修士論文
鏡材料接合面の機械損失に関する研究

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻 66026
小野里光司

2007 年 1 月

概要

本研究は、重力波検出器用の複合鏡を設計する際に問題となるであろう接合部分の機械損失について調べ、計算により鏡の Q 値を推定する手法を確立することを目的とする。

接合部分を持つような試料の作製方法はいくつかあるが、今回は簡単のために熱はめというはめ込み手法を用いた。単体の試料と熱はめした試料を用意し、両方の Q 値を測定し比較を行った。そして、熱はめをすることにより Q 値が低下することを確認し、接合面での機械損失を見積もった。アルミニウム合金 A5056 のときで、$\phi_{\mathrm{border}} h_{\mathrm{border}} = 1.48 \times 10^{-7}\,[\mathrm{m}]$、アルミニウム合金 A6061 のときで、$\phi_{\mathrm{border}} h_{\mathrm{border}} = 2.22 \times 10^{-8}\,[\mathrm{m}]$ という結果を得た。材質により、接合面での機械損失が異なることを指摘した。また、今回得たデータを利用して、計算により Q 値を推定する手法を確立した。各材質自体の機械損失と各接合方法における接合面での機械損失を事前に知っておけば、複合鏡の熱雑音を設計の段階で計算により求めることができる可能性を示した。

目次

第 1 章　序論 **1**

第 2 章　重力波とその検出 **3**
2.1 重力波 3
2.2 重力波源 4
2.3 レーザー干渉計型重力波検出器 4
2.3.1 マイケルソン干渉計 5
2.3.2 世界の大型干渉計型検出器 7
2.3.3 宇宙空間を利用した重力波検出器計画 8
2.4 雑音源 9
2.4.1 外来振動 9
2.4.2 光源の雑音 9
2.4.3 熱雑音 10
2.4.4 その他の雑音 11
2.5 本研究の概要と目的 11

第 3 章　鏡の熱雑音と機械損失 **13**
3.1 揺動散逸定理 13
3.2 1 次元調和振動子 14
3.2.1 ビスコス・ダンピング・モデル 15
3.2.2 ストラクチャ・ダンピング・モデル 15
3.3 鏡の熱雑音 16
3.3.1 モード展開法 17
3.3.2 Levin の方法 18
3.4 機械損失 19
3.4.1 機械損失と散逸エネルギーの関係 19
3.4.2 固体内部の損失 20
3.4.3 加工による損失 21
3.4.4 外的な要因による損失 22
3.5 本研究について 23

第 4 章　有限要素法による数値解析 **25**
4.1 弾性理論 25
4.1.1 弾性定数 25
4.1.2 等方弾性体の運動方程式 27
4.2 Hutchinson の方法 28
4.3 有限要素法解析 29

4.3.1 解析ソフト ANSYS 29

第 5 章 実験方法 **31**
5.1 Q 値の測定方法 31
5.2 実験装置 32
5.2.1 試料支持系 32
5.2.2 光学系 33
5.3 試料 35

第 6 章 計算結果・実験結果 **39**
6.1 解析条件 39
6.1.1 要素モデル 39
6.1.2 弾性定数 41
6.2 アルミニウム合金 A5056 の計算結果と実験結果 43
6.2.1 単体の場合 43
6.2.2 熱はめした試料の場合 43
6.3 アルミニウム合金 A6061 の計算結果と実験結果 46
6.3.1 単体の場合 46
6.3.2 熱はめした試料の場合 46
6.4 真鍮 C3604 の計算結果と実験結果 48
6.4.1 単体の場合 48
6.4.2 熱はめした試料の場合 48
6.5 異なる材質同士で熱はめしたときの結果 50
6.5.1 内部 ϕ20 の場合 50
6.5.2 内部 ϕ30 の場合 50
6.6 接合面における機械損失 51
6.6.1 アルミニウム合金 A5056 の場合 51
6.6.2 アルミニウム合金 A6061 の場合 52
6.6.3 真鍮 C3604 の場合 53
6.6.4 アルミニウム合金 A5056 と真鍮 C3604 で熱はめした場合 54
6.7 Q 値の推定 55

第 7 章 まとめ **59**
7.1 結果のまとめ 59
7.2 結果の考察と結論 59
7.3 今後の課題と展望 60

付録 Q 値の測定結果 **61**
A.1 アルミニウム合金 A5056 の測定結果 62
A.1.1 単体の場合 62
A.1.2 熱はめした試料の場合 63
A.2 アルミニウム合金 A6061 の測定結果 67
A.2.1 単体の場合 67
A.2.2 熱はめした試料の場合 68

A.3 真鍮 C3604 の測定結果 70
A.3.1 単体の場合 70
A.3.2 熱はめした試料の場合 71
A.4 異なる材質同士で熱はめしたときの測定結果 74
A.4.1 内部 ϕ20 の場合 74
A.4.2 内部 ϕ30 の場合 75

参考文献 **77**

謝辞 **79**

第1章

序論

重力波は光速で伝播する時空の歪みである。1916 年、A. Einstein により一般相対性理論の帰結として予言されたものである [1]。重力波の存在は、J. H. Taylor らによる連星パルサー PSR 1913+16 の観測により証明されている [2]。これは連星パルサーの周期変化の観測値が重力波の放射による周期変化の理論値と一致したことによるものであるが、この事により重力波の存在に対する信頼性は揺るぎないものとなった。

重力波の直接検出を目的とする実験は 1960 年代から Weber によって始められた。この実験は共振型重力波検出器と呼ばれるものを利用したものであった。地上における重力波検出装置としては、主に共振型と干渉計型の二種類がある。共振型重力波検出器は、重力波によって励起された弾性体の振動を検出する装置である。干渉計型重力波検出器は、レーザー干渉計によって自由質点間の固有距離変化を測定する装置である。共振型は弾性体の共振周波数付近にしか感度が無く、干渉計型の方が観測帯域が広いことや高感度を実現できることなどから、現在ではレーザー干渉計型の重力波検出器が主流である。世界各地にて LIGO(アメリカ)、VIRGO(イタリア・フランス)、GEO(ドイツ・イギリス)、TAMA(日本) などのレーザー干渉計が建設され、観測が行われている。しかしながら重力波の直接的な検出はいまだに成功していない。重力波の直接検出の目的は、一般相対性理論の検証という物理的な意義だけではない。重力波の相互作用は電磁波などの相互作用に比べ非常に小さい。もし超新星爆発や連星中性子星の合体の際に放出される重力波をとらえることができれば、電磁波やニュートリノの観測からは得ることのできない情報を得ることができると期待されている。そのため重力波の直接検出には、今までの電磁波やニュートリノによる天文学に加え、重力波天文学という新たな天文学を創生するという天文学的な意義がある。

近年では、宇宙空間を利用したレーザー干渉計も計画されている。欧米の LISA 計画や、日本の DECIGO 計画がそれである。今までの地上型の重力波検出器は、超新星爆発や連星中性子星合体といったコンパクトで激しい天体現象で放出される、数 10Hz から数 kHz の高周波数の重力波を観測対象としてきた。それは、地上型のレーザー干渉計は地面振動や自由質点にするために吊るされた鏡の振り子の共振周波数のために、低周波数帯ではほとんど感度がないためである。現在、地上型の検出器は、我々の銀河系内で前述のような激しい天体現象が起これば検出できる程度の感度は実現されているものの、そのような激しい天体現象は極めて稀にしか起こらず本格的な天文学として成立させることは困難である。そのため、より感度を向上させるか、低周波数帯の重力波源を観測対象とできるように観測帯域を変える必要がある。そこで、日本では宇宙空間でレーザー干渉計を構成し、合体数年前の連星中性子星、中間質量ブラックホール合体や初期宇宙起源の重力波のような 0.1Hz 付近の低周波数帯の重力波を観測対象とする DECIGO 計画が進められている。

DECIGO の観測帯域である 0.1〜1Hz において、その観測を制限する主な要因は、加速度雑音・鏡の熱雑音などである。これらの雑音は鏡の質量が大きくなると減少することが分かっている。また、光共振器の鏡と鏡の間の距離は 1000km と予定されているために、鏡で反射するレーザーの半径も大

きく、およそ 40cm にもなる。そのため、DECIGO で用いられる鏡は大型のものを用意する必要がある。現在では、質量 100kg、直径 1m の鏡を用いることを予定している。このような大型の鏡を、一枚鏡として作製することは困難であるので、鏡をいくつかの部分に分け複合鏡とする可能性が考えられている。ただ、複合鏡とする場合、鏡材質同士の接合面における機械損失が問題になると考えられる。

また、地上型の重力波検出器においては、輻射圧雑音の低減のために鏡を重くすることが考えられている。鏡のまわりをより比重の大きな材質で覆うことにより、鏡全体の質量を重くすることで輻射圧雑音を減らそうとするものである。この場合も同様に、鏡に接合面が生じ、その部分における機械損失が問題になると考えられる。

接合面における機械損失が問題となるくらい大きい場合、鏡の熱雑音が増大し干渉計の感度の低下の原因となる。そのため接合部分が生じたときの機械的な損失について知ることは重要なことであるが、このような機械損失を測定した例はない。

そこで、本研究では接合部分をもつときの試料の機械損失について調べた。接合面での機械損失を測定するための一つの例として、手ごろにできるという理由で今回は熱はめというはめ込み手法を用いた。熱はめとは固体の熱膨張を利用したはめ込み手法で、工業的には焼ばめともいう。原子力発電所のタービンの設計などの工業における多くの分野で用いられている一般的なはめ込み手法の一つである。この熱はめを用いて作製した試料の機械損失は、円柱試料自体の機械損失と熱はめによる接合面での機械損失の和として表される。本研究は、熱はめにより作製した試料の Q 値を測定し、接合面での機械損失を推定しその性質について知ることにより、地上型重力波検出器の輻射圧雑音の低減と、DECIGO 計画のような宇宙空間における重力波検出器用の大口径複合鏡の設計の指針とすることを目的としている。

本論文は以下のような構成をもつ。第 1 章では、重力波の歴史と重力波検出実験の現状や将来計画について簡単に紹介し、本研究をおこなうにあたっての動機について述べた。第 2 章では、重力波とその検出方法について簡単に解説し、第 3 章では、本研究の主題である鏡の熱雑音と機械損失について説明する。第 4 章では、弾性体の共振周波数などの計算方法について述べる。第 5 章では、用いた実験装置と測定方法について記す。そして、第 6 章にそれらの計算結果と実験結果を示し、最後、第 7 章で全体のまとめと結論を述べることとする。

第2章

重力波とその検出

本章では、本研究の根本である重力波について簡単に説明する。そして主要な重力波源について紹介するとともに、干渉計型重力波検出器について概説する。また、重力波の観測を妨げる検出器の雑音源をいくつか挙げるとともに、本研究で熱雑音を扱うことにした動機について述べる。

2.1 重力波

電磁場の法則がクーロンの法則からマックスウェルの方程式へと拡張され電磁場が伝播することが示されたのと同様に、時空の曲がり方を記述するアインシュタイン方程式から時空の歪が伝播することが示された。この歪の伝播が重力波である。ただ、重力波は電磁波の場合とは異なり、その伝播を記述するアインシュタイン方程式は非線形の方程式である。振幅の大きい波の伝播や大きく曲がった時空での伝播を解析的に解くことは困難である。そのため、ここでは平坦なミンコフスキー空間を伝播する振幅が微小な重力波について考える。

アインシュタイン方程式は、

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

と書ける。ここで、G は万有引力定数、$R_{\mu\nu}$ はリッチテンソル、R はスカラー曲率、c は光速、そして $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである。いま、真空中で物質がない状況を考え $T_{\mu\nu} = 0$ として、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \tag{2.2}$$

を考えることにする。ただし、リッチテンソル $R_{\mu\nu}$、クリストッフェル記号 $\Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda}$ はそれぞれ、

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial\Gamma^{\kappa}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\kappa}_{\lambda\kappa} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} \tag{2.3}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right) \tag{2.4}$$

である。

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ がミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ からわずかにずれている場合は、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{2.5}$$

と表すことができる。$h_{\mu\nu}$ のどの成分も 1 より十分小さく、2 次以上の項は以後の計算では無視できるとする。このとき、式 (2.2) より $h_{\mu\nu}$ が満たす方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial h^{\kappa}_{\mu}}{\partial x^{\kappa}}\right) + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial h^{\kappa}_{\nu}}{\partial x^{\kappa}}\right) - \Box h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}h^{\kappa}_{\kappa} = 0 \tag{2.6}$$

となる。一般相対論は任意の座標変換に対して共変的になっているから、適当な座標条件を置いてよい。そこで、以下のようなローレンツゲージ条件を置くとする。

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} h^\nu_\mu - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\nu} h^\kappa_\kappa = 0 \tag{2.7}$$

そうすると、式 (2.6) は、

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \tag{2.8}$$

という波動方程式になる。これは、ミンコフスキー空間の摂動 $h_{\mu\nu}$ が光速で伝播することを示している。この波動を重力波を呼ぶ [3]。

式 (2.8) の解として、平面波を考える。

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(\,\mathrm{i}k_\alpha x^\alpha\,) \tag{2.9}$$

この平面波が、線形化されたアインシュタイン方程式 (2.8) とローレンツゲージ条件 (2.7) を満たすためには、

$$A_{\mu\nu}k^\nu = 0 \tag{2.10}$$

$$k_\nu k^\nu = 0 \tag{2.11}$$

でなければならない。式 (2.10) は重力波が横波であることを表しており、式 (2.11) は重力波が光速で伝播することを表している。

また、z 軸方向に進む重力波は TT ゲージ条件を課すと、

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

と書け、重力波が 2 つの自由度を持っていることが分かる。

2.2 重力波源

重力波源としては、表 2.1 のようなものが主に考えられている。地上のレーザー干渉計型の重力波検出器が検出の対象としているものは周波数領域が 10Hz〜1kHz の連星中性子星の合体や超新星爆発といったイベントである。これよりも低い周波数帯にも重力波源が考えられているが、地上の検出器では地面振動などの雑音のために観測が困難である。最近では、地面振動がない宇宙空間などを利用し、低周波帯のイベントを観測対象とする計画が進められている [3, 4]。

2.3 レーザー干渉計型重力波検出器

重力波の検出方法は、共振型と干渉計型の 2 種類ある。ここでは、現在の主流であるレーザー干渉計型重力波検出器の原理について簡単に説明する。

表 2.1: 主な重力波源

重力波源	周波数帯	振幅 (h) 典型値	頻度
連星合体 (200Mpc)	10〜10^4 Hz	10^{-21}	数回/年
超新星爆発 (10kpc)	〜10^3 Hz	10^{-20}	数回/世紀
連星パルサー	10^{-4}〜10^{-1} Hz	10^{-20}	連続波
大質量ブラックホール合体 (1Gpc)	〜10^{-4} Hz	10^{-15}	数回/年
宇宙背景輻射	〜10^{-4} Hz	10^{-17}	連続波

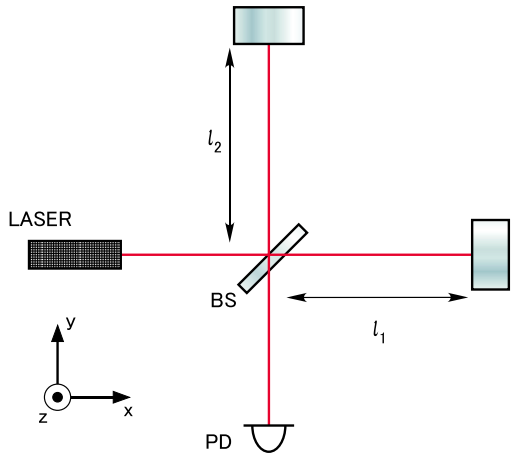

図 2.1: マイケルソン干渉計の概要。x 方向と y 方向の反射光の位相差の変化を読み取る。鏡は自由質点として振舞うように振り子によってつるされる。

2.3.1 マイケルソン干渉計

レーザー干渉計の基本はマイケルソン干渉計である。図 2.1 にマイケルソン干渉計の概略を示した。レーザー光源から出た光は、ビームスプリッターによって x 軸方向と y 軸方向の直行する 2 本の光に分けられる。その後、それぞれの鏡によって反射され再びビームスプリッターにもどり干渉する。ここに重力波が入射すると、ビームスプリッターと鏡の間の固有距離が逆相で変化するために、鏡からの反射光に位相差が生じ干渉縞が変化する。重力波の及ぼした微小な距離変動をこの干渉縞の変化から検出するというのが、レーザー干渉計型の重力波検出器である。

どのようにしてマイケルソン干渉計により位相検出を行うかについて説明する。レーザー光源から出た光がそれぞれの鏡で反射され、ビームスプリッターに戻る。2 つの光に位相差があれば干渉によって、光検出器に入射する光の強度が変化する。入射レーザー光の電場を、

$$E_{\rm in} = E_0 e^{{\rm i}\Omega t} \tag{2.13}$$

とする。ビームスプリッターで分けられた光はそれぞれ $\Delta\phi_x$、$\Delta\phi_y$ の位相変化をもって再結合する。このとき、光検出器に入射する光の電場と強度は次のようになる。

$$E_{\rm out} = \frac{1}{2}E_0 e^{{\rm i}(\Omega t - \Delta\phi_x)} - \frac{1}{2}E_0 e^{{\rm i}(\Omega t - \Delta\phi_y)} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} P_{\rm out} &= |E_{\rm out}|^2 \\ &= \frac{1}{2}|E_0|^2\{1 - \cos(\Delta\phi_x - \Delta\phi_y)\} \end{aligned} \tag{2.15}$$

次に、マイケルソン干渉計に重力波が入射したときにどのような位相変化が生じるかについて説明する。図 2.1 において、z 軸方向から+モードの重力波が入射したとする。このときの計量は、

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (1+h(t))dx^2 + (1-h(t))dy^2 + dz^2 \tag{2.16}$$

となる。ここで、x 軸方向を往復する光を考えると、

$$dy = dz = 0, \quad ds^2 = 0$$

であるから、式 (2.16) は以下の式のようになる。

$$\frac{dx}{dt} = \pm\frac{c}{\sqrt{1+h(t)}} \tag{2.17}$$

光が x 軸方向にビームスプリッターと鏡の間を往復するのにかかる時間を $\Delta t_x(=2l_1/c)$ とする。式 (2.17) を時間 $t-\Delta t_x$ から t まで積分すると、

$$\int_{t-\Delta t_x}^{t} \frac{dt'}{\sqrt{1+h(t')}} = 2l_1/c \tag{2.18}$$

となる。また $h \ll 1$ より、h の 1 次の近似をとり積分の下限を $t-2l_1/c$ と置き換えると、

$$\begin{aligned} \int_{t-\Delta t_x}^{t} \frac{dt'}{\sqrt{1+h(t')}} &\sim \int_{t-\Delta t_x}^{t} (1-\frac{1}{2}h(t'))\,dt' \\ &= 2l_1/c - \frac{1}{2}\int_{t-2l_1/c}^{t} h(t')\,dt' \end{aligned} \tag{2.19}$$

となる。よって、x 軸方向に距離 l_1 を往復してきた光の位相変化 $\Delta\phi_x$ は、

$$\begin{aligned} \Delta\phi_x &= \Omega\Delta t_x \\ &= \frac{2l_1\Omega}{c} - \frac{\Omega}{2}\int_{t-2l_1/c}^{t} h(t')\,dt' \end{aligned} \tag{2.20}$$

と書ける。ここで Ω は光の角周波数である。同様にして、y 軸方向に距離 l_2 を往復してきた光の位相変化 $\Delta\phi_y$ は、

$$\Delta\phi_y = \frac{2l_2\Omega}{c} + \frac{\Omega}{2}\int_{t-2l_2/c}^{t} h(t')\,dt' \tag{2.21}$$

と書ける。2 式 (2.20)(2.21) から、両腕からの位相差 $\Delta\phi(=\Delta\phi_x - \Delta\phi_y)$ は $l = l_1 \sim l_2$ として、

$$\Delta\phi = \frac{2(l_1-l_2)\Omega}{c} - \Omega\int_{t-2l/c}^{t} h(t')\,dt' \tag{2.22}$$

となる。右辺の第 1 項はビームスプリッターから 2 つの鏡までの距離の差による位相差を表している。そして、右辺の第 2 項が重力波の影響による位相変化を表している。この第 2 項の位相変化をマイケルソン干渉計により読み取ることによって、重力波を検出する。

マイケルソン干渉計の重力波に対する感度について考える。$h(t)$ をフーリエ分解して、

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\,d\omega \tag{2.23}$$

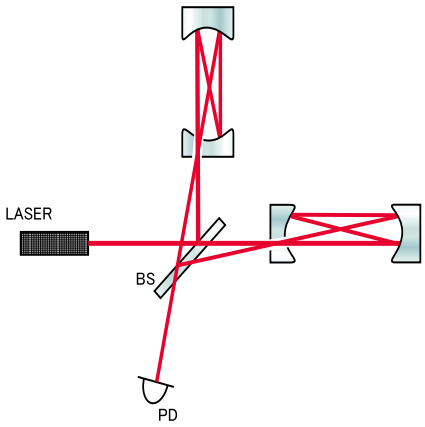

図 2.2: ディレイ・ライン型

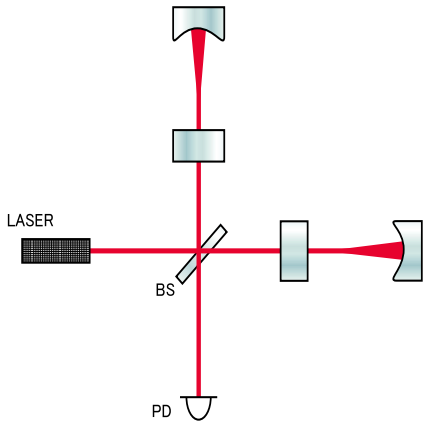

図 2.3: ファブリ・ペロー型

と表すと、式 (2.22) の右辺第 2 項 $\Delta\phi_{\mathrm{GW}}$ は、

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{\mathrm{GW}} &= \Omega\int_{t-2l/c}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t'}\,d\omega dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)h(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\,d\omega \qquad (2.24)\\ H(\omega) &= \frac{2\Omega}{\omega}\sin\left(\frac{l\omega}{c}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{l\omega}{c}\right) \qquad (2.25)\end{aligned}$$

となる。$H(\omega)$ は角周波数 ω の重力波に対するマイケルソン干渉計の周波数応答関数である。この $H(\omega)$ の絶対値が最大となるのは、

$$\frac{l\omega}{c} = \frac{\pi}{2} \qquad (2.26)$$

のときで、このときマイケルソン干渉計の重力波に対する感度が最も良くなる。これ以上基線長 l を長くしても感度は良くならない。例えば、観測したい重力波の周波数が 1kHz のとき、式 (2.26) を満たす基線長は、$l = 75\,[\mathrm{km}]$ となる。

地上においてこのような基線長を実現することは困難である。そのため、鏡の間を何度も往復させて光路長を稼ぐディレイ・ライン型 (図 2.2) や、多重干渉を利用したファブリ・ペロー型 (図 2.3) の干渉計が用いられている。

2.3.2 世界の大型干渉計型検出器

重力波をとらえようとする研究は現在世界各国で進められている。アインシュタインが相対論からその存在を指摘してから 90 年以上が経つものの、いまだ直接観測はなされていない。しかし、干渉計の感度は徐々に上がっており、観測可能な銀河の数も増えてきている。

大型のレーザー干渉計型重力波検出器が世界各国で建設されている。アメリカ合衆国には LIGO という基線長 4km の重力波検出器があり、現在観測を行っている。他にも、イタリアとフランスが共同開発している VIRGO や、ドイツとイギリスの GEO などがある。日本には、三鷹の国立天文台に建設された TAMA300 と岐阜の神岡鉱山に建設された CLIO がある。

表 2.2: 世界の主なレーザー干渉計型重力波検出器

名称	参加国	方式	基線長	建設場所
LIGO	アメリカ合衆国	FP	4km	Hanford・Libingston
VIRGO	イタリア・フランス	FP	3km	Pisa
GEO	ドイツ・イギリス	DL	600m	Hannover
TAMA	日本	FP	300m	三鷹

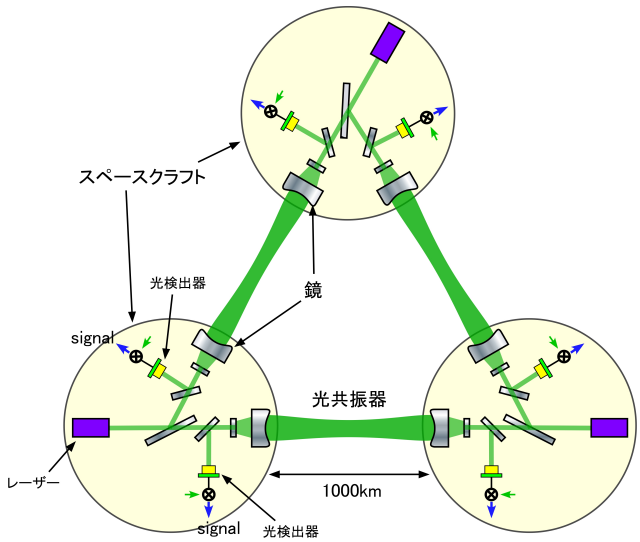

図 2.4: DECIGO の概念図。基線長は 1000km で、各 S/C が正三角形状に位置している。各 S/C 内に収められた鏡によって 3 対のファブリ・ペロー干渉計を構成する。

2.3.3 宇宙空間を利用した重力波検出器計画

地上に設置された重力波検出器では、連星中性子星の合体や超新星爆発で発生する数 10Hz から数 1kHz の重力波を観測対象としている。現在でも、我々の銀河系やその近傍でそのような現象が起これば検出できるだけの感度が実現されている。しかし、そのような激しい天体現象は極めて稀にしか起こらないと考えられている。そのため、今後本格的な重力波天文学の創設のためには、観測可能な重力波源の距離と周波数帯を広げることが必要となる。

地上の重力波検出器が 10Hz 以下の周波数帯で観測が困難である理由は、地面振動による影響が感度を制限しているからである。そこで、地面振動の影響がない宇宙空間に重力波検出器を持っていく計画が進められている。宇宙空間の利点は地面振動がないだけではなく、干渉計の基線長を長くとることができるので、光が干渉計内に滞在する時間を長くし低周波数の重力波の効果を積算することができる。そのため、低周波数の重力波に対する感度を高めることができる。そのような宇宙重力波検出器の計画には、欧米の LISA 計画や日本の DECIGO 計画がある。ともに 2020 年代の打ち上げを目安に計画が進められている。

日本の DECIGO について簡単に概要を説明する。DECIGO は 3 台のスペースクラフト (S/C) を打ち上げ、その間の距離を精密に測定することで主に 0.1〜1Hz の低周波数帯の重力波を観測する装置である。DECIGO の基本デザインを図 2.4 に示した。正三角形状に 1000km 離れた 3 台の S/C 内に収められた鏡によって、3 対のファブリ・ペロー干渉計を構成する。鏡の直径は 1m、質量は 100kg を

予定している。鏡間の距離を測定するためのレーザー光源をしては、出力 10W の倍波 Nd:YAG レーザー (波長 532nm) を用いる [9]。

2.4 雑音源

重力波検出器を設計する上で考慮しなければならない雑音について説明する。重力波の及ぼす影響は極めて小さい。そのため、光路長を変化させる可能性があるものはすべて干渉計の雑音源となる。ここでは、干渉計の雑音源について代表的なもの 4 つを紹介する。

- 外来振動
- 光源の雑音
- 熱雑音
- その他の雑音

2.4.1 外来振動

外来振動としては、地面振動がある。地面は地震がない場合でも、常時微動といわれる振動を行っている。地面振動の典型的なスペクトルは、

$$\delta x_{\mathrm{seismic}} = 10^{-7}\left(\frac{1\mathrm{Hz}}{f}\right)^2 \quad [\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\,] \tag{2.27}$$

で表される。この振動の観測帯域での成分を抑えるために防振が行われる。また、スペクトルの形は地域に寄らず同じように周波数の自乗に反比例する形をとるが、係数 10^{-7} という大きさの方は地域によって変化する。そのため地面振動の影響は干渉計に組み込まれた防振系の性能と設置場所によって決まる。

2.4.2 光源の雑音

光源の雑音としては、光の量子雑音や周波数雑音、強度雑音などがある。ここでは量子雑音について簡単に説明する。光の量子雑音には、散射雑音と輻射圧雑音の 2 つがある。

干渉計からの反射光を光検出器で検出する際の光子数揺らぎに起因する雑音が散射雑音である。光電効果を利用した検出器に光が入射し光電流 I_P が流れているとき、散射雑音のパワースペクトルは電荷素量を e として、

$$\delta i_{\mathrm{shot}} = \sqrt{2eI_P} \quad [\,\mathrm{A}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\,] \tag{2.28}$$

と書ける。これにより干渉計で観測できる最小の位相差 $\delta\phi$ は、

$$\delta\phi = \sqrt{\frac{2\hbar\Omega}{\eta P}} \qquad [\,\mathrm{rad}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\,] \tag{2.29}$$

となる [3]。ただし、Ω は光の角周波数、η は光検出器の量子効率、P はレーザーの強度である。レーザー強度が大きいほうが散射雑音を低くできることが分かる。レーザー強度を高める方法として、干渉計から光源に帰ってくる光を鏡で干渉計にもどすことによって干渉計内部のレーザー強度を実効的に高めるパワーリサイクリングという技術が用いられている。

一方、レーザーの輻射圧雑音は、鏡で光を反射する際の光子数揺らぎに起因する雑音である。入射光の光子がもつ運動量は $\hbar\Omega/c$ であるから、単位時間当たりに鏡が受け取る運動量変化が鏡の受ける力 f であるから、

$$f = 2\frac{\hbar\Omega}{c}\frac{P}{\hbar\Omega} = \frac{2P}{c} \tag{2.30}$$

と書き表わされる。鏡の質量を M とすると運動方程式は、

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = f \tag{2.31}$$

である。もし、輻射揺らぎが光子統計で決まるような場合、入射光がコヒーレント状態ならば、そのパワースペクトルは、

$$\delta x_{\mathrm{rad}} = \frac{8\hbar\Omega P}{M^2\omega^4c^2} \quad [\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}] \tag{2.32}$$

となり、レーザー強度が大きくなるほど、影響が大きくなることが分かる [3]。

散射雑音と輻射圧雑音は、一方を小さくしようとすると、もう片方が大きくなるという関係にある。

2.4.3 熱雑音

有限温度の熱浴に接している散逸を伴う系は、散逸に比例した揺動力を受けて熱振動する。そのために重力波検出器を構成する機器類はすべて熱振動を起こし雑音源になりうると考えられる。ここでは、熱雑音の代表例として鏡と振り子の熱雑音について簡単に説明する。

鏡の熱雑音は、鏡の振動が励起されて生じる雑音である。通常の地上型の干渉計の鏡のサイズでは、鏡の共振周波数は数 10kHz 以上に存在し、観測帯域 (数 10Hz〜数 kHz) よりも十分に高い。このときの鏡の熱雑音は、

$$< x(\omega)^2 >= \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{\omega}\sum_i \frac{\phi_i(\omega)}{m_i\omega_i^2} \quad [\mathrm{m}^2/\mathrm{Hz}] \tag{2.33}$$

と書ける。ここで、k_{B} はボルツマン定数、T は温度、m_i は各振動モードでの換算質量、ω_i は共振周波数である。$\phi(\omega)$ は系の散逸を表す量で損失ともいう。損失のモデルには、主なものとしては、周波数に依存するビスコス・ダンピング・モデルと周波数に依存せず一定とするストラクチャ・ダンピング・モデルがある。

$$\phi_i(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega}{\omega_i Q_i} & \text{(viscous damping model)} \\ \frac{1}{Q_i} & \text{(structure damping model)} \end{cases} \tag{2.34}$$

Q は Q 値で、共振の鋭さを表す量である。Q 値が大きいほど系の損失が小さくなる。実際にいろいろな物質での損失 ϕ の測定がされていて、多くの物質で損失の周波数依存性は小さく、ϕ は一定の値をもつであろうとされている [10, 11]。式 (2.33) から、鏡の熱雑音を低減するには、鏡の温度を下げる、鏡の共振周波数を高くする、鏡の質量を大きくする、そして Q 値の大きな材質を用いるといった方法があることが分かる。

振り子の熱振動は、鏡を振り子で懸架するときにその振り子自体が熱振動することにより生じる雑音である。振り子の共振周波数は〜1Hz 程度であるので、観測帯域よりも十分に低い。このときの振り子の熱雑音は、

$$< x(\omega)^2 >= \frac{4k_{\mathrm{B}}T\omega_0\phi}{m\omega^5} \quad [\mathrm{m}^2/\mathrm{Hz}] \tag{2.35}$$

と書ける。振り子の熱雑音を低減するには、温度を下げる、共振周波数を低くする、振り子の Q 値を大きくするといった方法がある。

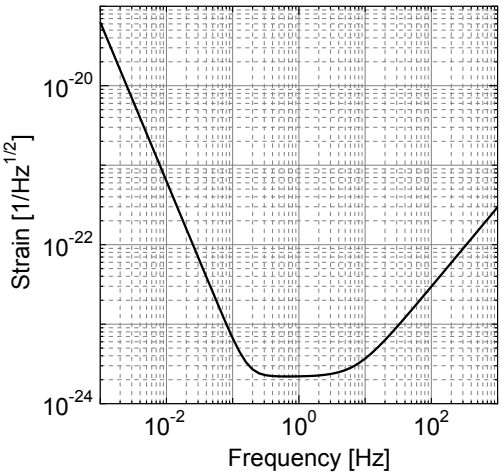

図 2.5: DECIGO の目標感度

2.4.4 その他の雑音

重力波の及ぼす影響は極めて小さい。重力波検出器の設計においては、光路長を変化させる可能性があるものはすべて雑音源として考慮する必要がある。そのため、雑音源に関しては数限りないほどあると考えられる。その他の雑音としては、残留ガスの影響や温度変化による影響などがある。また、宇宙空間において観測を行う場合は宇宙線の影響などがある。

2.5 本研究の概要と目的

本研究は、重力波検出器用の複合鏡を設計する際に問題となるであろう接合部分の機械損失について調べ、計算により鏡の Q 値を推定する手法を確立することを目的とする。

現在、地上型重力波検出器の輻射圧雑音を低減する方法の一つとして、鏡の質量を重くすることが考えられている。輻射圧雑音はレーザーの光子数が揺らぐことによる雑音である。入射してくる光子の数が揺らぐと鏡が受ける力が変化し、鏡の位置が揺らぐことになる。そのため式 (2.32) からも分かるように、鏡の質量を重くすることで輻射圧雑音を低減することができる。現在考えられている鏡の質量を重くする方法には、鏡のまわりをより比重の大きな材質で覆うことにより全体としての質量を増やすというものがある。ただこの場合、鏡に接合部分が生じてしまうことから、その部分での機械的な損失により鏡の熱雑音が増加すると予測される。

また、宇宙重力波検出器においては鏡を複合鏡にすることが考えられている。DECIGO の観測帯域において、その観測を制限する主な要因は、加速度雑音・輻射圧雑音・鏡の熱雑音などである。これらの雑音は鏡の質量が大きくなると減少することが分かっている。また、光共振器の鏡と鏡の間の距離は 1000km と予定されているために、鏡で反射するレーザーの半径は大きく、およそ 40cm にもなる。そのため、DECIGO で用いられる鏡は大型のものを用意する必要がある。現在では、質量 100kg、直径 1m の鏡を用いることを予定している。このような大型の鏡を、一枚鏡として作製することは困難であるので、鏡をいくつかの部分に分け複合鏡とする可能性が考えられている。そのためこの場合も同様に、鏡材質同士の接合面における機械損失が問題になると考えられる。複合鏡とすることで機械損失が大きく増加すれば、鏡の熱雑音の式 (2.33) からも分かるように、熱雑音は増加し、DECIGO の目標とする感度を実現することができない。図 2.5 に DECIGO の目標とする感度を示した。0.1Hz

付近で、$h = 6 \sim 7 \times 10^{-24}\,[1/\mathrm{Hz}^{1/2}]$ である。この感度を直径 1m、厚さ数 cm の鏡で達成するためには、厚さにより幾分異なるが Q 値は 10^5〜10^6 程度必要となる。干渉計で用いられる鏡の材質の Q 値は溶融石英で 10^6、サファイアで 10^7 程度であるから、複合鏡を考えたときに接合面での機械損失が大きな問題となる可能性がある。

しかし現在のところ、接合面での機械損失を測定したという例はない。地上型検出器の輻射圧雑音低減と DECIGO の複合鏡設計の両方の観点から、材質同士が接合部分を持つときの機械損失について知っておくことは意義のあることである。

ただ、どちらの場合もどのようにして複合鏡を作製するかはまだ決まっていないので、今回は手ごろにできる、熱はめという手法を用いて試料を作製した。材質は容易に用意できるという理由で、アルミニウム合金と真鍮を用いた。アルミニウム合金と真鍮それぞれについて、単体の試料と熱はめをして作製した試料を用意し、両者の Q 値を測定しその違いから接合面での機械損失について考察した。接合面での機械損失を知ることで、今後複合鏡を作製するときの鏡の Q 値を推定することが可能となると考えている。また、Levin の方法を用いた鏡の熱雑音の推定も行うことができると期待されている。

第3章

鏡の熱雑音と機械損失

重力波検出器のような極めて精密な測定装置の場合、考慮しなければならない雑音が数多くある。本章では、そのなかでも鏡の熱雑音について説明する。鏡の熱雑音とは、干渉計型重力波検出器の鏡が有限温度の熱浴に接しているために、各固有振動モードに熱エネルギー $k_{\mathrm{B}}T/2$ が与えられ振動し、光路長変動として観測されるものである。

本章では、熱雑音について議論するうえで必要な揺動散逸定理について説明する。そして、1 次元調和振動子において適当な損失モデルを仮定し、その揺動の特徴を見る。次に、モード展開法と呼ばれる熱雑音の推定方法について説明する。また、Levin により提唱された熱雑音の推定方法についても説明し、両者の比較を行う。

最後に、熱雑音を決定する要素のひとつである機械損失について説明し、機械損失の要因についていくつか取り上げ、議論する。

以降では、雑音を表す量としてパワースペクトル密度というものがよく出てくる。それは重力波検出器の雑音が周波数領域で記述されるからである。周波数成分を記述する際には、(片側) パワースペクトル密度 $G(\omega)$ という概念が用いられる。変数 x の時間自乗平均 $\overline{x^2}$ への各周波数成分への寄与を表す関数で、

$$\overline{x^2(t)} = \int_0^\infty G_x(f)\,df \tag{3.1}$$

を満たしている。ここで、f は周波数である。

3.1 揺動散逸定理

揺動散逸定理の一般的な表現について紹介する。入力 $f(t)$ に対して出力 $x(t)$ がある線形な系において、系の伝達関数 $H(\omega)$ は以下の式で定義される。

$$H(\omega) \equiv \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \tag{3.2}$$

ここで、$F(\omega)$ と $X(\omega)$ はそれぞれ入力 $f(t)$ と出力 $x(t)$ のフーリエ変換である。また、系のインピーダンス $Z(\omega)$、レジスタンス $R(\omega)$、アドミタンス $Y(\omega)$、コンダクタンス $\sigma(\omega)$ を以下のように定義する。

$$Z(\omega) \equiv \frac{F(\omega)}{\mathrm{i}\omega X(\omega)} \tag{3.3}$$

$$R(\omega) \equiv \mathrm{Re}[Z(\omega)] \tag{3.4}$$

$$Y(\omega) \equiv \frac{1}{Z(\omega)} \tag{3.5}$$

$$\sigma(\omega) \equiv \mathrm{Re}[Y(\omega)] \tag{3.6}$$

揺動 x の周波数 f における (片側) パワースペクトル密度を $G_x(f)$ とすると、

$$\begin{aligned} G_x(f) &= \frac{4k_{\mathrm{B}}T\sigma(\omega)}{\omega^2} \\ &= -\frac{4k_{\mathrm{B}}T\mathrm{Im}[H(\omega)]}{\omega} \end{aligned} \tag{3.7}$$

という関係式が成立する [12, 13]。この関係式を第一種揺動散逸定理と呼ぶ。また、揺動力 f のパワースペクトル密度を $G_f(\omega)$ とすると、

$$G_f(f) = 4k_{\mathrm{B}}TR(\omega) \tag{3.8}$$

と書ける。この揺動力に注目したときの関係を第二種揺動散逸定理という。

一般に、インピーダンスやアドミタンスの実部は系の散逸 (損失) を表すので、関係式 (3.7)(3.8) は系の揺動 (力) と散逸の関係を表している。揺動 (力) の大きさは系の損失に応じて決まるのである。

3.2 1 次元調和振動子

ここでは、具体例として 1 次元調和振動子の場合について考察する [14, 15]。質量を m、共振角周波数を ω_0、揺動力を $f(t)$ とすると、系の運動方程式は、

$$m\ddot{x} + m{\omega_0}^2 x = f(t) \tag{3.9}$$

となる。これをフーリエ変換して、散逸を表す項を導入する。

$$-m\omega^2 X + m{\omega_0}^2(1 + \mathrm{i}\phi(\omega))X = F \tag{3.10}$$

バネ定数 $k(= m{\omega_0}^2)$ を一般化して複素バネ定数 $k(1 + \mathrm{i}\phi)$ にした。この虚部 ϕ が損失を表す。1 サイクルごとに失われるエネルギーに対する全エネルギーの割合が $2\pi\phi$ であることを表している。このとき、系の伝達関数は、

$$H(\omega) = -\frac{(\omega^2 - {\omega_0}^2) + \mathrm{i}{\omega_0}^2\phi(\omega)}{m[(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + {\omega_0}^4\phi(\omega)^2]} \tag{3.11}$$

である。これを揺動散逸定理の式 (3.7) に代入すると、

$$G_x(f) = \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{m\omega}\frac{{\omega_0}^2\phi(\omega)}{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + {\omega_0}^4\phi(\omega)^2} \tag{3.12}$$

となる。これが調和振動子の熱雑音のパワースペクトル密度である。

あとは、損失を表す $\phi(\omega)$ がどのような周波数依存性をもつ関数であるかが分かれば良い。ここでは、ビスコス・ダンピング・モデルとストラクチャ・ダンピング・モデルの 2 つを紹介する。

ビスコス・ダンピング・モデルは、減衰力が速度に比例するモデルで、ダッシュポットなどと同じである。ストラクチャ・ダンピング・モデルは、広い周波数帯で損失が一定値を取るというものある。

$$\phi(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega}{\omega_0 Q} & \text{(viscous damping model)} \\ \frac{1}{Q} & \text{(structure damping model)} \end{cases} \tag{3.13}$$

いずれのモデルにおいても、Q 値の定義は、

$$Q \equiv \frac{1}{\phi(\omega_0)} \tag{3.14}$$

である。Q 値は共振周波数 ω_0 における損失の大きさを表す量である。

3.2.1 ビスコス・ダンピング・モデル

ビスコス・ダンピング・モデルでは損失の式 (3.13) を式 (3.12) に代入して、

$$G_x(f) = \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{mQ}\frac{\omega_0}{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + {\omega_0}^2\omega^2/Q^2} \tag{3.15}$$

となる。共振周波数から大きく外れた周波数における熱雑音の大きさを考える。低周波極限 ($\omega \ll \omega_0$) と高周波極限 ($\omega \gg \omega_0$) のときのパワースペクトル密度は、

$$G_x(f) = \begin{cases} \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{m{\omega_0}^3Q} & (\omega \ll \omega_0) \\ \\ \frac{4k_{\mathrm{B}}T\omega_0}{mQ}\frac{1}{\omega^4} & (\omega \gg \omega_0) \end{cases} \tag{3.16}$$

となる。ビスコス・ダンピング・モデルでは、熱雑音は低周波数では一定値をとり、高周波では周波数の 4 乗に反比例する形で減少していく。

また、このときの系の伝達関数からインパルス応答 $h(t)$ を計算してみる。伝達関数の分母が 0 のときを解いて、伝達関数の極を調べると、

$$\omega_\pm = \pm\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} + \mathrm{i}\frac{\omega_0}{2Q} \tag{3.17}$$

である。Q が 1 よりも十分に大きい量であるとして、実軸を通り上半面を反時計回りに迂回する積分経路をとり計算すると、インパルス応答は、

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} H(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\,d\omega \\ &= -\frac{1}{2\pi m}\int \frac{e^{\mathrm{i}\omega t}}{(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)}\,d\omega \\ &= \frac{1}{m}\frac{\sin(\mathrm{Re}[\omega_+]t)}{\mathrm{Re}[\omega_+]}\,e^{-\mathrm{Im}[\omega_+]t} \\ &\to \frac{1}{m\omega_0}\sin(\omega_0 t)e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \quad (Q \to \infty) \end{aligned} \tag{3.18}$$

となる。

3.2.2 ストラクチャ・ダンピング・モデル

ストラクチャ・ダンピング・モデルでは損失の式 (3.13) を式 (3.12) に代入して、

$$G_x(f) = \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{m\omega Q}\frac{{\omega_0}^2}{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + {\omega_0}^4/Q^2} \tag{3.19}$$

となる。先ほどと同様にして、低周波極限 ($\omega \ll \omega_0$) と高周波極限 ($\omega \gg \omega_0$) のときのパワースペクトル密度は、

$$G_x(f) = \begin{cases} \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{m{\omega_0}^2Q}\frac{1}{\omega} & (\omega \ll \omega_0) \\ \\ \frac{4k_{\mathrm{B}}T{\omega_0}^2}{mQ}\frac{1}{\omega^5} & (\omega \gg \omega_0) \end{cases} \tag{3.20}$$

となる。ストラクチャ・ダンピング・モデルでは、熱雑音は低周波では周波数に反比例し、高周波では周波数の 5 乗に反比例する。

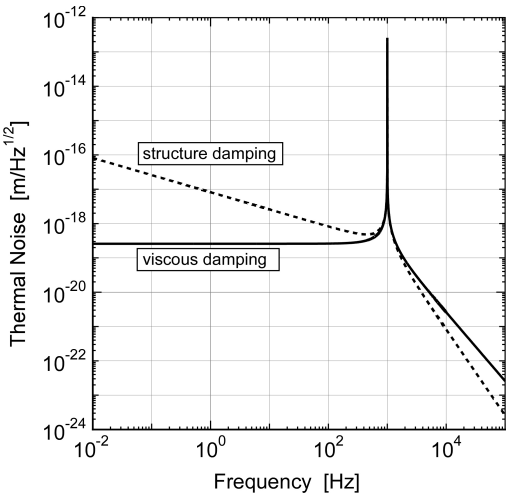

図 3.1: 調和振動子の熱雑音のパワースペクトル密度

またこのときの系の伝達関数からインパルス応答 $h(t)$ を計算する。伝達関数の分母が 0 のときを解いて、伝達関数の極を調べると、

$$\omega_{\pm} = \pm\omega_0\big(1+\frac{1}{Q^2}\big)^{1/4}\left(\cos\big(\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{Q}\big)+\mathrm{i}\sin\big(\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{Q}\big)\right) \tag{3.21}$$

である。インパルス応答は、

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{m}\frac{\sin(\mathrm{Re}[\omega_+]t)}{\mathrm{Re}[\omega_+]}\,e^{-\mathrm{Im}[\omega_+]t} \\ &\to \frac{1}{m\omega_0}\sin(\omega_0 t)e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \quad (Q\to\infty) \end{aligned} \tag{3.22}$$

となる。

2 つのモデルのパワースペクトル密度を図 3.1 に示した。質量は 1kg、共振周波数は 1kHz、温度は 300K、Q 値は 1×10^6 とした。Q 値が高いほど共振周波数でのピークが鋭くなる。このようなピークが重力波検出器の観測帯域にあると観測に影響を及ぼすので、地上型重力波検出器では振り子の共振は観測帯域よりも十分低いところ (〜1Hz) に、鏡の共振は観測帯域よりも十分高いところ (20kHz 以上) に存在するように設計されている。

3.3 鏡の熱雑音

鏡の各固有振動モードにエネルギー $k_{\mathrm{B}}T/2$ が与えられて鏡面が揺らぐことによって、光路長変動となるものを鏡の熱雑音という。

地上型の重力波検出器に用いられる鏡は、アスペクト比 (直径と高さの比) が 1 に近い円柱の形をした弾性体である。鏡の熱雑音の詳細を知るためには 3 次元の弾性体の運動方程式を解くことが必要となる。鏡が薄板や棒に近い形状であれば、2 次元に近似して運動方程式を解析的に解くことができるが、円柱のような場合ではそのような近似はできず、正直に 3 次元の運動方程式を解かなくてはならない。ところがそれは多くの場合非常に困難である。そのため、以前は厳密な熱雑音を計算できないでいた。しかし、Hutchinson の考案したシミュレーション方法 [16] によって真の解に近い解を計算することが可能となり、以降、熱雑音の厳密な推定をすることができるようになった。さらに最近では、解析手法とコンピュータ能力の進歩により有限要素法を用いた解析手法がよく用いられている。

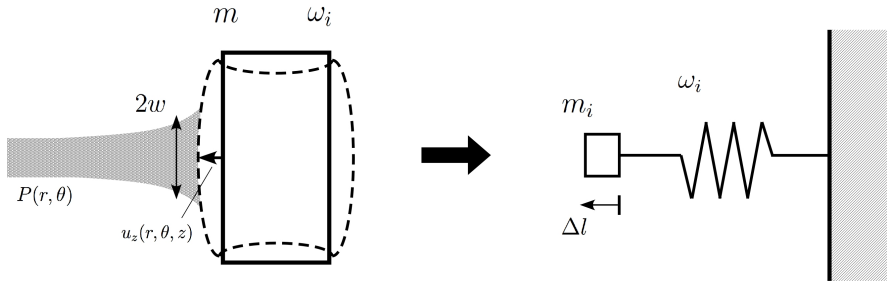

図 3.2: 換算質量の概念図

ここでは、モード展開法と Levin の方法という鏡の熱雑音を計算するための 2 つの方法を紹介する。熱雑音は系の伝達関数が分かれば、揺動散逸定理により簡単に求まる。よって、熱雑音を求めることは、系の伝達関数を求めることと同じになる。一般的に鏡のような 3 次元の系の伝達関数を正直に計算することは容易ではない。モード展開法と Levin の方法では、揺動散逸定理の伝達関数の部分の求め方に違いがある。モード展開法は、面倒な鏡の伝達関数を簡単な 1 次元の調和振動子として置き換えて考える方法である。一方で Levin の方法は、伝達関数を鏡の散逸エネルギーから求める方法である。

3.3.1 モード展開法

鏡のような 3 次元のものを、1 次元調和振動子の熱雑音として考えるときには注意が必要である。鏡の質量や弾性振動による鏡表面の変位をそのまま 1 次元調和振動子にあてはめることができないからである。

1 次元のときは揺動 (力) は点に作用するとして考えてきたが 3 次元では広がりを持つ。鏡の表面の変位は位置により異なる。鏡の表面が $u_z(r,\theta)$ だけ変位したとき、干渉計からみると鏡がどれだけの位置を動いたとしてとらえられるのかについて考えてみる。ここからは、鏡の重心を原点とした円柱座標 (r,θ,z) で考える。ファブリ・ペロー共振器内ではガウシアン・レーザーの TEM_{00} モードが共鳴している。鏡の表面が z 方向に $u_z(r,\theta)$ だけ変位しているとし、レーザーの強度分布を $P(r,\theta)$ とすると、干渉計のみる鏡の位置変化は、

$$\Delta l = \int_{\mathrm{S}} u_z(r,\theta) P(r,\theta)\, dS \tag{3.23}$$

と鏡の表面 S における積分で書ける。レーザーの強度分布は以下のように書ける。

$$P(r,\theta) = \frac{2}{\pi {w_0}^2} \exp\left(-\frac{2r^2}{{w_0}^2}\right) \tag{3.24}$$

w_0 はレーザー半径を表す。式 (3.23) により、鏡の振動による実効的な光路長変動を 1 次元に変換している [17]。

ある振動モードで振動している鏡を調和振動子に対応させて考えたとき、その振動子の質量を換算質量という。換算質量の概念を図 3.2 に示した。各振動モードの換算質量は、鏡の運動エネルギーと振動子の運動エネルギーが等しいとして定義する。各振動モードでの鏡の運動エネルギーは、

$$U = \frac{\rho {\omega_i}^2}{2} \int_V |u(r,\theta,z)|^2\, dV \tag{3.25}$$

と書ける。換算質量が m_i で、式 (3.23) の振幅をもち、角周波数 ω_i の振動子の運動エネルギーは、

$$E_K = \frac{1}{2} m_i {\omega_i}^2 (\Delta l)^2 \tag{3.26}$$

と書ける。この 2 つが等しいとするから、換算質量 m_i は、

$$m_i = \frac{\rho \int_v |u|^2 \, dV}{(\Delta l)^2} \tag{3.27}$$

となる。また、換算質量を鏡の質量で規格化したものを換算質量係数 $\alpha_i (= m_i/m)$ という。

これらからある振動モードによる鏡の熱雑音が計算できる。式 (3.12) の質量に換算質量を用いると、

$$G_i(\omega) = \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{\omega} \frac{{\omega_i}^2 \phi_i(\omega)}{m_i[({\omega_i}^2 - \omega^2)^2 + {\omega_i}^4 \phi_i(\omega)^2]} \tag{3.28}$$

となる。鏡の熱雑音は各振動モードの足し合わせとして表されるので、

$$G_{\mathrm{mirror}}(\omega) = \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{\omega} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{{\omega_i}^2 \phi_i(\omega)}{m_i[({\omega_i}^2 - \omega^2)^2 + {\omega_i}^4 \phi_i(\omega)^2]} \tag{3.29}$$

となる。よって、各振動モードの共振角周波数 ω_i、換算質量 m_i そして Q 値 Q_i を求めることができれば、熱雑音の推定ができることとなる。共振周波数などを求めるための方法 (Hutchinson の方法や有限要素法) は次の章で説明する。

ただ、式 (3.29) から分かるように、モード展開法では全ての共振周波数について熱雑音の足し合わせとして全熱雑音を計算しているために、無限にある共振周波数を全て足し合わせることは不可能で、完全な熱雑音の計算をすることはできない。全熱雑音への寄与が大きい、共振周波数の小さいほうから足し合わせていき、十分収束したところで打ち切らなくてはならない。このような打ち切りの地点の周波数をカットオフ周波数という。

多少の欠点はあるが以前はこのモード展開法を用いて、干渉計の鏡の熱雑音が計算されていた [17, 18]。

3.3.2 Levin の方法

Levin は以下の式により熱雑音が計算できることを提唱した。

$$G_x(f) = \frac{8k_{\mathrm{B}}T}{\omega^2} \frac{W_{\mathrm{diss}}(f)}{{F_0}^2} \tag{3.30}$$

ここで、W_{diss} は周期的な力 $F_0 P(r, \theta) \cos(2\pi f t)$ が鏡に加えられているときの散逸エネルギーである [19]。揺動散逸定理は、熱雑音と伝達関数の虚数部との関係を示したものである。伝達関数の虚数部は系のエネルギーの散逸を表したものである。モード展開法は、この伝達関数を 1 次元調和振動子から正直に計算することにより熱雑音を求めている。一方、Levin は散逸エネルギーの計算が伝達関数を求めることに比べて容易であることに注目し、散逸エネルギーを用いて揺動散逸定理を式 (3.30) のように表した。

系の散逸は複素ヤング率、

$$E = E_0[1 + \mathrm{i}\phi(\boldsymbol{r})] \tag{3.31}$$

を用いて表す。このとき散逸エネルギーは、

$$W_{\mathrm{diss}} = 2\pi f \int \rho(\boldsymbol{r}) \phi(\boldsymbol{r}) \, dV \tag{3.32}$$

と書ける。ここで、$\rho(\boldsymbol{r})$ は弾性エネルギー密度である。

モード展開法は系の伝達関数を正直に求めることが困難であることから、鏡の弾性振動を 1 次元の調和振動子にあてはめて考えることにより、鏡の伝達関数を容易に計算できるようにしたものである。

ただ、計算時間は比較的短時間で済むものの、カットオフ周波数以上の共振周波数を無視しなければならず厳密な熱雑音の計算とはいえない。一方の Levin の方法では、系の伝達関数を求めることよりも散逸エネルギーを計算することの方が容易である点に着目し、揺動散逸定理を式 (3.30) のように書き換えたものである。この場合、近似をおこなっておらず厳密な熱雑音を計算することができるが、計算に長時間を要するという欠点もある。熱雑音を厳密に計算したいのであれば長時間でも Levin の方法を、短時間でも大まかな概算をしたいときであればモード展開法を用いるのが良いといえる。

3.4 機械損失

モード展開法と Levin の方法による鏡の熱雑音の式をみて分かるように、熱雑音に影響を及ぼす要因の 1 つに機械損失がある。そこで、ここではまず機械損失とエネルギーの関係について述べ、いくつかの機械損失について取り上げ議論する。

3.4.1 機械損失と散逸エネルギーの関係

一般の弾性体が振動をしているとき、損失と系の散逸エネルギーの関係について考える。時間に対して周期的な応力 σ

$$\sigma = \sigma_0 e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{3.33}$$

を加えると、ひずみ ϵ

$$\epsilon = \epsilon_0 e^{\mathrm{i}(\omega t - \phi)} \tag{3.34}$$

が生じる。損失を ϕ とした。複素コンプライアンスを、

$$\begin{aligned} J^*(\omega) &\equiv \epsilon/\sigma \\ &= \frac{\epsilon_0}{\sigma_0} e^{-\mathrm{i}\phi(\omega)} \end{aligned} \tag{3.35}$$

と定義する。ここで、J^* を実部と虚部に分けて、

$$J^*(\omega) = J_1(\omega) + \mathrm{i}J_2(\omega) \tag{3.36}$$

と書く。すると、

$$|J|^2 = {J_1}^2 + {J_2}^2 \tag{3.37}$$

$$\tan\phi = J_1/J_2 \tag{3.38}$$

が成り立つ。

振動が 1 周期で散逸するエネルギー ΔW は、

$$\begin{aligned} \Delta W &= \oint \sigma \, d\epsilon \\ &= \pi J_2 {\sigma_0}^2 \end{aligned} \tag{3.39}$$

となる。蓄えられるエネルギーの最大量 W は、

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\pi/2} \sigma \, d\epsilon \\ &= \frac{1}{2} J_1 {\sigma_0}^2 \end{aligned} \tag{3.40}$$

となる。よって、

$$\tan\phi = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta W}{W} \tag{3.41}$$

を得る。とくに、$\phi \ll 1$ のときには、

$$\phi = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta W}{W} \tag{3.42}$$

となる。つまり、損失 ϕ は 1 周期の間に失われるエネルギーの全エネルギーに対する割合を表している。

また、この損失は 1 次元の調和振動子で導入した損失と同一でもある。応力とひずみには、

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\epsilon e^{\mathrm{i}\phi} \\ &= M^*(\omega)\epsilon\end{aligned} \tag{3.43}$$

の関係がある。ここで、

$$M^*(\omega) = M_1(\omega) + \mathrm{i}M_2(\omega) = M(1 + \mathrm{i}\tan\phi) \tag{3.44}$$

のように書ける。$\phi \ll 1$ のときを考えて、この M^* を 1 次元の調和振動子における複素バネ定数 $k(1+\mathrm{i}\phi)$ とみることができる。よって、ここでの損失 ϕ は、1 次元調和振動子の運動方程式 (3.10) で与えたものと同じ量であることとなる。また、式 (3.43) の M^* は、ヤング率を表している。Levin の方法で複素ヤング率を式 (3.31) のように表したのは、系にこのような機械損失があるということを意味している。

実現する損失は、それに影響を与えている全ての損失の和として表される。ϕ はさまざまな原因により現れるが、全体の損失は結局のところもっとも大きな損失により決定する。

$$\phi = \sum_i \phi_i \quad \simeq \max[\phi_i] \tag{3.45}$$

そこで、以下では問題になりそうな損失についていくつか取り上げ考察する。

一般的に損失は、次のような 3 種類に分けて考えることができる。固体内部の損失と加工による損失、外的な要因による損失の 3 つである。固体内部の損失は、固体の性質によって決定するもので物質固有の損失である。加工による損失は、材質を加工することによって生まれる損失である。干渉計においては、表面の凹凸や傷による損失やコーティングすることによる損失、そして複合鏡で鏡同士をはりつけるときに生じる接合面の損失などがこの加工による損失に含まれる。外的な要因による損失は、固体の測定をする際に導入されるもので、固体の機械損失ではない。

3.4.2 固体内部の損失

物質自体の損失

物質内部の損失は複素バネ定数 $m{\omega_0}^2(1+i\phi)$ を用いて表すのが便利である。複素バネ定数の虚部が損失を表す。理想的な弾性体は応力が変化すると、その情報は瞬時に伝わり同時にひずみが変化する。しかし、実際の物質の場合は応力が変化してからひずみが変化するまでの間には有限の時間を要する。この位相の遅れが複素バネ定数の虚部の部分に表されている。このような遅れを示す性質を擬弾性と呼び、弾性と区別することがある。

損失 ϕ がどのような周波数依存性をもつかについてはいくつかのモデルがあるが、有力とされているのは、先にも示したストラクチャ・ダンピング・モデルである。これは、損失の大きさが周波数に

依存しない ($\phi = 1/Q$) というもので、多くの物質で成り立つことが確認されている [10, 11]。ただ、損失 ϕ は奇関数であるから、すべての周波数領域で一定とすると矛盾が生じる。そのためこのモデルは、周波数依存性が完全にないというわけではなく、非常に弱いということをいっているだけである。本研究においてもこのモデルに沿って今後考えていく。

熱弾性効果による損失

弾性体が振動し、内部に周期的な応力が生じると、それによって周期的な温度変化が生じる。応力が空間的に非一様であると温度変化も同様に非一様になる。その結果、弾性体内部に温度勾配が生じ、熱流が流れる。熱流は弾性体のエントロピーの増加を伴うことから、それによってエネルギーが熱として散逸され、物質内部での損失となる。このような損失を熱弾性効果による損失という。熱弾性効果の詳細な過程については Zener が論じている [20]。弾性体内に生じた温度勾配は、緩和時間を τ とすると、$\exp(-t/\tau)$ のように指数関数的に減衰する。それぞれの緩和モードに対して、熱弾性効果による損失は、

$$\phi_{\mathrm{th}} = \Delta_k \frac{f f_k}{f^2 + {f_k}^2} \tag{3.46}$$

$$\tau_k = \frac{1}{2\pi f_k} \tag{3.47}$$

のように表せる。ここで、Δ_k は緩和強度、f_k は損失が最大となる周波数である。緩和モードは無数にあり、実際の弾性体の損失はこれらの緩和モードの重ね合わせとして与えられる。

一般の弾性体の熱弾性効果による損失は、熱伝導方程式を用いて弾性体に 1 周期の間に加わる熱量を計算することから得られる。詳細な導出については文献 [23] に詳しくあるので省略する。結果のみを書くと、

$$\phi = \frac{1}{W}\frac{C_v}{2T}\left(\frac{\alpha E T}{C_v(1-2\nu)}\right)^2 \left(\int {\epsilon_{ii}}^2\, dV\right) \sum_k g_k \frac{f f_k}{f^2 + {f_k}^2} \tag{3.48}$$

となる。W は弾性体が 1 周期で蓄えるエネルギーの最大値で、ϵ はひずみ、E はヤング率、ν はポアソン比、C_v は定積比熱、α は線膨張係数、T は温度である。g_k は各緩和モードの損失への寄与を表す割合で、

$$\sum_k g_k = 1 \tag{3.49}$$

を満たす。

熱弾性効果には巨視的なものと微視的なものの 2 種類ある。巨視的なものは、弾性体が巨視的な変形を受けたとき、空間的に非一様な体積変化が生じ熱流が流れる熱弾性効果である。微視的なものは、固体の微結晶が部分的にランダムな方向を向いていることによって応力が非一様になり、温度勾配が生じ熱流が流れる熱弾性効果である。

3.4.3 加工による損失

固体表面の凹凸や傷による損失や複合鏡としたときの鏡同士の接合面における損失などがある。

固体表面の損失

表面の損失の大きさは、

$$\phi = \phi_{\rm surf} h_{\rm surf} \frac{\int_S \epsilon^2(\mathbf{r})\, dS}{\int_V \epsilon^2(\mathbf{r})\, dV} \tag{3.50}$$

で与えられる [21]。ここで、$\phi_{\rm surf}$ は凹凸や傷などによるダメージ層に一様に存在する損失を、$h_{\rm surf}$ はそのダメージ層の厚さを表す。このような損失は、表面の損失とダメージ層の深さの積として表されることが多いが、それはダメージ層がどの程度の深さまで存在するものなのかが良く分かっていないためである。

接合面の損失

これは今回の実験のように、熱はめをして接合面をもつようなときに生じる損失で、

$$\phi = \frac{\Delta W_{\rm border}}{W_{\rm total}} \tag{3.51}$$

と定義する。ここで、$\Delta W_{\rm border}$ は 1 周期の間の接合面における散逸エネルギーであり、$W_{\rm total}$ は系全体が振動によって蓄えられるエネルギーの最大値である。

表面の損失のときと同様にして、接合面による損失が接合面から深さ $h_{\rm border}$ のダメージ層に一様に存在するというモデルを考える。接合面における損失を $\phi_{\rm border}$ と、E をヤング率と、$\epsilon(\mathbf{r})$ をひずみとして、

$$\Delta W_{\rm border} = \frac{1}{2} E \phi_{\rm border} h_{\rm border} \int_{S_{\rm border}} \epsilon^2(\mathbf{r})\, dS \tag{3.52}$$

$$W_{\rm total} = \frac{1}{2} E \int_V \epsilon^2(\mathbf{r})\, dV \tag{3.53}$$

と書ける。積分は $S_{\rm border}$ は接合面での、V は試料の全体積での積分を表している。よって式 (3.51) は、

$$\phi = \phi_{\rm border} h_{\rm border} \frac{\int_{S_{\rm border}} \epsilon^2(\mathbf{r})\, dS}{\int_V \epsilon^2(\mathbf{r})\, dV} \tag{3.54}$$

となる。

3.4.4 外的な要因による損失

測定系や環境による損失である。

支持による損失

支持系に散逸が存在すると、そこでエネルギーが消費されることにより正しい Q 値が測定できない。試料を何かで支えることで生じる損失である。

振り子で支える場合、振り子が振動すると支持点での支持位置が微小に変化し損失が生じる。これはリコイルロスと呼ばれ、懸架装置の Q 値測定を難しくする原因のひとつであるといわれている。また、振り子に吊られた状態で試料の Q 値を測定すると、ワイヤーと試料が接触している部分で損失が生じ正確な Q 値を測定できない。

そこで、今回の実験では、円柱の中心を点で支持する手法を採用した。円柱形の試料の場合、$n \leq 1$ の振動モードでは円柱中心に変位があるが、$n > 1$ の高次の振動モードでは中心に変位がない。これを利用し円柱中心を点で支持することにより、$n > 1$ のモードにおいて支持による損失を原理的になくすことができる。

残留気体による損失

残留気体分子が試料に衝突することによる損失である。この残留気体による損失は、室温で、

$$\phi_{\mathrm{gas}} = 1.1 \times 10^{-6} \left(\frac{0.25\,\mathrm{m}}{h}\right) \left(\frac{2\,\mathrm{g/cm^3}}{\rho}\right) \left(\frac{1\,\mathrm{Hz}}{f_0}\right) \left(\frac{P}{1\,\mathrm{Pa}}\right) \tag{3.55}$$

となる [23]。ここで、h と ρ、f_0、P はそれぞれ試料のサイズと密度、共振周波数、圧力である。たとえば、アルミニウム合金 A5056 の直径 7cm、高さ 6cm の円柱の場合を考え、$\rho = 2.64\,\mathrm{g/cm^3}$、$f_0 = 20\,\mathrm{kHz}$、$P = 10\,\mathrm{Pa}$ とすると、$\phi_{\mathrm{gas}} \sim 2 \times 10^{-9}$ となる。アルミニウムの材質自体の機械損失の典型的な値は 10^{-6}〜10^{-5} であるから、真空度が 10Pa 程度あれば、残留気体による影響は考えなくてもよいことになる。そのため、今回の測定は 5〜10Pa で行った。実際に、大気圧から減圧をしながら Q 値を測定していくと、はじめのうちは Q 値が増加するが、およそ数 10Pa あたりからはそれ以上 Q 値が増加しなくなることが確認されている。

3.5 本研究について

実現する機械損失は、影響するすべての損失の和となって表れるが、結果としては、最も大きいもの 1 つか少数の和となる。そこで、本研究の場合にどの損失が問題となるかについて考える必要がある。

熱弾性効果による損失については、巨視的なものは今回の試料の材質・サイズから十分に小さいことがわかっている [23]。微視的なものは、いささか影響する可能性はあるが今回は簡単のために考慮していない。固体表面の損失については、式 (3.50) のモデルを用いて、サファイアにおける Q 値の測定から $\phi_{\mathrm{surf}} h_{\mathrm{surf}} \sim 1.3 \times 10^{-9}\mathrm{m}$ と見積もられている [22]。その測定の中の計算から $\int_S \epsilon^2(\mathbf{r})\, dS / \int_V \epsilon^2(\mathbf{r})\, dV$ の部分が 10〜100 程度なので、ϕ は 10^{-8}〜10^{-7} 程度となる。アルミニウムの材質自体の機械損失の典型な値 10^{-6}〜10^{-5} に比べ十分に低いものと考えて良い。サファイアと今回の実験で用いたアルミニウムで表面の損失が全く同じであるかといった問題はあるが、大きくオーダーが変わることはないであろうと思い、今回の実験では表面の損失は考慮していない。支持による損失については、円柱の中心に変位がない高次のモードにおいて節点支持という手法を導入することにより原理的に取り去ることができる。また、残留気体による損失については前述のとおり、5〜10Pa 程度の真空にすることで除去することができる。

そのため、本研究で熱はめをおこなった試料の Q 値を測定する際、問題となるのは材質自体の機械損失と接合面での機械損失であると考えた。

第4章

有限要素法による数値解析

Q 値の測定をする際に、試料の共振を励起する必要がある。そのために、試料の共振周波数や振動モードなどを計算によってあらかじめ知っておかなくてはならない。ここでは、弾性理論について簡単に述べ、共振周波数等の解析手法について説明する。

4.1 弾性理論

今回の実験では、アルミニウムや真鍮といった弾性体を扱う。そのため、弾性体の理論について簡単に説明する。

4.1.1 弾性定数

連続体に応力が働かなければ変形が起こらず、応力が働けば変形が生じ、応力が無くなれば変形も無くなり元に戻るといったように、各時刻において応力と変形の間に一定の関係が成り立つとき、このような連続体のことを弾性体という [24]。

フックの法則によると、細い線に力をかけたときの伸びと力の間には比例関係が存在する。弾性体のひずみ ϵ と応力 σ の間にもこの関係を適用することができる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

この比例定数はスティフネス行列 (弾性定数) と呼ばれる。弾性定数 c_{ij} は対称であるので独立な値として最大 21 個取り得る。この独立な値の数は固体の属する結晶系によって決まる。

固体が一定の結晶構造を持つ場合には、その物理的性質は方向によって異なるが、例えば金属のように無数の微結晶の集合である場合またはガラスのように非晶質である場合には、固体の物理的性質は空間的方向性を持たない。このような性質を等方性という。等方的で理想的な固体を想定して等方弾性体というものを考えると、スティフネス行列 c_{ij} は座標系の任意の回転に対して不変になる。こ

の場合、独立な定数は 2 つとなる。これを c_{11}、c_{12} にとれば、スティフネス行列は、

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & & & \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & & & \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & & & \\ & & & c_{66} & & \\ & & & & c_{66} & \\ & & & & & c_{66} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{22}) \tag{4.3}$$

と表される。記入していない部分はすべて 0 である。等方体の場合は特に、

$$c_{11} = \lambda + 2\mu \tag{4.4}$$

$$c_{12} = \lambda \tag{4.5}$$

$$c_{66} = \mu \tag{4.6}$$

として表す方法がある。このときの、λ、μ をラメの定数と呼ぶ。

等方性体の弾性定数を表す方法は他にもあり、工業分野で最もよく用いられるものとしては、ヤング率 E やポアソン比 ν、体積弾性率 K、剛性率 G といったものがある。ヤング率 E は、細い棒に力を加えたときにかかる長さ方向の応力と長さ方向のひずみの関係を表す比例定数である。フックの法則のばね定数にあたるものである。ポアソン比 ν は、細い棒に力を加えたときの太さ方向のひずみと長さ方向のひずみの比である。体積弾性率 K は一様な圧力がかかったときの圧力と体積変化の比であり、剛性率 G はせん断応力とせん断ひずみの関係を表す比例定数である。これらの弾性定数とラメの定数との間には、

$$E = 2(1+\nu)\mu \tag{4.7}$$

$$\nu = \frac{\lambda(\lambda+\mu)}{2} \tag{4.8}$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{4.9}$$

$$G = \mu \tag{4.10}$$

または、

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \tag{4.11}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4.12}$$

$$\lambda + \mu = \frac{E}{2(1-2\nu)(1+\nu)} \tag{4.13}$$

$$\tag{4.14}$$

といった関係がある [25]。

4.1.2 等方弾性体の運動方程式

弾性体がある力を受けて運動する場合、微小体積における運動方程式はニュートンの運動の法則から、

$$\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} \tag{4.15}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z} \tag{4.16}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \tag{4.17}$$

と書ける。ここでは、重力のような外力は考えない。ρ は密度、u_x、u_y、u_z は変位である。

また、前述のように等方弾性体のスティフネス行列 c_{ij} は、

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

と書けることから、応力とひずみの間の関係は、式 (4.1) にこのスティフネス行列を代入すれば分かる。また、ひずみと変位には、

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad , \quad & \epsilon_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad , \quad & \epsilon_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad , \quad & \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x} \end{aligned} \tag{4.19}$$

の関係がある。運動方程式 (4.15)(4.16)(4.17) を式 (4.1)(4.18)(4.19) を用いて書きかえると、等方弾性体の運動方程式は次のように書ける。

$$\rho\,\ddot{\mathbf{u}} = (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mu\,\Delta\mathbf{u} \tag{4.20}$$

この式はどの座標系にも適用できる。

今回用いた試料はアスペクト比が 1 に近い円柱状の弾性体である。そのため、今までは直角座標系 (x, y, z) で考えてきたが、ここからは円柱座標系 (r, θ, z) で考えることにする。ここでは、さらに軸対称の場合を考えて、等方弾性体の運動方程式 (4.20) を円柱座標系で書くと、

$$\Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{4.21}$$

として、

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \lambda\frac{\partial\Delta}{\partial r}+\mu\left(2\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-2\frac{u_r}{r^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}\right) \tag{4.22}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \mu\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right) \tag{4.23}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \lambda\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\left(2\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+2\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) \tag{4.24}$$

となる [25]。この 3 式をみると、u_θ は 2 番目の式にのみ現れることが分かる。つまり、u_θ は単独で存在することができる。これがねじれ振動であり、式 (4.23) がねじれ振動を記述する式となる。

z 方向に有限な円柱状の等方弾性体の場合、このねじれ振動の解が唯一解析的に解くことができるものであることが分かっている。円柱の半径を a、高さを $h(-h/2 \leqq z \leqq h/2)$ とする。外周 $r = a$ において境界条件 $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$ を、上下の側面である $z = \pm h/2$ において境界条件 $\sigma_{\theta z} = 0$ を満たすように運動方程式 (4.23) を解くと、ねじれ振動の共振周波数は、

$$f = \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}\sqrt{(k'a)^2 + (\frac{a}{h})^2(nh)^2} \tag{4.25}$$

となる [25]。ここで、

$$nh = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \cdots \tag{4.26}$$

で、$k'a$ は、

$$J_2(k'a) = \frac{2}{k'a}J_1(k'a) - J_0(k'a) = 0 \tag{4.27}$$

を満たす解で, 小さい方から 0、5.136、8.418、11.620、$\cdots$ である。J_m は m 次のベッセル関数である。$nh = 0$ のときは、$z = 0$ の面に対して振動が対称 (even) なモード、$nh = \pi$ のときは反対称 (odd) のモードで、以下交互に続く。

ねじれ振動の解以外では境界条件を満たす解を解析的に解くことができない。その他の振動解は、以下に説明する Hutchinson の方法や有限要素法といった近似解を求める方法によって得るしかない。

4.2 Hutchinson の方法

円柱状の等方弾性体では、ねじれ振動解以外には厳密な解析解が存在しない。その他の振動モードを半解析的に求めるために考案されたものが、Hutchinson の方法である。ここでは、Hutchinson の方法の概念と解の特徴について述べる。詳細については Hutchinson の論文 [16] や、山元の修士論文 [15]、沼田の修士論文 [14] にある。

まず、等方弾性体の運動方程式 (4.20) を波動方程式に書き換え、それを円柱座標系に変換する。その解は、1 つの縦波と 2 つの横波を表す 3 つの解として現れる。この 3 つの解は円柱型の弾性体の波動方程式の一般解の基底をなすものである。Hutchinson はこの 3 つの解の線形結合を基底としてとりなおし、これらの新たな基底の線形結合により円柱内の波動を表している。ここで、線形結合をする際の係数を決定する必要があるので、円柱表面には応力がかからないという境界条件を課している。また、本来ならば基底の数は無限にあるので、NR、NZ という数を用いて有限に落とすようにしている。この近似により、波長が円柱の直径の約 $1/NR$ 倍以上の基底関数と円柱の高さの約 $1/NZ$ 倍以上の基底関数のみを考慮することとし、波長の短い基底関数を切り捨てるようにしている。そのため、周波数が高くなるとこの近似が成り立たなくなりうまく計算できない。

このようにして得られた解の特徴をみると、振動モードの形を表すのに 2 つの数があることが分かる。一つは、オーダー n で、変位の r 成分 u_r、もしくは θ 成分 u_θ を $0 < \theta < 2\pi$ に沿ってみた際に、波がいくつあるかを表す数である。そして、もう一つはパリティ p で、変位が対称であれば 0(even モード)、反対称であれば 1(odd モード) というものである。

中心 $(r = 0)$ の変位は、

- $n = 0$ のとき
  z 成分は有限で、他の成分は 0 となる。ただし、ねじれ成分のときは z 成分も 0 となる。

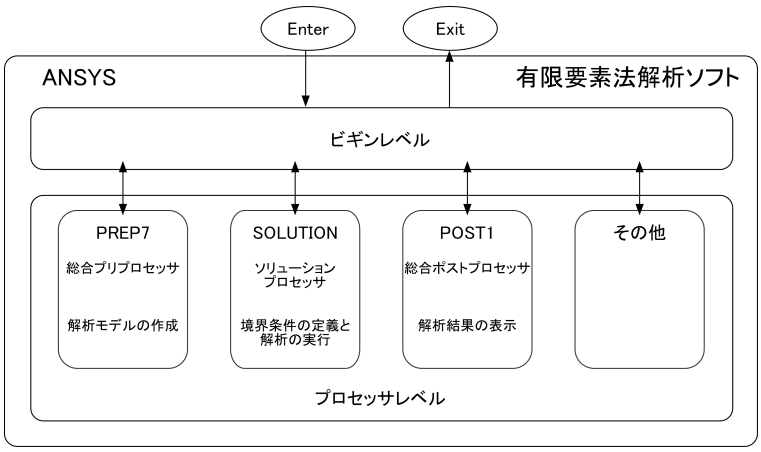

図 4.1: ANSYS の基本的な構成

- $n = 1$ のとき
  z 成分は 0 で、r 成分と θ 成分は有限となる。

- $n \geq 2$ のとき
  z 成分と r 成分、θ 成分はずべて 0 となる。

のようになる。

また、$n > 0$ のすべての振動モードは縮退している。周波数が等しく、$\pi/(2n)$ だけ θ 方向に傾いた二つの基底をとることができる。実際の実験では、完全な円柱はなく、これらの縮退モードはとけて、非常に近い 2 つの周波数として測定されることがある。

4.3 有限要素法解析

ただ単に円柱型の等方弾性体の共振周波数を求めるのであれば Hutchinson の方法で十分であるが、今回のように熱はめのような手法を用いた円柱の解析をする場合では、単体の円柱と熱はめにより作製した円柱が必ずしも同じ共振周波数振動モードをもつとは限らない。そのため、今回は有限要素法 (FEM) による解析を行った。

今までみてきたように、弾性体の問題は運動方程式を与えられた境界条件のもとで解くという偏微分方程式の問題となる。限られた場合はこれを解析的に解くことができるが、一般的には困難である。そこで、近似的な数値解を求める手法として開発されたものが有限要素法である。有限要素法は解析対象物を有限個の小さな要素に分割し (メッシュを切るともいう)、微小要素の集合体とみなすことにより、偏微分方程式を代数方程式で近似して、広範な弾性体の問題を数値的に解く方法である [26]。

4.3.1 解析ソフト ANSYS

有限要素法による解析ソフトは数多く市販されている。今回用いた ANSYS もその中のひとつである。ANSYS の具体的な使用方法やコマンドについては、マニュアル本 [27, 28] やオンラインマニュアルを参考にした。

図 4.1 に ANSYS の概要を示した。ANSYS にはビギンレベルとプロセッサレベルと呼ばれる 2 つのレベルがある。ANSYS を起動すると、まずビギンレベルに入る。ここから、各プロセッサに入りそ

れぞれのもつ機能を利用した作業を実行できる。通常、ほとんどの有限要素法汎用プログラムでは、プリプロセシング、ソリューション、ポストプロセシングの 3 構成により解析を行う。そのおのおのに対応する部分を、プリプロセッサ、ソルバ、ポストプロセッサという。

このうちプリプロフェッサにあたる部分は、ANSYS 内の総合プリプロセッサ (PREP7) である。ここはモデルを作成するためのコマンド群からなる。解析モデルの作成や要素モデルの選択、要素分割、材料定数の入力、接合条件の設定などをし、これから解析する対象物の定義をおこう。解析を成功させるポイントは対象物の要素分割である。要素分割が粗すぎると精度の悪い結果となるが、細かく分割しすぎ要素数が大きくなるとその分精度は向上するが、計算時間に長時間を要する。問題と精度に応じて要素分割を行い、適切な有限要素モデルを作成することがここでは重要である。

ソルバにあたる部分は、ANSYS 内のソリューションプロセッサ (SOLUTION) である。ここは境界条件の定義や解析の実行のためのコマンド群からなる。ここで指定するのは、求める周波数の範囲や振動モードの数、解析の方法などである。固有値解析をするときの計算法として適切なものを指定することは、解の精度や計算時間に影響するために重要となる。今回は、サブスペース反復法といわれる方法を用いた。

ポストプロセッサにあたる部分は、ANSYS 内の総合ポストプロセッサ (POST1) である。ここは解析結果のリスト表示やグラフィック表示を行うコマンド群からなる。各振動モードの共振周波数や、各節点における物理量 (変位や応力など) といった計算結果を検討する際にこのプロセッサを用いる。解析結果を表のように書き出すリスト表示と、変位や応力の分布をわかりやすく色分けして表示するグラフィック表示がある。各節点における物理量を用いて、さらに演算を行うこともできる。

第5章

実験方法

DECIGO で用いる鏡としては直径 1m、質量 100kg のものが予定されている。そのような大型の鏡において、図 2.5 に示した目標感度を達成するためには、厚さにより幾分異なるが Q 値は 10^5〜10^6 程度必要となる。

干渉計で用いられる鏡の材質の Q 値は溶融石英で 10^6、サファイアで 10^7 程度であるから、複合鏡を考えたときに接合面での機械損失が大きな問題となる。そこで、大型の複合鏡を設計する際に問題となるであろう接合面での機械損失を知ることを目標として実験をおこなった。今回は接合面をもつ試料を作製するために、手ごろにできる熱はめというはめ込み手法を用いた。様々な材質や接合面積をもった試料を用意し、それぞれの Q 値を測定し比較することにより、接合面における機械損失の特徴をみた。

ここでは、Q 値の測定方法、測定に用いた実験装置について紹介する。また、用意した試料について詳しく説明する。

5.1 Q 値の測定方法

Q 値の測定方法には主に以下の 2 通りの方法がある。

一つは、伝達関数の絶対値の幅から Q 値を求める方法である。伝達関数の絶対値の二乗 $|H(\omega)|^2$ の半値幅を $\Delta\omega_0$ とすると、

$$\Delta\omega_0 \sim \frac{\omega_0}{Q} \tag{5.1}$$

となるので、伝達関数を測定することで、Q 値を求めることができる。この方法は、Q 値が小さく半値幅が大きいようなときに有効な方法である。

もう一つは、共振の減衰から計算する方法である。系に外力を加えることで共振を励起し、その減衰の度合いをみる。式 (3.18)(3.22) から、系を励起した後に外力を加えるのを止めると、振動は指数関数的に減衰する。そしてその振幅には時間依存性があり、

$$\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)\sin(\omega_0 t) \tag{5.2}$$

に比例するので、Q 値を計算することができる。この方法の場合、Q 値が大きく減衰時間が長いほど測定が容易となる。

本実験で用いるような固体試料の Q 値はある程度大きなものであると分かっている。そのため、後者の共振の減衰をみるという方法を採用している。

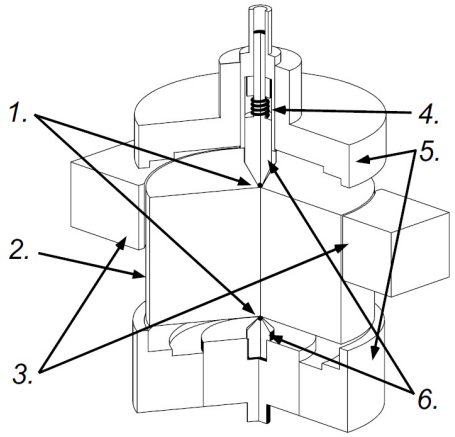

図 5.1: 試料支持系の概念図。1. ルビー小球 (2mm)、2. 試料 (直径 7mm, 高さ 6mm)、3. 励起系 (PZT)、4. ばね、5. アジャスタ、6. ロッド。[14]

5.2 実験装置

等方性弾性体ではオーダー $n > 1$ のモードにおいて、円柱の中心部分が不動点となる。そのため、円柱の中心で試料を支えることができれば、中心が不動点となる $n > 1$ の振動モードで試料自体の Q 値を測定することができるはずである。

試料の支持系では、円柱の中心をルビーの小球で支持する。ルビーの小球が精度よく円柱の中心に一致しないと支持系による損失が発生するため、アジャスタを用いて、精度よく円柱の中心を支持できるようになっている。

本実験は試料の共振を励起し、その減衰をみることにより Q 値を測定する。試料の共振の励起には PZT を用いた。また励起された共振による微小振動を計測するために、差動型マイケルソン干渉計を用いた。

5.2.1 試料支持系

試料支持系の概念図を図 5.1 に示した。

試料を支える部分は、ステンレス製のロッドとその先端にはめ込まれたルビー球でできている。下側のロッドは土台にはめ込まれ固定されているが、上側のロッドにはばねが取り付けられていてロッドを下向きに押し付け試料が不安定に倒れるのを防ぐ役割を果たしている。

ルビー球の直径は 2mm で、余計な損失が生まれるのを防ぐために接着剤は使用せずにロッドにはめ込まれている。ロッドの先端にルビーを用いる利点としては、以下の 2 つが考えられる。1 つは、ルビーが硬く変形しにくいために試料への接触面積を小さくできることである。そしてもう 1 つは、ルビーはサファイアと同じ結晶構造をもち含まれるイオンが異なるだけであるから、Q 値は低くないと期待できることである。沼田らによるとサファイアの Q 値は最大のもので 6.7×10^7 と測定されている [22]。

ルビー球が正確に円柱の中心に位置するようにするために、アジャスタが用意されている。これにより、ルビー球と試料の中心との距離は 0.3mm 程度以内に抑えることができると考えられる。

また、共振の励起のために PZT を用いた。PZT は機械式のリレーに固定されている。PZT は共振を励起するために、試料の外周に接触させることができる。共振の励起後に機械的な動作により PZT

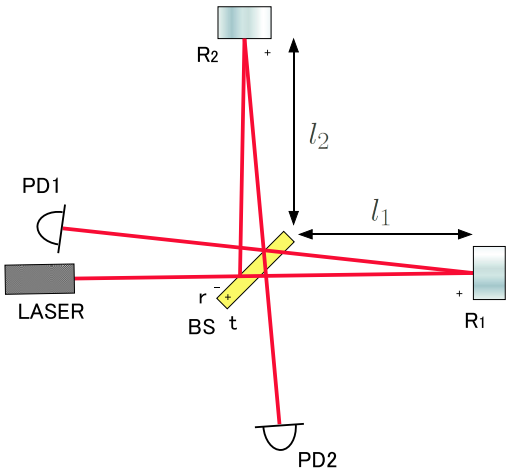

図 5.2: マイケルソン干渉計

は試料から離される。

5.2.2 光学系

励起された試料の振動による微小変位を読み取るために、差動型マイケルソン干渉計を用いた。差動型マイケルソン干渉計の仕組みを図 5.2 に示した。

図 5.2 のように、レーザー光源、ビームスプリッタ、鏡そして光検出器を配置する。差動型のマイケルソン干渉計は、レーザー光源からでた光がビームスプリッタにより 2 つに分けられ、それぞれの方向で鏡に反射され再びビームスプリッタにもどり干渉するというものである。それを光検出器でみると、それぞれ腕の長さの変化と共に光検出器に流れる電流が変化する。そのため、一方の鏡を全く動かない鏡に、もう一方の側面反射を利用し鏡のように働く試料を置くことによって、試料の共振による微小変位を干渉計の腕の長さの変化として光検出器により測定することができる。実際には完全に動かない鏡を用意することは不可能であるので、位置制御が可能な参照鏡を用いている。参照鏡により差動型マイケルソン干渉計を感度がもっとも良くなる動作点に保持する。

図 5.2 において、ビームスプリッタの振幅反射率、透過率をそれぞれ r、t と、鏡の振幅反射率を R と、それぞれの腕の長さを l_1、l_2 とする。入射レーザー光の電場を

$$E_{\mathrm{in}} = E_0 e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{5.3}$$

とする。分けられた 2 つの光はそれぞれの腕を往復した分だけの位相変化をして再び結合する。このとき光検出器 PD1、PD2 に入る電場は、レーザー光の波数を k として、

$$E_1 = E_0 e^{\mathrm{i}\omega t}(R_1 t^2 e^{-2\mathrm{i}kl_1} + R_2 r^2 e^{-2\mathrm{i}kl_2}) \tag{5.4}$$

$$E_2 = E_0 r t e^{\mathrm{i}\omega t}(R_1 e^{-2\mathrm{i}kl_1} - R_2 e^{-2\mathrm{i}kl_2}) \tag{5.5}$$

と書ける。この光が光検出器に入射したときに、それぞれの光検出器に流れる電流は、

$$I_1 = \eta|E_1|^2 = \eta {E_0}^2 \left[{R_1}^2 t^4 + {R_2}^2 r^4 + 2R_1 R_2 r^2 t^2 \cos\left(2k(l_1 - l_2)\right)\right] \tag{5.6}$$

$$I_2 = \eta|E_2|^2 = \eta {E_0}^2 r^2 t^2 \left[{R_1}^2 + {R_2}^2 - 2R_1 R_2 \cos\left(2k(l_1 - l_2)\right)\right] \tag{5.7}$$

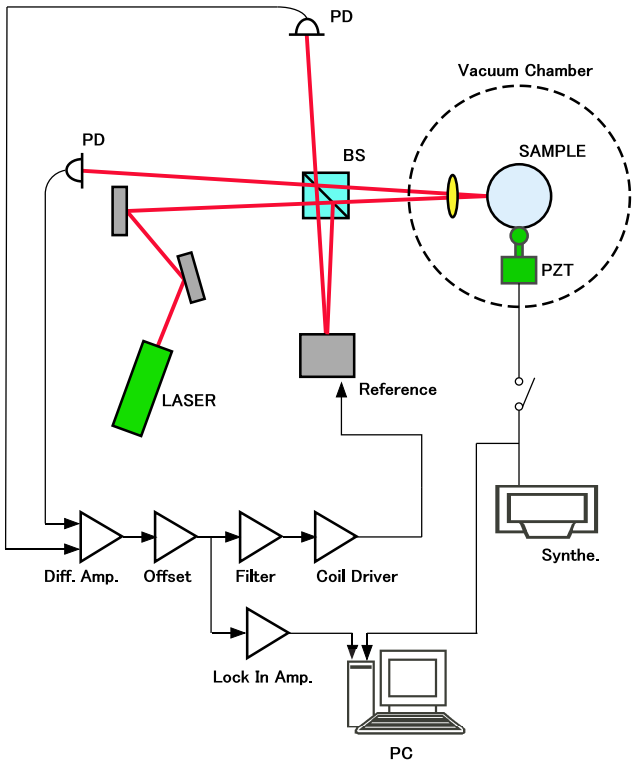

図 5.3: 差動型マイケルソン干渉計と信号取得の概要図

となる。ここで、η は放射感度である。両者の差を I とすると、

$$\begin{aligned} I &= I_1 - I_2 \\ &= \eta {E_0}^2 \left[{R_1}^2 t^4 + {R_2}^2 r^4 - {R_1}^2 r^2 t^2 - {R_2}^2 r^2 t^2 + 4 R_1 R_2 r^2 t^2 \cos\left(2k(l_1 - l_2)\right) \right] \end{aligned} \tag{5.8}$$

となる。この PD1 と PD2 に流れる電流の差 I を、マイケルソン干渉計の両腕の長さの差を $\Delta l = l_1 - l_2$ として、

$$I = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2} + \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \cos(2k\Delta l) \tag{5.9}$$

のように書く。第一項は干渉計の両腕の長さの差に関係なく、第二項は両腕の長さの差によって変化する。よって、この第二項の部分をうまく検出することにより干渉計の腕の変動を読むことができる。DC オフセットを乗せることにより、第二項の正負に等しく振れる成分のみを取り出すと、

$$I = |I_P| \cos(2k\Delta l) \tag{5.10}$$

となる。$\Delta l = (1/2 + n)\pi/(2k)$ のとき、

$$I = 0 \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial I}{\partial(\Delta l)} = \pm 2|I_P|k \tag{5.12}$$

となり、I の微係数の絶対値が最大値を取っていることから、このようなときに干渉計の感度が最も良い状態にあることが分かる。また電圧が電流に比例するような素子を用いていれば、式 (5.10) から、変位 Δl が、

$$|\Delta l| \ll \lambda/8 \tag{5.13}$$

表 5.1: アルミニウム合金の化学成分 (%)[29]

種類	Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Zn	Cr	Ti	Al
A5056	0.30*	0.40	0.10	0.05〜0.20	4.5〜5.6	0.10	0.05〜0.20	-	残部
A6061	0.40〜0.8	0.7	0.15〜0.40	0.15	0.8〜1.2	0.25	0.04〜0.35	0.15	残部

表 5.2: 銅合金の化学成分 (%)[30]

種類	Cu	Pb	Fe	Fe+Sn	Zn
C3604	57.0〜61.0	1.8〜3.7	0.50 以下	1.2 以下	残部

であるときには、出力電圧は変位に比例すると考えることができる。よって、$I = 0$ の付近であれば、出力電圧は変位に比例し、式 (5.13) のような小さな変位を読み取ることができる。そのためには、干渉計を最も感度の良い状態である動作点 ($I = 0$) に保つことが必要であり、この実験では、干渉計を構成する二つの鏡のうち一つを参照鏡として位置を制御している。

光学系の各部分について説明する。光学系の設置の様子を図 5.3 に示した。

光源は、波長 633nm の He-Ne レーザーを用いた。このレーザー管にはヒータが巻かれていて、レーザー管の温度調整により周波数の安定化を行っている。

参照鏡は、干渉計の片方の腕を構成し、干渉計を動作点に保つ鏡である。鏡は二段振り子で吊られている。ワイヤは磁気を帯びないタングステンワイヤを用いている。中段マスは銅で作られ、その周囲に Nb 磁石を配置し、磁石により誘起される渦電流により振動がダンピングされる。二段目の振り子にはアルミマスが吊るされていて、そこにアルミ蒸着の鏡が取り付けられている。アルミマスには二箇所に小さな Nb 磁石が取り付けられていて、ここにコイルを近づけ電流を同相で流すことにより光路長の制御を行う。

制御のために、干渉計の二つの PD から得た信号の差動を得る回路、そこから DC 成分を取り除くためのオフセット回路、制御用のフィルタ回路とコイルに電流を流すためのコイルドライバ回路を用いた。データの取得には、ロックインアンプと PC を用いた。試料の共振の励起にはシンセサイザからの交流信号を用いた。

5.3 試料

試料は、アルミニウム合金と真鍮を用意した。試料のサイズは直径 7cm、高さ 6cm で、実験では試料の側面反射を利用してマイケルソン干渉計を構成するために試料の外周を鏡面となるように磨いてある。アルミニウム合金には A5056 と A6061 という合金を、真鍮には C3604(旧 JIS の名称では BSBM2) という銅合金を用いた。それぞれの成分を表 5.1、表 5.2 に示した。

接合面をもつ試料を作製ために、今回は熱はめを行った。熱はめは熱膨張を利用したはめ込み手法であり、工業的には焼きばめともいう。熱はめによる試料作製の概要を図 5.3 に示した。円筒と円柱の試料を用意し、まず円筒の方を加熱する。すると熱膨張により円筒の穴の直径が大きくなるので、そこに円柱を入れる。その後常温まで冷えると、中の円柱がしっかりとはめ込まれるというものである。

アルミニウム合金 A5056 と A6061 と真鍮 C3604 はともに、内部にはめ込む円柱の直径 D は 20mm、30mm、40mm と 3 種類用意した。これにより、接合面積と Q 値の関係をみることができると期待で

*範囲で示していない数字は、最大値を表す。

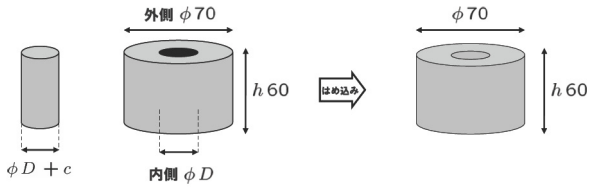

図 5.4: 熱はめによる試料作製の概要

表 5.3: はめあいの寸法公差 (軸)

軸の直径 (mm)	寸法 c (μm)
18< D ≤24	41〜54
24< D ≤30	48〜61
30< D ≤40	60〜76

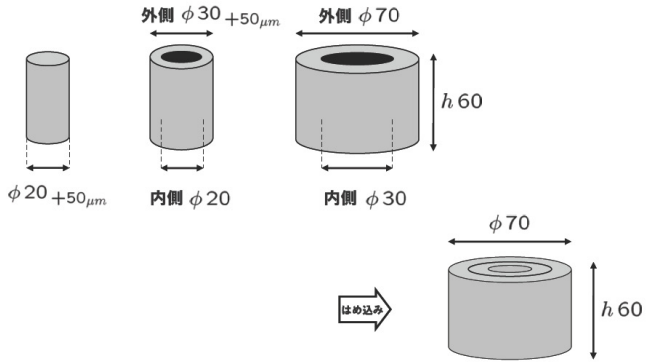

図 5.5: 円柱 1 つと円筒 2 つの熱はめによる試料作製の概要

きる。実際には、内部にはめ込む円柱の直径と円筒の内径が全く同じだと、はめ込み後に抜け落ちてしまうために円柱の方の直径を少し大きくしてある。こののりしろにあたる部分をはめあいの寸法 (図 5.3 の c で表した部分) と呼ぶ。こののりしろ部は、内部にはめ込む円柱の直径により、どのくらいとるべきかの目安が JIS 規格により示されている。それを表 5.3[†]に示した。この目安に従い、内部にはめ込む円柱の直径が 20mm のものではのりしろを 50μm、30mm のものでは 50μm、40mm のものでは 70μm とっている。この目安よりも大きいもしくは小さいのりしろで熱はめをおこなって Q 値を測定すると、どちらも目安に従ったものに比べ Q 値が 1 桁近く低くなることを確認している。

熱はめをするときには、円筒の方をバーナーで加熱する。そのため熱はめ後には材質の表面が黒くこげてしまう。こげつきにより Q 値の低下が考えられるので、あらかじめ円柱の高さと円筒の外径と高さを予定よりも大きく作っておき、熱はめ後に黒くなった部分と一緒に削って予定の寸法になるようにした。試料の寸法は熱はめ後に直径 7cm、高さ 6cm である。

またアルミニウム A5056 においては、接合面積がさらに大きいものを用意するために、図 5.3 に示したような 1 つの円柱と 2 つの円筒の 3 つで熱はめをする試料も作製した。最も内側の円柱の直径は 2cm で、真ん中の円筒は外径 3cm・内径 2cm、最も外側の円筒は外径 7cm・内径 3cm である。この場合も熱はめ後の試料は直径 7cm、高さ 6cm である。

最後に、アルミニウム合金 A5056 の円筒に真鍮の円柱を熱はめした試料も作製した。この場合は、内部の円柱の直径が 20mm のものと 30mm のものの 2 種類を用意した。できれば、アルミニウムと真鍮を逆にした試料も用意したかったが、硬い材質の中に軟らかく熱膨張率の高い材質を熱はめすると、はめ込み後の冷却途中に内部のアルミニウムが大きく縮んで抜け落ちてしまう現象が起きてしまい用意することができなかった。

[†]JIS B 0401(1998) より引用

表 5.4: 試料の一覧表

材質	試料の形状
A5056	単体、ϕ20、ϕ30、ϕ40、ϕ20 · 30
A6061	単体、ϕ20、ϕ30
C3604	単体、ϕ20、ϕ30、ϕ40
A5056 · C3604	ϕ20、ϕ30

以上のようにして試料を作製した。表 5.4 は今回用意した試料の一覧表である。アルミニウム A5056 と A6061 と真鍮 C3604 の単体の試料が 3 個と、熱はめによる試料が 11 個の計 14 個の試料の Q 値の測定を行った。その結果を次章で述べる。

第6章

計算結果・実験結果

有限要素法において、どのような要素モデルや境界条件、弾性定数、密度を用いたのかについて説明する。その後、計算結果と実験結果をそれぞれの試料について述べ、測定したQ値と接合面での機械損失について考察する。

6.1 解析条件

6.1.1 要素モデル

今回の測定で用いた試料は、直径7cm、高さ6cmの円柱形である。これを有限要素法で解析するために、有限要素に区切りモデル化した。

対称性よくメッシュを切るためにマップトメッシュを用いた。SOLID45と呼ばれる六面体要素を採用し、図6.1のような要素分割を行った。図6.1にあるモデルは、アルミニウム合金もしくは真鍮の単体の試料の解析に用いたモデルである。要素数は14580、節点数は17344である。この六面体要素の辺の長さは、要素の位置により多少異なるが約2〜4mmである。そのため、この長さ程度の波長の弾性振動になるとうまく解析できなくなる。しかし、そのような波長をもつ弾性振動の周波数は今回の実験で測定した周波数領域よりも十分に大きいものであるため、今回の実験で考えた周波数領域では問題にはならない。

このような有限要素モデルを用いて、アルミニウム合金A5056の単体の試料について共振周波数の解析を行ったときの計算結果と実験値との相対誤差を求めた結果を図6.2に示した。Hutchinsonの方

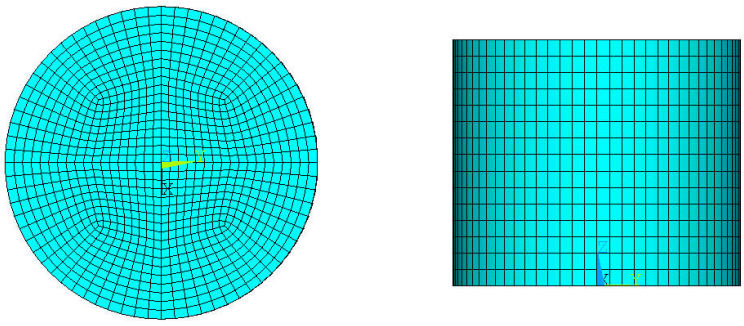

図 6.1: 有限要素モデル

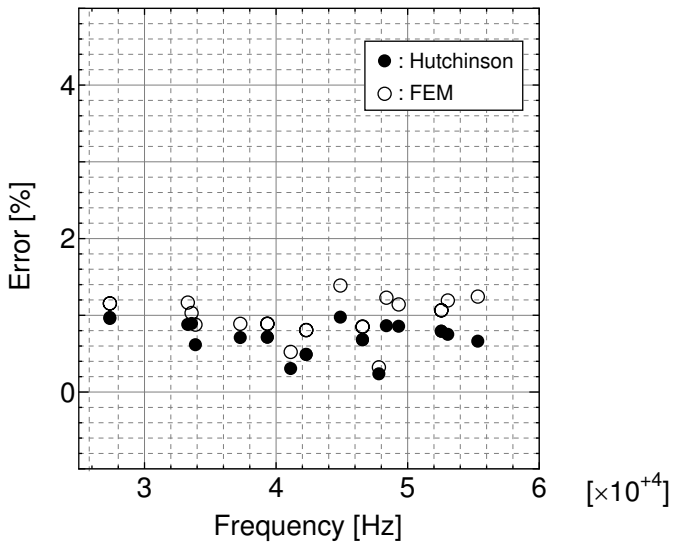

図 6.2: A5056 の共振周波数の計算値と実験値の相対誤差 (%)

法で計算した結果と実験値の相対誤差も参考にプロットした。有限要素法の結果は、ほとんどのモードで相対誤差が 1 %前後のところで精度よく求められていることが分かる。

このときの相対誤差は、

$$\text{Error [\%]} = \frac{f_{\text{calc}} - f_{\text{exp}}}{f_{\text{calc}}} \times 100 \tag{6.1}$$

として求めた。共振周波数の計算値が f_{calc}、実験値が f_{exp} である。

有限要素法の数値解とは違い、Hutchinson の方法は半解析的な解を計算する方法であった。そのため、Hutchinson の方法ではかなり精度よく計算できることが知られている [14, 15]。今回の有限要素法で計算した結果は、Hutchinson の方法と比較すると 0. 数%程劣るものの、よい精度で共振周波数を求めることができている。これは有限要素モデル作成で要素数を多く取ったことが、要因として考えられる。通常、有限要素法で計算する場合、その計算結果は実際の共振周波数よりも大きくなる傾向があるが、そのような傾向もみられた。ただ、Hutchinson の方法で計算した場合では、幾分相対誤差がプラスの方に寄っているようにみえる。共振周波数はヤング率の平方根に比例する。ヤング率はそれほど精度の高いものではないので、用いたヤング率の値が実際よりも大きかった可能性が考えられる。

熱はめをしたときのモデルでは、r 成分方向の途中の接合面のところでモデルに区切りができてしまう。図 6.1 と全く一緒の要素分割をするというわけにはいかなかったが、なるべく似たような要素分割になるよう心掛けた。各熱はめのケースにおける要素数と節点数を表 6.1 に示した。いずれも十分な精度を実現できる要素数と節点数であると考える。要素モデルに関しては、単体のときと同じく六面体要素 (SOLID45) を用いた。

熱はめをした試料のモデルでは、接合面で滑りなしという条件と拡大ラグランジェ法という方法を用いた。ANSYS では接合の条件として、完全にくっついているかのように一つの連続した構造物とみなす固着やパーツ間は分離することは無いが滑りを許容する分離なし、パーツ間は分離を許容するが滑ることはない滑りなしなどの条件を設定することができる。すべて試した結果、滑りなしという条件を用いたときが最も良く実験結果と一致することからこれを用いた。また、熱はめをしたとき、のりしろ部分でモデル同士に食い込みが生じる。拡大ラグランジェ法はこの食い込み現象を解決する

表 6.1: 各モデルの要素数と節点数

モデル	内側の ϕ	要素数	節点数
単体		14580	17344
熱はめ	20	14260	17792
熱はめ	30	13060	16384
熱はめ	40	11860	14976
熱はめ	20,30	13696	17728

表 6.2: アルミニウム合金の弾性定数と密度 [29]

種類	ヤング率 (Pa)	ポアソン比	密度 (g/cm^3)
A5056	7.10×10^{10}	0.33	2.64
A6061	6.89×10^{10}	0.33	2.70

表 6.3: 真鍮 C3604 の弾性定数と密度 [32]

ヤング率 (Pa)	ポアソン比	密度 (g/cm^3)
10.06×10^{10}	0.35	8.46

機能をもつ。初期食い込みがあると解析中に押し戻し、食い込みゼロの状態に保とうとする解析方法である [31]。また、その分の応力が部材に発生する。

6.1.2 弾性定数

有限要素法で解析をする際に与えた弾性定数について示す。

アルミニウム合金 A5056 は、Al-Mg 系の合金である。A5056 の化学成分は表 5.1 に示した。マグネシウムを添加した非熱処理合金系で強度があり、耐食性に優れ、切削加工におる表面仕上がりが良く、乗用車や鉄道車両などに使用されている。また、共鳴型の重力波検出器にも使われたものである。

アルミニウム合金 A6061 は、Al-Mg-Si 系の合金である。A6061 の化学成分は表 5.1 に示した。マグネシウムとシリコンを添加した熱処理合金系で、高い強度を有する。建築材料や乗用車などに使用されている。

真鍮 C3604 は、銅と亜鉛の合金である。見た目は黄色く、黄銅とも呼ばれる。化学成分は表 5.2 に示した。

これらの弾性定数と密度を表 6.2 と表 6.3 に示した。これらの値を計算に用いた。

以上のような、要素モデルと弾性定数を用いて計算をした。以降では、弾性振動のモード形状ごとに結果を考察することがあるため、モード形状を表す 2 つの量子数について簡単に説明する。円柱形の弾性振動には、有限要素法について記述した章でも示したが、オーダー n やパリティ p といった量子数があり、それによりモード形状を区別することができる。言葉だけでモード形状を説明することは難しいので、オーダー n が 0 と 1、2 のときのモード形状をそれぞれ図 6.3 と図 6.4、図 6.5 に示した。

図中に色で示されたなかで、赤色の部分が大きく変位する部分を青色が変位がないもしくは少ない部分を表している。オーダー n は円周方向にひと回りしたときに波がいくつあるかを表す数である。パリティ p は円柱の z 軸方向の対称性を表し、対称であれば 0(even) 反対称であれば 1(odd) となる数

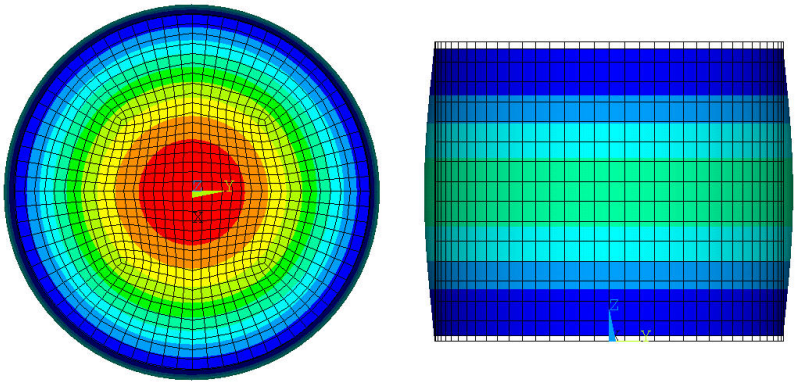

図 6.3: $n = 0 \cdot p = 0$ (even) のモード形状の例 (A5056 単体の共振周波数 (FEM) 37.614kHz)

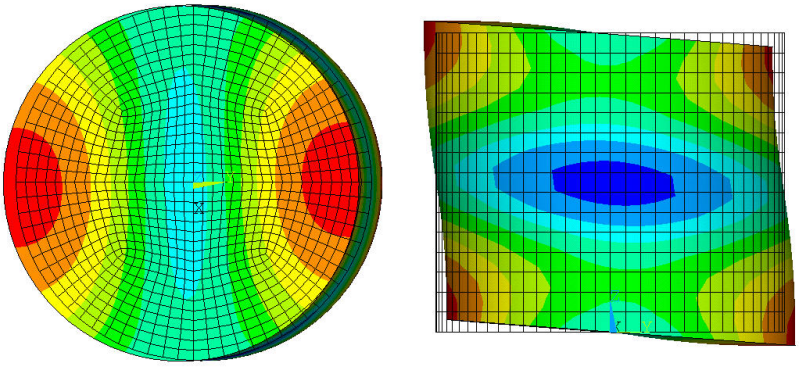

図 6.4: $n = 1 \cdot p = 1$ (odd) のモード形状の例 (A5056 単体の共振周波数 (FEM) 33.682kHz)

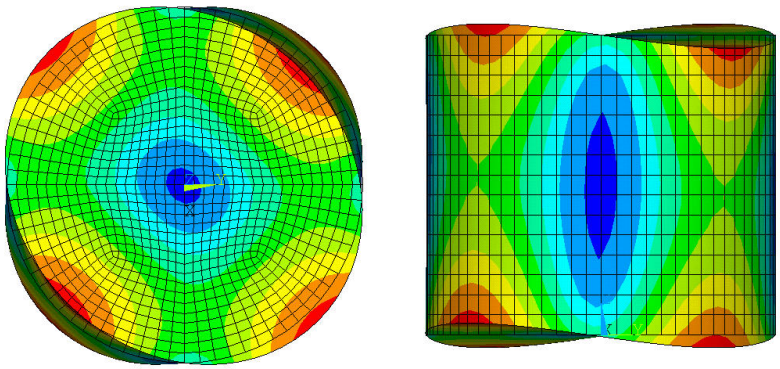

図 6.5: $n = 2 \cdot p = 1$ (even) のモード形状の例 (A5056 単体の共振周波数 (FEM) 27.688kHz)

である。オーダーが 0 のモードでは、円柱の中心で z 方向に変位を強くもつ、そのため今回のような円柱の中心を節点支持する場合には、支持することによる損失により測定 Q 値が低下する。オーダーが 1 のモードのときは r 方向と θ 方向に変位があり、同様に Q 値が低下する。しかし、オーダーが 2 以上の高次のモードでは、中心に変位がなく支持による損失の影響を受けることなく材質自体の Q 値を測定することができる。

6.2 アルミニウム合金 A5056 の計算結果と実験結果

アルミニウム合金 A5056 を使用して作製した試料について、有限要素法による共振周波数の計算結果と、実験による共振周波数と Q 値の結果について述べる。20kHz から 60kHz までの範囲において、共振を調べた。その結果を表 A.2 から表 A.6 に示した。

6.2.1 単体の場合

アルミニウム合金 A5056 の単体の試料における共振周波数の計算結果と、実験による共振周波数と Q 値の結果を表 A.2 に示した。

有限要素法による計算結果では、20kHz から 60kHz において共振は縮退を除いて 18 個あった。ねじれのモードに関しては検出することができなかった。実験で用いた PZT は半径方向にしか力を加えることができないことや、側面反射を利用していることから変位を検出しにくかったものと思われる。その他の共振はすべて検出することができた。

表 A.2 から、横軸に共振周波数の実験値を縦軸に Q 値をとりプロットしたものが図 6.6 である。$n \leq 1$ といった円柱の中心に変位のあるモードでは節点支持による損失のため少し Q 値の低下が見えるものの、中心に変位がない高次のモード ($n \geq 2$) については $1 \sim 2 \times 10^5$ 程度のところに Q 値が集中している。A5056 の材質自体の Q 値がうまく測定されていることが分かる。この測定における最高の Q 値は、$Q_{\max} = 2.01 \times 10^5$ で、モード番号 2 の共振周波数 (FEM) 27.688kHz、$n = 2$、$p = 1$ の振動モードであった。その振動モードの形状を図 6.5 に示した。同じ材質でサイズが異なるものでの Q 値の測定結果が文献 [23] にあり、そこでは最高の Q 値が 2.54×10^5 に達している。その他のモードでは、Q 値はおよそ $1.5 \sim 2.5 \times 10^5$ の間にあり、今回の結果と良く一致している。

6.2.2 熱はめした試料の場合

アルミニウム合金 A5056 において、内部に ϕ20 の円柱を熱はめした試料の計算結果と実験結果を表 A.3 に、内部に ϕ30 の円柱を熱はめした試料の計算結果と実験結果を表 A.4 に、内部に ϕ40 の円柱を熱はめした試料の計算結果と実験結果を表 A.5 に、内部に ϕ20 の円柱と外 ϕ30・内 ϕ20 の円筒を熱はめした試料の計算結果と実験結果を表 A.6 に示した。

計算による共振周波数とモードの形状に着目してみると、A5056 の単体のときと比較すると共振周波数はほぼ同じ値をとっており、モード形状については全く同じ順番で出現している。計算による共振周波数が完全に一致しないのは、熱はめのサイズにより接合面に働く応力が異なること、もしくは単体のときとは完全に同じ要素分割ができないことが考えられる。熱はめをするとほぼ一体として考えても問題のないくらいの相当な圧力によって材質同士が接合するものと思われる。

ところが、Q 値についてみると熱はめをしたことによる違いがみえる。横軸に共振周波数を縦軸に Q 値をとりグラフ化したものが図 6.7 である。黒のプロットは単体の結果、緑のプロットは内部に ϕ20 の円柱を熱はめした試料の結果、青のプロットは内部に ϕ30 の円柱を熱はめした試料の結果、赤のプ

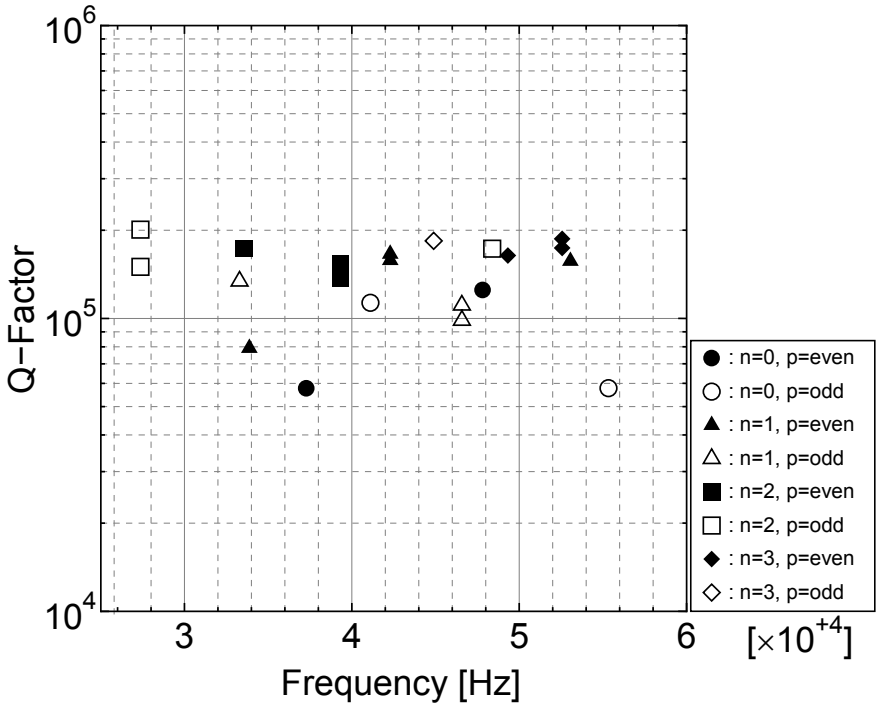

図 6.6: アルミニウム合金 A5056(単体) の共振周波数と Q 値の関係

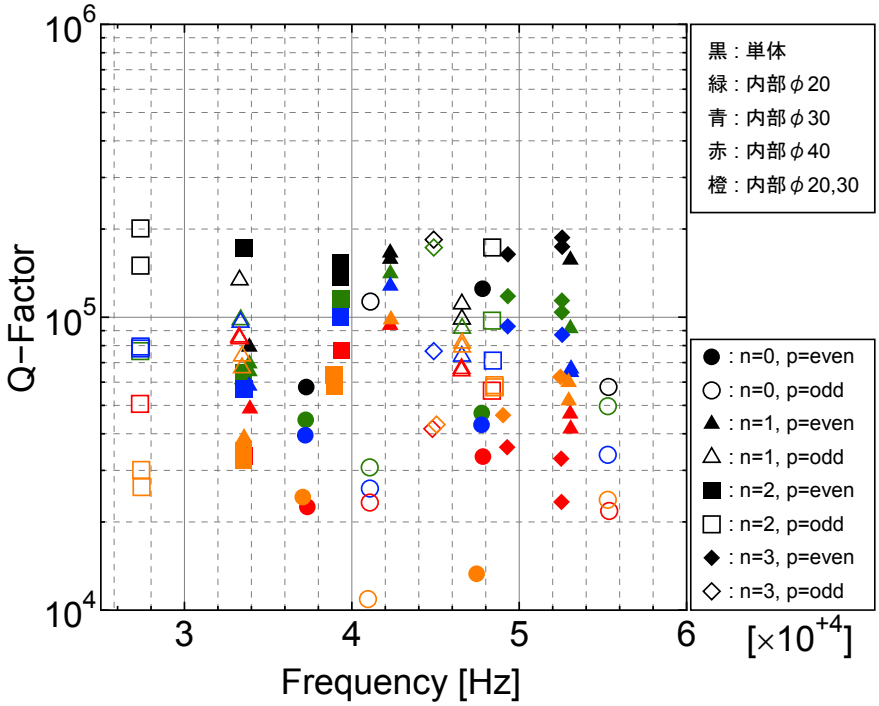

図 6.7: アルミニウム合金 A5056 の共振周波数と Q 値の関係

ロットは内部に ϕ40 の円柱を熱はめした試料の結果、橙のプロットは内部に ϕ20 の円柱と外 ϕ30・内 ϕ20 の円筒を熱はめした試料の結果である。赤と橙はモードによりどちらかの Q 値が高いかが変わるが、ほとんどのモードにおいて黒、緑、青の順になっており、接合面積が大きくなるにつれて Q 値が低下している様子がみえた。

6.3 アルミニウム合金 A6061 の計算結果と実験結果

アルミニウム合金 A6061 を使用して作製した試料について、有限要素法による共振周波数の計算結果と、実験による共振周波数と Q 値の結果について述べる。20kHz から 60kHz までの範囲において、共振を調べた。その結果を表 A.7 から表 A.9 に示した。

6.3.1 単体の場合

アルミニウム合金 A6061 の単体の試料における共振周波数の計算結果と、実験による共振周波数と Q 値の結果を表 A.7 に示した。

有限要素法による計算結果では、20kHz から 60kHz において共振は縮退を除いて 19 個あった。ねじれのモードに関しては検出することができなかった。実験で用いた PZT は半径方向にしか力を加えることができないことや、側面反射を利用していることから変位を検出しにくかったものと思われる。その他の共振はすべて検出することができた。

表 A.7 から、横軸に共振周波数の実験値を縦軸に Q 値をとりプロットしたものが図 6.8 である。$n \leq 1$ の円柱の中心に変位があるモードでは節点支持による損失のため少し Q 値の低下が見えるものの、中心に変位がない高次のモード ($n \geq 2$) については $2.4 \sim 3 \times 10^5$ 程度のところに Q 値が集中している。材質自体の Q 値がうまく測定されていることが分かる。この測定における最高の Q 値は、$Q_{\max} = 2.96 \times 10^5$ で、モード番号 2 の共振周波数 (FEM) 26.971kHz、$n = 2$、$p = 1$ の振動モードであった。同じ材質でサイズが異なるものでの Q 値の測定結果が文献 [23] にあり、そこでは最高の Q 値が 3.66×10^5 に達している。その文献では測定したモード数は少ないが、その他の Q 値はおよそ $2 \sim 3 \times 10^5$ の間にあり、今回の結果と良く一致している。

6.3.2 熱はめした試料の場合

アルミニウム合金 A6061 において、内部に ϕ20 の円柱を熱はめした試料の計算結果と実験結果を表 A.8 に、内部に ϕ30 の円柱を熱はめした試料の計算結果と実験結果を表 A.9 に示した。

A5056 のときと同様に、単体のときと熱はめをしたときとで比較すると共振周波数はほぼ同じ値をとっており、モード形状についても全く同じ順番で出現している。

ただ A5056 のときとは違い、多くのモードで共振周波数の計算値よりも実験値の方が大きくなっている。有限要素法を用いた場合、実験値よりも計算値の方が大きくなる性質がある。おそらくは用いた弾性定数もしくは密度の精度の悪さであろう。共振周波数は大まかにヤング率の平方根に比例するから、今回用いたヤング率は実際の値よりもだいぶ小さかった可能性がある。密度の精度については実際に試料の質量を測り、そこから計算して確認している。良くあっていて約 0.03 %の違いしかなかった。

Q 値についてみると熱はめをしたことによる違いがみえた。横軸に共振周波数を縦軸に Q 値をとりグラフ化したものが図 6.9 である。黒のプロットは単体の結果、緑のプロットは内部に ϕ20 の円柱を熱はめした試料の結果、青のプロットは内部に ϕ30 の円柱を熱はめした試料の結果である。A5056 のときと比べると、あまり変化がないようにみえる。モードによっては、単体の Q 値と熱はめした試料の Q 値とあまり変化がないものもあれば、熱はめした試料のほうが Q 値がかすかによくなっているものもあった。いくつかののモードにおいて黒、緑、青の順になっており、接合面積が大きくなるにつれて Q 値が低下している様子がみえたが、A5056 のときと比べてその低下の度合いは小さかった。

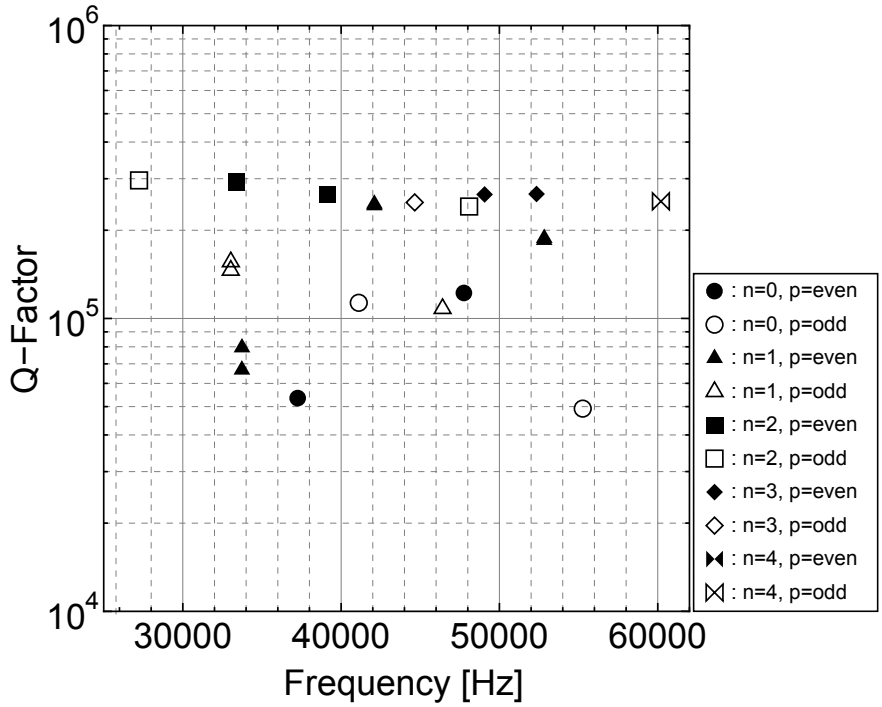

図 6.8: アルミニウム合金 A6061(単体) の共振周波数と Q 値の関係

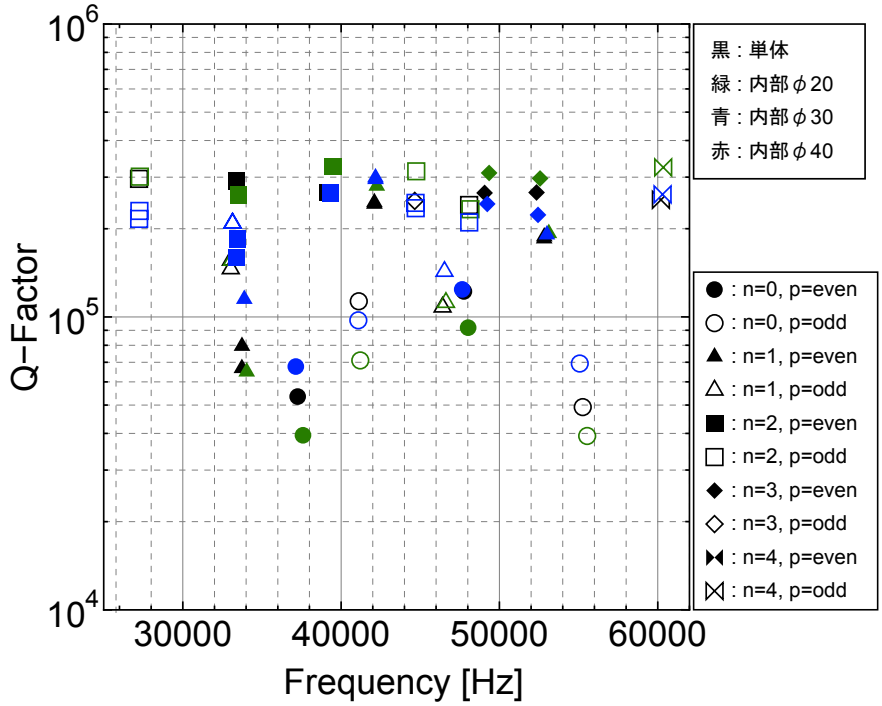

図 6.9: アルミニウム合金 A6061 の共振周波数と Q 値の関係

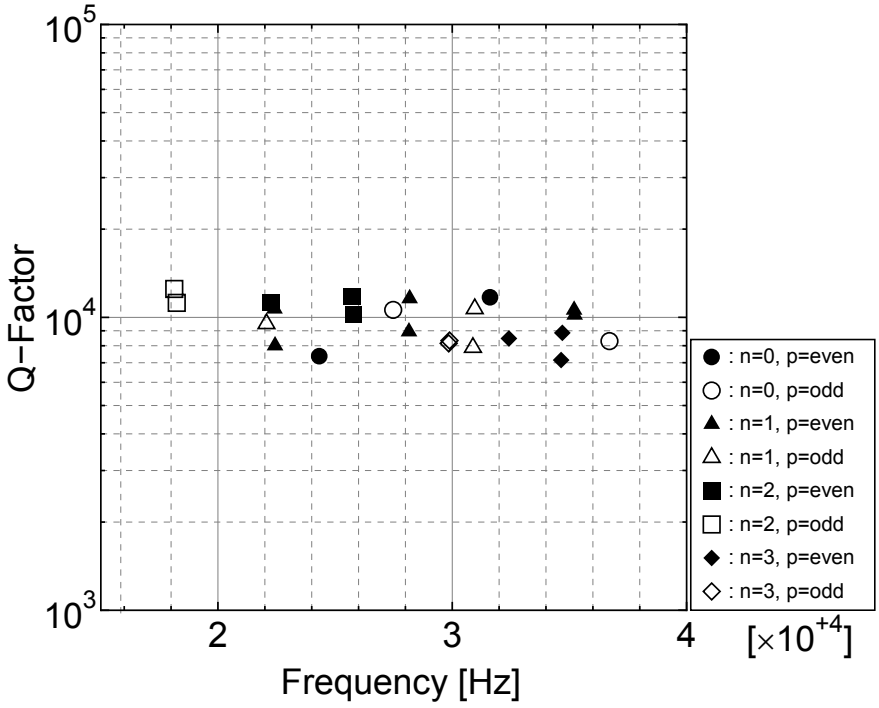

図 6.10: 真鍮 C3604(単体) の共振周波数と Q 値の関係

6.4 真鍮 C3604 の計算結果と実験結果

真鍮 C3604 を使用して作製した試料について、有限要素法による共振周波数の計算結果と、実験による共振周波数と Q 値の結果について述べる。10kHz から 40kHz までの範囲において、共振を調べた。その結果を表 A.10 から表 A.13 に示した。

6.4.1 単体の場合

真鍮 C3604 の単体の試料における共振周波数の計算結果と、実験による共振周波数と Q 値の結果を表 A.10 に示した。

有限要素法による計算結果では、10kHz から 40kHz において共振は縮退を除いて 18 個あった。ねじれ以外の全てのモードを検出することができた。表 A.10 から、横軸に共振周波数の実験値を縦軸に Q 値をとりプロットしたものが図 6.10 である。測定された最高の Q 値は、$Q_{\max} = 1.25 \times 10^4$ で、モード番号 2 の共振周波数 (FEM) 18.310kHz、$n = 2$、$p = 1$ の振動モードであった。今回測定したほとんどモードについて、Q 値は 1×10^4 前後のところに Q 値が集中している。節点支持による $n \leq 1$ のモードでの Q 値の低下があまり見受けられなかった。この真鍮の材質自体の損失が大きいために、支持による損失に比べると支配的になっていると考えられる。

6.4.2 熱はめした試料の場合

真鍮 C3604 において、内部に ϕ20 の円柱を熱はめした試料の計算結果と実験結果を表 A.11 に、内部に ϕ30 の円柱を熱はめした試料の計算結果と実験結果を表 A.12 に、内部に ϕ40 の円柱を熱はめし

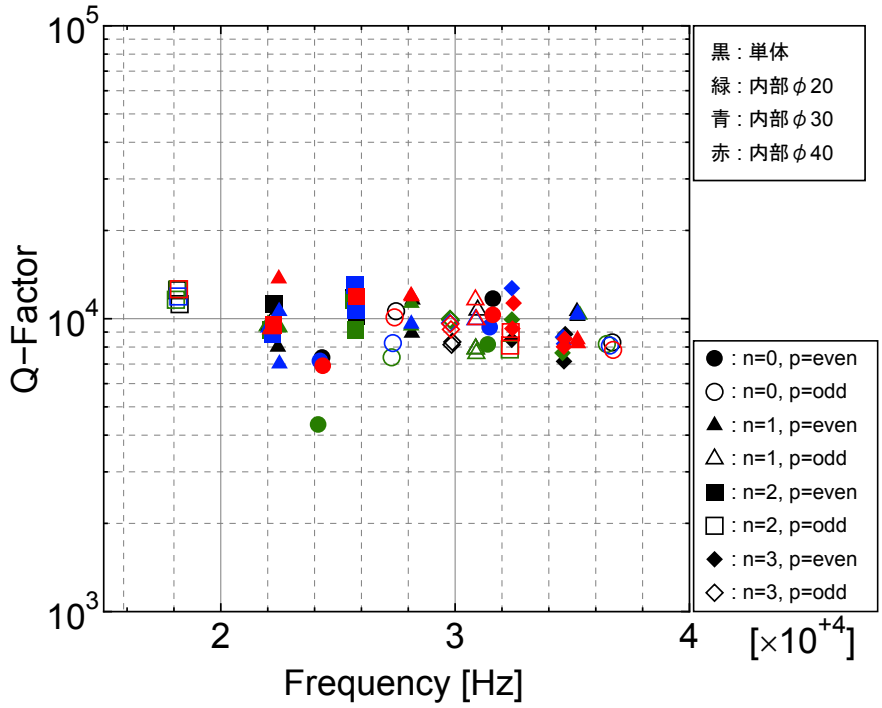

図 6.11: 真鍮 C3604 の共振周波数と Q 値の関係

た試料の計算結果と実験結果を表 A.13 に示した。

計算による共振周波数とモードの形状に着目してみると、アルミニウム合金のときと同じように単体と熱はめとで比較すると共振周波数はほぼ同じ値をとっており、モード形状についても全く同じ順番で出現している。

横軸に共振周波数を縦軸に Q 値をとりグラフ化したものが図 6.11 である。黒のプロットは単体の結果、緑のプロットは内部に ϕ20 の円柱を熱はめした試料の結果、青のプロットは内部に ϕ30 の円柱を熱はめした試料の結果、赤のプロットは内部に ϕ40 の円柱を熱はめした試料の結果である。アルミニウム合金のときとは違い、およそ 10^4 の周辺に単体のときも熱はめのときも Q 値が集中していて、熱はめをしたことによる Q 値の違いみることができない。今回使用した真鍮の材質自体の Q 値が低すぎたことが原因と考えられる。接合面による機械損失よりも材質自体の機械損失の方が大きく支配的であるために、この場合は熱はめによる Q 値の低下をみることができなくなってしまっていると思われる。見方を変えれば、ϕ40 程度までの円柱の熱はめであれば、接合面の機械損失は Q 値を 10^4 よりも低くするほどの影響力をもっていないということができる。

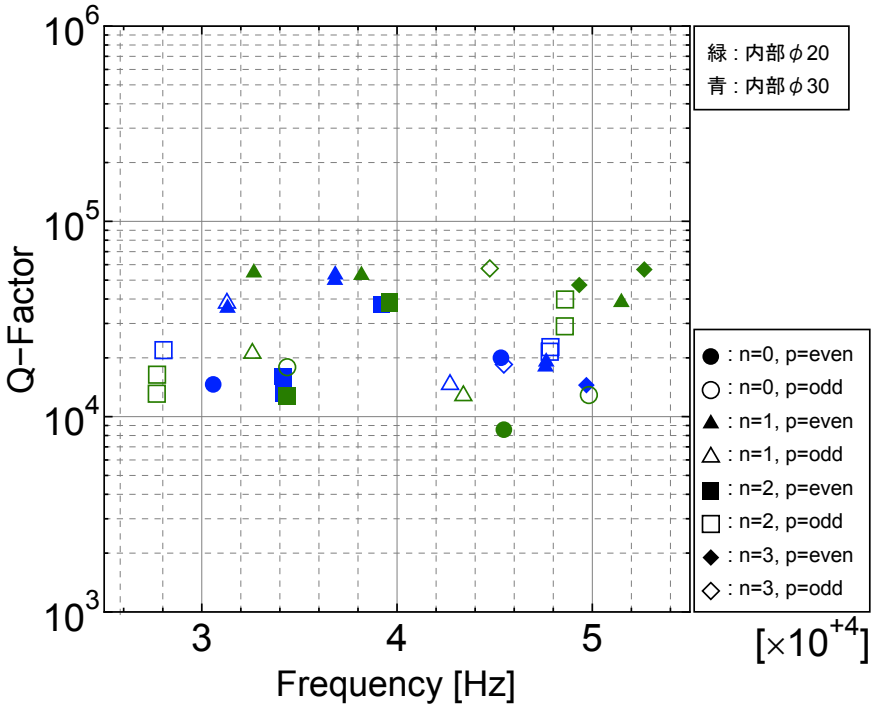

図 6.12: 真鍮 C3604 とアルミニウム合金 A5056 による熱はめの共振周波数と Q 値の関係

6.5 異なる材質同士で熱はめしたときの結果

真鍮 C3604 とアルミニウム合金 A5056 を使用して作製した試料について、有限要素法による共振周波数の計算結果と、実験による共振周波数と Q 値の結果について述べる。

6.5.1 内部 ϕ20 の場合

真鍮 C3604 の円筒の内部にアルミニウム合金 A5056 の ϕ20 の円柱を熱はめして作製した試料における共振周波数の計算結果と、実験による共振周波数を Q 値の結果を表 A.14 に示した。

6.5.2 内部 ϕ30 の場合

真鍮 C3604 の円筒の内部にアルミニウム合金 A5056 の ϕ30 の円柱を熱はめして作製した試料における共振周波数の計算結果と、実験による共振周波数を Q 値の結果を表 A.15 に示した。

表 A.14 と表 A.15 から共振周波数と Q 値の関係をグラフ化したものを図 6.12 に示した。ほとんど全てのモードの Q 値が 10^4〜10^5 の間に存在した。アルミニウム合金 A5056 の単体の Q 値が $\sim 10^5$ で真鍮 C3604 の単体の Q 値が $\sim 10^4$ であったこと、今回のサイズ程度では熱はめには Q 値を $\sim 10^4$ よりも小さくするほどの影響力がないことから妥当な結果であると思われる。

6.6 接合面における機械損失

先の章で物質の機械損失の要因について色々述べたが、今回の実験においてはそれらの中でも材質自体による機械損失と接合面における機械損失の 2 つを取り扱う。測定された Q 値を Q_{meas} とすると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{Q_{\mathrm{maes}}} &= \frac{\Delta W_{\text{bulk-in}} + \Delta W_{\text{bulk-out}} + \Delta W_{\mathrm{border}}}{W_{\mathrm{total}}} \\ &= \phi_{\text{bulk-in}} \frac{\int_{V_{\text{bulk-in}}} \epsilon^2(\mathbf{r})\, dV}{\int_V \epsilon^2(\mathbf{r})\, dV} + \phi_{\text{bulk-out}} \frac{\int_{V_{\text{bulk-out}}} \epsilon^2(\mathbf{r})\, dV}{\int_V \epsilon^2(\mathbf{r})\, dV} + \phi_{\mathrm{border}} h_{\mathrm{border}} \frac{\int_{S_{\mathrm{border}}} \epsilon^2(\mathbf{r})\, dS}{\int_V \epsilon^2(\mathbf{r})\, dV}\end{aligned} \tag{6.2}$$

として考える。ここで、$W_{\text{bulk-in}}$ は内部にはめ込んだ円柱が 1 周期の間に散逸するエネルギーを、$W_{\text{bulk-out}}$ は外部の円筒が 1 周期の間に散逸するエネルギーを、W_{border} は接合部の微小な領域が 1 周期の間に散逸するエネルギーを、W_{total} は試料全体に蓄えられるエネルギーの最大値である。$\phi_{\text{bulk-in}}$ は内部にはめ込んだ円柱の材質自体による機械損失、$\phi_{\text{bulk-out}}$ は外側の円筒の材質自体による機械損失、ϕ_{border} は接合面における機械損失、h_{border} は接合面における機械損失の存在する層の厚さ、そして ϵ はひずみである。同じ材質同士で熱はめをしていれば、$\phi_{\text{bulk-in}}$ と $\phi_{\text{bulk-out}}$ は等しく、第一項と第二項をまとめて

$$\frac{1}{Q_{\mathrm{maes}}} \sim \phi_{\mathrm{bulk}} + \phi_{\mathrm{border}} h_{\mathrm{border}} \frac{\int_{S_{\mathrm{border}}} \epsilon^2(\mathbf{r})\, dS}{\int_V \epsilon^2(\mathbf{r})\, dV} \tag{6.3}$$

と書くことができる。このとき、接合面のダメージ層の領域は全体積に比べ十分に小さいものと考えている。式 (6.3) から、縦軸に $1/Q_{\mathrm{meas}}$ を横軸にエネルギー比を取ったグラフのその傾きから接合面での機械損失を見積もることができる。

ただ、今回は ANSYS の有限要素法解析を用いた際に、接合面のところに厚さ 300μm の層を作り、その小さな領域の弾性エネルギーと全体の弾性エネルギーの比を取ることによって横軸を作成した。つまり、式 (6.3) をすこし書き換え、

$$\begin{aligned}\frac{1}{Q_{\mathrm{maes}}} &\sim \phi_{\mathrm{bulk}} + \phi_{\mathrm{border}} \frac{\frac{1}{2} E h_{\mathrm{border}} \int_{S_{\mathrm{border}}} \epsilon^2(\mathbf{r})\, dS}{\frac{1}{2} E \int_V \epsilon^2(\mathbf{r})\, dV} \\ &\sim \phi_{\mathrm{bulk}} + \phi_{\mathrm{border}} \frac{W_{\mathrm{border}}}{W_{\mathrm{total}}}\end{aligned} \tag{6.4}$$

とする。そして、h_{border}=300μm として、接合面付近の 300μm の領域に蓄えられるエネルギー W_{border} と試料全体に蓄えられるエネルギー W_{total} を求めるというようにしている。

6.6.1 アルミニウム合金 A5056 の場合

図 6.7 でアルミニウム合金 A5056 の共振周波数と Q 値の関係から、接合面積が大きくなるにつれて Q 値が低下していく様子をみることができた。ここではもう少し詳しく考察するために、各モードで接合面に蓄えられるエネルギーとの関係をみる。

先程示した式 (6.4) にフィッティングして接合面の機械損失を求めるために、$1/Q_{\mathrm{meas}}$ とエネルギー比 $W_{\mathrm{border}}/W_{\mathrm{total}}$ の関係をみたい。アルミニウム合金 A5056 の場合でそれを、各モードについてプロットしたものが図 6.13 である。ただし、今回の測定では円柱の中心を節点支持するという方法を用いて Q 値の測定をおこなったので、円柱中心に変位を持つ $n \leq 1$ のモードを除外して考える必要がある。そのため、円柱中心に変位がない高次のモード $n \geq 2$ についてのみここでは考えている。図 6.13

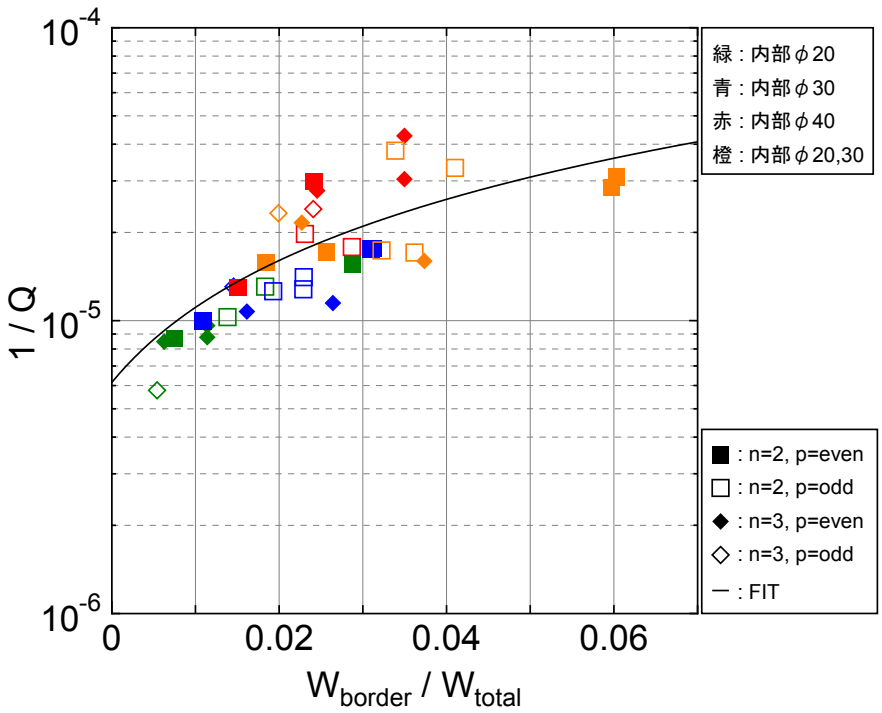

図 6.13: アルミニウム合金 A5056(熱はめ) の測定 Q 値の逆数とエネルギー比の関係

から、測定 Q 値の逆数とエネルギー比との間に強い正の相関がある様子がみえた。相関係数を計算すると、

$$r = 0.69 \tag{6.5}$$

であった。

各プロットに対して一次関数でフィッティングした結果を実線で示した。この傾きから、接合面での機械損失は、

$$\phi_{\mathrm{border}} h_{\mathrm{border}} = 1.48 \times 10^{-7} \quad [\mathrm{m}] \tag{6.6}$$

となった。またフィッティング関数の切片からエネルギー比がゼロのとき、つまり単体のときの Q 値を見積もることができる。

$$\phi_{\mathrm{Al5056}} = 6.15 \times 10^{-6}, \quad Q_{\mathrm{Al5056}} = 1.63 \times 10^{5} \tag{6.7}$$

となった。図 6.6 で示したアルミニウム合金 A5056 単体の測定 Q 値とよく一致した値となっている。

6.6.2 アルミニウム合金 A6061 の場合

アルミニウム合金 A6061 の場合の $1/Q_{\mathrm{meas}}$ とエネルギー比 $W_{\mathrm{border}}/W_{\mathrm{total}}$ の関係を各モード $(n \geq 2)$ についてプロットしたものが図 6.14 である。

測定 Q 値の逆数とエネルギー比との間に強い正の相関がある様子がみえた。相関係数を計算すると、

$$r = 0.81 \tag{6.8}$$

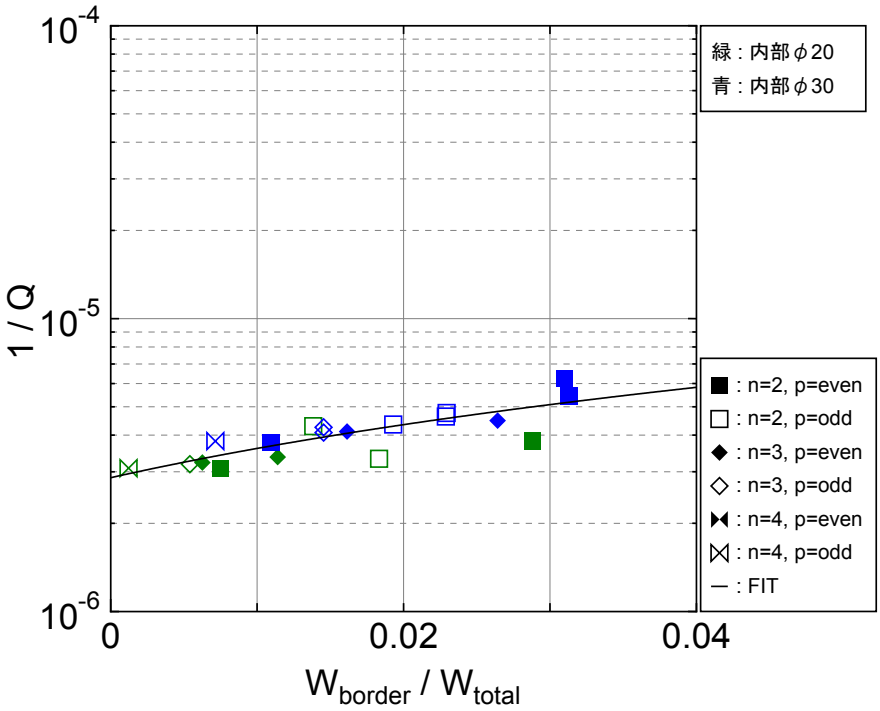

図 6.14: アルミニウム合金 A6061(熱はめ) の測定 Q 値の逆数とエネルギー比の関係

であった。しかし、先ほどの A5056 のときに比べその傾きは緩やかであった。フィッティングから接合面での機械損失を計算すると、

$$\phi_{\mathrm{border}} h_{\mathrm{border}} = 2.22 \times 10^{-8} \quad [\mathrm{m}] \tag{6.9}$$

であった。A5056 に比べ 1 桁小さい。材質によって接合面での機械損失は異なるということが分かる。A5056 と A6061 では、ポアソン比は同じであったから、異なるものとなるとヤング率である。A6061 の方がヤング率が小さく、軟らかい材質といえる。材質の硬さが接合面での機械損失に影響を与える可能性が指摘できる。

また切片から単体のときの Q 値を見積もると、

$$\phi_{\mathrm{Al6061}} = 2.86 \times 10^{-6}, \quad Q_{\mathrm{Al6061}} = 3.49 \times 10^{5} \tag{6.10}$$

となった。今回測定した A6061 の単体試料の最高値が $Q_{\mathrm{max}} = 2.96 \times 10^5$ であったから、それよりも少し大きい結果になった。文献 [23] では、A6061 円柱の Q 値の測定結果で最高値が 3.66×10^5 とあり、今回の結果と近い値となっている。

6.6.3 真鍮 C3604 の場合

真鍮 C3604 の場合の $1/Q_{\mathrm{meas}}$ とエネルギー比 $W_{\mathrm{border}}/W_{\mathrm{total}}$ の関係を各モード $(n \geq 2)$ についてプロットしたものが図 6.15 である。

前に述べたように今回の測定では、真鍮自体の機械損失が大きかったために熱はめをしたことによる接合面での機械損失がみえなかった。その様子は図 6.15 でも、プロットがほぼ水平に並んでいることから分かる。相関係数を計算すると、

$$r = 0.33 \tag{6.11}$$

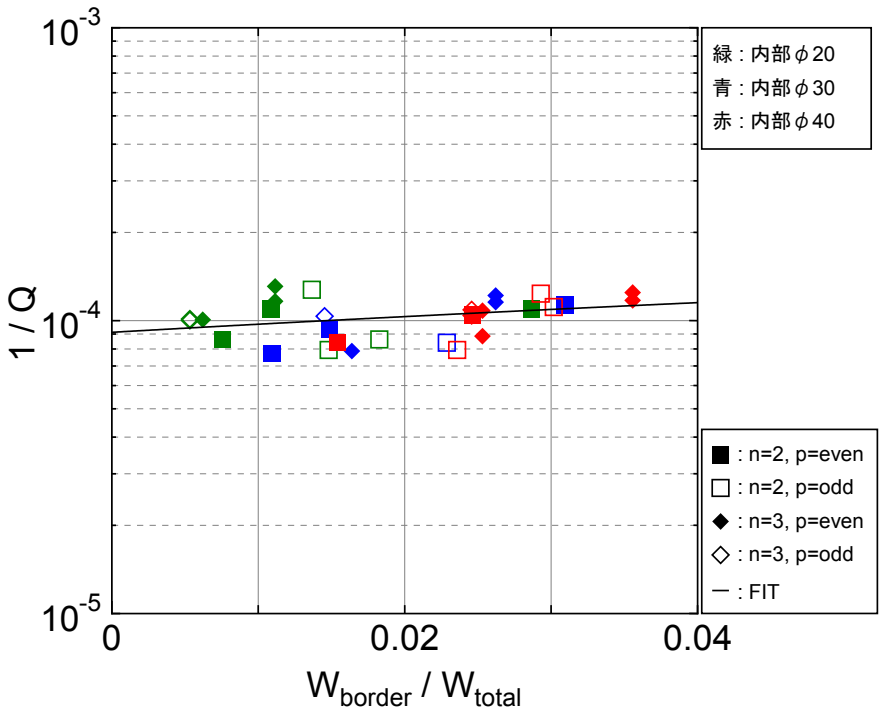

図 6.15: 真鍮 3604(熱はめ) の測定 Q 値の逆数とエネルギー比の関係

となった。一応、これらのプロットを一次関数でフィッテングした結果を実線で示し、その傾きから接合面での機械損失を計算した。その値は、

$$\phi_{\mathrm{border}} h_{\mathrm{border}} = 1.80 \times 10^{-7} \quad [\mathrm{m}] \tag{6.12}$$

であった。アルミニウム合金 A5056 の値よりも少しだけ大きいが、おそらくこれは有意な値ではないであろう。また、切片から真鍮の材質自体の機械損失を求めると、

$$\phi_{\mathrm{Brass}} = 9.12 \times 10^{-5}, \quad Q_{\mathrm{Brass}} = 1.10 \times 10^{4} \tag{6.13}$$

となった。

6.6.4 アルミニウム合金 A5056 と真鍮 C3604 で熱はめした場合

アルミニウム合金 A5056(円筒) の内部に真鍮 C3604(円柱) を熱はめした場合の $1/Q_{\mathrm{meas}}$ とエネルギー比 $W_{\mathrm{border}}/W_{\mathrm{total}}$ の関係を各モード $(n \geq 2)$ についてプロットしたものが図 6.16 である。

相関係数を計算すると、

$$r = 0.77 \tag{6.14}$$

となった。ただし、材質が異なるもの同士で熱はめをしたときでは、内部の円柱の直径ごとに式 (6.2) の第一項と第二項の部分、つまり図 6.16 における切片にあたる部分が違ってくる。今回の試料の場合、アルミニウム合金の方の体積が数倍以上大きく両者の切片があまり変わらないために、相関があるように見えているものと思われる。そのため、この相関関数はあまり有意なものとはいえない。内部にはめ込む円柱の直径が 20mm のものと 30mm のもので別々に相関係数を計算すると、

$$r_{20} = 0.87, \quad r_{30} = 0.54 \tag{6.15}$$

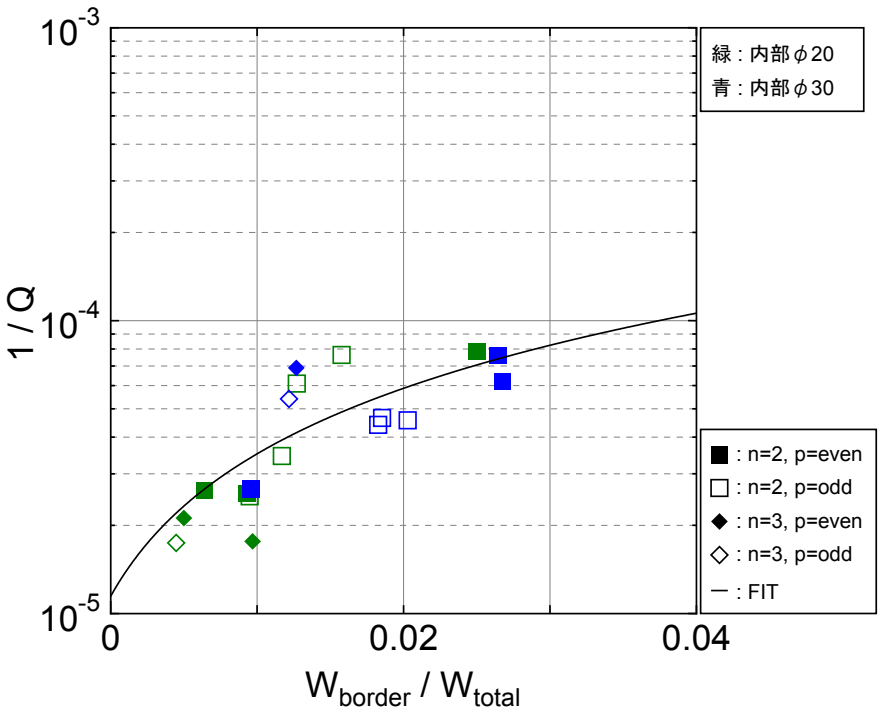

図 6.16: アルミニウム合金と真鍮での熱はめ試料の測定 Q 値の逆数とエネルギー比の関係

となった。

図 6.16 中のプロット全体を一次関数でフィッテングした結果を実線で示した。その傾きから接合面での機械損失を計算した。その値は、

$$\phi_{\mathrm{border}} h_{\mathrm{border}} = 7.09 \times 10^{-7} \quad [\mathrm{m}] \tag{6.16}$$

であった。またプロット数が少ないという問題はあるが、それぞれの内部円柱の直径ごとにフィッティングして接合面での機械損失を求めると、

$$\phi_{\mathrm{border20}} h_{\mathrm{border20}} = 1.04 \times 10^{-6} \quad [\mathrm{m}], \quad \phi_{\mathrm{border30}} h_{\mathrm{border30}} = 4.03 \times 10^{-7} \quad [\mathrm{m}] \tag{6.17}$$

であった。

6.7 Q 値の推定

今までの結果から、接合面における機械損失には試料の材質によるところが大きいようである。しかし、もしある材質を用いたときに、あらかじめその材質自体の機械損失と熱はめをしたときの接合面での機械損失が分かっていれば、各振動モードの Q 値を式 (6.2) から推定することができるはずである。この場合、今回は考慮に入れていない円柱中心に変位がある $n \leq 1$ の振動モードの Q 値も見積もることができる。さらに、今回は熱はめという手法を用いたが、他の方法を用いる場合においても同様で、あらかじめ実験で接合面での機械損失を測っておけば、同じ接合手法を用いて作製される複合鏡の Q 値を計算で推定することができると考えられる。

ここでは、式 (6.2) を用いて Q 値の推定を行い、実験での測定値と比較することによりどの程度の精度で Q 値を推定できるかについて議論する。測定結果は、アルミニウム合金 A5056(円筒) の内部に

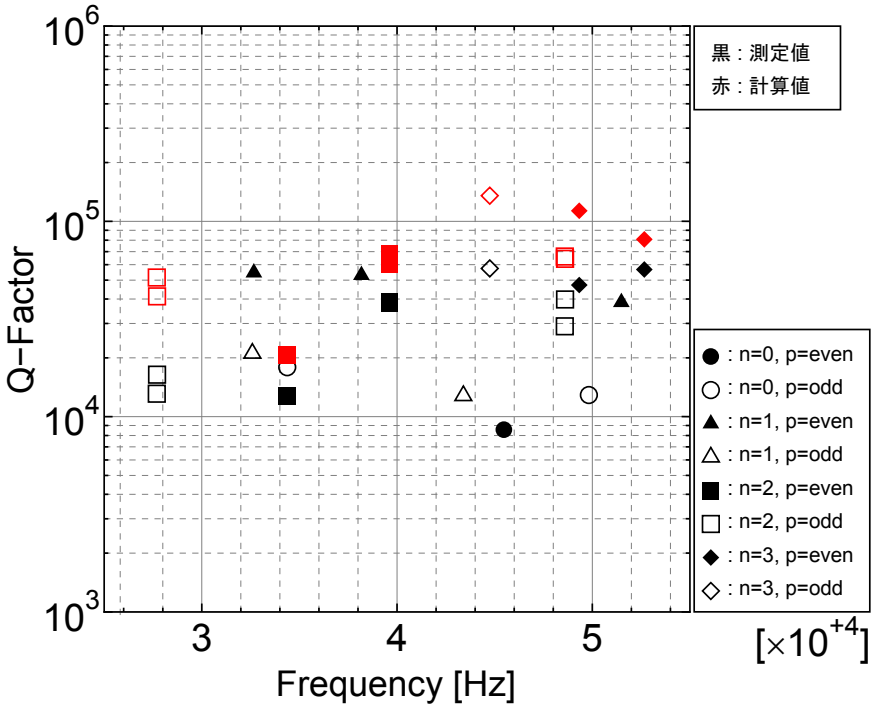

図 6.17: アルミニウム合金と真鍮での熱はめ試料 (内部 ϕ20) の測定 Q 値と計算 Q 値

真鍮 C3604(円筒) を熱はめした結果を用いた。計算に必要な定数は次のように定める。アルミニウム合金 A5056 の材質自体の機械損失についてはフィッティングから求めた式 (6.7) の値を用いる。真鍮の材質自体の機械損失についても同様に式 (6.13) の値を用いる。接合面での機械損失については、よくわからないのでアルミニウム合金 A5056 の試料の結果から求めた式 (6.6) の値を使用した。まとめると、

$$\phi_{\text{bulk-in}} = 9.12 \times 10^{-5} \tag{6.18}$$

$$\phi_{\text{bulk-out}} = 6.15 \times 10^{-6} \tag{6.19}$$

$$\phi_{\text{border}} h_{\text{border}} = 1.48 \times 10^{-7} \tag{6.20}$$

というような値を用いて、式 (6.2) から各振動モードでの計算 Q 値を求める。試料全体のエネルギーと接合面でのエネルギーについては ANSYS から求めた値を使用した。その結果を図 6.17 と図 6.18 に示した。

内部円柱の直径が 20mm の場合の結果を図 6.17 に示した。黒色のプロットは測定値を、赤色のプロットは計算値を表す。測定値と比較ができるように、円柱中心に変位がない高次のモードのみ計算 Q 値をプロットした。測定 Q 値と計算 Q 値を比較すると、定量的には問題があるが定性的には良くあっている様子がみえた。

同様にして、内部円柱の直径が 30mm の場合の結果を図 6.18 に示した。理由はよく分からないが、$n = 2$ のモードでは少し一致が見られたが、$n = 3$ では大きくずれていた。

まだまだ改善の余地があるものの、定性的にはよく Q 値を評価できているものと思われる。

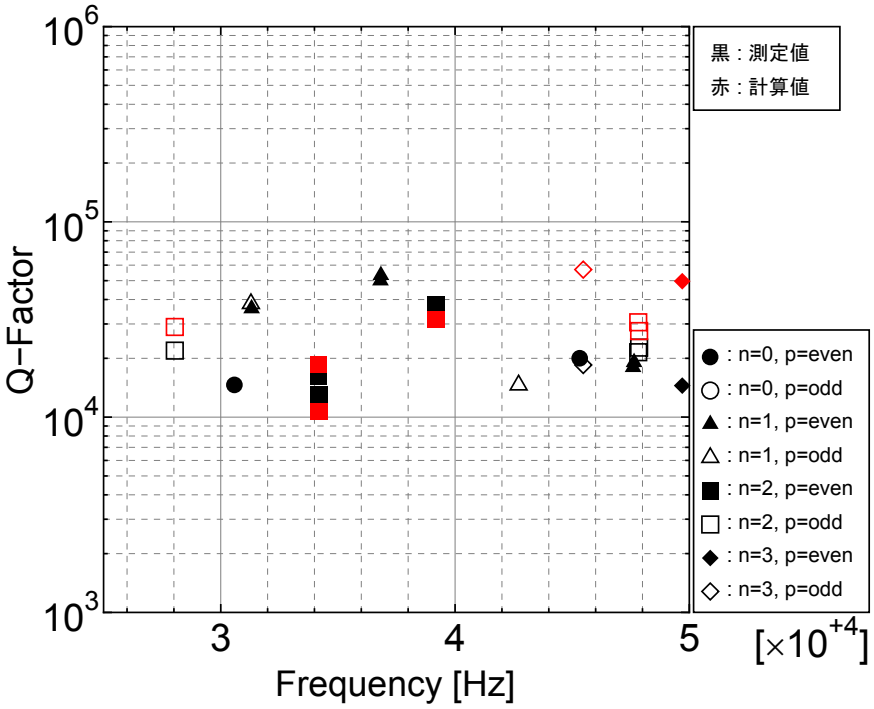

図 6.18: アルミニウム合金と真鍮での熱はめ試料 (内部 ϕ30) の測定 Q 値と計算 Q 値

第7章

まとめ

熱はめを用いて試料を作製したときの接合面における機械損失に関する研究のために行った計算と実験について今まで述べてきた。ここでは、結論としてこれらの結果をまとめる。

7.1 結果のまとめ

単体の試料と熱はめをした試料の Q 値測定から次のような結果が得られた。

- 共振周波数について、有限要素法の計算結果と実験の測定結果が良く一致することを確認した。
- 熱はめをすることにより、Q 値が低下することを確認した。特に、接合面におけるエネルギーと Q 値の間に相関があることが分かった。
- 接合面における機械損失を見積もった。その結果を表 7.1 に示した。

表 7.1: 接合面における機械損失の結果

材質	相関係数	$\phi_{\mathrm{border}} h_{\mathrm{border}}$ [m]
A5056	0.69	1.48×10^{-7}
A6061	0.81	2.22×10^{-8}
C3604	0.33	1.80×10^{-7}
内 C3604(ϕ20)・外 A5056	0.87	1.04×10^{-6}
内 C3604(ϕ30)・外 A5056	0.54	4.03×10^{-7}

7.2 結果の考察と結論

単体と熱はめをした試料の両方において、共振周波数を有限要素法により求め、それらのほとんどを実験によって検出することができた。計算結果と実験での測定値を比較すると、アルミニウム合金 A5056 で誤差 1 %、アルミニウム合金 A6061 で誤差 2 %、真鍮 C3604 で誤差 1.5 %程度であった。また、単体のものと比べて熱はめをしても共振周波数とモードに変化がなかった。このことから熱はめがほぼ一体として考えてもよいくらい、非常に強固にはめ込むことができる手法であったことが分かった。

アルミニウム合金の測定において、熱はめにより Q 値が低下することを確認した。そして、接合面積がより大きくなるとより Q 値が低下するという傾向をみることができた。Q 値の低下はあったもの

の、2 種類のアルミニウム合金でその低下の度合いが異なった。Q 値の低下のしやすさは材質にもよるということが分かった。

真鍮においては、Q 値の低下をみることができなかった。それは、今回用いた真鍮の材質自体の機械損失が大きすぎたためであると考えられる。よって本研究で使用したサイズの円柱であれば、Q 値を 10^4 よりも小さくするような影響力を熱はめはもっていないということができる。

本研究では、接合することによる機械損失が、接合面付近の微小な領域に一様に存在するというモデルを採用した。そのモデルの式 (6.2) に最小二乗法によりフィッティングし、その傾きから接合面での機械損失を見積もった結果 (表 7.1) をみる。アルミニウム合金 A5056 と A6061 とで比較すると、A6061 の方が値が小さかった。材質により違いがあることが分かった。A5056 と A6061 の違いとしては、弾性定数と化学成分、熱処理の有無がある。ヤング率が小さく軟らかい材質の方が、もしくは熱処理された材質の方が、接合面での機械損失が小さくなる可能性が指摘できる。

以上のことから、接合方法と材質ごとにあらかじめ実験室スケールで接合面での機械損失を見積もっておけば、その機械損失の値を用いて、Levin の方法から実際の大型複合鏡の熱雑音を計算することができると考えられる。そのような可能性を指摘できたことが本研究の成果である。

7.3 今後の課題と展望

本実験では鏡材料ではない金属物質の接合面での機械損失を測定した。材質に応じてその機械損失の値が変わることが確かめられたのだから、実際の干渉計に使用されている溶融石英などの材質でも調べることは意味のあることであろう。

はめ込みの際、接合面の粗さがはめ込み後の Q 値に影響する可能性もある。今回用いた試料は、試作室でできる範囲で最も滑らかになるように磨いた。アルミニウム合金 A5056 で、円柱側面が $Ra = 0.04\mu$m、円筒内側で $Ra = 0.9\mu$m 程度であった。真鍮 C3604 で、円柱側面が $Ra = 1.3\mu$m、円筒内側で $Ra = 0.7\mu$m 程度であった。Ra は算術平均粗さ[†]といい、表面の凸凹の平均値を表す量である。熱はめは強固なはめ込みであるから、はめ込むときに多少の粗さは潰されてしまい影響する可能性は低いと思われるが、様々な表面粗さの試料で熱はめをして確かめてみることは必要であろう。

今回は手ごろに用意できるという理由から熱はめというはめ込み手法で接合面をもつ試料を作製した。接合面を持つような試料の作製方法は、オプティカルコンタクトや溶接など他にもある。おそらく、接合方法により機械損失は異なるものと思われるので、調べてみる必要があるだろう。

また、計算により Q 値を見積もるということをしたが、精度良く求めることができなかったので今後改善する必要があるだろう。もし、計算により精度良く Q 値が見積もることができるようになれば、実験室スケールで、各手法における接合面での機械損失と各材質における材質自体の機械損失をあらかじめ調べておけば、各手法・各材質において、試作があまりできないような貴重な材質を用いた鏡や大型の鏡の Q 値を推定しその鏡の熱雑音を計算することができる。将来の DECIGO で用いるような大型複合鏡の Q 値の推定にも利用することもでき、この手法は大型複合鏡の Q 値を試作することなく見積もり、コストの削減に大きく寄与する可能性を持っている。

[†]詳しくは JIS B 0601(1994) を参照。

付録

Q 値の測定結果

ここでは、本文中では省略した各試料における Q 値の測定結果について紹介する。

各試料の Q 値の最高値について、表 A.1 にまとめた。アルミニウム合金 A5056 に関しては徐々に Q 値が低下している様子が分かる。A6061 に関しては単体の Q 値が少し低く感じられる。実験前に試料に余計な傷がついたか測定の技術の未熟さが原因ではないかと思われる。

表 A.1: 各試料における Q 値の最高値

材質	内部 ϕ	最高 Q 値
A5056	単体	2.01×10^5
	20	1.73×10^5
	30	1.28×10^5
	40	9.40×10^4
	20·30	9.82×10^4
A6061	単体	2.96×10^5
	20	3.25×10^5
	30	2.99×10^5
C3604	単体	1.25×10^4
	20	1.26×10^4
	30	1.30×10^4
	40	1.37×10^4
A5056·C3604	20	5.74×10^4
	30	5.33×10^4

以降では、各試料についてより詳しく測定結果を紹介する。各振動モードについて、有限要素法 (FEM) で求めた共振周波数と実際に実験で測定した共振周波数を、また測定した Q 値を表にまとめた。

A.1 アルミニウム合金 A5056 の測定結果

A.1.1 単体の場合

表 A.2: アルミニウム合金 A5056(単体) の計算結果と実験結果

モード No.	FEM[Hz]	実験 [Hz]	n	p	Q 値
1	26546		ねじれ		
2	27688	27368.4	2	1	2.01×10^5
	27692	27372.3			1.50×10^5
3	33682	33289.5	1	1	1.34×10^5
	33682				
4	33924	33574.8	2	0	1.73×10^5
	33928				
5	34176	33876.0	1	0	7.92×10^4
	34176				
6	37614	37279.6	0	0	5.77×10^4
7	39692	39339.8	2	0	1.37×10^5
	39694	39340.2			1.54×10^5
8	41329	41112.9	0	1	1.13×10^5
9	42637	42292.4	1	0	1.58×10^5
	42637	42293.7			1.66×10^5
10	45521	44889.1	3	1	1.84×10^5
	45521				
11	46973	46571.8	1	1	1.11×10^5
	46973	46574.8			9.85×10^4
12	47970	47815.7	0	0	1.25×10^5
13	48990	48387.6	2	1	1.73×10^5
	48992				
14	49888	49318.8	3	0	1.64×10^5
	49888				
15	53131	52565.0	3	0	1.74×10^5
	53131	52566.0			1.87×10^5
16	53383		ねじれ		
17	53699	53058.7	1	0	1.57×10^5
	53699				
18	56032	55335.1	0	1	5.78×10^4

A.1.2 熱はめした試料の場合

表 A.3: アルミニウム合金 A5056(内部 ϕ20) の計算結果と実験結果

モード No.	FEM[Hz]	実験 [Hz]	n	p	Q 値
1	26546		ねじれ		
2	27624	27372.8	2	1	7.66×10^4
	27624				
3	33552	33353.9	1	1	9.80×10^4
	33552				
4	33723	33532.1	2	0	6.17×10^4
	33723	33536.0			6.45×10^4
5	34173	33877.5	1	0	6.94×10^4
	34173	33880.8			6.53×10^4
6	37628	37250.9	0	0	4.46×10^4
7	39642	39336.1	2	0	1.15×10^5
	39643				
8	41274	41073.4	0	1	3.07×10^4
9	42638	42302.0	1	0	1.41×10^5
	42638				
10	45669	44894.8	3	1	1.73×10^5
	45669				
11	46956	46584.7	1	1	9.17×10^4
	46956				
12	47989	47766.6	0	0	4.70×10^4
13	48896	48378.0	2	1	9.73×10^4
	48896				
14	50009	49317.2	3	0	1.18×10^5
	50009				
15	53133	52549.5	3	0	1.14×10^5
	53133	52550.9			1.04×10^5
16	53383		ねじれ		
17	53557	53056.5	1	0	9.16×10^4
	53557				
18	55898	55296.3	0	1	4.97×10^4

表 A.4: アルミニウム合金 A5056(内部 ϕ30) の計算結果と実験結果

モード No.	FEM[Hz]	実験 [Hz]	n	p	Q 値
1	26546		ねじれ		
2	27574	27372.8	2	1	7.82×10^4
	27575	27374.8			7.94×10^4
3	33518	33350.5	1	1	9.61×10^4
	33518				
4	33666	33574.9	2	0	5.71×10^4
	33666	33578.4			5.69×10^4
5	34156	33868.2	1	0	5.83×10^4
	34156				
6	37626	37224.2	0	0	3.95×10^4
7	39606	39337.4	2	0	9.99×10^4
	39606				
8	41106	41083.1	0	1	2.60×10^4
9	42568	42298.3	1	0	1.28×10^5
	42568				
10	45529	44892.9	3	1	7.66×10^4
	45529				
11	46911	46572.6	1	1	7.36×10^4
	46911				
12	47979	47756.2	0	0	4.29×10^4
13	48759	48424.1	2	1	7.11×10^4
	48759				
14	49871	49312.7	3	0	9.31×10^4
	49871				
15	52878	52564.1	3	0	8.71×10^4
	52878				
16	53383		ねじれ		
17	53520	53095.5	1	0	6.49×10^4
	53520	53098.2			6.67×10^4
18	55672	55296.2	0	1	3.39×10^4

表 A.5: アルミニウム合金 A5056(内部 ϕ40) の計算結果と実験結果

モード No.	FEM[Hz]	実験 [Hz]	n	p	Q 値
1	26546		ねじれ		
2	27563	27342.5	2	1	5.06×10^4
	27565				
3	33534	33262.6	1	1	8.56×10^4
	33534	33287.5			8.44×10^4
4	33697	33567.0	2	0	3.35×10^4
	33698				
5	34143	33910.5	1	0	4.87×10^4
	34143				
6	37624	37347.3	0	0	2.25×10^4
7	39586	39365.5	2	0	7.71×10^4
	39588				
8	40963	41074.1	0	1	2.33×10^4
9	42513	42287.8	1	0	9.40×10^4
	42513				
10	45380	44812.5	3	1	4.16×10^4
	45380				
11	46887	46544.0	1	1	6.56×10^4
	46887	46557.9			6.68×10^4
12	47972	47840.4	0	0	3.34×10^4
13	48673	48365.4	2	1	5.61×10^4
	48674				
14	49738	49279.0	3	0	3.60×10^4
	49738				
15	52679	52508.3	3	0	3.29×10^4
	52679	52525.1			2.34×10^4
16	53383		ねじれ		
17	53547	53047.6	1	0	4.68×10^4
	53547	53072.5			4.16×10^4
18	55516	55381.1	0	1	2.18×10^4

表 A.6: アルミニウム合金 A5056(内部 ϕ20,30) の計算結果と実験結果

モード No.	FEM[Hz]	実験 [Hz]	n	p	Q 値
1	26546		ねじれ		
2	27563	27419.1	2	1	3.01×10^4
	27565	27437.3			2.63×10^4
3	33534	33435.5	1	1	6.72×10^4
	33534	33439.7			7.37×10^4
4	33697	33503.4	2	0	3.51×10^4
	33698	33534.4			3.23×10^4
5	34143	33561.2	1	0	3.88×10^4
	34143				
6	37624	37071.4	0	0	2.43×10^4
7	39586	38928.2	2	0	6.35×10^4
	39588	38938.0			5.82×10^4
8	40963	40965.2	0	1	1.09×10^4
9	42513	42338.8	1	0	9.82×10^4
	42513				
10	45380	45061.1	3	1	4.30×10^4
	45380				
11	46887	46579.3	1	1	7.91×10^4
	46887	46582.0			8.16×10^4
12	47972	47459.9	0	0	1.33×10^4
13	48673	48527.6	2	1	5.86×10^4
	48674	48540.7			5.76×10^4
14	49738	49033.1	3	0	4.63×10^4
	49738				
15	52679	52460.1	3	0	6.26×10^4
	52679				
16	53383		ねじれ		
17	53547	52951.9	1	0	6.00×10^4
	53547	52957.2			5.19×10^4
18	55516	55294.5	0	1	2.38×10^4

A.2 アルミニウム合金 A6061 の測定結果

A.2.1 単体の場合

表 A.7: アルミニウム合金 A6061(単体) の計算結果と実験結果

モード No.	FEM[Hz]	実験 [Hz]	n	p	Q 値
1	25858		ねじれ		
2	26971	27235.8	2	1	2.95×10^5
	26974				
3	32809	33030.1	1	1	1.46×10^5
	32809	33032.7			1.56×10^5
4	33045	33419.0	2	0	2.92×10^5
	33049				
5	33290	33729.2	1	0	6.68×10^4
	33290	33735.8			7.95×10^4
6	36639	37263.9	0	0	5.34×10^4
7	38664	39161.3	2	0	2.65×10^5
	38665				
8	40258	41114.5	0	1	1.13×10^5
9	41533	42098.5	1	0	2.46×10^5
	41533	42100.4			2.43×10^5
10	44342	44648.1	3	1	2.49×10^5
	44342				
11	45756	46407.1	1	1	1.08×10^5
	45756				
12	46727	47763.2	0	0	1.22×10^5
13	47720	48085.3	2	1	2.41×10^5
	47723				
14	48595	49059.9	3	0	2.65×10^5
	48595				
15	51755	52340.0	3	0	2.66×10^5
	51755				
16	52000		ねじれ		
17	52307	52824.6	1	0	1.85×10^5
	52307	52829.2			1.88×10^5
18	54580	55264.2	0	1	4.92×10^4
19	59977	60198.7	4	0	2.51×10^4
	59977				

A.2.2　熱はめした試料の場合

表 A.8: アルミニウム合金 A6061(内部 ϕ20) の計算結果と実験結果

モード No.	FEM[Hz]	実験 [Hz]	n	p	Q 値
1	25858		ねじれ		
2	26908	27287.5	2	1	3.01×10^5
	26908				
3	32683	33102.7	1	1	1.56×10^5
	32683				
4	32849	33530.7	2	0	2.61×10^5
	32849				
5	33288	34035.7	1	0	6.50×10^4
	33288				
6	36654	37596.6	0	0	3.94×10^4
7	38615	39472.7	2	0	3.25×10^5
	38616				
8	40205	41210.2	0	1	7.10×10^4
9	41533	42250.2	1	0	2.80×10^5
	41533				
10	44486	44743.7	3	1	3.14×10^5
	44486				
11	45739	46619.6	1	1	1.12×10^5
	45739				
12	46749	48030.6	0	0	9.18×10^4
13	47629	48168.4	2	1	2.33×10^5
	47629				
14	48714	49345.1	3	0	3.10×10^5
	58714				
15	51757	52565.5	3	0	2.97×10^5
	51757				
16	52000		ねじれ		
17	52170	53119.5	1	0	2.97×10^5
	52170				
18	54450	55542.5	0	1	3.92×10^4
19	60508	60344.1	4	0	3.24×10^5
	60508				

表 A.9: アルミニウム合金 A6061(内部 ϕ30) の計算結果と実験結果

モード No.	FEM[Hz]	実験 [Hz]	n	p	Q 値
1	25858		ねじれ		
2	26860	27243.0	2	1	2.16×10^5
	26860	27259.1			2.30×10^5
3	32651	33130.3	1	1	2.09×10^5
	32651	33148.1			2.09×10^5
4	32795	33394.8	2	0	1.60×10^5
	32795	33432.8			1.84×10^5
5	33271	33882.8	1	0	1.15×10^5
	33271				
6	36652	37145.7	0	0	6.76×10^4
7	38580	39303.8	2	0	2.64×10^5
	38580				
8	40042	41088.2	0	1	9.73×10^4
9	41465	42168.3	1	0	2.99×10^5
	41465	42172.2			2.95×10^5
10	44350	44702.8	3	1	2.45×10^5
	44350	44711.2			2.35×10^5
11	45696	46525.6	1	1	1.43×10^5
	45696				
12	46736	47657.7	0	0	1.24×10^5
13	47496	48093.0	2	1	2.10×10^5
	47497				
14	48580	49228.5	3	0	2.43×10^5
	48580				
15	51509	52432.2	3	0	2.23×10^5
	51509				
16	52000		ねじれ		
17	52134	52997.6	1	0	1.91×10^5
	52134				
18	54231	55074.6	0	1	6.93×10^4
19	60388	60303.1	4	0	2.62×10^5
	60389				

A.3 真鍮 C3604 の測定結果

A.3.1 単体の場合

表 A.10: 真鍮 C3604(単体) の計算結果と実験結果

モード No.	FEM[Hz]	実験 [Hz]	n	p	Q 値
1	17551		ねじれ		
2	18310	18137.8	2	1	1.25×10^4
	18313	18243.0			1.12×10^4
3	22291	22070.1	1	1	9.51×10^3
	22291				
4	22432	22257.4	2	0	1.12×10^4
	22434				
5	22638	22412.9	1	0	1.07×10^4
	22638	22435.3			8.01×10^3
6	24871	24327.7	0	0	7.36×10^3
7	26318	25699.6	2	0	1.18×10^4
	26319	25782.7			1.02×10^4
8	27673	27479.4	0	1	1.06×10^4
9	28465	28152.3	1	0	8.94×10^3
	28465	28180.7			1.16×10^4
10	30103	29847.6	3	1	8.15×10^3
	30103	29882.9			8.33×10^3
11	31156	30879.9	1	1	7.89×10^3
	31156				
12	32192	30959.1	0	0	1.07×10^4
13	32449	31613.8	2	1	1.17×10^4
	32451				
14	33005	32417.9	3	0	8.47×10^3
	33005				
15	35197	34646.8	3	0	7.15×10^3
	35197	34696.3			8.85×10^3
16	35296		ねじれ		
17	35631	35199.6	1	0	1.06×10^4
	35631	35223.2			1.02×10^4
18	37177	36710.9	0	1	8.29×10^3

A.3.2 熱はめした試料の場合

表 A.11: 真鍮 C3604(内部 ϕ20) の計算結果と実験結果

モード No.	FEM[Hz]	実験 [Hz]	n	p	Q 値
1	17552		ねじれ		
2	18269	18083.3	2	1	1.16×10^4
	18269	18158.6			1.26×10^4
3	22207	22005.4	1	1	9.46×10^3
	22207				
4	22302	22131.4	2	0	9.13×10^3
	22302				
5	22638	22514.2	1	0	9.32×10^3
	22638				
6	24880	24157.2	0	0	4.35×10^3
7	26287	25701.4	2	0	1.16×10^4
	26287	25762.6			9.15×10^3
8	27632	27291.8	0	1	7.38×10^3
9	28462	28122.5	1	0	9.46×10^3
	28462	28134.4			1.13×10^4
10	30202	29780.4	3	1	9.98×10^3
	30202	29814.8			9.98×10^3
11	31144	30873.1	1	1	7.89×10^3
	31144	30902.9			7.60×10^3
12	32204	31394.5	0	0	8.16×10^3
13	32389	32332.6	2	1	7.85×10^3
	32389				
14	33087	32422.3	3	0	9.93×10^3
	33087				
15	35200	34583.5	3	0	7.64×10^3
	35200	34635.5			8.59×10^3
16	35296		ねじれ		
17	35539	35322.2	1	0	1.03×10^4
	35539				
18	37091	36477.4	0	1	8.19×10^3

表 A.12: 真鍮 C3604(内部 ϕ30) の計算結果と実験結果

モード No.	FEM[Hz]	実験 [Hz]	n	p	Q 値
1	17552		ねじれ		
2	18237	18191.4	2	1	1.19×10^4
	18237				
3	22185	22087.6	1	1	9.37×10^3
	22185				
4	22264	22205.8	2	0	8.84×10^3
	22265				
5	22627	22490.1	1	0	1.06×10^4
	22627	22501.1			7.02×10^3
6	24879	24234.2	0	0	7.17×10^3
7	26263	25714.0	2	0	1.30×10^4
	26263	25772.1			1.07×10^4
8	27516	27342.2	0	1	8.25×10^3
9	28416	28128.7	1	0	9.60×10^3
	28416				
10	30111	29781.4	3	1	9.66×10^3
	30111				
11	31114	30871.8	1	1	9.92×10^3
	31114				
12	32196	31478.9	0	0	9.34×10^3
13	32299		2	1	
	32300				
14	32996	32421.2	3	0	1.27×10^4
	32996				
15	35034	34602.0	3	0	8.65×10^3
	35034	34647.3			8.21×10^3
16	35296		ねじれ		
17	35513	35211.7	1	0	1.03×10^4
	35513	35233.9			1.04×10^4
18	36946	36609.6	0	1	8.09×10^3

表 A.13: 真鍮 C3604(内部 ϕ40) の計算結果と実験結果

モード No.	FEM[Hz]	実験 [Hz]	n	p	Q 値
1	17552		ねじれ		
2	18229	18216.0	2	1	1.26×10^4
	18231				
3	22195	22153.9	1	1	9.24×10^3
	22195				
4	22284	22248.9	2	0	9.55×10^3
	22285				
5	22618	22473.0	1	0	1.37×10^4
	22618				
6	24878	24354.0	0	0	6.90×10^3
7	26250	25812.2	2	0	1.19×10^4
	26251				
8	27418	27417.6	0	1	1.01×10^4
9	28380	28119.9	1	0	1.20×10^4
	28380	28141.4			1.19×10^4
10	30014	29797.7	3	1	9.60×10^3
	30014	29821.8			9.19×10^3
11	31098	30865.1	1	1	1.16×10^4
	31098	30903.6			9.92×10^3
12	32191	31612.8	0	0	1.03×10^4
13	32243	32350.0	2	1	8.09×10^3
	32244	32372.4			8.99×10^3
14	32908	32444.2	3	0	9.25×10^3
	32908	32495.3			1.13×10^4
15	34905	34644.9	3	0	8.02×10^3
	34905	34677.7			8.53×10^3
16	35296		ねじれ		
17	35530	35221.1	1	0	8.49×10^3
	35530	35239.8			8.23×10^3
18	36846	36744.1	0	1	7.82×10^3

A.4　異なる材質同士で熱はめしたときの測定結果

A.4.1　内部 ϕ20 の場合

表 A.14: 真鍮 C3604(円筒) の内部にアルミニウム合金 A5056(円柱 ϕ20) を熱はめした試料の結果

モード No.	FEM[Hz]	実験 [Hz]	n	p	Q 値
1	26376		ねじれ		
2	28192	27698.4	2	1	1.31×10^4
	28192	27710.4			1.64×10^4
3	32630	32590.1	1	1	2.11×10^4
	32630				
4	32738	32668.0	1	0	5.46×10^4
	32738				
5	33748		0	0	
6	34728	34352.6	2	0	1.28×10^4
	34728				
7	34828	34379.9	0	1	1.79×10^4
8	38502	38174.3	1	0	5.30×10^4
	38502				
9	39873	39605.9	2	0	3.80×10^4
	39873	39613.0			3.90×10^4
10	43813	43393.8	1	1	1.28×10^4
	43813				
11	45820	44746.0	3	1	5.74×10^4
	45820				
12	45918	45474.6	0	0	8.56×10^3
13	49215	48593.1	2	1	2.90×10^4
	49215	48606.0			3.98×10^4
14	50158	49331.0	3	0	4.72×10^4
	50158				
15	50986	49824.7	0	1	1.29×10^4
16	51607	51488.2	1	0	3.85×10^4
	51607				
17	52942		ねじれ		
18	53449	52662.3	3	0	5.67×10^4
	53449				

A.4.2 内部 ϕ30 の場合

表 A.15: 真鍮 C3604(円筒) の内部にアルミニウム合金 A5056(円柱 ϕ30) を熱はめした試料の結果

モード No.	FEM[Hz]	実験 [Hz]	n	p	Q 値
1	25692		ねじれ		
2	28215	28039.8	2	1	2.19×10^4
	28216				
3	31081	30587.6	0	0	1.46×10^4
4	31141	31288.2	1	1	3.81×10^4
	31141				
5	31258	31316.6	1	0	3.60×10^4
	31258				
6	33865		0	1	
7	34234	34174.3	2	0	1.31×10^4
	34235	34187.2			1.61×10^4
8	36975	36816.2	1	0	5.00×10^4
	36975	36835.3			5.33×10^4
9	39381	39194.1	2	0	3.76×10^4
	39381				
10	42961	42713.0	1	1	1.46×10^4
	42961				
11	45780	45326.1	0	0	2.00×10^3
12	45921	45471.2	3	1	1.85×10^4
	45921				
13	47904	47598.8	1	0	1.80×10^4
	47904	47638.4			1.91×10^4
14	48027	47821.5	2	1	2.15×10^4
	48028	47856.8			2.27×10^4
15	48692		0	1	
16	50179	49696.3	3	0	1.45×10^4
	50179				
17	50803		ねじれ		

参考文献

[1] A. Einstein, S. B. Preuss. Akad. Wiss. (1918), 154.

[2] J. H. Taylor and J. M. Weisberg, Astrophys. J. **345** (1989), 434.

[3] 三尾典克・大橋正健 編, 重力波アンテナ技術検討書 -干渉計ハンドブック- (1992).

[4] 中村卓史・三尾典克・大橋正健 編著, 重力波をとらえる -存在の証明から検出へ, 京都大学学術出版会 (1998).

[5] A. Abramovici *et al.*, Science **256** (1992), 325.

[6] The VIRGO collaboration, VIRGO Final Design Report (1951).

[7] K. Danzmann *et al.*, Max-Planck-Institut fur Quantenoptik Report (1994).

[8] K. Tsubono, Gravitational Wave Experiments, World Scinetific (1995).

[9] DECIGO パスファインダー検討グループ, DECIGO パスファインダー (DPF) -ミッション提案書- (2006).

[10] P. R. Saulson *et al.*, Rev. Sci. Instrum. **65** (1994), 182.

[11] G. I. Gonzalez *et al.*, Phys. Lett. A **201** (1995), 12.

[12] H. B. Callen and T. A. Welton, Phys. Rev. **83** (1951), 34.

[13] H. B. Callen and R. F. Greene, Phys. Rev. **86** (1952), 702.

[14] 沼田健司, 鏡材料の機械損失に関する研究, 修士論文 (2000).

[15] 山元一広, TAMA300 の Suspension System 及び鏡の熱雑音の推定, 修士論文 (1997).

[16] J. R. Hutchinson, J. Appl. Mech. **47** (1980), 901.

[17] A. Gillespie and F. Raab, Phys. Rev. D **52** (1995), 577.

[18] F. Bondu and J. Y. Vinet, Phys. Lett. A **198** (1995), 74.

[19] Y. Levin, Phys. Rev. D **57** (1998), 659.

[20] C. Zener, Phys. Rev. **53** (1938), 90.

[21] A. M. Gretarsson and G. M. Harry, Rev. Sci. Instr. **70** (1999), 4081.

[22] K. Numata *et al.*, Phys. Lett. A **284** (2001), 162.

[23] 関秀嗣, 金属物質の機械損失のる研究, 修士論文 (2003).

[24] 巽友正, 連続体の力学, 岩波書店 (1995).

[25] 尾上守夫編, 固体振動論の基礎, オーム社 (1982).

[26] CAD/CAE 研究会編, 有限要素法解析ソフト ANSYS 工学解析入門, 理工学社 (2001).

[27] サイバネットシステム株式会社, ANSYS 入門セミナー, (2007).

[28] サイバネットシステム株式会社, ANSYS 中級セミナー, (2007).

[29] 軽金属協会編, アルミニウムハンドブック, 軽金属協会 (1985).

[30] 白銅株式会社, 在庫品カタログ, (2006).

[31] サイバネットシステム株式会社, ANSYS Workbench Simulation セミナー, (2007).

[32] 国立天文台編, 理科年表 平成 18 年, 丸善 (2005).

謝辞

本研究を行うにあたり、多くの方々にお世話になりました。

指導教官である東京大学の坪野公夫教授には、研究のテーマを与えていただきました。研究のための快適な環境を整えてくださり、またいつも暖かい励ましと助言を与えてくださいました。

坪野研究室の助教である安東正樹氏には、研究を進めるにあたり多くの助言と指導をしていただきました。氏の研究に対する態度や心構えは非常に勉強になりました。

東京大学の試作室の技官である大塚茂巳氏には、試料のすべて作製していただきました。熱はめという面倒な作業にもかかわらず、快く受け入れてくださいました。氏の協力なしでは本実験は成立しませんでした。

国立天文台の研究技師である山崎利孝氏には表面粗さ測定の際にお世話になりました。私が表面粗さの測定をする度に、天文台のマシンショップから測定器を借りてくださいました。

NASA の沼田健司氏には鏡の熱雑音や有限要素法について質問をさせていただきました。本実験の装置はもともと氏が作製したものです。

マックス・プランク研究所の山元一広氏には鏡の熱雑音や有限要素法について相談をさせていただきました。また、学会発表の際にも多くの指導をしてくださいました。

坪野研究室の博士課程 2 年の石徹白晃治氏には研究室の先輩として研究や日常生活などについて相談に乗っていただき、多くの有益な助言をいただきました。

坪野研究室の修士課程 2 年の高橋走氏には同級生として世間話から研究に関することまで多くの相談をさせていただきました。

坪野研究室の修士課程 1 年の穀山渉氏には世間話に乗っていただき研究生活が楽しいものとなりました。また、氏の研究に取り組む姿勢は非常に勉強になりました。

そのほかにも本研究を進めるにあたり多くの方々にお世話になりました。この場を借りてお礼申し上げます。

最後に、私が大学院で研究を行うことを理解し応援して下さった両親に感謝の意を表します。