdf>
- [56] 榎本雄太郎, 修士論文, 東京大学 (2016).
「干渉計型重力波検出器における光学機械相互作用と光の空間モードの揺らぎについて」
https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/enomoto/documents/master_thesis_final_0117.pdf
- [57] *FINESSE*.
<http://www.gwoptics.org/finesse/>
- [58] 宗宮健太郎, JGW-T1301669-v2 (2013).

「FINESSE の使い方マニュアル」

<https://gwdoc.icrr.u-tokyo.ac.jp/cgi-bin/private/DocDB/ShowDocument?docid=1669>

- [59] Y. Oshima, Ando Lab Seminar, University of Tokyo (2021).

Simulation with FINESSE for Coupled WFS and DANCE.

https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/oshima/seminar/20211126_Seminar_Oshima.pdf

第 5 章 実験装置

- [60] Y. Oshima *et al.*, [arXiv:2110.10607v2](https://arxiv.org/abs/2110.10607v2) [physics.ins-det] (2021).

First observation and analysis of DANCE: Dark matter Axion search with riNg Cavity Experiment.

- [61] N. Ohmae, Doctoral Thesis, University of Tokyo (2010).

Laser System for Second-Generation Gravitational-Wave Detectors.

<https://gwdoc.icrr.u-tokyo.ac.jp/cgi-bin/private/DocDB/ShowDocument?docid=916>

第 6 章 実験結果

- [62] 高野哲, Technical Note, 東京大学 (2022).

「アクチュエーターの寄生共振」

<https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/takano/documents/ParasticResonance.pdf>

第 7 章 考察

- [63] R. O. R. Y. Thompson, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **36**, 2020–2021 (1979).

Coherence Significance Levels.

第 A 章 Fabry-Pérot 共振器

- [64] 武田紘樹, 修士論文, 東京大学 (2017).

「ローレンツ不変性検証のためのモノリシック光学系の開発」

https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/theses/takeda_m.pdf

- [65] 牛場崇文, 物理学特別講義 (重力波), 富山大学 (2018).

<https://www.sci.u-toyama.ac.jp/phys/5ken/class/2018winter/物理学特別講義2018-2.pdf>

- [66] K. Yano *et al.*, *Journal of Physics: Conference Series*, **716**, 012032 (2016).

Design study and prototype experiment of the KAGRA output mode-cleaner.

第 B 章 Pound-Drever-Hall 法

[67] 道村唯太, Technical Note, 東京大学 (2010).

「Notes on the Pound-Drever-Hall technique」

<https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/michimura/document/notePDH.pdf>

[68] F. Acernese *et al.*, Optics and Lasers in Engineering, **45**, 478–487 (2007).

The Virgo interferometric gravitational antenna.

第 C 章 フィードバック制御

[69] 片山徹 著, 『新版 フィードバック制御の基礎』, 朝倉書店 (2002).

[70] H. Fujimoto *et al.*, [arXiv:2105.08347v1](https://arxiv.org/abs/2105.08347v1) [physics.ins-det] (2021).

Dark matter Axion search with riNg Cavity Experiment DANCE: Development of control system for long-term measurement.

第 D 章 共振型 RFPD の製作

[71] *Ando Lab Wiki, RFPD circuit board.*

https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/wiki/Lab/?RFPD_circuit_board

[72] 東京大学理学部物理学科, 「物理学実験 I」 解説書 (2021).

<https://www.phys.s.u-tokyo.ac.jp/GIJUTSU/student-exp/2021exp1/2021exp1-text.pdf>

謝辞

本研究を進めるにあたって、多くの人からアドバイスと励ましをいただきました。深く感謝いたします。

指導教員の安東正樹准教授には、毎週のミーティング、中間報告会やセミナー、学会発表練習でたくさんのアドバイスをいただきました。ミーティングやセミナーで質問すると、すぐに適切なアドバイスや新しいアイデアを出してくださりました。学会発表練習のときには、スライドを1枚ずつ見ながら根気よく丁寧に指導していただきました。また、安東研究室の穏やかながらも活発に議論できる雰囲気は、氏の人柄によるものだと思っています。充実した実験設備の中で研究できたことにも感謝いたします。

安東研究室助教の道村唯太助教には、日頃から実験の相談にのっていただきました。定性的な理解とかみ砕いた説明がとてもうまく、私にもわかるように説明してくださりました。また、光速異方性探査、KAGRA、SILVIA、光学浮上、暗黒物質探索など、たくさんのテーマに関わり、様々なミーティングで議論を引っ張っていく姿を尊敬しています。氏の学会発表スライドや基本的な知識をまとめたノートはわかりやすく、何度も読み返しました。

本修士論文の副査の田越秀行教授には、事前説明の際に審査会の発表をより分かりやすくするためのアドバイスをいただきました。また、学部3年次に参加した宇宙線研究所プリンギングスクールで大変お世話になりました。重力波分野への進学を勧めていただいたことが現在の進路につながっていると思います。

同じく副査の井手口拓郎准教授には、光共振器の豊富な知識をもとにたくさんの質問をいただきました。また、TOBA や他の重力波望遠鏡にも興味をもって質問していただき、有意義な議論を行うことができました。

安東研究室特任研究員の王浩宇氏には、シミュレーションソフト FINESSE の使い方を教えていただきました。いつも笑顔で話しかけてくださるので、苦手な英語での会話も楽しかったです。

安東研究室博士3年の黄靖斌氏には、国際学会のプロシーディングスの英文を何度も校正していただきました。日本語が堪能な氏から、英語のニュアンスを日本語で教えていただくことができ、非常に勉強になりました。また、修士論文執筆中にパソコンが不調になったときに直していただきました。本郷周辺のおいしいお店を教えてもらったり、シンガポールのことを教えてもらったりしたのが楽しかったです。

安東研究室博士3年の川崎拓也氏は、実験のコツを質問すると丁寧に答えてくださりました。論文を着々と執筆する姿を尊敬しています。氏の修士論文は光共振器の知識を得る上で非常に参考になるため、学部4年の頃から何度も読んでいます。

安東研究室博士3年の高野哲氏は、いつも後輩を気にかけてくださり、質問や相談をすると、長い時間一緒に考えてアドバイスをくださりました。実験がうまくいかないときには、やみくもにいろいろ試してみようとせずに、うまくいかない原因を洗い出して定量的に評価し、解決策を探すことが大切だということ教わりました。氏のアドバイスがなければ乗り切れていなかった局面が何度もあります。氏の面倒見の良さと優しさにいつも驚かされるとともに、とても感謝しています。

安東研究室修士2年の藤本拓希氏は、一番気軽に相談できる相手であり、研究のこともそれ以外のこともたくさん話しました。完全に理解するまで諦めずに考え続ける姿勢、優秀な理論計算の技術を尊敬しています。氏が同期であることに感謝し、一緒に博士課程に進学できることを心強く思います。

安東研究室修士1年の小野将矢氏は、入学時点から優秀でしたが、持ち前の真面目さで修士1年の間に驚くほどの知識を身に付けており、大変刺激を受けました。氏に質問された内容を答えられず、一緒に議論しながら考え、理解が深まったこともありました。また、明るく朗らかな人柄で、話していてとても癒されます。

学部4年から修士2年にかけての私の研究テーマであるアクション暗黒物質探索実験 DANCE の共同研究者にも感謝いたします。

学部4年次の安東研究室での特別実験が楽しいと思えたのは、実験ペアが渡邊泰平氏だったことによるところが大きいと思っています。また、氏にいただいたプログラミングコードは今も役に立っています。

小幡一平氏と藤田智弘氏には、つたない学会発表スライドやプロシーディングスにたくさんアドバイスをいただきました。

桑潤哉氏、森崎宗一郎氏には、解析コードを提供していただき、原理や使用方法について丁寧に教えていただきました。

安東研究室の卒業生の小森健太郎氏、有富尚紀氏、下田智文氏、榎本雄太郎氏、長野晃士氏、武田紘樹氏、喜多直紀氏、宮崎祐樹氏、千代田大樹氏にも深く感謝いたします。学部4年次の特別実験や修士1年次の学会発表練習でお世話になりました。安東研究室卒業後もメールで質問すると丁寧に答えていただきました。

特に、小森健太郎氏と榎本雄太郎氏には、振り子の設計・光学定盤カバーの設計について教えていただきました。今後の実験でも必要なノウハウであり、感謝いたします。

下田智文氏と宮崎祐樹氏には、Coupled WFSの先行研究の結果や共振器の設計のコツについて教えていただきました。お二人のアドバイスなしには共振器の設計は行えませんでした。

長野晃士氏には、DANCEの共同研究者として学会発表スライドやプロシーディングスにアドバイスをいただきました。さらに、修士2年次に毎週基礎レクチャーを開催していただき、光共振器やフィードバック制御の基礎知識を教えていただきました。要領を得ない質問にも丁寧に答えてくださったことに感謝し、豊富な知識を後輩に惜しみなく分け与えてくださる姿勢を尊敬します。

東京大学大学院理学系研究科試作室の大塚茂巳氏、下澤東吾氏には、光共振器用のアルミニウム製スペーサーとミラー固定用の治具を製作していただきました。検討段階の設計図をもって試作室に伺うと、いつも気さくに相談にのってくださり、豊富な知識と経験から様々なアドバイスをいただきました。ミラーの固定精度を向上させるために段付きボルトを利用したことは、お二人のアイデアによるものです。お二人なしには共振器の製作は行えなかったと感謝しています。

物理事務分室の庭田まゆ子氏、田中京子氏は、物品購入や学会参加の手続きで大変お世話になりました。私が伝票処理のミスをしてでも優しく対応してくださったため、事務処理に困らずにスムーズに研究を進めることができました。

この他にも、株式会社ツバタの津幡英夫氏、株式会社アールデックの飯田卓哉氏、光貿易株式会社の陰山賢一氏、コスモ・テック株式会社の山野慎平氏など、たくさんの方にお世話になりました。ここに書ききれなかった方々も含め、感謝いたします。

最後に、私を応援し励ましてくれた友人と家族に感謝いたします。特に、いつも私のことを一番に考えてくれ、一番の理解者である両親に深く感謝いたします。人生をかけて追いつき追い越したい目標でもあります。両親の娘に生まれた幸運に感謝し、今後も努力したいと思います。