修士論文
鏡材料の機械損失に関する研究

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 86108
沼田健司

2000 年 1 月

目次

第1章

はじめに

重力波

1916 年、E. Einstein は、弱い重力場において Einstein 方程式を線形近似し、計量テンソルのミンコフスキー時空からの摂動が、光速で真空中を伝播することを発見した。これが、重力波である。

この存在は、その予言から 60 余年後の 1978 年、J. H. Taylor と R. A. Hulse の連星パルサー PSR 1913+16 の観測により間接的に証明された。彼らはこの功績によって、1993 年のノーベル物理学賞を受賞している。しかし、重力波の直接検出は、1960 年代に Weber が共振型検出器による実験を開始してから 40 年の時を経ているが、いまだに成功していない。この直接検出は、一般相対性理論の直接的な検証という物理的な意義だけでなく、重力波による天文学の創生という天文学的に重要な意義ももっている。

このような背景のもと、近年のレーザ技術や精密計測技術の発展をうけ、大型レーザ干渉計型重力波検出器の建設が世界で進められている。このタイプの検出器は、重力波が入射した際の鏡の間の固有距離の変動を干渉縞の変化として検出するものである。

本論文の研究は、日本で建設が進められている干渉計型重力波検出器 TAMA300 の開発の一部、特にその鏡の特性を知るために行われた。

鏡の熱雑音

干渉計型重力波検出器の感度を観測帯域で制限するのは鏡の熱雑音であると予測されている。これは、鏡の各固有振動モードにエネルギー $k_{\mathrm{B}}T/2$ が与えられて振動しているため、光路長が変化し、干渉計の雑音となるものである。観測帯域におけるその寄与は、揺動散逸定理により、鏡の散逸が小さいほど低減されることが知られている。散逸の大きさは Q 値というパラメータで表され、Q 値が高いほど系の散逸は小さい。従って、検出器が重力波検出に必要な感度を達成するためには、内部の機械損失が少ない、高い Q 値を示す材質の鏡が必要とされてくる。鏡の Q 値に対する検出器の目標感度からの要請は厳しく、鏡の Q 値が 2×10^7 必要であるといわれている。しかし、TAMA300 では現在のところこの Q 値を達成できていない。そのため、鏡の Q 値を上げるための研究が必要とされている。

鏡の機械損失の測定

干渉計を構成する鏡は、検出の原理的な要請から、観測帯域において自由質点として振舞うように、懸架される。従って、検出器に導入される、鏡の損失は、

- 鏡自体の機械損失
- 懸架により導入される外的な損失

の二つの要因で決まることになる。鏡の熱雑音の低減のためには、両者の損失を低減し、Q 値の高い懸架鏡を実現する必要がある。そのために、鏡の材料としては、機械損失が小さいといわれる材料が選択される。しかし、その材料を懸架した場合に実現される Q 値は、結局、外的な損失で制限されてくる。これは、懸架だけでなく、鏡材料を支持した際には常に生じる問題である。そのため、鏡自体の損失と外的な損失を分離して測定が行えた例は過去になかった。

しかし、以下のような目的から、鏡自体の機械損失を独立に知っておくことは重要である。

- 外的な損失の評価を行い、よりよい懸架装置を開発する。
- より Q の高い懸架鏡を実現できる可能性のある、低損失な鏡材質を探索する。
- 鏡自体の機械損失から、検出器で原理的に到達可能な感度を推定する。

このような目的のため、外的な損失を導入せず、鏡自体の機械損失を直接測定することを本論文のテーマとした。具体的に行ったことは、有限要素法による振動モード解析と鏡材料の Q 値の測定である。

振動モード解析

鏡の Q 値の測定には、鏡の固有弾性振動モードを利用する。その振動エネルギーの損失の度合いから Q 値を知ることができる。支持に伴う損失が鏡に導入されないのは、支持部において鏡の振動モードが変位を持たない場合である。従って、支持に伴う損失を鏡に導入せずに Q 値の測定を行うには、鏡の振動モードを詳細に解析し、振動モードの変位のない部分を知ることが必要となる。溶融石英のような等方性の物質に関しては、振動モードの半解析的な計算法が知られていた。その計算によると、多くの振動モードで、円柱形の鏡の中心が不動点となることが示される。一方、シリコンやサファイアといった異方性のある物質の場合、振動モードを解析するには数値的手法に頼る必要があることが知られていた。しかし、これまでの数値計算における、共振周波数の誤差は 10% 程度と大きいものであった。将来の干渉計型検出器には、これらの異方性の物質が用いられると考えられているにもかかわらず、その振動モードの解析は進んでいなかった。

本論文の実験ではこれらの異方性の物質も扱う。そのため、実験に先立って、異方性物質の振動モードのより詳細な解析を行うことにした。解析のための数値的手法として、有限要素法を用いた。モデルの改良などにより、各振動モードの共振周波数の計算誤差を 1% 程度に抑えることができた。その結果、実験的に得られた共振周波数を計算結果と比較することにより、各共振がどのような振動モードか、類推することが可能となった。計算された振動モードの形状は、等方性物質では見られない、異方性物質特有の複雑なものであった。異方性物質においては、一部の振動モードのみにおいて円柱の中心が不動点となることが明らかとなった。

鏡材料の Q 値の測定実験のために、振動モードの変位のない部分を知る、という目的は達成され、実験装置の不動点支持というアイデアはここから生まれた。また、実験結果を解析するのにも、この計算の結果が用いられた。計算された形状と、測定された Q 値には相関が認められ、実験結果の意味付けを明確に行うことができた。

異方性物質に関する詳細な計算、その結果の実験への応用が行われたのは、これが最初の例となる。

鏡材料の機械損失の測定

計算によって、円柱状の鏡材料の中心は、一部の内部振動モードにおいて、完全な不動点となることが分かった。鏡材料の中心を点接触で支持することができれば、外的な損失は導入されず、鏡材料の機械損失の直接測定が可能になるはずである。この考えに基づき、試料の中心を 2 つのルビー球で支持する装置を製作し、測定を行った。試料としては、溶融石英とシリコン、サファイアを用意した。

TAMA300 で実際に用いられる溶融石英鏡の測定では、Q 値が共振周波数に依存しない、一定値 3×10^6 であることが分かった。これは、中心が変位しない多くの内部振動モードで測定された値で、鏡材料の機械損失が直接測定できたと考えられる。TAMA300 の目標感度の達成のためには、懸架鏡の Q 値が 2×10^7 必要であるといわれている。従って、ここでの測定結果から、現在の溶融石英鏡では TAMA300 の目標感度には原理的に到達できないことが明らかとなった。

シリコンの測定では、Q 値の最高値として、1×10^8 を得た。これも中心が変位しない内部振動モードで測定された値である。この値は、これまで知られているシリコンの Q 値の最高値を上回る値であった。この装置においては、支持による外的な損失が試料に導入されにくいことがこれによって確認された。この Q 値が、シリコンの機械損失のみで決まっていると断定することはできなかった。しかし、この装置により、Q 値 1×10^8 以下の材料の測定が可能であることは保証された。室温でこのような高い Q 値の測定が可能な支持系の例は多くない。

サファイアの測定では、Q 値の最高値として、6×10^7 を得た。これも中心が変位しない内部振動モードで測定された値である。同じ種類のサファイアを懸架した場合の Q 値は 5×10^6 と報告されている。ここでの測定はその Q 値を大きく上回っており、装置の有効性が改めて示されたことになる。振動モード形状の計算結果と比較すると、試料の表面の損失がサファイアの機械損失を制限している可能性があることが分かった。これは、将来の検出器にサファイア鏡を導入する際に、表面の状態に留意せねばならないことを示唆している。

このような実験結果から、試料の中心で点支持を行って Q 値を測定する本論文の方法が、低損失鏡材料の機械損失を測定するのに非常に有効な方法であることが確認された。本論文の目的である、鏡材料の機械損失の直接測定は、ほぼ達成されたと考える。

熱雑音の推定への応用

振動モードの計算と、測定された Q 値を用いて、異方性のある鏡を用いた場合の鏡の熱雑音を推定することも行った。これまで、異方性を考慮た熱雑音の推定は行われておらず、等方性物質と近似して推定するにとどまっていた。ここでは初めて異方性を考慮した推定を行うことができた。その結果、異方性を考慮しても、これまでの推定と大きく変わらないことが分かった。測定された Q 値の最高値から推定すると、シリコンやサファイアの鏡を用いれば、TAMA300 の目標感度は達成可能であることが示される。

計算された異方性材料の振動モード、測定された Q 値、およびここで確立された Q 値の測定法そのものも、鏡の熱雑音の推定や低減のための研究に生かされていくことになるであろう。

論文の構成

本論文では、まず第 2 章で重力波について簡単に解説を行う。現在建設が進められている検出器についても述べる。

第 3 章では鏡の熱雑音について述べ、鏡の Q 値との関係やこれまでの実験について紹介する。

第 4 章では、鏡の内部損失についてこれまでに知られていることをまとめる。

第 5 章では、ここで行った有限要素法による鏡の振動モードの解析について述べる。

第 6 章では、いくつかの鏡材料について、その Q 値の測定結果を示す。

そして、第 7 章で、全体の結論を述べることとする。

第2章

重力波とその検出

まずはじめに、ここで行われた研究の動機となっている、重力波の検出について簡単に述べる。
まず、重力波とその放出源を紹介する。
次に、現在世界で建設が進められている干渉計型重力波検出器について述べる。
そして、検出器において、重力波の検出を妨げる雑音源について考える事にする。

2.1 重力波と重力波源

2.1.1 重力波

一般相対論では、時空の 2 点 $x^\mu, x^\mu + dx^\mu$ の固有距離 ds を、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.1}$$

と、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて表現する。この計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は、アインシュタイン方程式、

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

に従う。ここで、G は万有引力定数、c は光速、$T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソル、$G_{\mu\nu}$ はアインシュタインテンソルで重力場を表す。G_ν は、リッチテンソル $R_{\mu\nu}$、リッチスカラー $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ と以下の関係にある。

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{2.3}$$

ただし、

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} \tag{2.4}$$

である。$\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ は、クリストッフェル記号、

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} \right) \tag{2.5}$$

である。真空中では、物質がないので $T_{\mu\nu} = 0$ として、式 (2.2) は、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \tag{2.6}$$

となる。今、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ がミンコフスキー空間の計量 $\eta_{\mu\nu}$ からわずかにずれている場合を考える。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{2.7}$$

このとき、式 (2.6) より、$h_{\mu\nu}$ が満たすべき方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial h^\rho_\mu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial h^\rho_\nu}{\partial x^\rho} - \Box h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2 h^\rho_\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0 \tag{2.8}$$

となる。ただし、$h_{\mu\nu}$ の 2 次以降の項は無視している。ここで、$\Box$ はダランベルシアンで $\Box = \nabla^2 - \partial^2/c^2\partial t^2$。ここで、

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{2.9}$$

$$h \equiv h^\rho_\rho \tag{2.10}$$

として、ローレンツゲージ条件、

$$\frac{\partial \bar{h}^\nu_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{h}^\rho_\rho}{\partial x^\mu} = 0 \tag{2.11}$$

を課すと、

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{2.12}$$

となる。すなわち、$\bar{h}_{\mu\nu}$ というミンコフスキー空間からの摂動が光速で伝播することになる。この解を重力波という。z 軸方向に進む重力波は、T-T ゲージと呼ばれる条件のもとで、$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ で、

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

と書ける。この $h_+, h_\times$ は、重力波の偏光を表している [1]。

2.1.2　重力波源

重力の相互作用は弱いため、このような重力波を発生する源は、大質量の関与する宇宙的なイベントに限られている。重力波源としては、表 2.1 のようなものが考えられている。

地上での重力波検出器で達成可能な感度は、数 100Hz で $h \sim 10^{-21}$ であると考えられている。そのため、中性子星の合体や超新星爆発といったイベントが地上の検出器での検出対象となる。[1]。

2.2　レーザ干渉計型重力波検出器

地上において重力波を検出する方式として、共振型、干渉計型の二つがある。

前者は、弾性体振動子の重力波の入射による固有振動モードの励起を観測するものであり、検出実験初期のころから建設されている。現在では極低温にした検出器が数台、世界で駆動している。しかし、その周波数帯域が 1Hz 程度と狭く、その帯域にない重力波の波形を得ることができないという欠点がある。

そのため、近年では、共振型に比して帯域幅の広い、レーザ干渉計型検出器が検出のための有力な手段として注目されている。これについて簡単に紹介する。

[1]最近、MACHO が低質量のブラックホールであり、その連星合体の際に強い重力波 (銀河系内で $h \sim 10^{-18}$) が放出されるという予想が出ている。

周波数帯	主な重力波源	距離	h 典型値	頻度
1Hz $\sim 10^4$Hz	連星合体	200Mpc	10^{-21}	数回/年
	超新星爆発	銀河系内	10^{-18}	数回/世紀
		おとめ座銀河団内	10^{-21}	数回/年
	パルサーの回転、振動		10^{-25}	連続波
10^{-7}Hz $\sim$ 1Hz	コンパクト連星		10^{-20}	連続波
	大質量ブラックホール形成	1Gpc	10^{-15}	数回/年
	ブラックホール合体	1Gpc	10^{-14}	数回/年
	宇宙論的背景放射		10^{-15}	連続波

表 2.1: 主な重力波源。文献 [2]、[3] などより引用した。

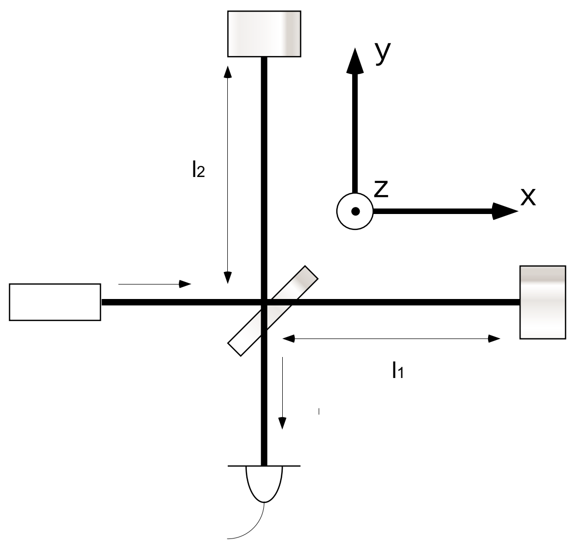

図 2.1: マイケルソン干渉計

2.2.1 マイケルソン干渉計の応答

干渉計型重力波検出器の基本的な原理は、マイケルソン干渉計による重力波の及ぼした距離の変化の検出である。そこで、マイケルソン干渉計の重力波に対する応答を見ることにする。

図 2.1 のマイケルソン干渉計において、z 方向から+モード (式 (2.13) 式の h_+ 成分のみ含む) の重力波が入射した場合、TT ゲージをとると、計量は、

$$ds^2 = -c^2dt^2 + (1 + h(t))dx^2 + (1 - h(t))dy^2 + dz^2 \tag{2.14}$$

と変化する。このとき、x 軸上 $(dy = dz = 0)$ を往復する波長 λ の光 $(ds^2 = 0)$ を考えると、

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{c}{\sqrt{1 + h(t)}} \tag{2.15}$$

が成り立つ。時刻 τ_1 に干渉計に入射し、距離 l_1 を往復してきた光の位相 ϕ_1 は、

$$\phi_1(t) = \Omega\tau_1 \tag{2.16}$$

ただし、Ω は光の周波数で、光の波長を λ として、

$$\Omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \tag{2.17}$$

という関係にある。式 (2.15) を時刻 τ_1 から t まで積分すると、符号は光の進行方向を表すので、

$$\int_{\tau_1}^{t} \frac{dt^{'}}{\sqrt{1+h(t^{'})}} = \frac{1}{c}\left(\int_{0}^{l_1} dx + \int_{l_1}^{0} (-dx)\right) = \frac{2l_1}{c} \tag{2.18}$$

となる。この左辺は、h の 1 次の近似で、

$$\int_{\tau_1}^{t} \frac{dt^{'}}{\sqrt{1+h(t^{'})}} \sim \int_{\tau_1}^{t} \left(1 - \frac{1}{2}h(t^{'})\right) dt^{'} \tag{2.19}$$

とできる。$h = 0$ ならば、$\tau_1 = t - 2l_1/c$ なので、積分範囲の下限を置き換え、

$$\phi_1(t) = \Omega\left(t - \frac{2l_1}{c} - \frac{1}{2}\int_{t-2l_1/c}^{t} h(t^{'})dt^{'}\right) \tag{2.20}$$

となる。y 軸では、この効果は逆符号であり、両腕からの位相差 $\Delta\phi$ は、$l = l_1 \sim l_2$ として、

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = -\frac{2\Omega(l_1 - l_2)}{c} - \Omega\int_{t-2l/c}^{t} h(t^{'})dt^{'} \tag{2.21}$$

という式が得られる。右辺第二項が、重力波による位相変化を表すことになる。$h(t)$ をフーリエ分解して、

$$h(t) = \int h(\omega)\exp{(i\omega t)}d\omega \tag{2.22}$$

と表す。この時、重力波による位相変化の項は、

$$\int h(\omega)H(\omega)\exp{(i\omega t)}d\omega \tag{2.23}$$

と書ける。ただし、

$$H(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega}\sin\left(\frac{l\omega}{c}\right)\exp{(-i\frac{l\omega}{c})} \tag{2.24}$$

である。この $H(\omega)$ は角周波数 ω の重力波に対するマイケルソン干渉計の応答関数と考えられる。その絶対値は、$l\omega/c = \pi/2$ が満たされるときに最大となる。従って、観測したい周波数が $\omega/2\pi = 1(\mathrm{kHz})$ の場合、基線長 l として 75km をとると感度が最大になることになる。

地上でこの基線長を実現するのは困難である。そのため、マイケルソン干渉計の各々の腕で光を折り返して基線長を稼ぐ、Fabry-Perot 型 (図 2.2) や Delay-Line 型 (図 2.3) の干渉計が検討されている。

2.2.2　世界の大型干渉計計画

このような検出原理に基づいた、大型レーザ干渉計型検出器の建設が現在世界で進められている。表 2.2 にそれをまとめた。

最も大規模なものはアメリカの LIGO 計画であり、基線長 4km の干渉計を 2 台建設している [4]。また、ヨーロッパでは、フランスとイタリアが VIRGO 計画という名のもとに基線長 3km の干渉計 [5] を、ドイツとイギリスが GEO 計画として基線長 600m の干渉計 [6] を建設している。日本では、TAMA 計画という名のもとに TAMA300 と呼ばれる干渉計の建設が進められている [7]。GEO の Delay-Line 型を除けば、他は全て Fabry-Perot 型の干渉計である。

本論分で行われた研究は TAMA 計画に関わるものである。この計画について、次節で紹介する。

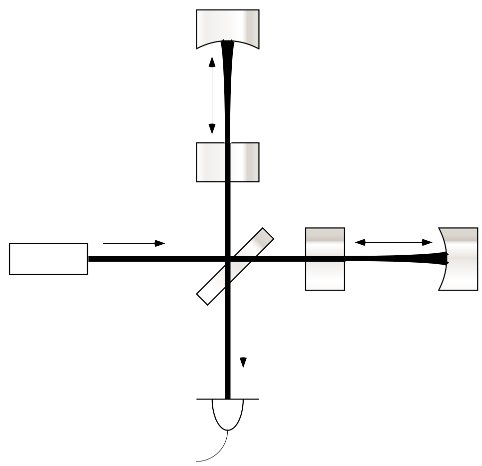

図 2.2: Fabry-Perot 型

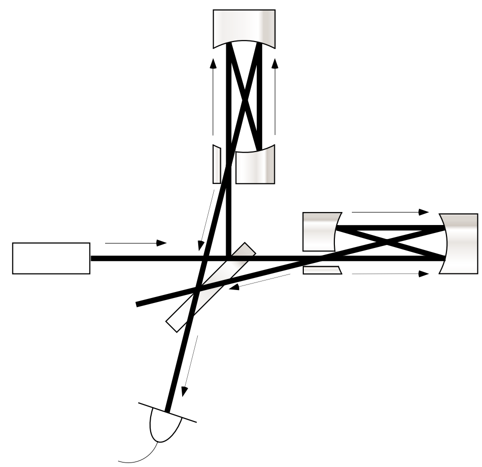

図 2.3: Delay-Line 型

プロジェクト	参加国	基線長	建設場所	運用開始予定年
LIGO	アメリカ	4km(×2)	Hanford/Libingston	2002
VIRGO	フランス/イタリア	3km	Pisa	2003
GEO	ドイツ/イギリス	600m	Hannover	2001
TAMA	日本	300m	三鷹	2000

表 2.2: 世界の大型レーザ干渉計型重力波検出器計画

2.3 TAMA 計画

TAMA 計画は、レーザ干渉計型重力波検出器 TAMA300 を建設する計画である。現在、TAMA300 は、国立天文台三鷹キャンパスで開発が進められている。この計画の目的は、実際に実証型の重力波検出器として観測を行うことと、将来の km クラスの大型レーザ干渉計型建設[2]に必要な技術を確立することである。現在 (1999 年 12 月)、他の大型計画に先駆けて観測を開始しようとしている。

TAMA300 について簡単に紹介する。

2.3.1 TAMA300 の構成

TAMA300 の概念図を図 2.4 に示す。各腕に基線長 300m の Fabry-Perot 共振器を持った、Fabry-Perot-Michelson 干渉計である。レーザとビームスプリッタの間に置かれる鏡はリサイクリングミラーと呼ばれ、これは干渉計内部の光のパワーを増大する役目を持っている。このミラーがない状態を Phase I と呼び、導入した状態を Phase II と呼ぶ。現在は、Phase I の開発段階である。すでに施設の建設は終わり、光学系の導入もほぼ完了し、全自由度を制御した長時間運転にも世界に先駆けて成功した。現在行われているのは干渉計本体の動作テストと調整 (ノイズハンティング) である。

各部について、簡単に解説する。

- レーザ : 光源として注入同期方式の Nd:YAG レーザ (出力 10W、波長 1064nm) を用いる。周波数と強度の安定化が行われている。

[2]神岡鉱山に冷却鏡を用いた基線長 3km の干渉計を建設する LCGT 計画が具体性をもちつつある。

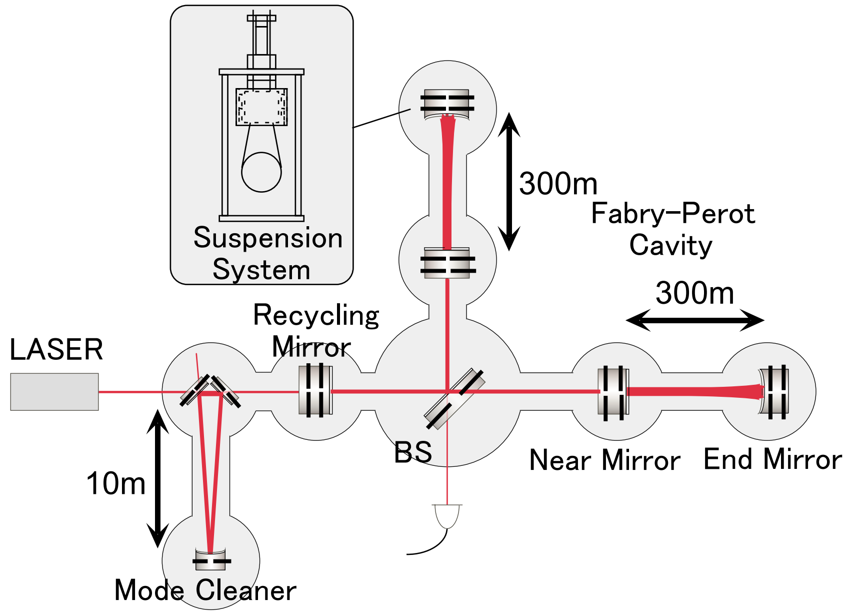

図 2.4: TAMA300 の概念デザイン

- モードクリーナ： 基線長 10m のリング型共振器。この目的は、レーザ光に含まれる基本 TEM_{00} モード以外の高次モードを落とすことと、光軸方向の揺らぎ (ビームジッター) を抑えることである。
- Fabry-Perot 共振器：両腕に 300m の距離をおいて配置された 2 枚の鏡が Fabry-Perot 共振器を構成している。これにより、実効的な光路長が稼がれる。
- 懸架システム：干渉計を構成する鏡は、観測帯域で自由質点として振舞うようにするため、また、地面振動の防振のために、ワイヤによって振り子状に懸架されている。
- 真空システム： 残留ガスによる光路長変化、損失の導入などの影響を防ぐために、全体が 10^{-6}Pa 程度の超高真空に保たれている。
- **鏡**：最も重要な要素の一つが、干渉計を構成する鏡である。本論文のテーマはこの鏡に関する研究である。実際に、TAMA300 のリサイクリングミラーが本研究で扱われた。材質は、人工溶融石英 (SUPRASIL P-10、信越石英製) である。誘電体多層膜コーティングにより、適切な反射率が実現されている。その機械損失の大きさから、熱雑音が問題となることが予想されており、その克服が急務となっている。

2.3.2 TAMA300 の雑音源

重力波の及ぼす効果は非常に小さく、h にして 10^{-21} というレベルの変化を検出する必要がある。これは、鏡の相対距離の変化を 10^{-21} の精度で検出することに相当する。このレベルでは、光路長を変化させるものは全て干渉計の雑音源となる。ここでは TAMA300 における主要な雑音源について紹介する。大きく分けて以下の 3 つの要因がある。

- 熱雑音：鏡の弾性振動、振り子の振動、ワイヤの弾性振動
- 振動：地面振動 (常時微動)

- 光源による雑音：散射雑音、周波数雑音、強度雑音、ビームジッター

雑音の周波数成分を考慮するのに、(片側) パワースペクトル密度 $G(\omega)$ という概念がよく用いられる。これは、変数 x の時間自乗平均 $\bar{x^2}(t)$ への各周波数成分からの寄与を表す関数で、

$$\bar{x^2}(t) = \int_0^\infty G_(\omega)d\omega \tag{2.25}$$

を満たしている。

熱雑音

熱雑音については、次章で詳しく論じるので要点のみにとどめる。

揺動散逸定理によると、温度を持った熱浴に接している散逸を伴う系は、散逸に比例した揺動力を受けてゆらぐ。干渉計型検出器においては、以下の熱雑音が考えられている。

- 鏡の熱雑音：鏡の機械共振が熱的に励起されているために生じる雑音である。鏡の共振周波数は数 10kHz 以上であり、観測帯域 (300Hz 付近) よりもはるかに高い。そのため、各モードの換算質量[3]を m_i、Q 値を Q_i、温度を T、共振周波数を ω_i、ボルツマン定数を k_B[4]として、

$$G_{\text{mirror}} \sim \frac{4k_BT}{\omega} \sum_i \frac{1}{m_i \omega_i^2 Q_i} \ [\text{m}^2/\text{Hz}] \tag{2.26}$$

  となる[5]。ここで、Q 値は、共振における散逸の大きさを表す量で、Q 値が高いほど系の散逸は小さい。

  この鏡の寄与を少なくするには、鏡の Q 値 Q_i を上げる、温度 T を下げる、共振周波数 ω_i を上げるなどの方法が必要になる。温度 T を下げることには困難を伴い、共振周波数 ω_i は材質と大きさの制限により決まってしまう。そのため、通常は、懸架鏡の Q 値を上げる方向に努力が払われる。TAMA300 では、Phase I の目標感度を達成するためには、溶融石英鏡の Q 値が全モードで 1×10^5 以上、Phase II のためには 2×10^7 以上が必要であるとされている [8]。

- 振り子の熱雑音：鏡は振り子状に懸架されているが、その振り子自体が熱振動する。鏡の場合とは逆に、振り子の共振周波数は観測帯域よりはるかに低い (~1Hz)。この場合、振り子の熱雑音は、鏡の質量を m として、

$$G_{\text{pend}} \sim \frac{4k_BT\omega_0}{m\omega^5 Q} \ [\text{m}^2/\text{Hz}] \tag{2.27}$$

  となる[6]。この場合は、振り子の共振周波数 ω_0 を低くするか、振り子の Q 値を上げることに努力が払われる。前者は防振の観点からも望ましい。実際には多段系の振り子が用いられているので、この効果を考慮する。TAMA の Phase II の目標感度のためには、振り子の Q 値として、5×10^5 が必要であるとされている [8]。

- ワイヤの熱雑音：鏡を懸架しているワイヤも熱振動を行う。これはバイオリンモードの熱雑音ともいわれ、鏡を振り動かし光路長を変動させる原因となる。このモードの周波数と換算質量は、解析的に計算することができる [9]。共振周波数は観測帯域に近いところにくるため、その帯域から外れるように設計されねばならない。Q 値は、振り子の Q 値の 1/2 として考えることが多い [10]。

[3] 各振動モードがどの程度光路長変動に寄与するか、換算した量。第 3 章参照。
[4] $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$[J/K]
[5] 後に紹介する Structure Damiping が仮定されている。
[6] ここでも Structure Damping を仮定した。

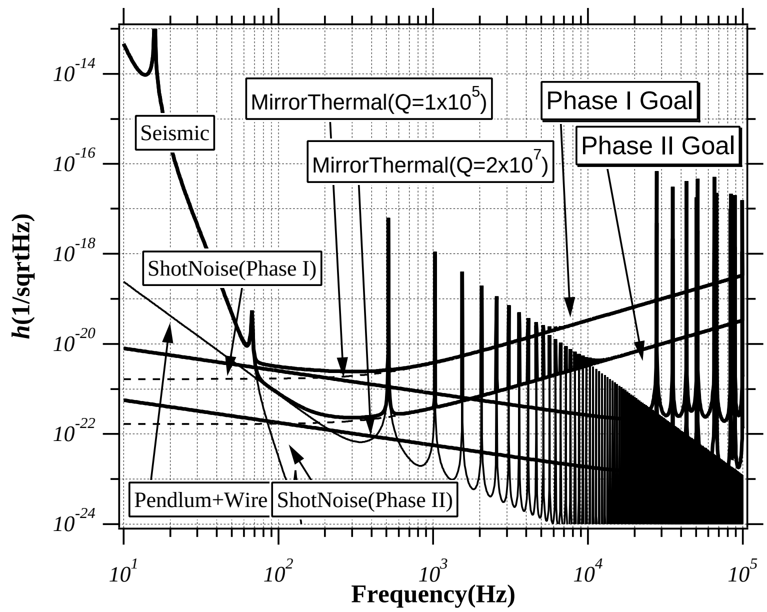

図 2.5: TAMA300 の感度曲線とノイズ源。資料 [11] を元に計算。観測帯域は、150Hz-450Hz である。地面振動は、地面振動モデルに、スタックと振り子の伝達関数をかけたもの。振り子の Q は 5×10^5 とし、各 Phase での目標感度から散射雑音レベルは逆算している。鏡の Q 値が Phase I では 1×10^5、Phase II では 2×10^7 必要であることが分かるが、TAMA の懸架鏡で測定された Q 値はこれらよりずっと低い。

地面振動

地面は地震がない場合でも、常時微動といわれる振動 (数 μmRMS) を行っており、その典型的なスペクトルは、

$$\sqrt{G_{\rm seismic}} \propto \frac{10^{-7}}{f^2}[{\rm m}/\sqrt{\rm Hz}] \tag{2.28}$$

に従うことが知られている。この振動の観測帯域での成分、および振り子の共振周波数での振幅を抑えるために防振が行われる。TAMA300 では、3 段のスタックと、2 重振り子を原理とした防振系で観測帯域で並進-165dB の防振性能を達成している。光路長への寄与は、地面振動のスペクトルにスタックや振り子の伝達関数をかけたものとなる。

光の散射雑音

光が光量子であることに起因する雑音である。光電効果を利用した検出器に光が入射し、DC 電流 I_0 が流れている場合、散射雑音のパワースペクトル密度 $G_{\rm shot}$ は、電荷素量を e として、

$$\sqrt{G_{\rm shot}} = \sqrt{2eI_0}\ [{\rm A}/\sqrt{\rm Hz}] \tag{2.29}$$

となる [1]。重力波信号による電流は、レーザの強度に比例する。両者の比を考えると、レーザの強度が増すと、その平方根で散射雑音の影響は小さくなってゆく。Phase II でのパワーリサイクリングはこの効果を狙ったものである。実際には Fabry-Perot 共振器や観測帯域幅の影響を考慮してこの雑音による検出限界を見積もる。

以上の効果を考慮し、TAMA における感度曲線を計算したものが、図 2.5 である。観測帯域で

は鏡の熱雑音が支配的となる可能性があることがわかる。現在実現されている鏡の熱雑音のレベルは目標よりも数桁悪いと考えられ、これに対する対策は必須となっている。

2.4 本論文の主題

TAMA300 においては、鏡の熱雑音が観測帯域での感度を制限する可能性がある。そのため、鏡の熱雑音の低減のための研究が急務となっている。鏡の熱雑音の低減のためには、懸架鏡の Q 値を上げる、すなわち、損失の少ない懸架鏡を実現することが必要である。

懸架鏡の損失は、二つの要因によって決まっている。

- 鏡自体の機械損失
- 懸架により導入される外的な損失

懸架鏡の Q 値をあげるためには、両者の損失を小さくすることが必要である。しかし、低損失な鏡材料を用いた場合は、鏡自体の機械損失よりも外的な損失が支配的となることが多い。

本論文では、鏡自体の機械損失を直接測定することを主題とした。このためには、測定のために支持することにより導入される外的な損失を、鏡自体の機械損失よりも十分小さくしなければならない。これは困難な課題であり、これまでにこのような測定例は存在しなかった。しかし、鏡自体の機械損失を直接測定する手段を確立しておくことは、

- 懸架した際に実現されうる最小の損失を知る。それにより、その鏡を用いた場合の、鏡の熱雑音の最良値が推定できる。
- 外的な損失の評価を行う。それにより、より損失の少ない懸架方を探ることが可能になる。
- 鏡自体の機械損失がより小さいものを探す。

等という観点から非常に重要である。

この目的を達成するために、本論文の研究では、鏡の振動モードの有限要素法による計算と、鏡材料の Q 値の測定を行った。

Q 値の測定には、鏡材料の内部の振動モードが利用される。内部振動の減衰の度合いから、損失の大きさを知ることができる。支持による外的な損失を導入することなく損失 (Q 値) を測定するには、その振動モードが支持部において変位を持っていなければよい。そのために、鏡の振動モードの詳細な解析が必要となる。しかし、将来の干渉計型重力波検出器に用いられると考えられている、シリコン、サファイアといった異方性物質に対しては、このような解析が進んでいなかった。ここでは、これらの材質も含めた、有限要素法による詳細な振動モード解析を行った。その結果、異方性物質においては、一部の振動モードにおいて、円柱状の鏡の中心が完全な不動点となることが明らかにされた。

鏡材料の Q 値の測定実験においては、これら中心が不動点となる振動モードに注目した。この点において、点接触で試料を支持すれば、外的な損失を導入することなく、試料内部の機械損失を直接測定できるはずである。この考えに基づき、実験装置を製作し、鏡形状の溶融石英、シリコン、サファイアの Q 値の測定を実際に行った。その結果、全ての試料において、中心が不動点となる振動モードで高い Q 値を測定することができた。中心が不動点となるモードに関する測定結果から、機械損失の機構に関する考察も行うこともできた。

これらの計算と実験の結果から、鏡自体の機械損失を直接測定するという目的はほぼ達成されたと考えている。

以降、計算と実験の内容に入る前に、鏡の熱雑音と鏡の Q 値について説明し、鏡内部で起きると考えられている機械損失の機構を紹介しておくことにする。

第3章

鏡の熱雑音と鏡のQ値

前章では、干渉計型重力波検出器において、鏡の熱雑音が観測帯域の感度を制限する可能性があることをみた。本章では、この鏡の熱雑音に関して、より詳しい議論を紹介する。鏡の熱雑音とは、干渉計型重力波検出器の鏡において、その各固有振動モードに熱エネルギー $k_{\mathrm{B}}T/2$ が与えられて、鏡面が鏡の重心に対して変動し、光路長変動として観測されるものである。

ここではまず、揺動散逸定理が主張している、系の損失と揺動についての一般論を確認する。次に、1 次元調和振動子において適当な損失モデルを仮定し、揺動の特徴を見る。実際の鏡は 3 次元であるので、1 次元系に焼きなおすための換算質量という概念を導入する。鏡の Q 値という散逸を表す量が、鏡の熱雑音と密接に関連していることを見る。

さらに、重力波の分野における鏡の機械損失の研究を振り返り、今回の実験の独自性を見ることにする。

3.1 揺動散逸定理

3.1.1 一般論

入力 $f(t)$ に対して出力 $x(t)$ が与えられる線形システムにおいて、系の伝達関数 (周波数応答関数)$H(\omega)$ は、以下の式で定義される。

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \tag{3.1}$$

ただし、$F(\omega), x(\omega)$ は $f(t), x(t)$ のフーリエ変換。この伝達関数は、インパルス応答 $h(t)$ と以下のような関係がある。

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{3.2}$$

また、系のインピーダンス $Z(\omega)$、レジスタンス $R(\omega)$、アドミッタンス $Y(\omega)$、コンダクタンス $\sigma(\omega)$ を以下のように定義する。

$$Z(\omega) \equiv \frac{F(\omega)}{i\omega X(\omega)} \tag{3.3}$$

$$R(\omega) \equiv \mathrm{Re}[Z(\omega)] \tag{3.4}$$

$$Y(\omega) \equiv \frac{1}{Z(\omega)} \tag{3.5}$$

$$\sigma(\omega) \equiv \mathrm{Re}[Y(\omega)] \tag{3.6}$$

第一種揺動散逸定理 [12, 13] によると、揺動 x の周波数 f における (片側) パワースペクトル密度 $G_x(f)$ は、k_B をボルツマン定数、T を系の温度として、

$$G_x(f) = \frac{4k_\mathrm{B}T\sigma(\omega)}{\omega^2} \tag{3.7}$$

$$= -\frac{4k_\mathrm{B}T\mathrm{Im}[H(\omega)]}{\omega} \tag{3.8}$$

である。また、揺動力 f のパワースペクトル密度 $G_f(f)$ に注目した場合、第二種揺動散逸定理と呼ばれる。

$$G_f(f) = 4k_\mathrm{B}TR(\omega) \tag{3.9}$$

パワースペクトルの間の関係、

$$G_x(f) = |H(\omega)|^2 G_f(f) \tag{3.10}$$

を考えると、この二つは等価なことを主張している。$R(\omega), \sigma(\omega), \mathrm{Im}[H(\omega)]$ は後に見るように系の散逸 (損失) の大きさを表す。したがって、揺動 (力) の大きさが系の損失に応じて決まるということを表現していることになる。

3.1.2 1 次元調和振動子

これまで、一般論を述べてきたので、ここでは最も簡単な 1 次元調和振動子の場合を考察する。共振角周波数 ω_0 を持つ系の運動方程式、

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = f(t) \tag{3.11}$$

をフーリエ変換して、散逸項を導入する。

$$-\omega^2 mX + m\omega_0^2(1 + i\phi(\omega))X = F \tag{3.12}$$

ここで、バネ定数 $k = m\omega_0^2$ を一般化して複素数にした。この虚部が損失を表す[1]。このとき、

$$H(\omega) = -\frac{(\omega^2 - \omega_0^2) + i\omega_0^2\phi(\omega)}{m[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4\phi(\omega)^2]} \tag{3.13}$$

である。共振 $\omega = \omega_0$ では、伝達関数の虚部だけが残り、その大きさは、$1/\phi(\omega_0)$ に比例する。また、位相が $\pi/2$ 遅れる。他の領域では、実部が支配的で、低周波側で $\sim \frac{1}{m\omega_0^2}$、高周波側で $\sim -\frac{1}{m\omega^2}$ となっている。共振以外では、虚部は実部に対し $\phi(\omega)$ 倍ほどの大きさしか持たないので、ϕ が小さい (Q 値が高い) 場合、損失を表す虚部を見ることは難しくなる。

また、この場合、

$$Z(\omega) = \frac{m[\omega_0^2\phi(\omega) + i(\omega^2 - \omega_0^2)]}{\omega} \tag{3.14}$$

$$R(\omega) = \frac{m\omega_0^2\phi(\omega)}{\omega} \tag{3.15}$$

[1] この虚部は、力 f と変位 x に位相差 ϕ をもたせている。$x = x_0\cos(\omega t), f = f_0\cos(\omega t - \phi)$ とすれば、1 サイクルあたりに失われるエネルギー $\Delta E = \int_0^{2\pi/\omega} f\dot{x}dt = -x_0 f_0 \sin\phi$、平均のエネルギー $E = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} fxdt = f_0 x_0/2$。従って、$\Delta E/E \sim -2\pi\phi$ となる。つまり、1 サイクルあたりに失われる全エネルギーに対する割合が $2\pi\phi$ といえる。

$$Y(\omega) = \frac{\omega[\omega_0^2\phi(\omega) - i(\omega^2 - \omega_0^2)]}{m[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4\phi(\omega)^2]} \tag{3.16}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\omega\omega_0^2\phi(\omega)}{m[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4\phi(\omega)^2]} \tag{3.17}$$

となる。$\mathrm{Im}[H(\omega)], R(\omega), \sigma(\omega)$ は、系の損失 $\phi(\omega)$ に比例するような量となっている。1 次元調和振動子の揺動のパワースペクトル $G_x(f)$ は、

$$G_x(f) = \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{m\omega}\frac{\omega_0^2\phi(\omega)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4\phi(\omega)^2} \tag{3.18}$$

となる[2]。

3.1.3 Q 値と損失 $\phi(\omega)$ のモデル

$\phi(\omega)$ の周波数依存性を表す、代表的な二つのモデルが存在する。いずれのモデルに基づいた場合でも、

$$\phi(\omega_0) = \frac{1}{Q} \tag{3.19}$$

として、Q 値を定義する。すなわち、Q 値は共振周波数 ω_0 における散逸の大きさを表す量である。

以下、$\phi(\omega)$ のモデルとして、Viscous Damping Model, Structure Damping Model の二つについて考察する。

Viscous Damping Model

減衰力が速度に比例するモデルで、ダッシュポットはこれに相当する。

$$\phi(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0 Q} \tag{3.20}$$

このとき、伝達関数 $H(\omega)$ の分母=0 を解いて、伝達関数の極 $\omega_\pm^{\mathrm{v}}$ を求めてみる。

$$\begin{aligned} \omega_\pm^{\mathrm{v}} &= \pm\frac{\omega_0}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} + i\frac{\omega_0}{2Q} && (3.21) \\ &\equiv \pm\mathrm{Re}[\omega_+^{\mathrm{v}}[+i\mathrm{Im}[\omega_+^{\mathrm{v}}] && (3.22) \end{aligned}$$

従って、インパルス応答 $h(t)$ は、

$$\begin{aligned} h(t) &= -\frac{1}{2\pi m}\int\frac{e^{i\omega t}}{(\omega - \omega_+^{\mathrm{v}})(\omega - \omega_-^{\mathrm{v}})}d\omega && (3.23) \\ &= -\frac{1}{2\pi m}2\pi i\left(\frac{e^{i\omega_-^{\mathrm{v}}t}}{\omega_-^{\mathrm{v}} - \omega_+^{\mathrm{v}}} + \frac{e^{i\omega_+^{\mathrm{v}}t}}{\omega_+^{\mathrm{v}} - \omega_-^{\mathrm{v}}}\right) && (3.24) \\ &= \frac{1}{m}\frac{\sin\mathrm{Re}[\omega_+^{\mathrm{v}}]}{2\mathrm{Re}[\omega_+^{\mathrm{v}}]}e^{-\mathrm{Im}\omega_+^{\mathrm{v}}t} && (3.25) \\ &\to \frac{1}{m\omega_0}\sin(\omega_0 t)e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \quad (Q \to \infty \text{ の時}) && (3.26) \end{aligned}$$

となる。ただし、実軸を通り上半平面を半時計回りに迂回する積分経路を採用している。Q 値を変

[2] 古典的なエネルギー等分配則は、$G(f)$ を全周波数帯域で積分することによっても得られる [14]。広帯域で ϕ が一定のモデルの場合でも、ϕ の性質より $\omega \to 0$ の極限で積分は発散せず、この関係も保証される [15]。

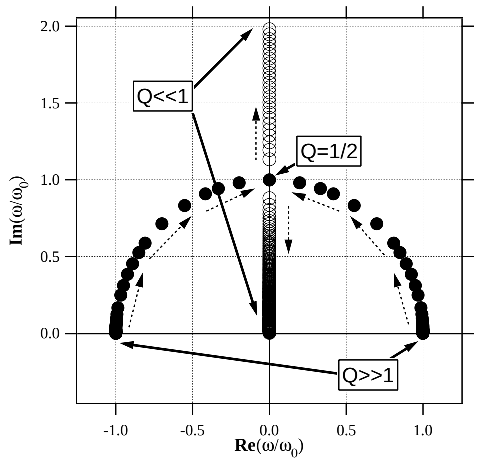

図 3.1: Viscous Damping Model における極の動き

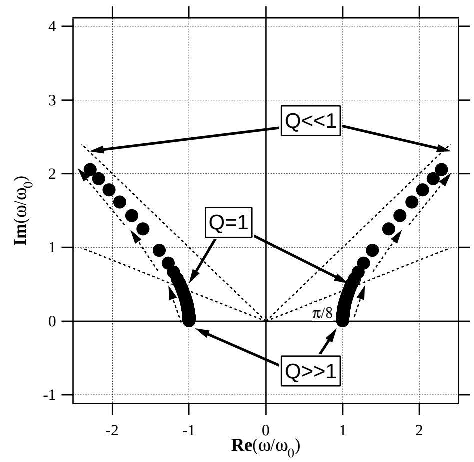

図 3.2: Structure Damping Model における極の動き

化させたときの $\omega_\pm^{\mathrm{v}}$ の動きを複素平面上に示すと、図 3.1 のようになる[3]。伝達関数の極の ω の実軸への近さが伝達関数のゲインの大きさを表し、また、その偏角の大きさが損失の大きさを表すことになる[4]。

また、パワースペクトル $G_x(f)$ は、

$$G_x(f) = \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{mQ}\frac{\omega_0}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega_0^2\omega^2/Q^2} \tag{3.28}$$

これは、低周波極限 $(\omega \ll \omega_0)$ では、

$$G_x(f) \sim \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{m\omega_0^3 Q} \tag{3.29}$$

の定数に、高周波極限 $(\omega \gg \omega_0)$ では、

$$G_x(f) \sim \frac{4k_{\mathrm{B}}T\omega_0}{mQ\omega^4} \tag{3.30}$$

となって f^{-4} に比例する。

Structure Damping

広い周波数帯域で、

$$\phi(\omega) = \frac{1}{Q} \tag{3.31}$$

の一定値とするモデルである。ただし、$\phi(\omega)$ は奇関数でなければならないので[5]、これは $\omega \to 0$ の極限まで成立するということではなく、周波数依存性が弱い、ということを言っているのにすぎない。このモデルに従う系の例が、多く挙がってきている [16, 17, 18, 19]。

[3]特に、この場合、$Q = 1/2$ を Critical Damping という。

[4]モデルに依らず $Q \gg 1$ では極を ω_+ として、十分よい近似で、

$$Q = \frac{\mathrm{Re}[\omega_+]}{2\mathrm{Im}[\omega_+]} \tag{3.27}$$

が成り立つ。つまり、伝達関数の極の位置が分かれば、Q 値も分かる。

[5]実際のシステムでは x, f が実数でなければならないため。$\omega = 0$ では $\phi(\omega) = 0$。

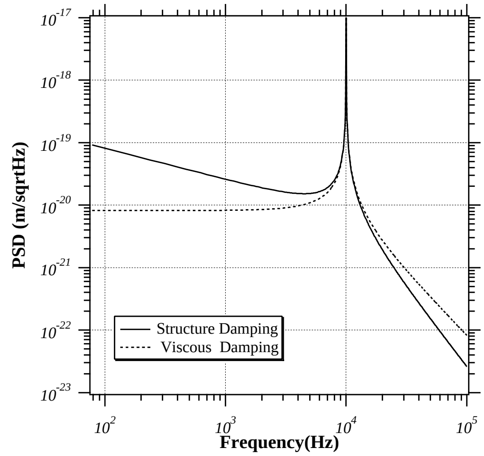

図 3.3: 調和振動子の熱雑音。$T = 300$[K]、$m = 1$[kg]、$\omega_0/2 = 10$[kHz]、$Q = 1 \times 10^6$ とした場合の例。ピークの頭は切れている。

この場合、伝達関数の極 $\omega_\pm^{\rm s}$ を求めてみると、虚部が負となる解が現れる。これは、因果律にも反するが、ϕ が奇関数であることを考慮して、

$$\begin{aligned} \omega_\pm^{\rm s} &= \pm\omega_0(1+\frac{1}{Q^2})^{1/4}\left(\cos(\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{Q})\pm i\sin(\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{Q})\right) && (3.32)\\ &\equiv \pm{\rm Re}[\omega_+^{\rm s}]+i{\rm Im}[\omega_+^{\rm s}] && (3.33)\end{aligned}$$

とする。ただし、上の式は複号同順。これらから、インパルス応答 $h(t)$ を求めると、先と全く同様にして、

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{m}\frac{\sin{\rm Re}[\omega_+^{\rm s}]}{2{\rm Re}[\omega_+^{\rm s}]}e^{-{\rm Im}\omega_+^{\rm s}t} && (3.34)\\ &\to \frac{1}{m\omega_0}\sin(\omega_0 t)e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \quad (Q\to\infty \text{ の時}) && (3.35)\end{aligned}$$

を得る。

Q 値を変化させたときの $\omega_\pm^{\rm s}$ の動きを複素平面上に示すと、図 3.2 のようになる。

この場合の位置 x のパワースペクトル $G_x(f)$ は、

$$G_x(f) = \frac{4k_{\rm B}T}{mQ\omega}\frac{\omega_0^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega_0^4/Q^2} \tag{3.36}$$

である。これは、低周波極限 ($\omega \ll \omega_0$) では、

$$G_x(f) \sim \frac{4k_{\rm B}T}{mQ\omega_0^2\omega} \tag{3.37}$$

で、f^{-1} に従って、低周波では増大する。高周波極限 ($\omega \gg \omega_0$) では、

$$G_x(f) \sim \frac{4k_{\rm B}T\omega_0^2}{mQ\omega^5} \tag{3.38}$$

となって f^{-5} に比例する。この減衰は Viscous Damping Model よりも急峻である。

これら二つの場合のパワースペクトル密度を図 3.3 に示す。典型的なパラメータを入れたものである。Q 値が高い場合ほど、共振周波数 ω_0 において鋭いスペクトルのピークが生じる。

干渉計型重力波検出器で言えば、観測帯域 ($\sim$ 300Hz) より十分下 ($\sim$ 1Hz) に振り子の共振が、十分上 ($\sim$ 20kHz) に鏡の共振がある。しかし、共振周波数外の熱雑音ですら干渉計型重力波検出器の雑音源となる。

3.1.4　Q 値の測定

実際の測定では、主に以下の二つの方法で Q 値の測定が行われる[6]。

- 系に外力を加えて共振を励起して、その指数減衰の度合いから Q 値を計算する。外力が失われたとき、系は、式 (3.26),(3.35) に見られるような、指数減衰を行う。その振幅の時間依存性は、

$$\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)\sin(\omega_0 t) \tag{3.39}$$

  に比例するので、Q 値が分かる。Q 値が高いほど減衰時間が長くなるので測定が容易になる。

- 伝達関数の絶対値の幅から、Q 値を計算する。伝達関数の絶対値の自乗 $|H(\omega)|^2$ の半値幅 $\Delta\omega_0$ は、

$$\Delta\omega_0 \sim \frac{\omega_0}{Q} \tag{3.40}$$

  となるので、伝達関数 $H(\omega)$ の測定から Q 値が分かる。低い Q 値の時ほど半値幅が広くなるので測定が容易になる。

3.1.5　実際の系

これまで、Q 値を導入するために、1 次元の調和振動子を考えてきた。実際の連続体も、このような簡単なモデルで表せることが多い。ただし、限界もある。

モード展開

連続体の運動方程式は、無限個の調和振動子の運動方程式の和で書き表せる。おのおのの運動方程式に散逸を導入して、系全体の伝達関数を

$$H(\omega) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\omega^2-\omega_n^2)+i\omega_n^2\phi_n(\omega)}{m_n[(\omega^2-\omega_n^2)^2+\omega_n^4\phi_n(\omega)^2]} \tag{3.41}$$

と書くことができる。これをモード展開と呼ぶ。ただし、m_n は観測点に応じた換算質量である。換算質量は、系の全エネルギーと、観測点における質量 m_n、共振周波数 ω_n の仮想的な調和振動子の持つエネルギーとを等しいと置くことにより定義されたものである。この場合の熱振動のパワースペクトルは、揺動散逸定理により、

$$G_x(f) = \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega_n^2\phi_n(\omega)}{m_n[(\omega^2-\omega_n^2)^2+\omega_n^4\phi_n(\omega)^2]} \tag{3.42}$$

となる。全系の熱振動も、無限個の調和振動子の熱振動の重ねあわせで表現されている。

非一様な損失の分布

これまでのところ、ϕ は周波数 ω にのみによるとしてきた。

しかし現実には、空間依存性が存在することがある。たとえば、鏡に磁石を取り付ける、コーティングを施すなどを行うと、その部分の散逸は増加するであろう。この場合、非一様な損失分布となり、これまでの議論と別の手段をとる必要がある。それは、損失が非一様に分布していること

[6]超音波の吸収係数 α と Q 値にも相関がある。音響学の分野ではそれから計算するのが普通である。

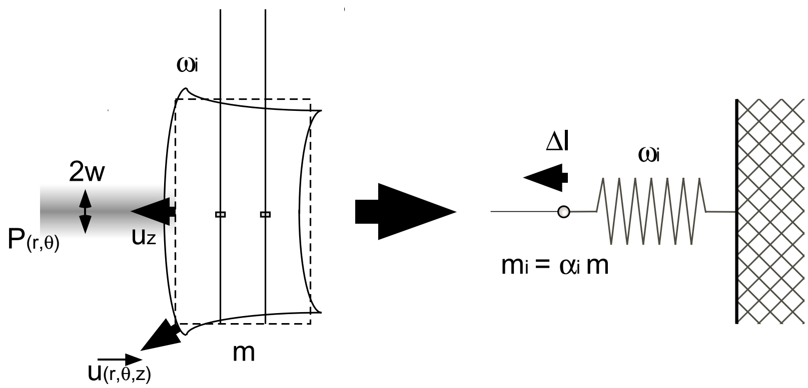

図 3.4: 鏡の換算質量。

により、基底関数のモード間のカップリングが生じ、モード展開を行うことができなくなるからである。したがって、非一様な損失分布を持つ系の熱雑音を推定する場合には、連続系における運動方程式に非一様な損失を導入して、直接系のインピーダンスを計算することが行われる。例えば文献 [20] など。

鏡の熱雑音に関して言えば、モード間のカップリングが存在すると低周波の熱雑音レベルが増加する可能性があることが報告されている。しかし、ここでは鏡のバルクとしての内部損失を知るということが目的であることから、この話題は紹介のみにとどめておく。

3.2 鏡の熱雑音

干渉計型重力波検出器において、鏡の各固有振動モードにエネルギー $k_{\mathrm{B}}T/2$ が与えられて鏡面が揺らぎ、光路長変動となるものを鏡の熱雑音と呼んでいる。これまで準備した概念を用いて、鏡の熱雑音の計算について触れる。

3.2.1 鏡の換算質量

鏡は無限個の固有振動モードを持っている。モード展開に基づいて、全モードからの熱雑音の寄与を考える場合、各モードの換算質量を計算することが必要となる。

実際の干渉計の鏡は、Fabry-Perot 共振器を構成しており、TEM_{00} モードといわれるレーザの基本モードが共振した状態に置かれる。このビームは広がりをもって鏡にあたり反射する。これを、1 次元的な光路長変動に焼きなおすため、換算質量を計算する [21, 22]。

いま、鏡面にビームが垂直に当たっているとし、その鏡面が変位 $u_z(r,\theta)$ で光軸方向 (z 方向) の変位を持つとする (図 3.4) と、実効的な光路長変動 Δl は、

$$\Delta l = \int_S u_z(r,\theta)P(r,\theta)dS \tag{3.43}$$

と考えることができる。積分はビームの当たっている鏡面内で行う。ただし、$P(r,\theta)$ はレーザの鏡面における強度分布で、w を鏡面におけるビームサイズとして、

$$P(r,\theta) = \frac{2}{\pi w^2}\exp\left(-\frac{2D^2}{w^2}\right) \tag{3.44}$$

と書ける。ただし、ビームが鏡の中心に当たっているとき、

$$D = r \tag{3.45}$$

である。ビームの中心が、鏡面において (d, θ_1) にあり、中心に当たっていないとき[7]、

$$D = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\theta - \theta_1)} \tag{3.46}$$

である。鏡の中心にビームが当たっている場合に限定すれば、鏡の半径を R として、

$$\Delta l = \int_0^R rdr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{2}{\pi w^2} u_z(r,\theta) \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \tag{3.47}$$

となる。このとき、この鏡の運動エネルギー U は[8]、

$$U = \int_V \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u(r,\theta,z)}{\partial t}\right)^2 dV = \frac{\rho w^2}{2} \int_V |u(r,\theta,z)|^2 dV \tag{3.49}$$

である。ただし、鏡の密度を ρ とした。積分は全体積で行う。換算質量 m_i の定義より、

$$\frac{1}{2} m_i \omega_i^2 (\Delta l)^2 = U \tag{3.50}$$

とおくと、

$$m_i = \frac{U}{\frac{1}{2}\omega_i^2 (\Delta l)^2} = \frac{\rho \int_V |u|^2 dV}{(\Delta l)^2} \tag{3.51}$$

となって、モードの周波数 ω_i に依らない。また、質量 m で換算質量 m_i を規格化したものを換算質量係数 α_i と呼ぶ。

$$\alpha_i \equiv \frac{m_i}{m} = \frac{\rho \int_V |u|^2 dV}{m(\Delta l)^2} \tag{3.52}$$

この換算質量係数 α_i は、鏡の高さと直径の比 (アスペクト比)、鏡の半径とビーム半径の比とポアソン比にのみ依存する [8]。

3.2.2 全熱雑音

鏡の損失が Structure Damping Model に従うとし、各モード i の Q 値を Q_i とする。その全熱雑音 G_{mirror} は換算質量 m_i を用いて、

$$G_{\mathrm{mirror}}(f) = \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{\omega} \sum_i \frac{1}{m_i Q_i} \frac{\omega_i^2}{(\omega^2 - \omega_i^2)^2 + \omega_i^4/Q^2} \tag{3.53}$$

$$\sim \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{\omega} \sum_i \frac{1}{m_i \omega_i^2 Q_i} \tag{3.54}$$

$$= \frac{4k_{\mathrm{B}}T}{m\omega} \sum_i \frac{1}{\alpha_i \omega_i^2 Q_i} \tag{3.55}$$

となる。ただし、観測帯域 ($\sim$ 300Hz) が鏡の共振周波数 ($>$ 10kHz) よりも十分低いという近似を用いた。ここで、共振周波数 ω_i はヤング率を E として、$\sqrt{E/\rho}$ に比例するとしてよいだろう。そのため、円柱の大きさが決まっていれば、ヤング率 E と Q 値に反比例して熱雑音は小さくなり、密度にはよらない。

[7] ミスセンタリングという。この場合、伸縮モード以外のモードの換算質量が有限になり、光路長変動に寄与してくるようになるが、そのレベルは大きくない。実際には、熱雑音よりも鏡の角度ゆれがミスセンタリングを通じて光路長変動に寄与する効果の方が感度に関して厳しい要求を与える [8]。

[8] もしくは、弾性エネルギーを用いても同じ。このとき、

$$U = \int_V \left(\frac{1}{2}\lambda \varepsilon_{ll}^2 + \mu \varepsilon_{ik}\varepsilon_{ik}\right) dV \tag{3.48}$$

ここで、λ, μ は Lame の弾性定数、ε_{ik} は各歪み成分。

3.2.3 鏡の熱雑音低減のための方策

式 (3.55) より、鏡の熱雑音低減のためには、

- 鏡の温度 T を下げる。
- ヤング率 E の高い材質を選択する。
- 鏡の大きさを変える。
- 鏡の Q 値を上げる。

などの対策をとることができると考えられる。

真空中において鏡を冷却するのには、困難が伴う。また、温度 T を常に 1 桁下げておくことは、その装置の規模と長期にわたるメンテナンスが必要である。そのため、現在では、温度を下げることは現実的でない[9]。

同じ鏡のサイズであれば、ヤング率が高いと共振周波数が上がり、熱雑音が下がる。サファイアはヤング率が高い材質として知られている。溶融石英と比較すると、同じ Q 値の場合でも、倍以上熱雑音振幅が下がる。しかし、現在のところ、複屈折を示すサファイアを干渉計に用いることはできない。この他に、優れた光学特性を示す、ヤング率の高い材質は開発されていない。そのため、ヤング率を大きくすることは、熱雑音の低減にはなりにくい。

鏡の大きさを変えると、質量、換算質量係数、共振周波数が変化し、熱雑音の大きさも変わる。TAMA の鏡の大きさは熱雑音に対して、ほぼ最適化されてしまっていることが計算されている [8]。従って、現在の鏡の大きさを変えることも熱雑音の低減にはつながらない。

しかし、鏡の Q 値を現在よりも高くすることは、実現可能であると考えられている。同じ試料でも懸架法によって、Q 値は大きく変化する。また、同じ材質でも、成分や、製法、表面状態等によって Q 値が異なってくる。そのため、低損失の鏡材料を用い、懸架による損失を抑え、高い Q 値を示す懸架鏡を実現することが、熱雑音低減のための方策となる。

3.2.4 鏡の振動モード計算と要求される鏡の Q 値

換算質量 m_i を求め、熱雑音を計算する際、鏡のモード形状 (変位 u) と共振周波数 ω_i を求めなければならない。これを考慮するには、円柱状の弾性体の固有振動を解析することが必要となる。

等方性弾性体に対する固有振動の解析でよい結果を与えているのは、Hutchinson の方法 [23] である[10]。この解の鏡面変位の z 成分 $u_z(r,\theta)$ のみ注目すると、

$$u_z(\theta) \propto \cos(n\theta) \tag{3.56}$$

という依存性があることが分かる。n は Order といわれる量子数で、$n = 0, 1, 2...$。この依存性を考慮すると、$n > 0$ なるモードに対しては、式 (3.47) は 0 になることが分かる。従って、換算質量 α_i は発散しこのモードは熱雑音に寄与しない。ビームが中心に当たっている限り問題となるのは、Order $n = 0$ モード (これを伸縮モードと呼ぶ) である。

この方法で計算される共振周波数とモード形状から熱雑音の見積もりがなされている。逆に、目標とすべき感度から、鏡の Q 値に対する要求も計算される。TAMA300 の Phase II の目標感度は、$h_{\rm rms} = 3 \times 10^{-21}$ である。この感度の達成のためには、鏡の Q 値が全モードについて、2×10^7 以上必要である[11]ことがわかる [8]。しかし、この Q 値は実現することができていない。TAMA300 に導入されるのと同種の溶融石英鏡を懸架した際に測定される Q 値は、高々1×10^6 である [25]。

[9]最近は、サファイア鏡をサファイアファイバーの熱伝導を用いて 20K まで冷却することに成功している [24]。サファイアの場合、ヤング率が高く、冷却により Q 値も高くなる効果もあるので、冷却は魅力的である。

[10]詳しくは、第 5 章で紹介する。なお、異方性弾性体の場合は補遺 B を参照のこと。

[11]ただし、振り子モードの Q 値も 5×10^5 以上必要である。

このため、検出器の感度が向上した際、鏡の熱雑音は深刻な問題となることが予想されている。従って、鏡の熱雑音の低減のための研究は重要となっている。

3.3　鏡の Q 値

実際の懸架鏡の Q 値は目標感度の達成のために不足していることに触れた。感度の達成のためには懸架鏡の Q 値を上げる必要がある。

そのためには、懸架鏡の Q 値を決めている損失が、どのような損失であるか、知っておかねばならない[12]。

3.3.1　Q 値を決める要因

一般に、実現される損失は、それに影響を与えている全ての損失の和で表せる。

$$\frac{1}{Q} = \sum_i \frac{1}{Q_i} \tag{3.57}$$

Q_i はさまざまな機構により決定される Q 値である。実現される Q 値は結局、最も小さい Q 値を持った機構で決定されてくることになる。

$$Q \sim \min[Q_i] \tag{3.58}$$

懸架鏡の場合で言うと、実現される Q 値 Q_{realized} は、鏡自体の機械損失 $Q_{\mathrm{mirror\ intrinsic}}$ と、それを支持 (懸架) することにより導入される損失 Q_{support} の主に二つで決まる。

$$\frac{1}{Q_{\mathrm{realized}}} = \frac{1}{Q_{\mathrm{mirror\ intrinsic}}} + \frac{1}{Q_{\mathrm{support}}} + \ldots \tag{3.59}$$

また、鏡自体の機械損失 $Q_{\mathrm{mirror\ intrinsic}}$ は、材質に固有の損失 $Q_{\mathrm{material\ intrinsic}}$ や、そのデザインや加工による損失 Q_{design} などで決定される。

$$\frac{1}{Q_{\mathrm{mirror\ intrinsic}}} = \frac{1}{Q_{\mathrm{material\ intrinsic}}} + \frac{1}{Q_{\mathrm{design}}} + \ldots \tag{3.60}$$

3.3.2　測定される Q 値とここでの実験

式 (3.59) によると、鏡自体の機械損失が小さい場合、それを支持 (懸架) することにより導入される損失が無視できなくなる事がわかる。そのため、これまでに、鏡自体の損失が直接測定された例はない。結果として、鏡材料に固有の損失の大きさも曖昧なままになっている。

しかし、鏡自体の損失を知っておくこと、そのような手法を確立しておくことは、以下の観点から重要である。

- 懸架した際に実現されうる、最小の損失を知る。それが、その鏡を用いた場合の原理的な検出器の感度の限界を与える。
- 支持により導入される損失の大きさを知る。鏡自体の損失を先に知っておくことで、損失を導入しない懸架法の開発も可能となる。
- 内部損失が小さい新しい材料を探索、開発する。

本論文の実験では、これまでの実験と異なり、鏡材料の機械損失を直接測定することを目的としている。

[12] それぞれの損失 (Q 値) の由来については第 4 章で考えることにする。

3.3.3 これまでの実験

他の大型計画でも、熱雑音の問題は将来の深刻な課題となることが予想されている。そのため、様々な Q 値の測定実験が行われてきた。本節では、その結果を概観し、ここでの実験との違いを明らかにすることにする。

材質に固有の損失を調べる研究

材質に固有の Q 値を知るため、ファイバー状の試料の横振動モードの Q 値の測定が数多く行われている [26, 27, 28]。軽いファイバー形状であれば、バルクのサンプルに比して、支持に伴う損失を小さくできると期待されるためである。

ファイバー形状の場合、熱弾性効果 (第 4 章参照) により Q 値が制限される可能性がある。これらの実験で測定された溶融石英の Q 値も、熱弾性効果かそれ以外の効果で制限されている。

溶融石英の表面の損失と熱弾性効果がファイバの損失を決めるという報告例もある [29]。そこでは、溶融石英の材質自体の Q 値を推定するために、測定結果を外挿している。

このように、ファイバー形状の場合にも、材質 (溶融石英) 自体の Q 値を直接測定することはできていない。鏡のようなバルクな形状の場合には、材質自体の Q 値を直接知ろうとする実験は行われていない。材質自体の Q 値は、以下に示すような様々な実験結果から、推定されているにとどまる。

懸架や支持による損失を抑える研究

高い Q 値を実現するため、なるべく試料に損失を導入しない懸架系や支持系を開発することも研究されている。

重力波検出器の鏡はワイヤによって懸架されることになっている。鏡の熱雑音の低減のためには、この懸架鏡の Q 値を高く保たねばならない。また、振り子の熱雑音も問題であるため、振り子の Q 値も高くなければならない。そのため、この二つを同時に実現する方法が探られている。最近注目されているのは、溶融石英ワイヤを溶融石英鏡の側面に溶着する方法である [30]。これは、検出器への導入を考えた実践的な方法である。しかし、溶着前の溶融石英の鏡自体の Q 値は測定されておらず、溶着によりどの程度損失が導入されているのかの評価は行えていない。

低損失試料の高い Q 値を測定する方法として、支持系を開発することも研究されている。文献 [31] の例では、支持系による損失は避けられないものとして、開発を行っている。支持系の共振周波数や損失を調整することで、支持による損失を抑えようとするものである。しかし、この系では、支持による損失は原理的に無視できない。測定された Q 値を評価するのに、材料自体の Q 値を仮定してしまっている。

懸架された材料の損失に関する研究

ワイヤ懸架による鏡の Q 値の測定も行われている [25, 32]。ワイヤ懸架を行った場合、振動モードが異なると、測定される Q 値が大きく異なる。また、実際の干渉計で用いられる制御用の磁石を鏡に接着すると、懸架鏡の Q 値は大きく低下する。大きさにもよるが、1 桁低下することも珍しくない。実際に干渉計に導入する際には、これらの付加的な損失について、さらに研究を行う必要がある。

懸架された溶融石英材料の多数の内部共振の Q 値を測定し、その最高値が材料で決まる Q 値であろうと推測している例もある [33]。その推測が正しいとすれば、溶融石英の Q 値を決めるのは、表面の損失であることが示唆される。しかし、そもそも懸架による損失が無視できないのでこのよ

うな判断を下すことは難しいと思われる。

このように、材質 (特に溶融石英) 自体で決まる Q 値を直接測定できた、という例はこれまでに報告されていない。様々な方法で、推定はなされている。

しかし、本論文で行われる実験は、材質自体の Q 値を直接測定することを最終的な目標としている。これまで曖昧であった内部損失の大きさを実測できること、熱雑音の研究にとっても応用範囲が広いことから、本実験には重要な意義がある。

測定されている Q 値の最高値

これまでのところ、測定された Q 値の最高値が、その試料自体の Q 値であろうと考えられている。測定される Q 値は材質自体の Q 値よりは高くなりえないからである。

本論文で用いる溶融石英、サファイア、シリコンについて報告されている Q 値の最高値を挙げておく。ただし同じ材質でも、その製法や種類、不純物や表面状態によって大きく Q 値は変化する。測定結果を比較する際には、この点に留意しておく必要がある。

- 溶融石英 : 溶融石英の Q 値の最高値は、円柱状の試料で 3×10^7 といわれている。これは、文献 [33] に引用されている、ロシアのグループによるものである。この文献 [33] では、1.86×10^7 という値を報告している。これは、各辺が 8.85cm,8.85cm,1.85cm の直方体をした、Corning 社の 7958 という溶融石英の 26.382kHz のモードでの測定結果である。直径 80μm のタングステンワイヤ 1 本で懸架して測定している。

- サファイア : V. B. Braginsky らが行った実験で得られている 3×10^8 が室温での Q 値の最高値として知られている [34]。このサファイアは、直径 44mm、長さ 137mm の円柱形である。円柱軸は a 軸を向いており、表面はダイヤモンド研磨の後、アニーリングなどを行って処理されている。これをシルクのワイヤ 1 本で懸架して測定している。

- シリコン : D. F. McGuigan らが行った結果がある [35]。このシリコンは、直径 10.6cm, 長さ 22.9cm の円柱形である。円柱軸が [111] 方向を向いており、平面は光の波長以下の荒さに研磨されている。直径 0.25mm のタングステンワイヤ 1 本で懸架している。Q 値の最高値として 3×10^7 を得ている。表面を化学研磨するとわずかに高くなって、5×10^7 となったという。これが、これまでの室温でのシリコンの Q 値の最高値であると思われる。

3.4　この章のまとめ

この章では、まず、揺動散逸定理を復習した。揺動散逸定理によると、有限の温度の熱浴に接している系では、系の損失に比例した揺動力が系に加わり、熱振動を生じる事が知られている。系の損失を表すパラメータとして、Q 値を紹介した。Q 値は共振周波数における散逸に反比例する無次元量として定義されている。

干渉計型重力波検出器の鏡の熱振動による雑音を鏡の熱雑音と呼ぶ。この計算のために、換算質量の概念を導入した。そして、懸架鏡の Q 値を高くすることが熱雑音の対策として効果的であることを示した。

懸架鏡の Q 値は、材質自体で決まる損失と、懸架などの支持に伴い導入される損失の二つの要因で決まる。これまで行われてきた鏡の Q 値に関する研究では、これら二つの損失の効果を分離することはできなかった。

これに対し、本論文の実験では、

- **鏡材料の機械損失を直接測定する。**

という立場に立つことにしている。これが可能になれば、鏡を懸架した際に実現されうる最小の損失を知る、支持により導入される損失の大きさを知る、内部損失の小さい新しい材料を探索する、というようなことが可能となる。

次章では、ここでは触れなかった、鏡の機械損失、少し一般化して、固体の機械損失の機構について紹介することにする。

第4章

固体の機械損失

前章では、鏡の損失を表すパラメータとして Q 値を導入した。しかし、その Q 値を決めている具体的な機構については考察してこなかった。そこで、この章では、固体における機械損失の機構として考えられている主要なものを紹介することにする [36, 37]。

ここでは、損失を以下の 3 つに分類する [34]。

- 材質に固有の損失：固体の性質そのものによって決まる損失。Material Intrinsic な Q 値を決定する要因である。
- 試料のデザインや加工による損失：固体内部の機構ではなく、その加工などによって決まる損失。鏡の場合は、この損失と材質に固有の損失から Mirror Intrinsic な Q 値が決まる。
- 測定系や環境による損失：試料の損失を測定する際に導入される損失。固体の機械損失ではない。

具体的な内容に入る前に、まず非弾性のモデルを紹介する。

4.1 弾性と非弾性

ひずみと応力が同時に起こり、それが比例関係にあるものを弾性と呼ぶ。この性質から外れているものを非弾性と呼ぶ[1]。非弾性のうち、ひずみと応力の対応が 1 対 1 であるものを粘弾性、そうでないものを静的ヒステリシス型非弾性と言う。粘弾性は、さらに、擬弾性、粘性、減衰共鳴の 3 つの型に分けることができる。固体の内部損失を考える際、擬弾性と粘性に関するモデルはよく現れるので、これらのモデルについて述べておくことにする。

4.1.1 擬弾性

擬弾性のモデルは図 4.1 で表される。k_1, k_2 はバネ定数、$d, d^{'}$ は変位、β は減衰を表す定数、F は外力である。ここで、

$$F = k_1 d + k_2(d - d^{'}),\ k_2(d - d^{'}) = \beta \dot{d}^{'} \tag{4.1}$$

が成り立っている。これらの式より、$d^{'}$ を消去すると、

$$F + \frac{\beta}{k_2}\dot{F} = (\beta + k_1)\left(d + \frac{\beta k_1}{\beta + k_1}\dot{d}\right) \tag{4.2}$$

[1]応力を除いたときにひずみが元に戻らない塑性を示す物質もあるがここでは考慮しない。

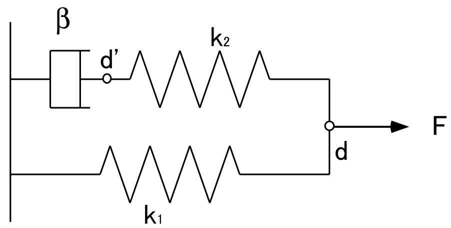

図 4.1: 擬弾性のモデル

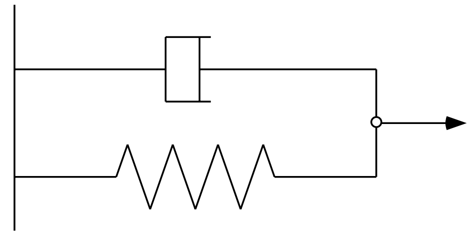

図 4.2: 粘性のモデル

となる。これと同様に、応力 σ、歪み ϵ として、

$$\sigma + \tau_\epsilon \dot{\sigma} = M_R(\epsilon + \tau_\sigma \dot{\epsilon}) \tag{4.3}$$

とおく。ステップ的な応力を加える、すなわち、初期条件を

$$\epsilon = \epsilon_0 \ (t = 0) \tag{4.4}$$

として、

$$\sigma = \sigma_0, \dot{\sigma} = 0 \ (t > 0) \tag{4.5}$$

なる応力を加える。このとき、解は、

$$\epsilon = \frac{1}{M_R}\sigma_0 + \left(\epsilon_0 - \frac{1}{M_R}\sigma_0\right) e^{-t/\tau_\sigma} \tag{4.6}$$

と書け、歪みは $t \to \infty$ で $\sigma_0/M_R(> \epsilon_0)$ に漸近していくことになる[2]。逆にステップ的な歪みを加えると、応力は、

$$\sigma = M_R\epsilon_0 + (\sigma_0 - M_R\epsilon_0)e^{-t/\tau_\epsilon} \tag{4.7}$$

と変化する。τ_σ、τ_ϵ はそれぞれ、応力が一定の場合、歪が一定の場合の緩和時間といえる。M_R は緩和の終わった後の弾性率で、relaxed modulus と呼ばれる。一方、早い変化の最中は、式 (4.3) より、

$$\tau_\epsilon \Delta\sigma = M_R \tau_\sigma \Delta\epsilon \tag{4.8}$$

$$M_U \equiv \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon} = M_R \frac{\tau_\sigma}{\tau_\epsilon} \tag{4.9}$$

これを unrelaxed modulus と呼ぶ。

今、振動的な応力が系に加わっているとする。歪みは応力よりも遅れるので位相差 δ を考慮して、

$$\tilde{\sigma} = \sigma_0 e^{i\omega t} \tag{4.10}$$

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)} \tag{4.11}$$

とおく。これを、最初の式 (4.3) に代入すると、

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\epsilon}} = \frac{1 + i\omega\tau_\sigma}{1 + i\omega\tau_\epsilon} M_R = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} e^{i\delta} \tag{4.12}$$

[2]後に見るように、式 (4.13) が内部で消費されるエネルギーに相当するので、$\tau_\sigma > \tau_\epsilon$ が必ず成立している。

となる。ゆえに、

$$\tan\delta = \frac{\omega(\tau_\sigma - \tau_\epsilon)}{1+\omega^2(\tau_\sigma\tau_\epsilon)} \sim \frac{1}{Q} \tag{4.13}$$

が成り立つ。さらに、

$$\tau = \sqrt{\tau_\sigma\tau_\epsilon},\ M = \sqrt{M_R M_U} \tag{4.14}$$

とおくと、

$$\tan\delta = \frac{M_U - M_R}{M}\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} \tag{4.15}$$

$$\sim \frac{M_U - M_R}{M_R}\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} \tag{4.16}$$

となる。ここで、緩和強度 Δ_M を定義する。

$$\Delta_M \equiv \frac{M_U - M_R}{M_R} = \frac{\tau_\sigma - \tau_\epsilon}{\tau_\epsilon} \tag{4.17}$$

Q 値は、$\omega = 1/\tau$ で最低値 $2/\Delta_M$ をとり、その低周波側で $1/\omega$ に、高周波側で ω に比例する。これが、擬弾性のモデルである。

4.1.2 粘性

粘性のモデルは、図 4.2 のようなモデルで、歪みと応力の間に、

$$\sigma = a\epsilon + b\dot{\epsilon} \tag{4.18}$$

の関係があるとするモデルである。擬弾性モデルの特別な場合と考えることができる。

時刻 $t = 0$ で、$\sigma = \sigma_0$ となるステップ的な応力を加えると、歪みは、

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{a}(1 - e^{-at/b}) \tag{4.19}$$

となる。$t = 0$ では $\epsilon = 0$ となる点が擬弾性モデルと異なる。

このとき、式 (4.10),(4.11) のような振動的な応力が加わっているとすると、先と同様にして、

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\epsilon}} = a + bi\omega \tag{4.20}$$

という応力と歪みの関係となる。これより、

$$\tan\delta = \frac{b\omega}{a} \tag{4.21}$$

となる。損失が周波数 ω に比例することが粘性モデルの大きな特徴である。

次に、固体の内部損失について具体的に見ていくことにする。

4.2 材料に固有の損失

材料の内部のみで決まる損失として、ここでは、熱弾性効果 (マクロスコピックな場合/ミクロスコピックな場合)、フォノン-フォノン相互作用、フォノン-電子相互作用、熱緩和、転位、点欠陥を紹介することにする。

4.2.1　熱弾性効果 (マクロスコピックな場合)

物体に温度分布を与えると、その物体は変形する。一方、物体に変形を加えると温度分布が生じる。これは熱伝導によって緩和しようとするが、その際にさらに変形を及ぼす。この変形は瞬時には起こらず、有限の時間をもって行われる。加えた変形が振動的なものの場合、熱流によるひずみは加えている変形に対し位相が遅れるため、力学的な損失の原因となる。これが、熱弾性効果である。

熱弾性効果の特徴として以下のことがあげられる。

- ある周波数で損失が最大となる擬弾性型である。損失が最大となる周波数は、熱分布のサイズと熱拡散係数で決まる。サイズが小さいほど高周波側に移動する[3]。
- 熱分布のサイズによって、マクロスコピック (体積変形による熱流) な効果か、ミクロスコピック (多結晶であればその粒子間の熱流) な効果の主に二つが考えられる。
- (マクロスコピックな場合) モード依存性をもつ。

この効果は重要であるので、簡単に導入をしておく。

歪み ϵ は、応力 σ の他に、温度 T によるとする。等温弾性率を M_T、線膨張率を α、平衡からのずれを ΔT として、

$$\epsilon = \frac{1}{M_T}\sigma + \alpha\Delta T \tag{4.22}$$

という関係にある。温度が変化し、歪が変化しないとき、普通の緩和方程式に従う。

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\frac{\Delta T}{\tau_\epsilon} \tag{4.23}$$

逆に、断熱的に歪を加えて引っ張ると温度が下がるので、

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\gamma\dot{\epsilon} \tag{4.24}$$

ただし[4]、

$$\gamma = \left(\frac{\partial T}{\partial \epsilon}\right)_S \tag{4.25}$$

これら二つの効果を考え合わせると、

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\frac{\Delta T}{\tau_\epsilon} - \gamma\dot{\epsilon} \tag{4.26}$$

と書ける。これを歪みの式 (4.22) に入れて整理すると、

$$\sigma + \tau_\epsilon\dot{\sigma} = M_T[\epsilon + (1+\gamma\alpha)\tau_\epsilon\dot{\epsilon}] \tag{4.27}$$

となるので、擬弾性型とわかる。緩和強度 Δ は、熱力学の関係式から、C_V を単位質量あたりの定圧比熱とすると、

$$\Delta = \alpha\gamma = \frac{M_T T\alpha^2}{\rho C_V} \tag{4.28}$$

となるのが示される[5]。また、D を熱拡散係数、d を熱が移動する距離とすると、

$$\tau \sim \frac{d^2}{D} \tag{4.29}$$

[3] ただし、系の波長に比して熱の移動するサイズが十分小さい場合。
[4] エントロピーを S として、断熱条件、$dS = dQ/T = 0$
[5] 証明略。詳細は [37] など。

ただし、熱拡散係数 D、単位質量あたりの定圧比熱 C_P、熱伝導率 κ の間には、

$$D = \frac{\kappa}{C_P \rho} \tag{4.30}$$

という関係がある。

- まず、棒の縦振動のときを考える。半波長ごとに膨張、圧縮により生じる温度変化の勾配が 0 となるので、

$$d \sim \frac{\lambda}{2} \tag{4.31}$$

とおける。従って、v を音速とすれば、緩和時間 τ は、

$$\tau = \frac{1}{2\pi f} \sim \frac{\lambda^2}{4D} = \frac{1}{4D}\left(\frac{v}{f}\right)^2 \tag{4.32}$$

と書ける。結局、損失が最大となる周波数は、

$$f \sim \frac{\pi v^2}{2D} \tag{4.33}$$

となる。また、この場合[6]、C を単位質量あたりの比熱として、

$$\tan\delta = \Delta\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} \sim \Delta\frac{D\omega}{\pi^2 v^2} \sim \frac{\kappa T \alpha^2 \omega}{\pi^2 \rho C^2} \tag{4.34}$$

となる[7]。これより、熱弾性効果が室温で制限する Q 値を考えると、サファイアの場合、

$$Q_{\mathrm{thermo}} \sim 1.4 \times 10^{11} \left(\frac{f}{50\mathrm{kHz}}\right)^{-1} \left(\frac{T}{300\mathrm{K}}\right)^{-1} \tag{4.36}$$

溶融石英の場合、

$$Q_{\mathrm{thermo}} \sim 3.4 \times 10^{14} \left(\frac{f}{50\mathrm{kHz}}\right)^{-1} \left(\frac{T}{300\mathrm{K}}\right)^{-1} \tag{4.37}$$

シリコンの場合、

$$Q_{\mathrm{thermo}} \sim 8.7 \times 10^{10} \left(\frac{f}{50\mathrm{kHz}}\right)^{-1} \left(\frac{T}{300\mathrm{K}}\right)^{-1} \tag{4.38}$$

となる。これらは、非常に高い Q 値であり、棒の縦振動におけるマクロな熱弾性効果は高周波でなければ支配的でない。また、ねじれ振動は体積変化を伴わないので、マクロな熱弾性効果は生じない。

- 板の横振動の場合を考える。厚さ d の板の場合、$d \ll \lambda$ で、損失が最大となる周波数は、

$$f = \frac{\pi D}{2d^2} \tag{4.39}$$

である。

---

[6] $C = C_P \sim C_V, M_T \sim E, v^2 \sim E/\rho$ などを使う。E はヤング率。

[7] 式 (4.34) は、正確には、

$$\frac{1}{Q_{\mathrm{thermo}}} = \frac{\kappa T \alpha^2 \omega}{9\rho C^2} \tag{4.35}$$

となる [14]。

物理量	溶融石英	シリコン	サファイア	単位
E	7.24	13	47	10^{10}[Pa]
α	0.51	2.6	6.6	[K^{-1}]
C	7.72	7.14	7.9	10^2[J/Kg/K]
ρ	2203	2350	3980	[kg/m^3]
κ	1.4	156	40	[W/m/K]
$D = \kappa/C/\rho$	8.2	930	127	10^{-7}[m^2/s]
Δ	3.3	160	2000	10^{-6} @300K

表 4.1: 熱弾性の計算に必要な物理定数の概数。文献 [34, 40] 等より。

- 半径 a の棒の場合。損失が最大となる周波数は、

$$f = 2.16\frac{D}{(2a)^2} \tag{4.40}$$

  である。これらは、Zener により示されている [38, 39]。

  これらの場合、熱の移動するサイズが波長よりも十分短い。式 (4.13) の形がそのまま使われていることが多い。ワイヤや板バネの Q 値はこれで制限される様子が観察されることがある。

熱弾性の計算に必要な物理定数は表 4.1 にまとめた。

4.2.2　熱弾性効果 (ミクロスコピックな場合-結晶粒子間の熱伝導-)

多結晶、もしくは乱れた結晶に外部から方向性のある応力が加わる場合を考える。結晶の弾性の異方性のため、結晶粒子の方向によって伸びや温度上昇が異なる。そのため、粒子間のミクロな熱伝導が生じる。これによって、結晶粒子間のミクロな熱弾性効果が生じる。

実際に、金属多結晶において、結晶粒界の大きさを変えたときに、内部摩擦のピークの位置がそれに応じて変化することが確認されている。

この場合、熱の移動する距離として、粒子直径 d 程度を取ればよい。

$$f \sim \frac{D}{d^2} \tag{4.41}$$

たとえば、$d = 0.01$cm、$D = 1.2(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$(アルミニウムの場合) とすれば、$f \sim 10$kHz ほどのオーダーとなる。

金属の場合、この金属粒子間の熱伝導が室温での損失の支配的な原因であると言われており [41]、金属を使ったねじれ共振型重力波検出器では、この効果が確かめられている [42]。

4.2.3　フォノン-フォノン相互作用

結晶においては、音波が結晶格子を揺さぶることにより、フォノンの平衡分布が変化する。この平衡からずれた分布が平衡に達するのに有限な緩和時間を持つために、損失の原因となる。これは粘性型の緩和である。歪みによるフォノンの平衡分布の変化はグリュナイゼン定数 γ と呼ばれる定数で表現することが多い。この定数は、結晶格子の変形によって生じるポテンシャルエネルギーの変化の、結晶格子の変形の 3 次以上の項によって与えられる定数である。

この効果によって与えられる Q 値は、

$$\frac{1}{Q_{\mathrm{Ph-Ph}}} \sim \frac{2CT\gamma^2\omega\tau}{3v^2} \sim \frac{2\kappa T\gamma^2\rho}{E^2}\omega \tag{4.42}$$

である [37]。τ はフォノンの緩和時間で、熱伝導率 κ と、

$$\kappa \sim \frac{1}{3}Cv^2\tau \tag{4.43}$$

の関係にある。γ は物質によるが、1 より大きい程度の量である。これを 1 として、適当なパラメータを入れて概算すると、フォノン-フォノン相互作用が制限する Q 値は、サファイアの場合、

$$Q_{\mathrm{Ph-Ph}} \sim 6\times10^9\left(\frac{f}{50\mathrm{kHz}}\right)^{-1}\left(\frac{T}{300\mathrm{K}}\right)^{-1} \tag{4.44}$$

シリコンの場合、

$$Q_{\mathrm{Ph-Ph}} \sim 2\times10^8\left(\frac{f}{50\mathrm{kHz}}\right)^{-1}\left(\frac{T}{300\mathrm{K}}\right)^{-1} \tag{4.45}$$

となる。

これは概算であるが、文献 [34] ではサファイアの場合について、フォノン-フォノン相互作用が制限する Q について計算している。室温では 1×10^{10} 程度でこの効果は見えないが、10K-100K では、これが測定される Q 値を制限しているという。

4.2.4 フォノン-電子相互作用

金属中を音波が進行するとき、陽イオンの振動を引き起こす。これにより、振動電場が生じ、電子電流が発生する。この電流が電場よりも遅れて生じることによる、電気的なエネルギーの損失が、吸収の原因となる。これも粘性型の緩和である。

あるモデルによれば、これが制限する Q 値は、

$$\frac{1}{Q_{\mathrm{Ph-e}}} = \frac{8}{15}\frac{\epsilon_F m_e \sigma}{\rho v^2 e^2}\omega \tag{4.46}$$

となる [37]。ただし、ϵ_F はフェルミエネルギー、m_e は電子質量、σ は電気伝導度である。

これは、金属において低温で観測されることがある。たとえばアルミニウムではこの効果が制限する Q 値は、室温で 2×10^8、4K で 1×10^6 となる。高温では、この効果は効かないが、低温では典型的なアルミニウムの共振型検出器の Q 値の測定結果 [43] 程度になっている[8]。

4.2.5 熱緩和現象

固体の音波の吸収機構として、熱緩和現象[9]といわれる機構がある。ここでは溶融石英の熱緩和について簡単に述べる。

溶融石英の内部摩擦に関しては、Fraser らが古くから実験を行っていた [44]。溶融石英の超音波吸収は、低温 (50°K) で幅の広い大きなピークを持っている。温度を変えて損失を測定した場合、室温の損失もこのピークのすそにあるように見える。これは、溶融石英中の Si-O-Si 結合の中で、酸素原子の位置が変わるための緩和現象であるといわれている。ガラス状の物質の中では、融点より十分低い温度においても原子や原子団の再配置が起こると考えられている。O. L. Anderson らは、Si-O-Si 結合が直線ではなく、酸素原子のとりうる安定な配置が Si-Si を結ぶ線の両側に 2 つあるものと考えた。熱振動の結果、酸素原子は両方の安定な位置の間を移動することができる。超音波による応力が加わると、二つの状態のうち片方はエネルギーが上がり、他方はエネルギーが下がって、両者の間にある緩和時間で緩和がおき、これが損失の原因になるとしている。

[8]ただし、5056 と呼ばれるアルミニウム合金 (Mn:0.12%,Mg:5.1%,Cr:0.12%) は低温では 1×10^7 を超える。
[9]熱緩和というと広義には多くの現象を含んでしまうが、ここではこれに限定する。

P. W. Anderson らは、トンネル効果によって二つの状態が遷移するとして、低温での溶融石英の損失の説明を与えている [45]。Tielbürger らは、この考えを拡張して、室温付近での周波数によらない一定の損失を説明している [46]。

4.2.6　転位

結晶では、結晶転位の外部応力による振動が、内部摩擦の主要な原因であろうと考えられている。小振幅では振幅にはよらず、周波数に依存する内部摩擦[10]を生じる。MHz 程度の高周波ではこの現象はよく知られていた。

この現象の説明は、Granato-Lücke による理論 [47] で説明される。転位の線が音波による応力を受けて、弦に似た振動を行うと仮定するものである。結晶中の転位線は不純物原子や他の転位との接合点でところどころ”ピン止め”されているとする。外力が加わると、この間の転位線は自由に振動する。このとき、応力が小さければ”ピン止め”は外れないとするものである。転位線の運動に対する抵抗が存在するために、損失が発生する。この理論は、放射線を結晶に照射して、点欠陥を増加させて転位の”ピン止め”状態を増して内部損失を比較することによって確認されている。

このとき、低周波 (MHz 以下) では、損失は転位の密度と転位線の長さ (の 4 乗) と周波数に比例するはずである。J. L. Routbort らは、アルミニウムや銅などについて低周波で同じ放射線照射の実験を行った [48]。しかし、低周波では一定のバックグラウンドとなる内部損失は残った。そこで、G-L 理論は低周波では正しくなく、別の過程があるのであろうと推測している。このようなバックグラウンドの周波数によらない損失に関しては、よいモデルが存在しないと考えていた。P. R. Saulson も [15] の中でこの文献を引用し、周波数によらない損失 (Structure Damping) を説明できる簡単なモデルはないと述べている。

4.2.7　点欠陥

音波による応力で点欠陥 (不純物原子など) が移動し、有限の緩和時間をもって他の平衡分布に移行することによって生じる損失がある。これは擬弾性型の損失である。

最も有名なのが Snoek ピークである。炭素を含む鉄の内部摩擦を温度の関数として測定すると、低い周波数 (1Hz 程度) のときに 40C° でピークが現れる [40]。通常、不純物の原子はエネルギー的に等価な 3 種の八面体格子間位置を等間隔で占めている。応力が加わると、3 種の位置の安定性が相対的に変化して不純物原子の再配列がおきる。そのため、周期的応力の元で内部損失のピークを生じる。このピークは、工業的にも鉄の中の炭素、窒素の定量に使われている。低濃度 (1% 以下) の不純物でも現れるのが特徴である。

置換型の合金でも同じようなピークが現れ、Zenner ピークと呼ばれている。これは高い濃度 (10% 程度) の他原子が存在するときに、同様の理由で生じる。多くの場合は、400C° 程度の高温でいろいろな格子の合金において観察されている。

金属の場合、低温にした場合も転位や点欠陥による内部摩擦のピークが生じる。低温の共振型検出器においては、それらのピークの原因を探ることも研究の一つとなっている [49]。

4.3　固体のデザインや加工による損失

固体のデザインや加工に伴って導入される損失が存在する。表面損失、表面の凹凸による散乱、モードカップリングについて紹介する。

[10] 減衰共鳴型。

4.3.1 表面損失

結晶の場合、切断や研磨等の加工に伴う、多結晶体からなる層と転位密度の増加している層が、表面付近にできている。溶融石英などの非結晶物質の場合にも、研磨などの過程でミクロなクラックやゲル状の化合物が生成すると考えられている。また、溶融石英の場合、水分子の吸着によって損失が増加するといわれている。

結晶の場合

結晶の場合は、表面の多結晶層がミクロな熱弾性効果を起こし、損失の原因となる。多結晶の典型的な大きさを a とすれば、熱の拡散にかかる時間は $\tau = a^2/D$ 程度である。この層が持つ Q 値は、式 (4.28) などから、

$$\frac{1}{Q} = \frac{ET\alpha^2}{\rho C}\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} \tag{4.47}$$

と計算される。この表面層の厚さを h とする。変形が各部で一様であるとすると、表面層の体積と全体積の比でから、表面損失で制限される Q 値が計算される。例えば、直径 d、高さ l の円柱なら、

$$\frac{1}{Q_{\mathrm{surf}}} = 4h\left(\frac{1}{2l}+\frac{1}{d}\right)\frac{ET\alpha^2}{\rho C}\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} \tag{4.48}$$

となる。これが表面の熱弾性効果が制限する Q 値である [24]。

典型的な値 [34] として、ダメージ層の厚さ h を 10^{-4}m、結晶粒のサイズ a を 10^{-6}m としてみる。また、TAMA の鏡のサイズを仮定する。このとき、50kHz においては、サファイアの場合、

$$Q_{\mathrm{surf}} \sim 3\times 10^6 \left(\frac{f}{50\mathrm{kHz}}\right)^{-1}\left(\frac{T}{300\mathrm{K}}\right)^{-1} \tag{4.49}$$

となって、線膨張率 α が室温で大きいため[11]に低い Q 値となる。シリコンでは、

$$Q_{\mathrm{surf}} \sim 1\times 10^8 \left(\frac{f}{50\mathrm{kHz}}\right)^{-1}\left(\frac{T}{300\mathrm{K}}\right)^{-1} \tag{4.50}$$

となる。ただし、これらの値は、h, a のパラメータに敏感であり、モード形状などは一切考慮していないことに注意する必要がある。

非結晶の場合

溶融石英について、ダメージ層の効果がいくつかの実験で示唆されている。表面のエッチングで Q 値が改善されている例もあるという。

Startin は、溶融石英の Q 値の測定を行い、表面の損失が Q 値を制限していると仮定して実験結果を評価している [33]。平面を研磨する際にはダメージ層は表面に残らないこと、円筒面を研磨する際にはダメージ層が残ることを示唆している。

Gretarsson らも、溶融石英ファイバーについて Q 値の測定を行い、表面層の効果を評価している [29]。ダメージ層の深さを適当に仮定 (1μm) することで、表面での損失は、バルク部よりも 3 桁悪いと見積もっている。

[11] 低温 (4k) では、$4\times 10^{-11}[\mathrm{K}^{-1}]$ と小さくなるので、この効果は急激に減少する。

4.3.2　表面の凹凸による散乱

結晶の表面に凹凸があると、音波が散乱され損失の原因となる。

簡単のために、長さ L の振動子中を波長 λ の定在波が端面で反射されて存在しているとする [50]。表面の凹凸のスケールを a で代表させる。一回の端面での反射の際の位相の乱れのオーダーは

$$\delta\phi \sim \frac{a}{\lambda} \tag{4.51}$$

ランダムな過程を考えると、N 回反射後には、

$$\delta\phi_N \sim \sqrt{N}\frac{a}{\lambda} \tag{4.52}$$

程度の乱れを生じる。

$$\delta\phi_N \sim \pi \tag{4.53}$$

となると互いに打ち消しあって、減衰が生じると考えられる。振幅が $1/e$ となるまでに波は $N \sim Q/\pi$ 回振動すると考えられ、

$$Q \sim \pi^3 \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \tag{4.54}$$

となる。縦振動なら、$\lambda = 2L$ としてよく、

$$Q \sim \pi^3 \left(\frac{2L}{a}\right)^2 \tag{4.55}$$

となる。典型的な値を入れると、

$$Q \sim 10^{10} \left(\frac{L}{0.1\mathrm{m}}\right)^2 \left(\frac{a}{10^{-5}\mathrm{m}}\right)^{-2} \tag{4.56}$$

程度の高い値となる。

4.3.3　モードカップリング

弾性体振動子において、各モードが完全に独立であれば、モード展開を行うことができる。つまり、多くの調和振動子の重ね合わせとして全運動を表現することができる。しかし、実際の系では、各モードが独立でないことがある。この場合、一つのモードから他のモードへエネルギーが移行し、損失の原因となる。各モードが独立でないことをモードカップリングという。

モードカップリングを誘起するものとしては、第 3 章で述べたような空間的に非一様な損失、結晶の異方性などがある。モードカップリングによるエネルギー損失 (Q 値の低下) の解析は一般には難しいが、文献 [51] に回路によるモデル化を行い解析している例がある。そこでは、鏡に取り付けたスタンドオフが周波数の接近しているモード間のカップリングをもたらしたという。Q 値への影響が実際に観測されている。また、結晶の振動モードは単純な基底関数の線形結合で表すことができないので、これが振動モード間のカップリングを誘起する場合もある [34] という。

4.4　測定系や環境による損失

試料自体で決まっている損失が実際に実現できるかは、測定系や環境によっている。固体における機械損失ではないが、この損失についても簡単に述べておく。

4.4.1 支持による損失

低損失の材質の Q 値を測定する場合、または、その低損失の特徴を生かそうとする場合、支持に伴い導入される損失を抑えなければならない。これまでの低損失材料の Q 値の測定結果は、多くの場合、支持による損失で制限されている。

通常、支持部の共振周波数は試料の共振周波数を避けて設計される。また、振動モードの変位の小さな個所で支持することが望ましい。

第 3 章の最後に紹介したように、干渉計型検出器の鏡の場合も、懸架による損失の導入は問題となっている。共振型検出器の振動子の場合も、支持に伴う損失の導入は問題となっていた。

本論文の実験では、この、支持に伴う損失を導入することのない支持法を採用している。

4.4.2 残留ガス (音響輻射) による損失

残留ガスの分子が試料に衝突することも、損失の原因となる。そのため、高い Q 値が問題になるときには真空中で実験が行われる。

この効果について、簡単に見積もりをしてみる。大気の粘性は無視できるとする。分子数密度が n であるとする。質量 m、面積 S の板が、自乗平均速度 $\bar{v}^2$ で振動しているとすると、時間あたり、$S\bar{v}^2 n$ 個の分子 (質量 m_{mol}) に衝突することになる。おのおのの分子は、音速 v_s をもって飛んでいくとすると、単位時間あたりに周囲に与えられるパワー P は、

$$P \sim S\bar{v}^2 n m_{\mathrm{mol}} v_s \tag{4.57}$$

となる。振動子のエネルギー E_{vib} は、単位時間あたり、

$$\frac{E_{\mathrm{vib}}}{(Q/\omega_0)} \tag{4.58}$$

で失われる。両者を等しいとすると、残留ガスによる Q 値 Q_{gas} は、

$$Q_{\mathrm{gas}} = \frac{E_{\mathrm{vib}}\omega_0}{S\bar{v}^2 n m_{\mathrm{mol}} v_s} \tag{4.59}$$

となる。$E_{\mathrm{vib}} \sim m\bar{v}^2, m_{\mathrm{mol}} v_s^2 = k_{\mathrm{B}} T$ などを用いて、

$$Q_{\mathrm{gas}} \sim \frac{h\rho\omega_0}{n\sqrt{m_{\mathrm{mol}} k_{\mathrm{B}} T}} \tag{4.60}$$

とできる。ただし、板の体積を V として、$V/S \sim h$ とした。実際には、形状に応じた定数 C を用いて、

$$Q_{\mathrm{gas}} = \frac{Ch\rho\omega_0}{n\sqrt{m_{\mathrm{mol}} k_{\mathrm{B}} T}} \tag{4.61}$$

などと表現する [15]。$C = 1$ などとして適当なパラメータ、TAMA300 で使われる鏡の大きさを仮定すると、圧力 P(Torr) のとき、

$$Q_{\mathrm{gas}} \sim 1 \times 10^{12} \left(\frac{10^{-4}}{P \text{ Torr}} \right) \tag{4.62}$$

となる。10^{-4}Torr 程度の真空度を実現することは容易である。その真空度が実現できれば、残留ガスによる損失の効果は考慮しなくてもよい。

4.4.3　その他の損失

干渉計型検出器の鏡には磁石やスタンドオフが貼り付けられるので、これらは損失の原因となる。また、鏡のコーティングなども問題になる可能性がある。

また、電場、磁場が関係する場合も損失の原因となる。特に、共振型検出器において静電型トランスデューサを用いた場合、その電気-機械結合系により導入される損失が無視できないのはよく知られている。

振り子の場合はリコイルによる損失なども問題となる。

4.5　この章のまとめ

この章では、測定される Q 値を決める機構として、材料に固有の損失、固体のデザインや加工による損失、測定系や環境による損失、という 3 つの分類を用いて損失を紹介した。

本論文の実験で用いられる鏡材料、溶融石英、シリコン、サファイアに注目する。これら鏡自体の Q 値を決定する可能性のある機構として、以下のものが考えられる。

- 溶融石英：熱緩和現象、表面損失
- シリコン：フォノン-フォノン相互作用、転位、表面損失
- サファイア：転位、表面損失

ただし、測定系や環境による損失は除外している。表面の損失がいずれの材料においても損失を決める可能性があることには留意しておく必要がある。

実際の試料では、様々なスケールの現象が、温度や周波数などの関数として生じている。そのため、損失を決めているのがどのような機構であるのか、判断するのは一般には難しい。

特に、低損失材料の場合には、支持系による損失が支配的となり、試料内部で起きている損失に関する情報を得ることが難しかった。本論文では、支持による損失が無視できる測定法を提案している。この測定法によれば、低損失材料の内部損失に関して新たな情報を得ることができるのではないかと期待される。

第5章

有限要素法による振動モード解析

鏡材料のQ値の測定実験の際に、その材料の振動モードを計算によって知っておくことは以下の観点から重要である。

- 支持部での変位を知る必要性：低損失の材料の場合、測定されるQ値は支持による損失により決まってくる。そのため、支持部での変位を知らねばならない。特に、本論文の実験では、円柱の試料の中心での変位を知ることが重要となる。

- モードの形を知る必要性：機械損失の原因を支持部以外に求める場合、そのモードの形状を知らねばならない。

また、全ての内部共振の周波数を知る必要性も生じた。本論文で行う実験では、共振の周波数のみが、計算との対応を取る手段となるためである。実験で検出される内部共振が、どの振動モードなのかを知るには、計算と実験の周波数が1対1に対応していなければならない。

そのため、ここでは、実験に先立ち、鏡材料の振動モードの解析を行うことにした。

ここで解析を行うのは、TAMA300で用いるような鏡の形状で、アスペクト比[1]が1に近い円柱状の弾性体である。このような弾性体内の運動方程式は、解析的な解を得ることが難しいことで知られている。

溶融石英のような等方性の弾性体の場合には、Hutchinsonの考案した、半解析的な手法が適用できる[23]。一部の境界条件を満たす基底関数の波数の低いものを適当に選び、残りの境界条件を満たすようにそれらの係数を定めていくものである。しかし、単結晶シリコンや単結晶サファイアのような異方性弾性体では、このような手法は知られていない。異方性弾性体では、円柱座標で基底関数を簡単に記述することができないからである。

解析的手法が困難であるとなると、数値的手法に頼ることになる。ここでは、有限要素法[2]を用いた弾性体の振動モード解析を行った。有限要素法では等方性弾性体はもとより、異方性弾性体の振動モードも解析可能である。これまでは、このような問題に対する有限要素法の解は10%程度の誤差を持っていた。そのため、モードの同定に用いることはできず、測定されるQ値をそのモード形状から解析することもできなかった。しかし、ここでは、有限要素モデルを改善することで、興味のある周波数範囲で数%に満たない誤差で共振周波数を求めることができた。そして、計算結果は実験結果を解析するのに十分なものとなった。

ここでは、異方性物質として結晶を考える。まず、結晶における弾性波を考え、それが複雑な性質を持つことを述べる。次に、等方体の場合には解析解や半解析解が存在することを見る。続いて、ここで用いた有限要素モデルについて紹介し、計算結果、後の実験との対応について論ずる。

---

[1] ここでは、アスペクト比を、円柱の高さを直径で割ったものと定義している。TAMAの鏡の場合、0.6。
[2] Finite Element Method (FEM).

なお、結晶の弾性定数の定義については補遺 A を参照のこと。

5.1　結晶中の弾性波

まず、結晶中の弾性波が等方体の弾性波と異なる複雑な性質をもつことを示す。

立方晶系の場合を例にとる。弾性体の運動方程式は、直交座標系で以下のように書ける [36]。

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{44}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + (c_{12}+c_{44})\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) \tag{5.1}$$

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c_{44}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + (c_{12}+c_{44})\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right) \tag{5.2}$$

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c_{44}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + (c_{12}+c_{44})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}\right) \tag{5.3}$$

今、結晶中の変位$\boldsymbol{u}(u,v,w)$ が平面波、

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\exp(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{5.4}$$

で表せるとする。$\boldsymbol{A}(A_1,A_2,A_3)$ は偏極ベクトル、ω は角周波数、$\boldsymbol{k}(k_1,k_2,k_3)$ は波数ベクトル、$\boldsymbol{r}(x,y,z)$ は位置ベクトルである。式 (5.1)-(5.3) にこれらを代入すると、A_1,A_2,A_3 のすべてが 0 にならず、波が存在するためには、

$$\left\|\begin{array}{ccc} (c_{11}-c_{44})k_1^2+c_{44}k^2-\rho\omega^2 & (c_{12}+c_{44})k_1k_2 & (c_{12}+c_{44})k_1k_3 \\ (c_{12}+c_{44})k_1k_2 & (c_{11}-c_{44})k_2^2+c_{44}k^2-\rho\omega^2 & (c_{12}+c_{44})k_2k_3 \\ (c_{12}+c_{44})k_1k_3 & (c_{12}+c_{44})k_2k_3 & (c_{11}-c_{44})k_3^2+c_{44}k^2-\rho\omega^2 \end{array}\right\| = 0 \tag{5.5}$$

が成立している必要がある。これを永年方程式と呼ぶ。ただし、

$$k = \sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2} \tag{5.6}$$

である。この永年方程式では、ある 1 つの$\boldsymbol{k}(k_1,k_2,k_3)$ を与えると、3 つの $\omega(>0)$ が得られることになり、ひとつの方向に対して、異なった角振動数を持つ 3 つの波が一般には存在することになる。

対称性のよい方向に波が伝播する場合は、その解は簡単に示される。例として [111] 方向に伝わる波を考えれば、

$$k_1 = k_2 = k_3 = \frac{k}{\sqrt{3}} \tag{5.7}$$

で、これを永年方程式に代入することで、3 つの解の組、

$$A_1 = A_2 = A_3 \tag{5.8}$$

$$\rho\omega^2 = \frac{1}{3}(c_{11}+2c_{12}+4c_{44})k^2 \tag{5.9}$$

および、

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0 \tag{5.10}$$

$$\rho\omega^2 = \frac{1}{3}(c_{11} - c_{12} + c_{44})k^2 \quad (\text{重根}) \tag{5.11}$$

を得る。従って、波の速さを $v = \omega/k$ とすれば、

$$v = \sqrt{\frac{c_{11} + 2c_{12} + 4c_{44}}{3\rho}} \tag{5.12}$$

の縦波と、

$$v = \sqrt{\frac{c_{11} - c_{12} + c_{44}}{3\rho}} \tag{5.13}$$

の二つの横波が存在する。横波の振動面は進行方向に垂直[3]である。

今、結晶の対称性のよい方向に波が伝播する場合を考えたが、一般の場合、永年方程式の解は非常に複雑である。まず、3 つの波の速度が方向によって異なってしまう。また、$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{k}$が平行、垂直というような関係が成立しない。従って、純粋な縦波、横波が存在しない。境界条件のない一般の場合の解は例えば、文献 [52] に与えられている。しかし、非常に煩雑であり、簡単な関数形ではない。このため、境界条件をつけた場合の結晶における弾性波を解析的に解いた例はほとんどない。

そこで、ここでは、異方性も考慮した鏡の振動モードの計算のために、解析的な手法はとらず、有限要素法という数値的手法をとることにした。

具体的な内容に入る前に、このような問題に対する解析解や半解析解の存在について見ておくことにする。

5.2 解析解、半解析解と数値解

今回計算を行うのは、アスペクト比が 1 に近い、円柱状弾性体の自由振動モードである。この計算を行う際の、問題の特徴や解き方などを述べる。解析解と半解析解は等方体に関しては与えられるので、それについて最初に述べておく。

5.2.1 解析解

弾性体の運動方程式を円柱座標系 (r, θ, z) で表現することを考える。

変位を (u_r, u_θ, u_z) とする。z 軸を先の直交座標系と共有し、x 軸は $\theta = 0$ の方向とする。応力 P、歪み ε をそれぞれ座標変換し、運動方程式を得る。等方性を仮定した場合は、文献 [53] を参考。ここでは、立方晶系の場合を記述する。

まず、歪み ε と応力 P の関係は、

$$\begin{pmatrix} P_{rr} \\ P_{\theta\theta} \\ P_{zz} \\ P_{\theta z} \\ P_{rz} \\ P_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & -C_{16} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

となる。ここで、

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r},\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{5.15}$$

[3] $A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 = 0$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{z},\ \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{u_z}{r},\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \tag{5.16}$$

である。また、

$$C_{11} = \frac{2\cos^2\theta\sin^2\theta(s_{11}+2s_{12})(2s_{11}-2s_{12}-s_{44}) + (s_{11}+s_{12})s_{44}}{(s_{11}-s_{12})(s_{11}+s_{12})s_{44}} \tag{5.17}$$

$$C_{12} = -\frac{2\cos^2\theta\sin^2\theta(s_{11}+2s_{12})(2s_{11}-2s_{12}-s_{44}) - s_{12}s_{44}}{(s_{11}-s_{12})(s_{11}+s_{12})s_{44}} \tag{5.18}$$

$$C_{13} = \frac{-s_{12}}{(s_{11}-s_{12})(s_{11}+2s_{12})} = c_{13} \tag{5.19}$$

$$C_{16} = \frac{2\cos\theta\sin(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(2s_{11}-2s_{12}-s_{44})}{(s_{11}-s_{12})s_{44}} \tag{5.20}$$

$$C_{33} = \frac{s_{11}+s_{12}}{(s_{11}-s_{12})(s_{11}+2s_{12})} = c_{33} \tag{5.21}$$

$$C_{44} = \frac{1}{s_{44}} = c_{44} \tag{5.22}$$

$$C_{66} = \frac{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)^2(s_{11}-s_{12}) - 2\cos^2\theta\sin^2\theta s_{44}}{(s_{11}-s_{12})s_{44}} \tag{5.23}$$

と置いている。この行列 C は、等方体 ($s_{44} = 2(s_{11}-s_{12})$) のときには、方向 ($\theta$) によらず、(直交座標系における) 等方体のスティフネス行列 (補遺の式 (A.6)) に一致する。これは等方体のスティフネス行列が座標系のとり方にまったく依存しないことを示す。

一方、運動方程式は、

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{rz}}{\partial z} + \frac{P_{rr} - P_{\theta\theta}}{r} \tag{5.24}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2P_{r\theta}}{r} \tag{5.25}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} + \frac{P_{rz}}{r} \tag{5.26}$$

となる。

今、等方体の場合を考え、軸対称解だけを考慮する[4]と、以上の式より、

$$\Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{5.27}$$

として、

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = c_{11}\frac{\partial \Delta}{\partial r} + \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\left(2\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - 2\frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}\right) \tag{5.28}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right) \tag{5.29}$$

[4] $\partial/\partial\theta = 0$ と置く。

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = c_{11}\frac{\partial\Delta}{\partial r} + \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{u_z}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + 2\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) \tag{5.30}$$

が得られる。ここで、u_θ は 2 番目の式にのみ含まれ、他の式には含まれない。従って、u_θ は単独に存在できる。これがねじれ振動に相当し、2 番目の式 (5.29) が等方体において、ねじれ振動を記述する式となる。

しかし、同じことを立方晶系の場合に行う[5]と、u_θ の式と r_θ の式が混合する。従って、純粋なねじれ振動は存在せず、常に半径方向の変位を伴った振動をすることになる。一般の場合は、さらに複雑である。

z 方向に有限な円柱状等方性弾性体の場合、このねじれ運動の方程式のみが唯一完全に境界条件を満たせる解であることが知られている。円柱の半径を r、長さを h(z 座標 $-h/2 \sim h/2$) とする。ねじれの共振周波数は側面と $z = \pm h/2$ 面での境界条件を満足するように、ねじれの運動方程式 (5.29) を解く必要がある。ここでは、結果のみを示す。計算の詳細は、文献 [53] などを参照。ねじれ振動の解析的な共振周波数 f は、

$$f = \frac{1}{2\pi r}\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}\sqrt{\frac{2r}{h}\alpha^2 + \beta^2} \tag{5.31}$$

となる。ただし、

$$\alpha = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi, ... \tag{5.32}$$

で、β は、0 を含む、

$$J_2(\beta) = 0 \tag{5.33}$$

を満たす解[6]。ここで、J_2 は 2 次のベッセル関数。α が 0 の場合は、$z = 0$ の面に対して運動が対称 (even) なモード、$\pi/2$ の場合は反対称 (odd) なモードで、以下交互に続く。

結晶の場合には"ねじれ振動"の場合でさえも単純な解は存在しないと考えられる。

5.2.2 半解析解-Hutchinson の方法-

ねじれ振動以外の円柱状弾性体の振動モードは厳密な解析解が存在しない。その振動モードを半解析的に求めるのに考案されたのが、Hutchinson's Method である [23]。詳細は [8] などを参照。ここでは、考え方と解の特徴についてのみ述べることにする。

まず、式 (5.1)-(5.3) を利用すると、等方体での運動方程式は、

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} = \frac{E}{2(1+\nu)}\Delta\boldsymbol{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\mathrm{grad\ div}\boldsymbol{u} \tag{5.34}$$

となるが、ここから考える。これを波動方程式に変換し、それを円柱座標系に変換する。その解は、1 つの縦波と 2 つの横波を表す 3 つの解の組となる。円柱内の波動はこれらの線形結合ですべて表現できる[7]。そして、円柱表面で応力がない、という条件を課す。その条件は、6 つの境界条件で書き表される。そのうちの 3 つは円柱側面での境界条件、残り 3 つが円柱側面での境界条件である。ここで、そのうちの 3 つの特定の境界条件のみ考慮して、基底関数を決定する。あとの境界条件を満たすために、基底関数の波数の小さいものだけを考慮して、その基底関数の係数を決定する[8]。採用する基底関数の数は NR, NZ で表され、波長が直径の $1/NR$ 以上程度、高さの $1/NZ$ 以上程度のもののみを考慮することになる。

[5] [001] 方向が z 軸に相当することになる。
[6] 小さいほうから順に、0, 5.13562, 8.41724, 11.6198, 14.7960, 17.9598, ...
[7] Hutchinson はここでこれらの基底の絶妙な線形結合を基底としてとりなおして考えている。
[8] 係数や波数に数値的要素が含まれるため半解析的と呼ばれる。

こうして求められた解の特徴を挙げる。モードの形を表すのに二つの量子数がある。Order n と Parity p である。Order n は変位の r 成分 u_r、もしくは θ 成分 u_θ を $0 < \theta < 2\pi$ に沿って見た際、変位が 0 となる回数で、節線の数である。これは、どちらの基底も

$$u_r \propto \cos(n\theta),\ u_\theta \propto \sin(n\theta) \tag{5.35}$$

という依存性を持つからである[9]。また、parity p は、$z = 0$ の面に対して、変位が対称であれば 0、反対称であれば 1 となるような量子数である。前者を even モード、後者を odd モードともよぶ。これは、いずれの基底も、

$$u_r,\ u_\theta,\ u_z \propto \sin(\beta z) \text{ or } \cos(\beta z) \tag{5.36}$$

という依存性を持つことによる。β は何らかの定数。また、中心付近の変位の各成分を見た場合、r 成分は

$$u_r \propto J_n'(\alpha r) \text{ or } \frac{n}{r} J_n(\alpha r) \tag{5.37}$$

α はモードにより決まる離散的な定数。x が小さいところで、

$$J_n(x) \sim \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \tag{5.38}$$

という近似が成り立つので、r の小さいところでは、$n > 0$ の場合、

$$u_r \propto \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} \tag{5.39}$$

となる。

θ 成分は、

$$u_\theta \propto J_n'(\alpha r) \text{ or } \frac{n}{r} J_n(\alpha r) \tag{5.40}$$

また、z 成分は、

$$u_z \propto J_n(\alpha r) \text{ or } 0(\text{torsional mode}) \tag{5.41}$$

従って、中心 $(r = 0)$ の変位の成分は、以下のように分類される。

- $n = 0$ のとき
  z 成分を持ち、他の成分は 0。ただし、ねじれのモードのときには、z 成分も 0。
- $n = 1$ のとき
  r, θ 成分は有限となり[10]、z 成分は 0
- $n \geq 2$ のとき
  r, θ, z すべての成分が 0

また、$n > 0$ のすべてのモードは縮退していることが知られている。周波数が等しい、$\pi/(2n)$ だけ θ 方向に傾いた二つの基底をとることができる。実際には、円柱の微妙な非対称性により、これらの縮退モードは非常に接近した二つの周波数として観測されることが多い。

[9] いずれかが sin, cos であると決まっているわけではなく、$\theta = 0$ のとり方による。
[10] 本当の中心、$r = 0$ では、r, θ 成分は絶対値が等しく、符号が逆になるだけで等価である。

5.2.3 数値解-有限要素法-

前の節で等方弾性体の場合の近似的な解析解を求める手法を紹介した。これは、もともと、等方弾性体の運動方程式 (5.34) とその解から出発したものである。異方性弾性体の場合には、そもそも運動方程式が異なり、解を簡単に書き表すことはできない。式 (5.34) において、剛性率 G を強引に導入することで解を変更し解を書き換え、同じ手法で共振周波数を求めても、改善はなされない。

従って、異方性弾性体の場合、純粋な数値的手法に頼ることになる。ここでは有限要素法を用いた。

有限要素法は、構造物を有限個の小さな要素に分割し、その各要素に仮想仕事の原理[11]を適用する。そして、その要素間の連続条件を考慮して、全体の振動を表す行列を求めることで問題を解くものである。要素の頂点を節点といい、荷重はこの節点を介してのみ伝えられる。また、応力や歪みは要素内で一定であるという仮定もおく。そして、それらは数値的に解析される。有限要素法の原理は文献 [53, 54] などに詳しい。

5.3 ANSYS による鏡の振動モード計算

3 次元の有限要素モデルを解析するのには、大規模な行列を作り、その固有値を求めることが必要となる。そのため、有限要素法による解析のプログラムは数多く市販されている。ここでもそのようなパッケージのひとつである ANSYS を用いた。以下、ANSYS パッケージを用いた異方性も含む鏡の振動モード計算について述べる。

5.3.1 ANSYS パッケージ

ANSYS の具体的な使用法、コマンドについては、文献 [55],[56] などのマニュアル、およびオンラインマニュアルが参考になるだろう。ここでは、ANSYS を用いた計算の流れについて説明する。ここで用いる、線形構造解析、そのうちのモード解析 (モーダル解析) に話を絞る。

ANSYS に限らず、有限要素法汎用プログラムは、プリプロセッシング、ソリューション、ポストプロセッシングの 3 つの段階を経て解析を行う。そのおのおののプログラムの対応する部分を、プリプロセッサ、ソルバー、ポストプロセッサと呼ぶ。

プリプロセッシング

座標系の決定、要素への分割、節点番号、要素番号の設定、拘束条件や荷重条件の付加、材料の特性 (弾性定数や密度) などをこの段階で指定する。

解析の成否の大きな鍵を担っているのは、解析対象物の要素への分割である。要素へ分割することを、メッシュを切る、などともいう。経験的に、メッシュの切り方によって結果が変わることが知られている。メッシュが細かくなればよりよい精度で解が求まるが、計算時間や記憶容量などが無駄になることがあるので、問題と精度に応じた適切なモデルを組むことは重要である。ANSYS の場合、メッシュを切る際、まず用いるべき要素を決定する。そして、その要素の配置法を指定する。

ANSYS には二つの要素の配置法がある。フリーメッシングとマップトメッシングと呼ばれる。前者は、節点の配置が比較的自由であり、自動メッシングとの相性がよい。制限が少なくモデルが作成しやすいという利点がある。後者はある規則に沿って節点を配置するものである。このメッ

[11]「ひとつの質点が、これに働くいくつかの力の作用の下でつりあい状態にあるとき、この質点に任意の微小な仮想変位を与えても、質点に働いているすべての力がこの仮想変位によってなす仕事の総和は 0 である」という原理。

シュが適用可能なモデルを作るのが難しく、時間がかかるという欠点はあるが、系の対称性を考慮した要素の配置が可能である。

ソリューション

プリプロセッシングの段階で解くべき行列要素は準備できる。あとはその固有値を求めることで、固有振動数と、その形を知ることができる。ここで指定するのは、固有値の求め方、求めるべき周波数の範囲やモードの数、求めるべき物 (変位や応力など) などである。重要なのは固有値の求め方 (モード抽出) である。行列式が巨大になるので、その固有値の計算法として適切なものを選ぶことは、解の正確さと計算時間の短縮の点からも非常に重要である。

ANSYS のモーダル解析には 4 つのモード抽出法を選択することができる。そのうち、ここに適しているのは縮合法とサブスペース反復法と言われる二つの方法である。詳細は [56] を参照。

ポストプロセッシング

計算結果は、各モードに対する固有値 (固有振動数)、各節点での求めたい物理量である。解析結果の検討を効率的に行う際に、変位や応力分布をグラフィックスでわかりやすく表示することは重要であり、ポストプロセスはこれに相当する。ある節点や要素での具体的な値を知ることも、解析結果の演算や加工を行うことも可能である。

これら 3 つのプロセスを用いることで効率的な解析が行える。解析の流れを図 5.1 に示した。

われわれのような目的の場合、実験でのチェックも重要である。計算結果が信用できるか否かは、今の場合、実験によってのみチェックされる[12]。

以下、実際に行った計算について述べる。

5.3.2　用いたモデル

実験で用いた鏡材料は直径 10cm 高さ 6cm の円柱形である。これは TAMA300 で用いられる鏡の大きさである。これを有限要素モデルに変換した。

これまで、高エネルギー加速器研究機構 (KEK) 鈴木敏一により溶融石英や、サファイアについて同じような計算が行われていた [1]。その際のモデルは、図 5.2 のようなマップトメッシュを用いたものである[13]。要素は ANSYS 内で SOLID72 と呼ばれている、4 面体要素である。当初この方法で計算を行っていたが、分割数を多くすることでも精度を上げることができなかった。そこで、対称性よくメッシュを切るためにマップトメッシュを用いた。また、異方性を考慮できる 6 面体要素 (SOLID64) を採用した。

ここで用いたモデルは、図 5.3 のようなモデルである。これは、よい精度でいくつかのシリコンの内部共振と一致することがわかっていた [57]、計量研究所 Giuseppe Bertolotto Bianc のモデル [59] を参考にして構成したものである。

この要素や節点は ANSYS とは別にプログラムを書いて生成したものである。そのため、要素の配置や節点の並び、その他のパラメータを全て把握できている。そのため、解析に非常に都合がよい。十分な精度があることが確認されたので、ここでの計算は図 5.3 のモデルを使って行っていくことにした。

[12] 等方性弾性体の場合には、Hutchinson の方法とクロスチェックを行うことができる。
[13] また、モード抽出法として縮合法を使っていた。

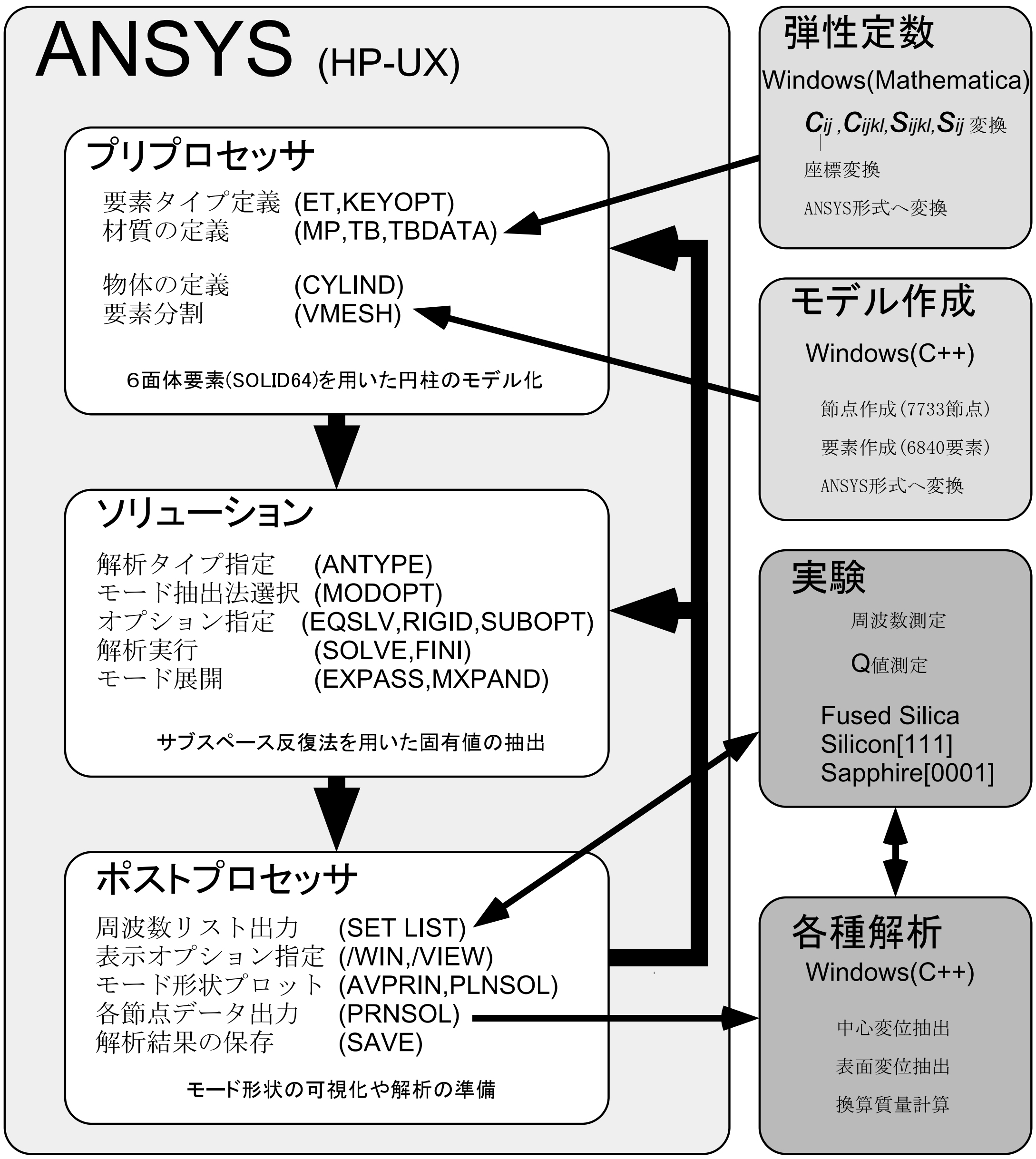

図 5.1: ANSYS によるモード計算の流れ。本文では触れていないが、主なコマンドも併記しておいた。

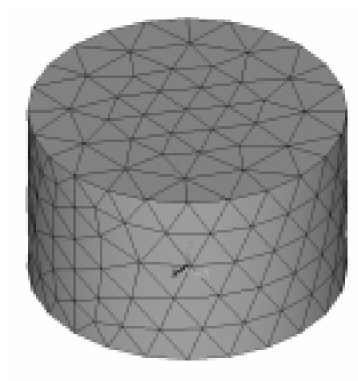

図 5.2: フリーメッシュによる要素分割。これは完全に自動的にメッシュを切ったもの。要素は 4 面体要素 (SOLID72) を使用。節点数 375, 要素数 1514 と少ない。

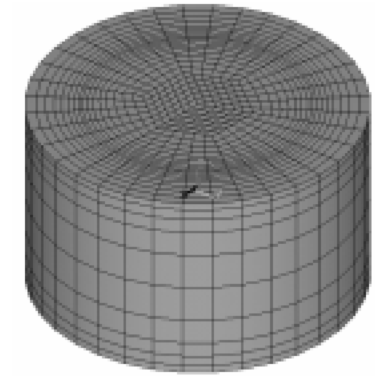

図 5.3: 作成したモデル。要素は 6 面体要素 (SOLID64) を使用。節点数 7733, 要素数 6840。

密度	2203(kg/m^3)
ヤング率	7.24×10^{10} (N/m^2)
ポアソン比	0.17

表 5.1: 溶融石英の密度と弾性定数

5.3.3 弾性定数

有限要素モデルの他に、弾性定数を与える必要がある。ここでは与えた弾性定数を示す。

溶融石英 (P-10,P-30)

実験で用いる溶融石英は、信越石英の SUPRASIL P-10,P-30 と呼ばれるものである。溶融石英の組成式は、SiO_2 二酸化ケイ素である。溶融状態でない石英は水晶という結晶として知られている。溶融石英は、ガラス状 (アモルファス状) の分子から構成されており、異方性が存在せず、等方体として扱える。

この弾性定数や密度は、信越石英により表 5.1 のように与えられており [60] 、その値を用いた[14]。

シリコン

シリコンの機械定数については、文献 [52] の巻末に記述がある。表 5.2 にそれを示す。シリコンについては、計量研究所で有限要素法を用いた計算をする際に等価な定数を使っていた。また、理科年表 (1993) の値もこれと等価であるが、密度は 3 つの資料で異なっている。ここでは、計量研究所の値、2350(kg/m^3) を採用した。共振周波数に対して密度 ρ は $1/\sqrt{\rho}$ 程度で利くので、深刻な問題ではない。

ちなみに、表 5.2 の値からヤング率 E_x、ポアソン比 ν_{xy}、剛性率 G_{xy} を計算することができる。

[14]「ねじれ剛性率」として 3.1×10^{10}(N/m^2) が与えられているが、ヤング率やポアソン比と等方体で成立する関係が成り立っていない。この精度は低いものと思って除外した。

密度	2350(kg/m^3)
c_{11}	1.657×10^{11}(N/m^2)
c_{12}	6.39×10^{10}(N/m^2)
c_{13}	7.96×10^{10}(N/m^2)

表 5.2: シリコンの密度と弾性定数

密度	3970 (kg/m^3)
c_{11}	4.973×10^{11} (N/m^2)
c_{33}	5.009×10^{11}(N/m^2)
c_{44}	1.468×10^{11} (N/m^2)
c_{12}	1.628×10^{11} (N/m^2)
c_{13}	1.160×10^{11} (N/m^2)
c_{14}	-0.2190×10^{11} (N/m^2)

表 5.3: サファイアの密度と弾性定数 (文献 [61] など)

これらの弾性定数は、結晶軸に沿ったものであり、弾性定数もその方向の値である。

$$E_x = 13.02 \times 10^{10} \text{ (N/m}^3) \tag{5.42}$$

$$\nu_{xy} = 0.279 \tag{5.43}$$

$$G_{xy} = 7.962 \times 10^{10} \text{ (N/m}^3) \tag{5.44}$$

ヤング率だけ比較すると、溶融石英に比べて 1.5 倍ほど”硬い” ことになる。

サファイア

文献 [61](1989) によるとサファイアの弾性定数は、表 5.3 となっている[15]。ただし、密度は 3970(kg/m^3) とサンプルのカタログに出ていたので、その値を示している。これらから計算できる s_{11} のみ考慮すると、サファイアは溶融石英より 6 倍ほど”硬い” ことになる。

サファイアの場合に限らず、弾性定数の精度はそれほど高いものではないことに注意する必要がある。

5.3.4 固有ベクトルの規格化

おのおのの固有値に対して、その固有ベクトルが存在している。固有ベクトルから、実際のモードの形を描くことができる。各節点の変位も計算されるが、この変位 u の大きさは、以下の式で規格化されているものである。

$$1 = \int_V \rho u^2 dV \tag{5.45}$$

つまり、運動エネルギー (の倍を共振角周波数の 2 乗で割ったもの) で規格化されている変位が得られる。

[15] また、文献 [62](1960) にも記述があるが、こちらは古いためか、この弾性定数を用いたときは実験との対応が悪化したので、採用していない。

5.4　計算結果とモード同定

ここでは、有限要素法による計算結果をまとめる。なお、実験を行うことができた試料は 2 種類の溶融石英 (P-10,P-30. 弾性定数は同じ) と、円柱軸が [111] 方向のシリコン、円柱軸が c 軸 ([0001]) のサファイアの 3 種類である。それらのサンプルの実験結果は、後の第 6 章で行われた実験で得られた結果を引用したものである。

また、実際にはサンプルが存在しないが、工業的には作成されている結晶、円柱軸が [001] 方向のシリコンと、円柱軸が a 軸 ([11$\bar{2}$0]) のサファイアについても計算を行った。ここでは、これらのシリコン、サファイアをシリコン [111]、シリコン [001]、サファイア [0001]、サファイア [11$\bar{2}$0] などと呼ぶことにする。

最低次から 50 個ほどのモード (縮退は 2 つと数える) を計算するのにかかる典型的な時間は、約 7 時間であった。計算機としては、高エネルギー加速器研究機構 (KEK) の CAD 用サーバ (HP-UX kekcad24 B.10.20 A 9000/735) をリモートから用いた。ANSYS のバージョンは 5.4 である。

以降、溶融石英、シリコン [111]、シリコン [001]、サファイア [0001]、サファイア [11$\bar{2}$0] の順に結果を述べることにする。まず、溶融石英の場合には、Hutchinson の方法を用いて測定結果のクロスチェックを行う。そして、残りの異方性材料について、以下の観点から計算結果を見ていくことにする。

- 等方近似から実際の異方性体へ：結晶の異方性がどのようにモードの周波数や縮退を変化させるのかを見る。
- 計算された共振周波数：実験で確認できる場合には、その周波数が精度よく計算できているかをチェックする。
- 中心での変位のないモード：第 6 章の実験では、円柱の中心で試料を支持する。そのため、中心の変位のないモードに注目する。
- 中心での変位の有限なモード：他方、中心がどのようなモードで変位を持つのか知っておくことも必要である。
- モード形状の特徴：異方性により変化したモード形状の特徴について触れる。

5.4.1　溶融石英

等方体の溶融石英の場合、Hutchinson の方法も使うことができる。Hutchinson の方法で計算する際、カットオフ NR, NZ は共に 10 とした[16]。Hutchinson の方法の結果と、有限要素法の結果を、第 6 章で行った P-10 の場合の実験結果と比較し、対応を取った[17]。

ねじれのモードは半径方向の変位を伴わないため、ここでの実験方法では検出することができなかったが、それ以外のモードは全て過不足なく実験的に検出でき、二つの計算結果と対応を取ることができた。

計算値と測定値の相対誤差をおのおのの方法について示したのが、図 5.4,5.5 である。なお、ここでの相対誤差は、以下のように定義した。

$$\mathrm{Error}(\%) = \frac{f_{\mathrm{calc}} - f_{\mathrm{exp}}}{f_{\mathrm{calc}}} \times 100 \tag{5.46}$$

f_{calc} が計算値、f_{exp} が実測値である。計算値が実測値よりも小さい場合には、符号はマイナスになる。

[16] 坪野研究室に存在するプログラムにいくつかの修正を施したものを使っている。
[17] 表 6.2 を参照。

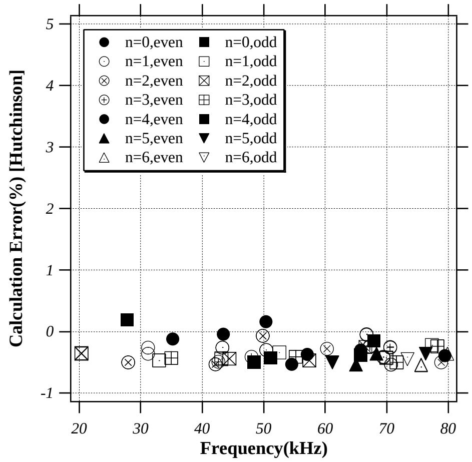

図 5.4: 溶融石英の Hutchinson の方法による誤差。

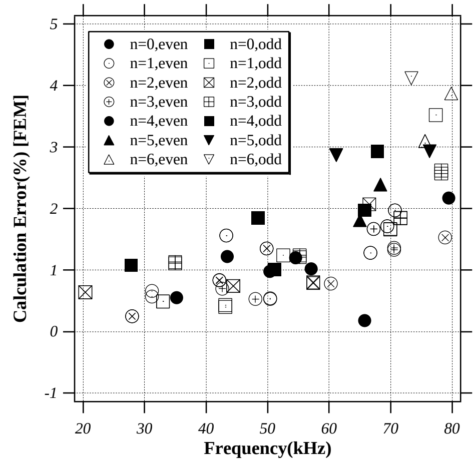

図 5.5: 溶融石英の有限要素法による誤差。Hutchinson に比してまだ大きい。

Hutchinson の方法の結果

図 5.4 によると、計算の誤差は 1%未満であることが分かる。計算値が一律にマイナス側に偏っている。その平均値は、-0.39%である。このずれは、まず、弾性定数によるものが考えられる。ヤング率で考えると、ヤング率で 0.8% 程度のずれに相当する。そもそも、弾性定数の精度はそれほど高いものではないので、この誤差は二つの独立な弾性定数によると考えてよかろう。

実験で発見できたモードを周波数の低いものから順に並べていくことで対応が完全に取れ、実際にはモードの周波数の大小が入れ替わっていた、ということもなかった[18]。

有限要素法の結果

これに対し、有限要素法の結果を見てみる。有限要素法では、Order,Parity という概念はなく、ただ、行列式=0 を満たすすべての解が順に出力されてくる。そのため、モードの対応は Hutchinson の結果から得られるモードの形と、有限要素法で得られるモードの形を比較することで行った[19]。モード抽出法としては、サブスペース反復法がよい結果を与えた。縮合法ではよい結果とならず[20]、以降、ここでの計算はすべてサブスペース反復法を用いたものである。

計算結果を周波数の低いほうから Hutchinson の方法の結果 (および実験結果) と比較していった場合、数箇所のモードで周波数の大小が入れ替わっていた。Order の高いモードが低いモードよりも周波数が高く計算されているものがほとんどであった。Order が高く内部に立つ波の波数の多いモードにおいては、要素が有限個である近似が成り立ちにくい。そのため、本来の連続体よりも”硬い”ように計算されてしまう。

これは、図 5.5 の周波数に対する誤差の変化にも現れている。周波数は低くても Order が高いモードは誤差が大きくなりやすく、周波数が高くなると、誤差は正の方向に全体的に大きくなってくる。これも、要素が有限であるために、波長の短い波の寄与を考慮しにくくなってしまうためである。今回の計算と実験の対応は 80kHz までのモードで行っているが、これ以上の周波数になると、さらに誤差が大きくなってくると想像される。

完全な解析解である Hutchinson のねじれモードの計算結果は、その弾性定数から計算される近

[18] 例えば計算で出力された周波数が $f_1, f_2, f_3 \ldots$ で、実験で検出された周波数が f_{e1}, f_{e2}, f_{e3} の時に、$f_1 \leftrightarrow f_{e1}, f_2 \leftrightarrow f_{e3}, f_3 \leftrightarrow f_{e2}$ と対応付けをする必要に迫られる、というような状況がなかったということ。

[19] 有限要素法で得られたモードの形の Order,Parity をみるだけで、完全に対応が取れる。

[20] 計算の簡略のために、モデルのサイズを縮小する方法で計算誤差が大きくなる。

似の入っていない周波数である。有限要素法の計算結果は常にこの解析解の値よりも 1% ほど高く、要素が有限であることの影響が現れていた。

また、有限要素モデルが、図 5.3 のような 3 回対称の形状をしているので、Order $n = 3$ のモードでは、実際には完全に縮退しているはずのモードであるのにかかわらず、わずかな周波数差が生じてしまっている。これは最大で 30Hz ほどであった[21]。

Order $n > 1$ のモードは解析的に、円柱の中心の変位が完全に 0 になる。有限要素法の結果を見てみると、式 (5.45) で規格化されている変位で、わずかな量[22]の変位が生じていることになっていた。Order $n = 0, 1$ のモードと、$n > 1$ のモードの中心の計算される変位はオーダーが異なっていたので、以降もそれを中心が変位を持つか、否かの判定の基準とすることにした。

5.4.2　シリコン [111]

次にシリコンの円柱軸が [111] 方向に平行な場合の結果を示す。

シリコンのような立方晶系のスティフネス行列 (A.10) を、結晶の [111] 方向が円柱軸 (z 軸) に平行になるように座標変換すると三方晶系のスティフネス行列 (A.18) の形と一致する。

等方近似から実際の異方性体へ

シリコンの場合には、異方性が含まれるので、Hutchinson の方法は使えなくなる。しかし、独立な 3 つの弾性定数のうち、1 つを他の弾性定数に従属するようにしてしまい、等方体として近似することは可能である。この場合は、Hutchinson の方法でも計算できる。このような、等方極限での計算をまず Hutchinson と有限要素法で行い、次に徐々に弾性定数を実際の値に近づけていき有限要素法で共振周波数を計算するということを行った。

シリコンの場合、これを行うために、剛性率 G を変化させた。等方体であれば、剛性率は 5.09×10^{10}(Pa) であるので、実際の値、7.96×10^{10}(Pa) までの間を 10 分割して計算を行った。これは、非等方性因子 A を 1(等方) から 1.56(実際の値) まで変化させたことに相当する[23]。

図 5.6 に Hutchinson による等方近似の計算、および有限要素法での等方近似から実際の弾性定数に近づけていった計算結果を示す。同時に、実験結果も示した。実験結果は後の 6 章で行われた実験の結果を引用したものである。

この図 5.6 を見ると、等方近似での周波数と実際のパラメータで計算した周波数は、モードによっては 10kHz(約 15%) 以上の差が出てしまうことがわかる。つまり、このような等方近似はモード同定には用いることができないのが分かる。周波数の低いほうから見ていった場合、各モードの周波数の大小も大きく入れ変わっている。

等方近似においては、Hutchinson の方法と有限要素法は同じ解を出すはずであるが、図 5.6 によると、溶融石英の場合と同じく、有限要素法は、周波数が高いほど、また、Order が高いほど周波数を高く計算しがちであることがわかる。これは、先に述べたように、有限要素法の要素が有限であるための避けられない誤差である。

モードの番号を、図 5.6 に示すように名づけた。下から順に、有限要素法で計算された周波数の低いものから順に並べていったものである[24]。

モード 5 はねじれのモードである。にもかかわらず、図 5.6 をみると、剛性率を増して異方性を

[21] 後のシリコン [111] やサファイア [0001] は円柱軸に対して弾性定数が 3 回対称をしているために n=3 のモードで縮退モードの周波数の大きな分裂が (現実の系でも) 生じる。計算結果をこれと区別するためには Order n=3 で特別なことが起きないように、モデルを 3 回対称ではないものにしたほうがよい。しかし、3 回対称でないモデルでもこれらの物質の計算結果は n=3 での大きな分裂を示しており、この場合は、有意な差であると断定できる。
[22] 平均 0.001 ほど。ちなみに、基本の伸縮モードでの変位は 1.426。
[23] 補遺の式 (A.14) を参照。
[24] 第 6 章の表 6.3 を参照。

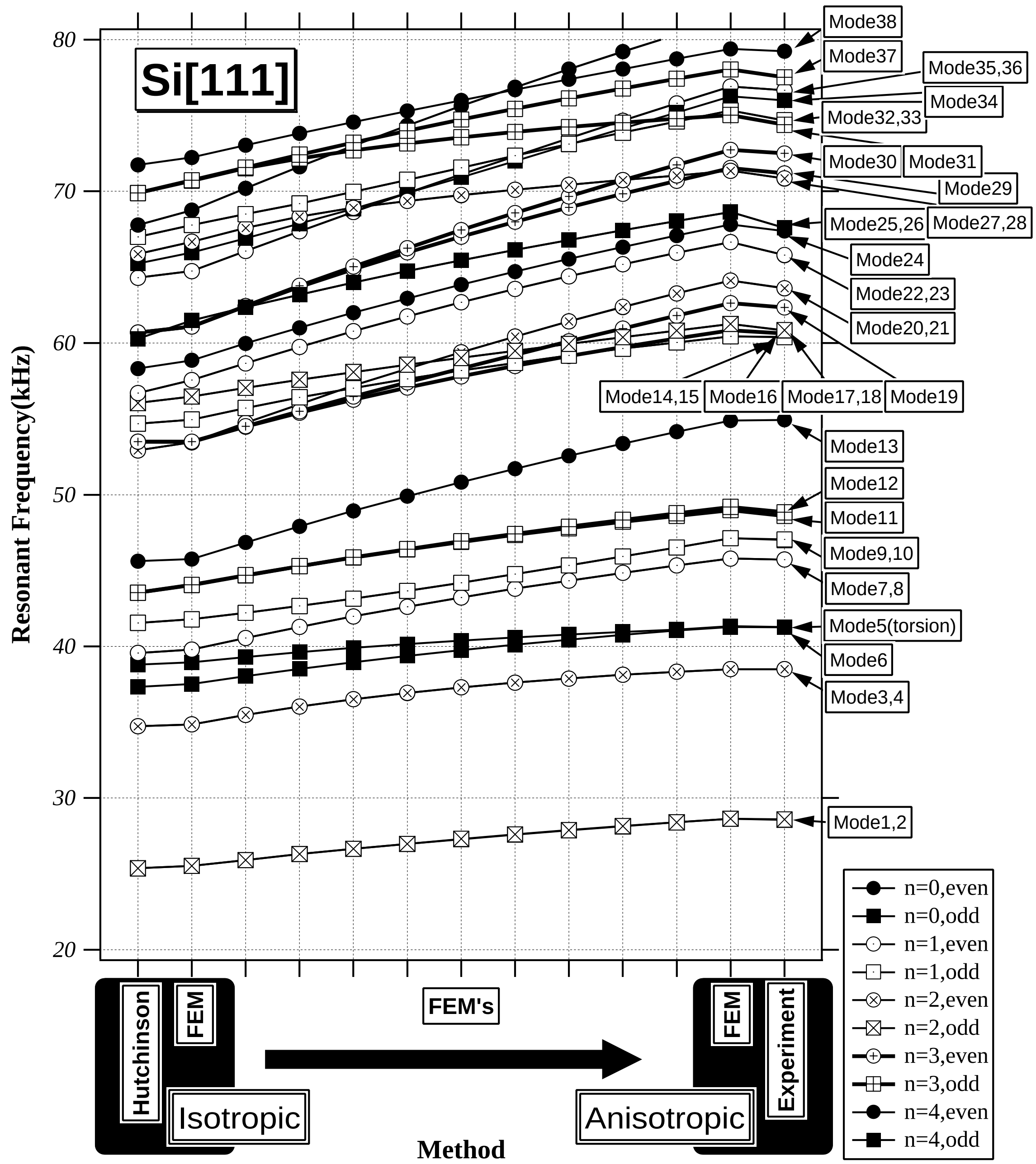

図 5.6: Si[111] において異方性を導入していった場合の周波数変化。

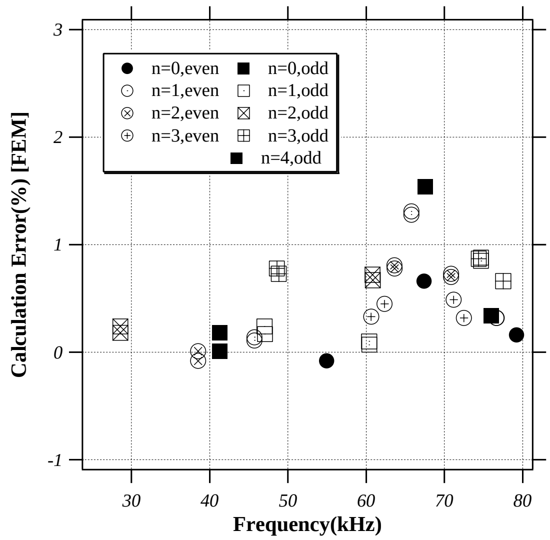

図 5.7: シリコン [111] における有限要素法の誤差

増加したにもかかわらず、周波数の増加が非常に少ない。これは、異方性を入れている向きに依存している。つまり、ここで増加したのは、結晶格子に沿った面に関する剛性率であり、今の場合は結晶軸は円柱軸と一致していないので、そのねじれのモードに対してここで変化させた剛性率はほとんど寄与しない。

計算された共振周波数 [実験との対応]

計算で出てきているモードの近くには過不足なく共振を発見することができ、完全に対応を取ることができている[25]。計算で縮退しているモードは実験でも非常に近い周波数 (20Hz 程度) で必ず 2 つの共振が発見できている。計算で有意に別の周波数に出てきているモードは、実験でもそれ以上の差をもって検出されている。

その誤差について図 5.7 に周波数との対応として示した。

全周波数 (80kHz までとした) で誤差は 1.5% 以下である。最大の誤差は、ここにでているモードの中でも最も Order の大きな $n = 4$ のモードで生じており、先の考察に合致する。全体的に誤差が正、つまり周波数が高く計算される傾向にあり、その平均的な値は 0.5% だった。Order,Parity は図 5.6 の、等方極限へたどっていった時、どのモードであったかで名前を付けた。

ねじれのモード (モード 5) も検出することができた。この場合のねじれのモードは、等方体の場合と違って、側面で半径方向の変位も伴ってきている。実験では、試料の半径方向に力をくわえて振動を励起し、側面の変位を干渉計で見る、ということを行っているが、これのねじれモードがそれで検出できているのも、この効果であろう。

第 6 章の実験では、円柱の中心で試料を支持することを考えているので、以降、円柱の中心での変位に注目して計算結果の特徴をまとめてみる。

中心での変位のないモード

等方体では Order $n > 1$ のモードは全て中心において変位を持っていない。しかし計算結果によると、このシリコン [111] の場合には、

[25] いくつかの実験的な証拠により、実際の試料ではモード 5(ねじれモード) とモード 6 の順番が入れ替わっていると判断した。

モード番号	Parity p	周波数差 (計算)	周波数差 (実験)	中心での変位
11				0.00
12	even	208Hz	229Hz	0.20
16				0.57
19	odd	1797Hz	1717Hz	0.00
29				0.92
30	odd	1191Hz	1311Hz	0.00
31				0.00
37	even	2995Hz	3130Hz	0.68

表 5.4: Si[111] Order $n = 3$ のモードにおける縮退のほぐれ

- Order $n = 3$ のモードの片方
- Order $n = 0$ のねじれモード (モード 5)

のみが、中心の変位が 0 となっていた。

まず、前者について詳しく見てみる。

今回の計算 (実験) 範囲では、Order $n = 3$ のモードは 4 組存在する。それぞれについて、計算での周波数差、実験での周波数差、中心の変位 (式 (5.45) により規格化) を表 5.4 に示す。

この表から以下の事柄がわかる。

- Order $n = 3$ のモードは例外なく縮退が解けている[26]。これは、$n = 3$ モードの基底は等方極限では互いに向きが 30° 傾いているが、実際のシリコン [111] では、30° 向きが異なると、結晶の弾性定数は互いに最も異なってしまうからだと考えられる。
- 縮退が解けた 2 つのモードのうち、片方は中心での変位を持たないが、他方では有限の変位を持っている。この理由は直感的には明らかでない。おそらく対称性に関する理論が深くかかわっており、それを用いることで説明可能ではと思う。

モード 11,12 間では分裂の度合いも小さく、違いは顕著ではないが、それより高次のモード、例えば図 5.8 に示すモード 16,19(Order $n = 3$,Parity even) では中心での変位にはっきりした相違が見られた。

ねじれモード (モード 5,Order $n = 0$, Parity odd) においても、中心の変位がなかった。これが、シリコン [111] のねじれモードに特有の特徴なのかどうかは、計算した周波数内にねじれモードが 1 つしかないので、判断することはできなかった。

中心での有限の変位が有限なモード

等方体で中心の変位が有限なモードは Order $n = 0, 1$ のモード (ただし、Order $n = 0$ のねじれモードは除く) のみである。しかし、このシリコン [111] では、ほとんど全てのモードが中心での変位が有限となっていた。Order $n = 0, 3$ を除く、すべてのモードの変位の方向は平面内に限られていた。z 方向に計算誤差と区別できる変位を持っているモードは存在しなかった。逆に、Order $n = 0, 3$ で中心が動くモードは、平面内の成分を持っていなかった。

Order $n = 2$ のモードでの例を図 5.9 に示す。このモードは等方極限では平面内四重極と言われるモードであり、円盤型の共振型重力波検出器に用いられるモードであるが、中心が不動点ではな

[26] Order $n = 6, 9$ などのモードも縮退が解けることが考えられるが、ここの周波数帯ではそのような高次のモードは出てこなかった。

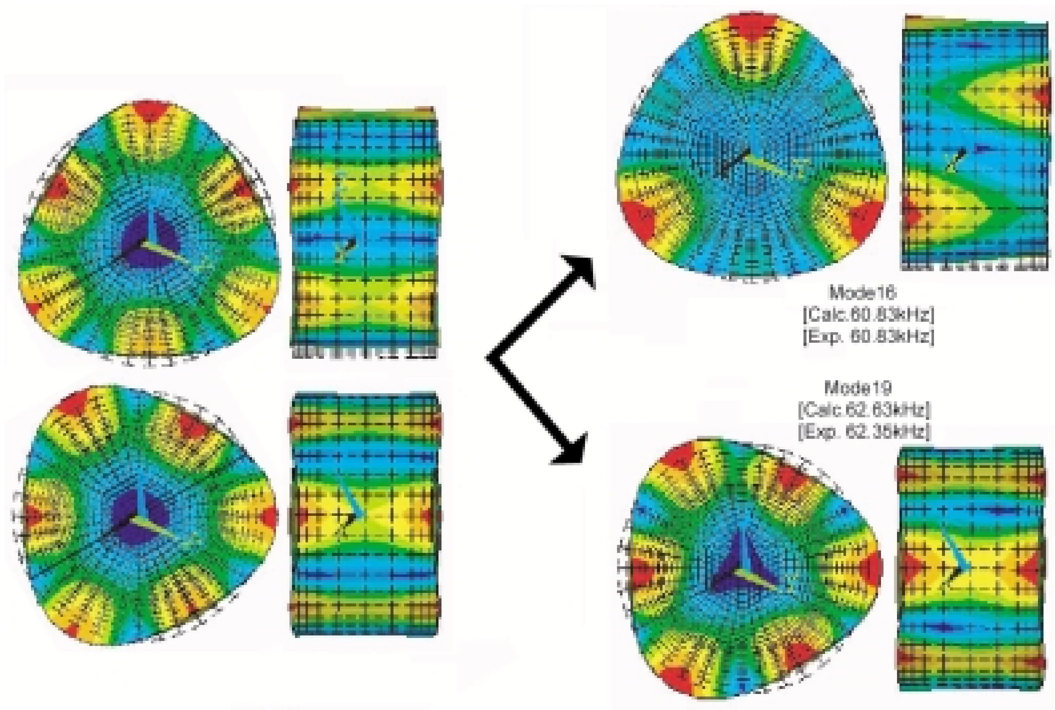

図 5.8: Si[111] モード 16,19(Order $n = 3$, Parity even) の、異方性を導入したときの変遷。等方極限では、Order $n = 3$ のモードは縮退しており、周波数は等しい。基底は 30° 傾いた二つのものをとることができる。しかし、異方性を導入すると、この二つのモードは大きく分裂する。片方 (Mode16, 上側) は中心が変位をもち Parity が保存していない。もう一方 (Mode19, 下側) は中心は完全な不動点で、Parity も等方極限のときのままである。

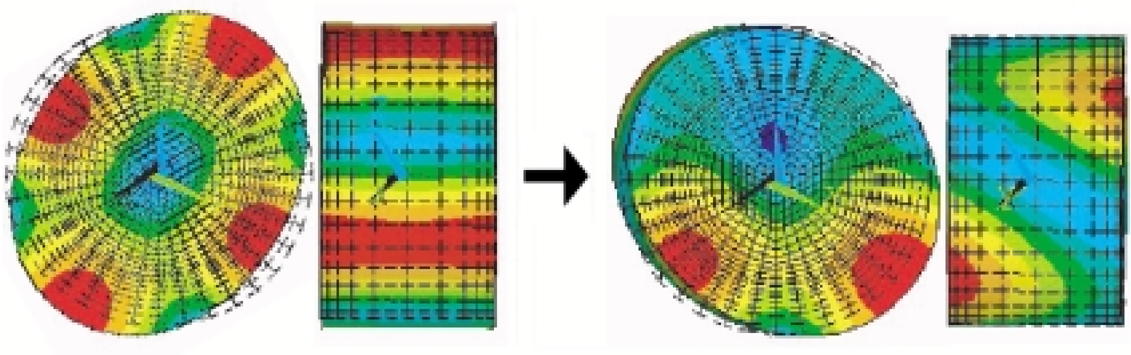

図 5.9: Si[111] モード 3(Order $n=2$, Parity even) の、異方性を導入したときの変遷。

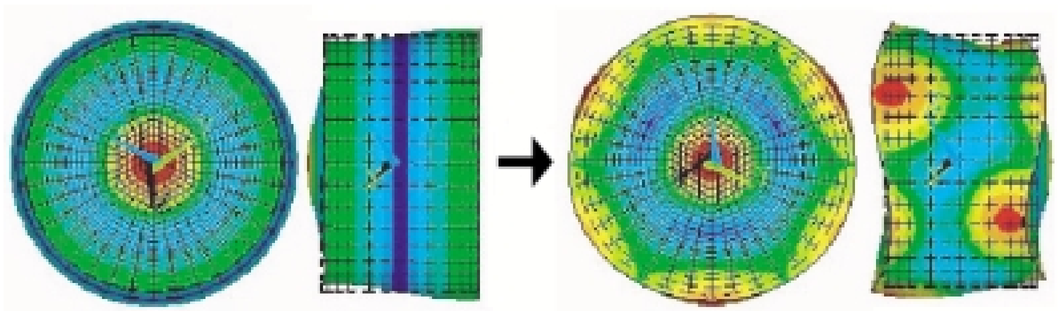

図 5.10: Si[111] モード 34(Order $n=0$, Parity odd) の、異方性を導入したときの変遷。

くなっている。変位分布は結晶が円柱軸に対して三回対称であることの影響を受け、等方極限から歪んでいる。

Order $n=4$ でも同じような結果となり、これら全てのモードで等方体にはない、中心での変位を持っていることを確認した。ただし、Order $n=1,2,4$ のモードの縮退が解けて、別の周波数に分かれるということは起きていない。

モード形状の特徴

異方性を考慮に入れたときのモード形状は以下のような特徴をもっていた。

- 全てのモードが、3 回対称の影響を受け、それに相容れない Order のモードは形が歪む。(そのためにほとんどのモードで、中心での変位が有限になっている。)
- 形が歪むモードは、Parity も変化することがある。Parity が定義できなくなることもある。

前者の特徴を Order $n=0$ のモードで見てみる。例えば、図 5.10 は Order $n=0$ のモードであるが、異方性が入っている場合、Order $n=3$ のモードと区別が明確でなくなっている。全ての Order $n=0$ のモードには 3 回対称の特徴が現れ、また、全ての Order $n=3$ のモードは先に述べたように特殊な分裂を起こしていた。他の Order のモード (Order $n=1,2,4$) は全て形が歪んでいた。

後者の特徴は図 5.8 などに現れており、等方近似と Parity が逆転しているように考えられるモードがある。また、図 5.11 に示すように、長さ方向に関する対称性を失ってしまうモードもあるが、これらの規則性は明らかではなかった。図 5.9 では Parity が逆転しているように見えるが、見る

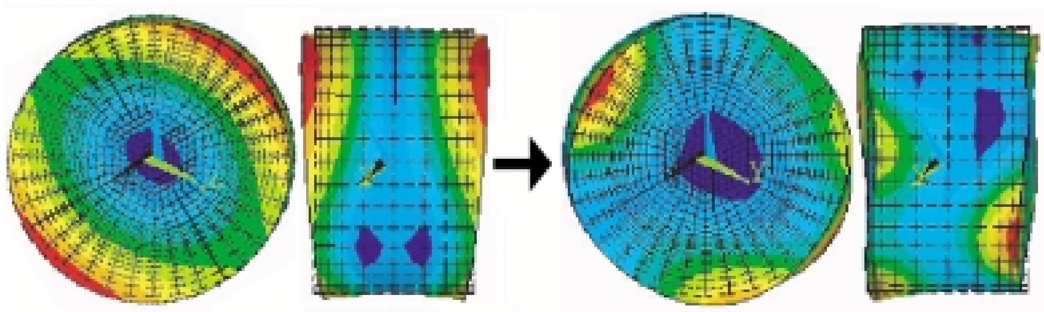

図 5.11: Si[111] モード 22(Order $n = 1$, Parity even) の、異方性を導入したときの変遷。

方向によっては対称性がなく、一般の場合には Parity はあまり意味のあるものではなくなっているようだ。今の場合には、(111) 面が円柱軸に直交しており、$z = 0$ に対して弾性定数が対称に分布していないためにこのような Parity の変化を生じていると考えられる。

このようなことから、異方性物質のモード形状をあらわすのに、Order,Parity はもはや等方性物質でいわれていた性質のものとは異なり、よい量子数ではなくなっているといえる。

5.4.3 シリコン [001]

次に、シリコンの円柱軸が結晶の [001] 方向と平行な場合についての計算結果を示す。なお、このシリコンの試料はなく、計算のみである。計算の正しさを保証するものがないが、シリコン [111] の計算が十分実測を反映しているものだったので、計算結果を信用することにする。

結果については、簡単に考察する。

等方近似から実際の異方性体へ

このシリコンの結晶軸 [001] の場合も、先のシリコン [111] と同じように、最初は結晶に異方性がないとして、Hutchinson の方法と比較し、そこから徐々に異方性を加えていくことを行っている。異方性の加え方は、先と同様、結晶軸に対して定義されている剛性率 G を 5.09×10^{10}(Pa) から、7.96×10^{10}(Pa) まで 56% 変化させた。図 5.12 にこの結果を示す。各モードの周波数の大小は大きく入れ替わっており、等方近似でのモード同定は不可能だろう。

この場合のねじれのモードは直接この弾性定数の影響を受けるはずである。ねじれの基本モード[27]は等方極限から実際の弾性定数を入れるまで、38.789kHz(解析解) から 48.708kHz まで、26% ほど増加している。$\sqrt{1.56} - 1 \sim 0.24$ であるので、これはほぼ完全に剛性率の増加を反映しているといえる。

これに対し、主に z 軸方向のヤング率のみが寄与する、伸縮の基本モードは確かにほとんど周波数が変化しない。0.6% の増加にとどまり、ほとんどねじれの弾性定数の影響を受けていない。

中心での変位のないモード

シリコン [001] の場合、中心で変位がないモードは以下のモードであった。

- Order $n = 2$ のモード
- Order $n = 4$ のモードの片方

[27] 上半面と下半面が表面の平面はほぼその形を保ったまま、反対方向にねじれるモードで、直接この剛性率が利いてくる。

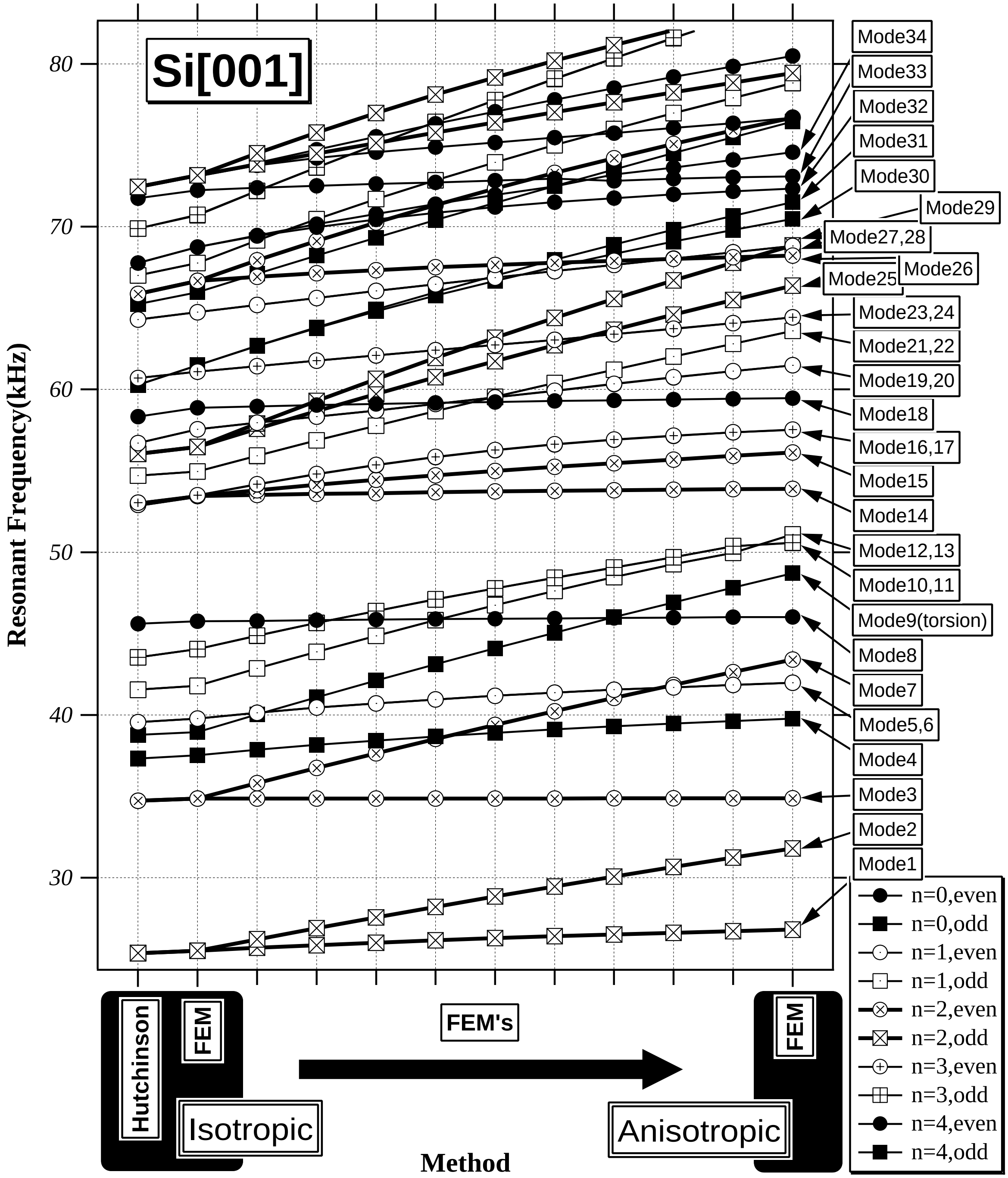

図 5.12: Si[001] において異方性を導入していった場合の周波数変化

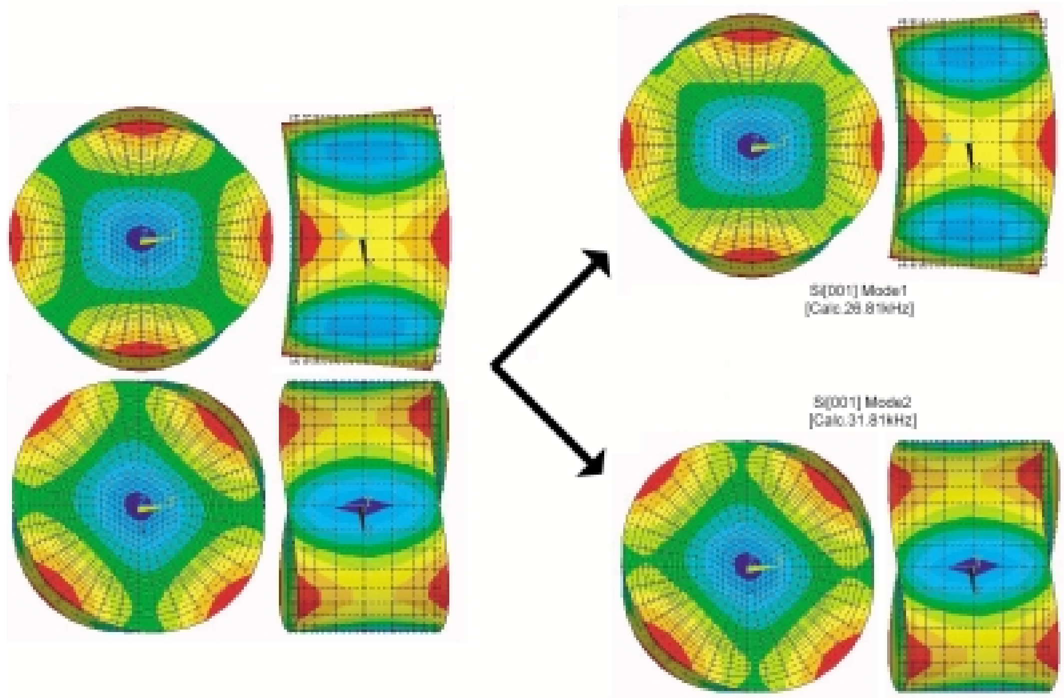

図 5.13: Si[001] モード 1,2(Order $n = 2$, Parity odd) の、異方性を導入したときの変遷。等方極限では、縮退しており、基底は 45° 傾いている。異方性を入れていくと、二つの周波数は大きく分裂するが、形はほとんど変わらず、中心も不動点のままであった。

- Order $n = 0$ のねじれモード

まず、最初のケースについて詳しく見てみる。図 5.12 を見ると、Order $n = 2$ のモードはすべて縮退が大きく解けていることが分かる。これは、円柱軸が [001] 軸を向いており、円柱軸に対して弾性定数が 2 回対称に分布していることによると思われる。Order $n = 2$ の互いに 45° 傾いたモードが大きく周波数が異なってしまうのは、この方向に最も弾性定数に差があるためで、同じ形をとろうとしても周波数は大きく異なってしまう。80kHz までの 6 組の等方極限では縮退していた 11 個の Order $n = 2$ のモードで、中心が変位を持つものは見られなかった。図 5.13 に例を示す。シリコン [111] では、Order $n = 3$ が分裂し、片方の変位が有限になる、ということが起きていたが、ここではそのような現象は見られなかった。

次の、Order $n = 4$ のケースを見てみる。図 5.12 を見ると、Order $n = 4$ のモードも縮退が解けはじめている。そして、計算された 3 組 6 個のモードのそれぞれで、その片方の中心の変位は 0 であった。しかし、他方の中心での変位はわずかではあるが有限の値をとっていた。

最後のねじれモードの場合も、中心の変位はなかった。これが一般的な特徴なのかどうかは、ねじれモードが 1 つしかなかったので、断言することはできない。

中心の変位が有限であるモード

他の Order のモード ($n = 1, 3$) では全て中心の変位が有限であった。ただし、この場合も、その成分は平面内に限られ、z 方向に変位を持つモードは計算誤差の範囲では存在しなかった。ただし、これらの Order のモードでは縮退が解けるということはないようである。

他方、Order $n = 0, 4$ で中心の変位が有限となっているモードは、変位の成分は z 方向に限られていた。

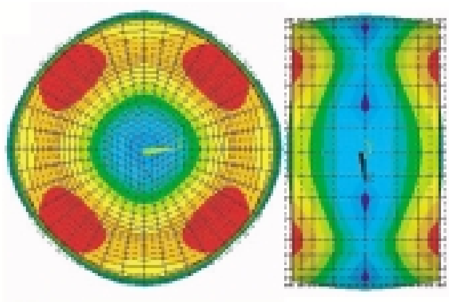

図 5.14: Si[001] モード 33(Order $n=0$, Parity odd) の形状。

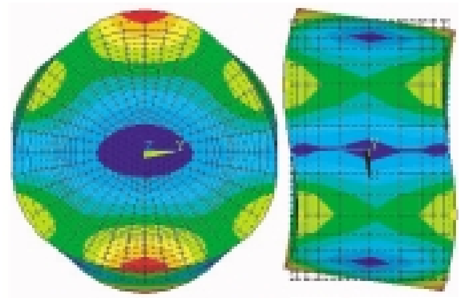

図 5.15: Si[001] モード 16(Order $n=3$, Parity odd) の形状。

モード形状の特徴

今の場合も、非対称性が入っているためにモードの形が歪む。2 回対称に相容れないモードはそのために中心での変位が有限となっている。

図 5.14,5.15 に Order $n=0,3$ の場合の例を示す。特に $n=0$ には $n=2$ の特徴が多く入ってきて、区別が明確でなくなってくる。しかし、すべての Order で Parity が不明になる (変化する)、ということは起こっていない。

このような特徴は、円柱軸に直交する軸が、(001) 面となっており、完全に上下の部分で対称だからであろう。

5.4.4 サファイア [0001]

次に、サファイアの c 軸が円柱軸と平行な場合を取り上げる。このサンプルは実際に存在し、実験との対応をとることができた。

等方近似から実際の異方性体へ

サファイアの場合、独立な弾性定数は 5 つある。この 3 つを操作することで、独立な弾性定数が 2 つの等方体の近似 (極限) を考える。ここでは、以下のように弾性定数を操作した。表 5.3 において、等方体では、

$$c_{33}=c_{11},\ c_{44}=\frac{c_{11}-c_{12}}{2},\ c_{13}=c_{12},\ c_{14}=0 \tag{5.47}$$

であるはずなので、これを等方極限とし、真の値に向けて 10 分割して増減させ計算していった。

図 5.16 にこの結果を示す。Hutchinson による等方近似の場合の結果、有限要素法による弾性定数を変化させていった場合の結果および、実験結果について示してある。

この場合も有限要素法で計算されたモードの周波数の低い順から、順番に番号を与えてそれぞれのモードの名前とした。縮退も 2 つと数えている。

Hutchinson と有限要素法による等方極限の計算は、この場合も有限要素法の結果が、周波数と Order が高いほど、計算値が高めにでるという結果になっている。異方性を考慮していくことによるモードの周波数の大小の入れ替わりはそれほど多くない。c_{14} は等方極限から値が下がって負の領域に向かっていく。そのため、これまでと違って、全モードの周波数が一律に高い方向に向かわず、モードによっては異方性を導入することで周波数が下がってきている。

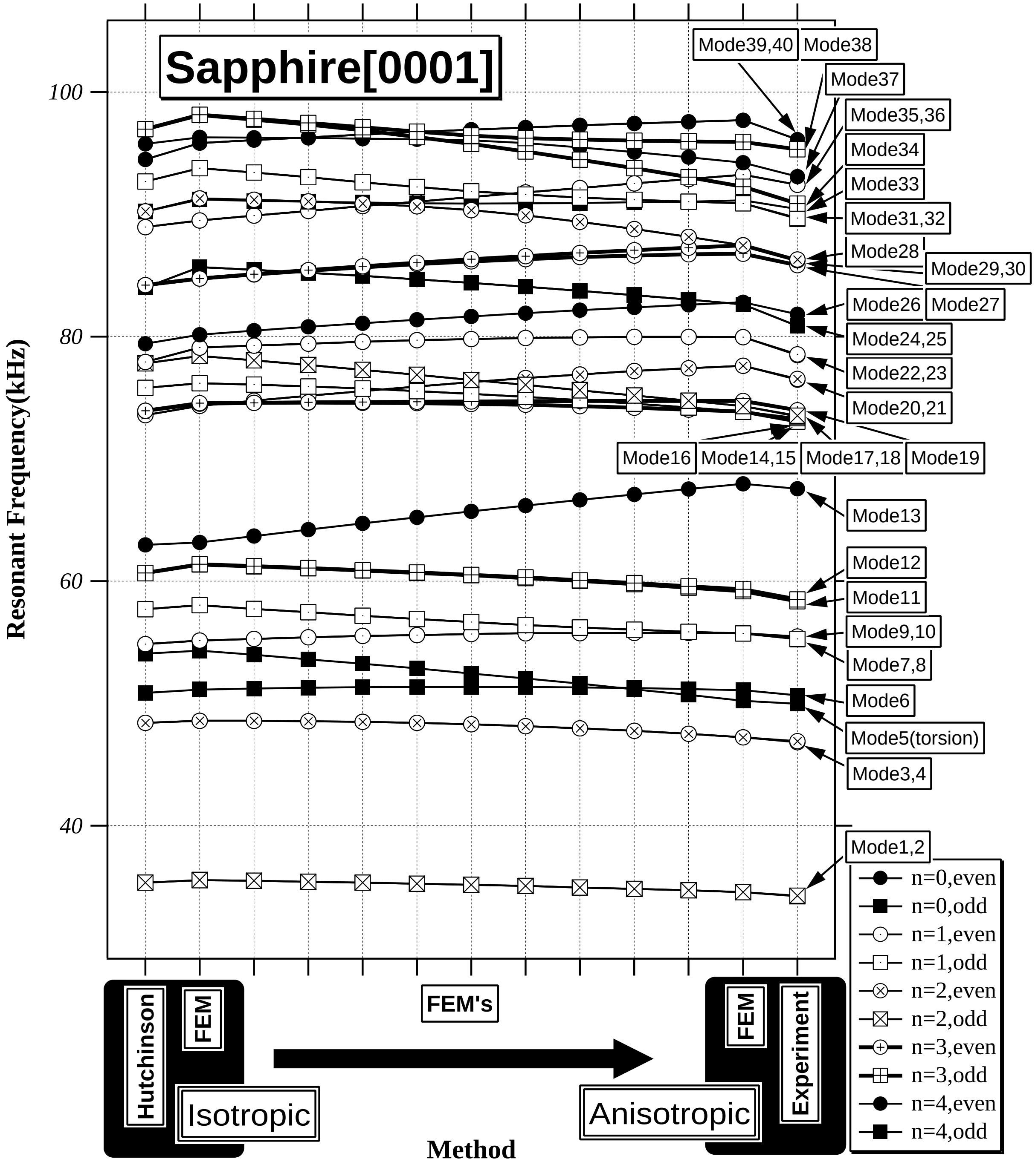

図 5.16: Sapphire[0001] において異方性を導入していった場合の周波数変化

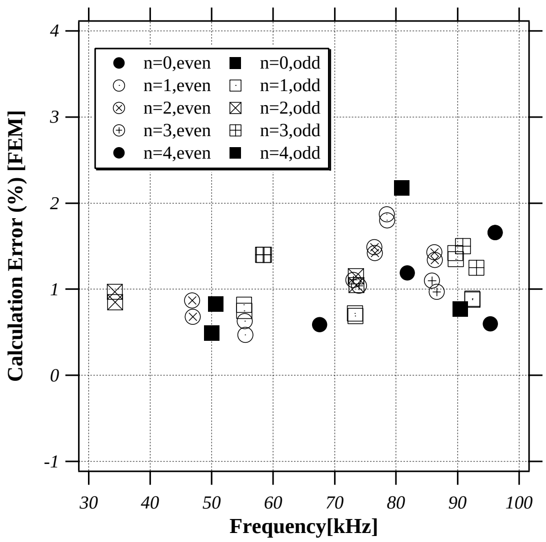

図 5.17: サファイア [0001] における有限要素法の誤差

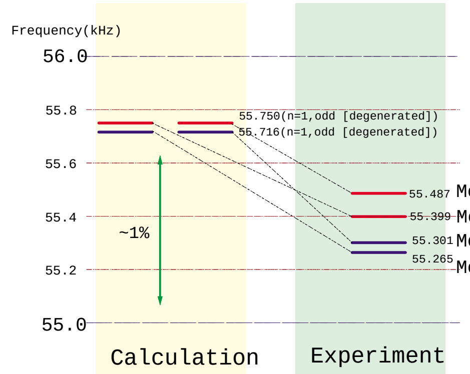

図 5.18: サファイア [0001] におけるモード同定 (1)。モード 7,8($n = 1$,odd) とモード 9,10($n = 1$,even) のモードほぼ等しい周波数として計算された。実験では、周波数の非常に接近した 4 つ 2 組のモードが見つかった。ここでは、共に Order $n = 1$ のモードであり、その区別はそれほど重要ではないと考え、このように同定してある。

計算された共振周波数 [実験との対応]

このサファイアの結晶軸を持つ場合について、実験を行い対応を取った[28]。実験では、各共振の間の周波数帯域も探索を行ったが、有限要素法で計算されていない共振は発見することができず、実験と計算は過不足がなかった。

周波数に対する誤差を図 5.17 に示す。これをみると、すべての周波数帯で誤差が正、つまり実際よりも高く周波数を計算している。最大は Order $n = 4$ の誤差 2.2% であり、典型的には、1% であった。別の文献の弾性定数を用いたときにはさらに誤差が大きくなっていた。シリコンよりも計算誤差が大きいが、これは、弾性定数の不確定さのためだと考えられる。Order の高いモードに関しては、モデルが有限要素で組まれていることで、誤差が大きくなってきている。

周波数の低いほうから見ていった場合、計算結果の順番と実験結果の順番の対応に迷う場合、入れ替わっていると判断せざるを得ない場合があった。図 5.16 の拡大図として、それらの状況を、図 5.18,5.19,5.20 に示した。

この 3 つのケース以外は全く問題なく計算と実験の対応を取ることができている。

なお、シリコン [111] の場合と同様の理由により、ねじれモードも実験的に検出することができている。

中心での変位のないモード

このサファイア [0001] の場合も、中心での変位のないモードは、シリコン [111] と同じく、

- Order $n = 3$ のモードの片方
- Order $n = 0$ のねじれモード (モード 5)

のみであった。

まず、Order $n = 3$ のモードについて詳しく見てみる。

[28]第 6 章の表 6.4 を参照。

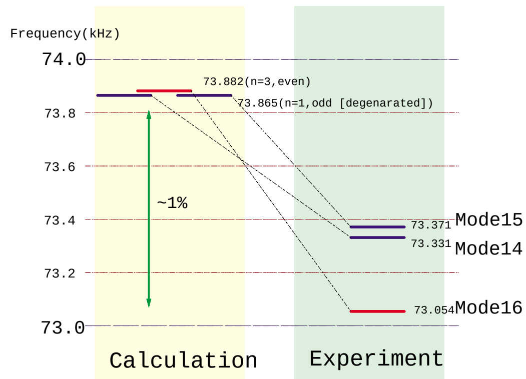

図 5.19: サファイア [0001] におけるモード同定 (2)。縮退しているモード 14,15($n=1$) とモード 16($n=3$) の計算値も接近していた。実験では、非常に接近した周波数を持つ 1 組の共振の下に離れた共振が確認された。この場合、Order の高いものが周波数が高く計算されるという経験則とも合致するので、これらのモードの対応をとった。

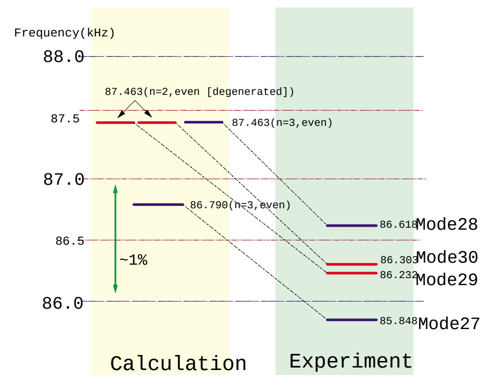

図 5.20: サファイア [0001] におけるモード同定 (3)。モード 28($n=3$) とモード 29,30($n=2$) について。これらのモードは偶然にも周波数がすべて同じだと計算されている。実際の共振は、接近している 2 つの共振より少し高いところに共振が発見されているので、これも対応をとることができた。

モード番号	Parity p	周波数差 (計算)	周波数差 (実験)	中心での変位
11				0.00
12	1	148Hz	146Hz	0.10
16				0.26
19	0	863Hz	920Hz	0.00
27				0.58
28	0	673Hz	771Hz	0.03
34				0.01
37	1	1981Hz	2178Hz	0.35

表 5.5: Sapphire[0001] Order $n=3$ のモードにおける縮退のほぐれ

図 5.16 から、この結晶軸をもったサファイアの場合にも、Order $n=3$ のモードは縮退が解けて別々の周波数に分かれることが分かる。シリコン [111] の場合と同様に、この場合にも Order $n=3$ のモードを表 5.5 に整理した。

モード 28,34 の中心の変位が 0.00 でなくなっているが、おそらく計算誤差の範囲で[29]、この表 5.5 は表 5.4 と酷似した関係になっている。

この場合も、

- Order $n=3$ のモードは分裂する。計算と実験で共に確認されている。
- 計算によると、そのうちの片方の中心での変位が有限の値となるが、他方は変位を持たない。

という特色がある。

[29] 計算誤差だと断定してしまうには微妙な値であった。同じスティフネス行列を持つシリコン [111] の場合には変位が 0 であったので、弾性定数を多く入力しているこの場合には計算誤差が現れやすいと考え、ここでは計算誤差としておく。いずれにしても他のすべてのモードよりも 1 桁以上小さい値である。

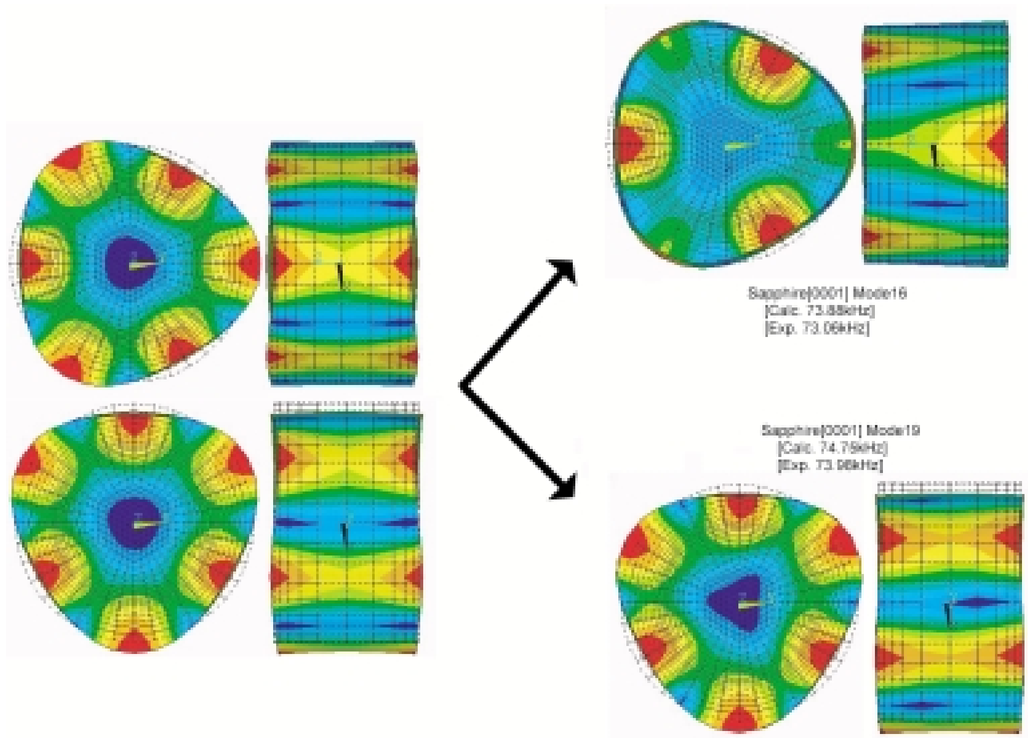

図 5.21: Sapphire[0001] モード 16,19(Order $n = 3$, Parity even) の、異方性を導入したときの変遷。等方極限では、Order $n = 3$ のモードは縮退しているが、異方性を増すとこれらのモードは別々の周波数に分かれる。このモード形状はシリコン [111] の場合と非常によく似ている。縮退がとけた片方は中心の変位が有限で、他方は変位を持っていない。また、Parity の入れ替わりを片方が起こしている。

例として、Order $n = 3$ のモード 16,19 の形を図 5.21 に示す。等方極限からの変化も示した。これは、シリコン [111] の場合の図 5.8 に酷似した関係になっている。

ねじれのモード (モード 5) も中心での変位が 0 となっていた。ねじれモードが全て中心での変位がとなるのかどうかは、考慮している周波数範囲内にねじれのモードが 1 つしかなかったために、判断することができなかった。

中心での変位が有限なモード

シリコン [111] の場合と同様、Order $n = 3$ のモードの片方および、ねじれのモードを除いて、すべて中心が変位するようになっていた。

図 5.22 に Order $n = 2$(平面内四重極) での例を示す。異方性を考慮した場合、中心は不動点ではなくなり、変位の少ない部分は中心から外れている。

このような特徴は Order $n = 2, 4$ の全てで見られた。また、ねじれを除く Order $n = 0$ と $n = 1$ のモードは等方極限では有限の変位を中心で持つが、異方性を考慮してもそのまま変位を持っていた。

変位の方向は、Order $n = 1, 2, 4$ のモードでは平面内に限られ、z 方向に変位を持っているものはなかった。また、Order $n = 0, 3$ で中心が変位するモードは、その変位は z 方向のみであった。この特徴もシリコン [111] と似ている。

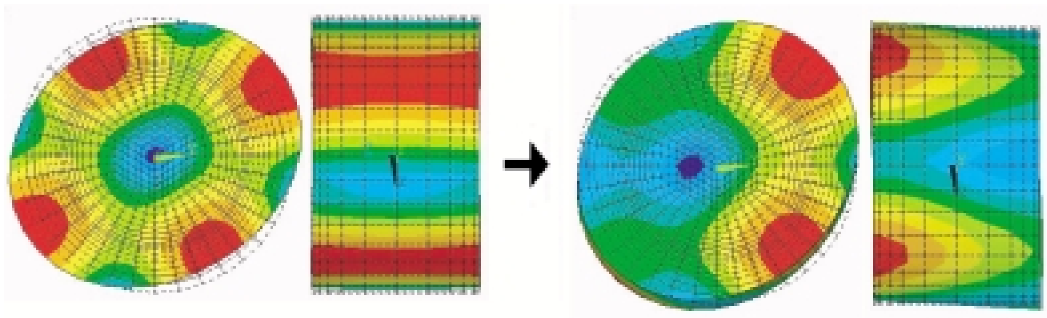

図 5.22: Sapphire[0001] モード 3(Order $n = 2$, Parity even) の、異方性を導入したときの変遷。

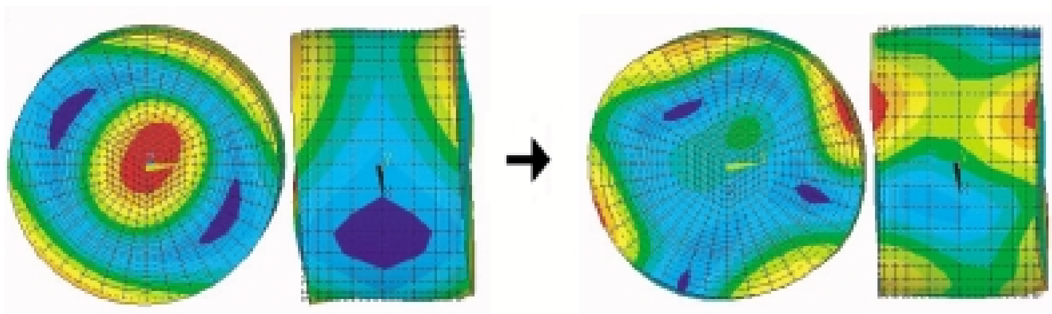

図 5.23: Sapphire[0001] モード 32(Order $n = 1$, Parity odd) の、異方性を導入したときの変遷。

モード形状の特徴

シリコン [111] の場合と同様に、

- 全てのモードが 3 回対称の影響を受け、その形が歪んでいる。
- Parity の区別も明確ではなくなっている。

という形状の特徴が見られた。

例として、Order $n = 1$, Parity odd のモードを図 5.23 に挙げる。実際の異方性を入れた場合の計算結果のみを見ても、Order や Parity を判断することがほとんど不可能になってしまっている。

Order $n = 0$ のモードは Order $n = 3$ のモードと区別がつけにくくなっていた。このようにサファイア [0001] とシリコン [111] のモード形状とその特徴が非常に似ているのは、スティフネス行列の形が同じだからであろう。

5.4.5　サファイア $[11\bar{2}0]$

単結晶サファイアの a 軸が、円柱軸に平行な場合を計算した。a 軸に対する結晶の対称性は低い。

この試料も存在しないので、計算結果を簡単にまとめることにする。この計算を行う際には、三方晶系のスティフネス行列を y 軸 (a,c 軸と垂直な方向) に関して 90° 回転して a 軸が z 軸を向くようにし、円柱は z 軸を長さ方向にとるように配置してある。このとき、スティフネス行列は以下のようになっている。

$$\begin{pmatrix} c_{33} & c_{13} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & -c_{14} \\ & & c_{11} & 0 & 0 & c_{14} \\ & & & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) & c_{14} & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & c_{44} \end{pmatrix} \tag{5.48}$$

等方近似から実際の異方性体へ

この場合も、等方極限から実際の弾性定数まで、断続的に弾性定数の値を変化させながらモードの周波数と形の変遷を追った。弾性定数の変化のさせ方は、サファイア [0001] の場合と同様である。図 5.24 にこの結果を示す。

図 5.24 を見ると、等方極限では縮退していたすべてのモードが、その縮退を解いている。このような特徴は、シリコン [111],[001]、サファイア [0001] では見られなかったことである。

サファイアの場合、ある格子点を c 軸に関して、120° 回転させてそれを反転したものが同値の点に対応する[30]。従って、c,a 軸が構成す面に関する対称性も崩れている。このような、方向に関する対称性のない軸を円柱軸としているので、すべての Order のモードの縮退が分裂するということが起きていると思われる。

中心での変位のないモード

円柱の中心の変位を見ると、変位が誤差の範囲で 0 であったのは、ねじれのモードと、Order $n = 2$ の一部だけであった。Order $n = 2$ のモードは縮退が解けているが、そのうちの片方の中心の変位が必ず 0 になる、ということでもなく、規則性は明らかではなかった。

中心での変位が有限なモード

この場合もほとんど全てのモードで中心での変位が有限となっていた。すべてのモードが縮退をとき、かつ、中心の変位も有限になる、という状況になっている。

モードの形の歪み

この場合もモードの形は等方体の場合に比べて歪んでいる。図 5.25,5.26 に Order $n = 0, 3$ の場合の例を示す。

Parity に関しては、大きく乱れて判定がしにくい、ということはなかった。シリコン [111] の場合、Order $n = 3$ のモードの片方は Parity が変化して見えるということがあったが、ここでの Order $n = 2$ のモードは周波数が離れていくが、ともに Parity は保存しているようだった。

このようなモード形状となってしまったのは、a 軸という対称性の悪い軸を円柱軸としているためだと思われる。ただし、この場合の実験は、試料がないために行えていない。これらの現象が正しいものであるかどうか、実験によって周波数の対応を取らなければ断言することはできない。

[30] 対称群が $R\bar{3}c$ なので。

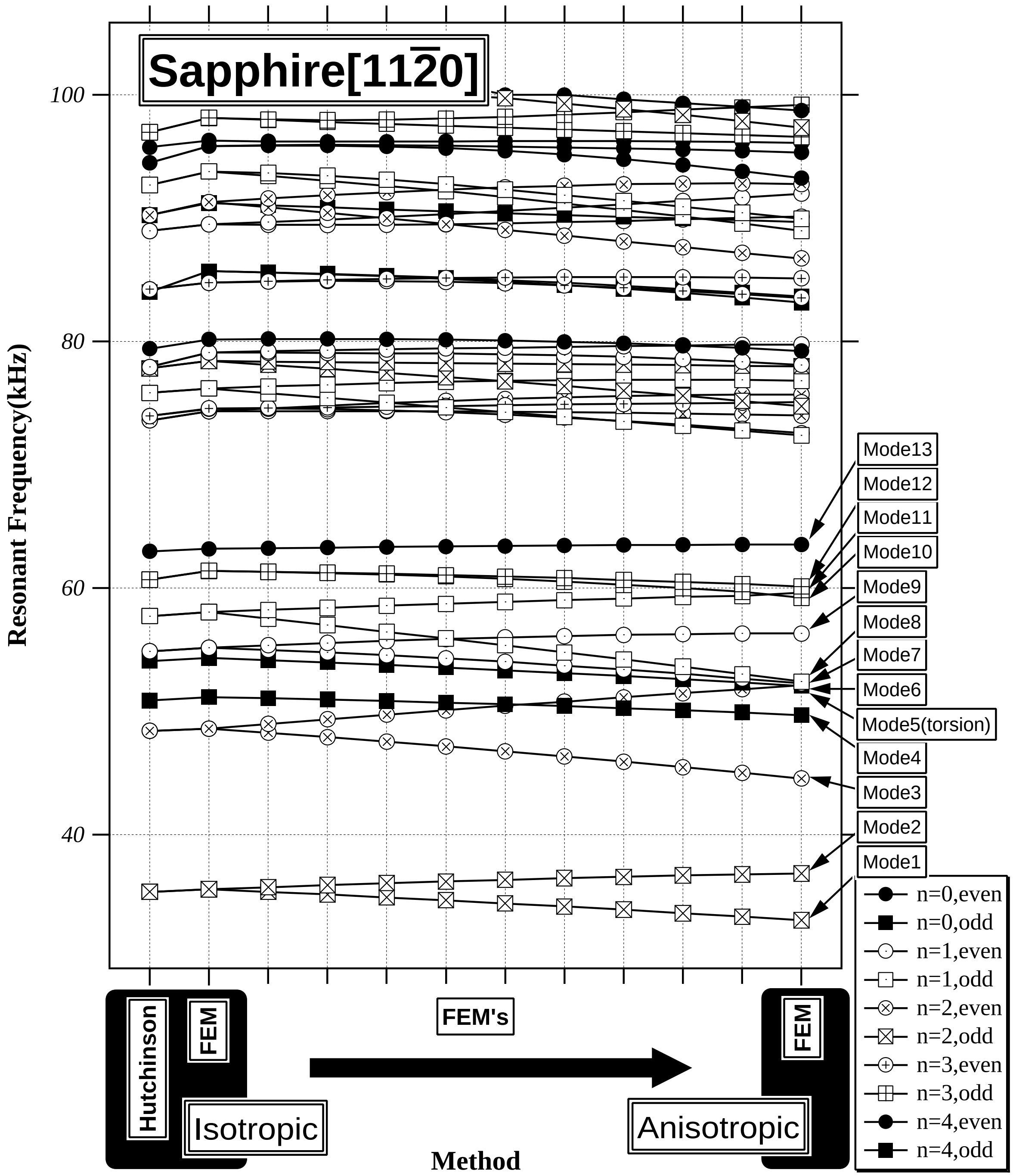

図 5.24: Sapphire[11$\bar{2}$0] において異方性を導入していった場合の周波数変化

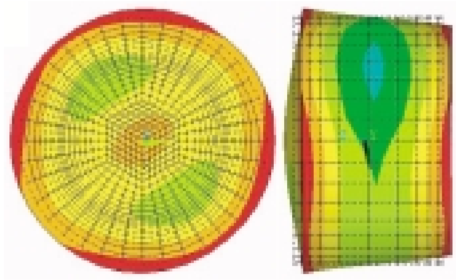

図 5.25: サファイア $[11\bar{2}0]$ のモード 4(Order $n=0$,Parity Odd) の形状

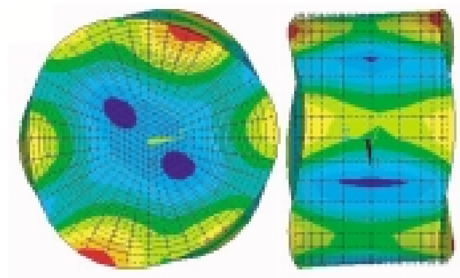

図 5.26: サファイア $[11\bar{2}0]$ のモード 10(Order $n=3$,Parity Odd) の形状

5.5 この章のまとめ

低損失の材料の場合、測定される Q 値は支持により導入される損失で制限されてくる。支持により導入される損失をなくすためには、材料の振動モードが変位を持たない部分で支持を行えばよい。従って、材料の振動モードの解析を行うことが、材質の Q 値の測定実験にとって必要となってくる。

しかし、これまで、ここで扱うような異方性を含む材料の振動モードを正確に解析した例は報告されていなかった。異方性物質内の弾性波は簡単に記述できず、解析的に扱うのが非常に困難であるからであった。また、数値計算の精度も十分でなかった。

そのため、まず本章では、鏡の機械損失の実験を行うための前段階として、有限要素法による異方性を含む円柱状弾性体の振動モード計算を行った。

まず、等方体の溶融石英についての計算を行った。その結果は、半解析的な手法である Hutchinson の方法には及ばなかった。しかし、これまでの有限要素法での計算精度を 1 桁上回る精度 (数%) で、共振周波数の計算を行うことができた。

次に、異方性物質の計算を行い、特に以下の二つの場合で実験との対応をとることができた。

- シリコン (円柱軸が [111] 方向に平行な場合)
- サファイア (円柱軸が [0001] 方向 (c 軸) に平行な場合)

前者の場合で、実験との誤差を $\sim 0.5\%$ 、後者の場合で $\sim 1\%$ ほどに抑えることができた。これら、ふたつの場合で共通している特徴がいくつかあった。

- Order $n=3$ のモードは縮退が解ける。
- 縮退が解けたモードのうち片方は中心の変位を持つが、他方は持たない。
- 他の Order のモードは形が歪み、中心で有限の変位をもつ。
- Order, Parity はモード形状をあらわすのに最適なパラメータではない。

これらの結果は、等方体と近似した場合には得られないものである。これらの結果から、異方性のある鏡の振動モード形状は、円柱軸に関する結晶の対称性により大きな影響を受けることが示された。

モード形状の特徴を理由付ける解析的な議論、これからの課題として残っている。

この計算結果は、次章の材質の Q 値の測定実験で、以下のように用いられた。

- 実験で測定された共振周波数からモード同定を行う。

- 中心が不動点となるモードを知る。中心で支持を行っていれば、このモードが支持系による損失が発生しないモードとなる。

- モード形状を知り、測定された Q 値の解析を行う。

なお、この計算結果を利用した、異方性のある鏡を用いた場合の干渉計型検出器における鏡の熱雑音について、補遺 B にまとめた。

第6章

材料のQ値の測定実験

前章では、異方性を含む鏡の弾性振動のモードを有限要素法により求めることができた。ここでは、鏡材料の Q 値を測定する実験を行う。計算結果と比較することにより、支持形による損失や鏡材料に固有の損失を議論することにする。

第 3 章で述べたように、鏡の内部損失を知るためには Q 値の測定が行われる。地上においては、自由落下させない限り、試料を支持しなければ Q 値の測定を行うことはできない。しかし、支持を行うことにより導入される散逸が、ここで扱うような低損失の材質の場合には無視できなくなってくる。第 3 章で紹介したように、これまで世界で行われてきた測定では、材質 (鏡) そのもののの損失を知ることはできなかった。それらの実験においては、必ず支持に伴う散逸が存在し、結果として生じる Q 値から内部損失を類推するということが行われていた。

しかし、材質自体で決まる Q 値を測定しておくこと、また、そのような手法を確立しておくことは、以下の観点から非常に重要である。

- 材質 (鏡) そのものの Q 値 (intrinsic Q) を知ることで、それを懸架した場合の Q 値の限界を知ることができる。それは、干渉計型検出器で原理的に到達可能な感度を与えると考えられる。

- より低い内部損失を持つ材料、すなわちより高い Q 値を示す材料を探すことができるようになる。

- 外部から導入される散逸を直接評価することができる。

そのような目的のために、本研究では、支持による散逸を導入することなく、鏡の intrinsic な Q 値を直接測定する実験を行った。鏡の振動モードを考慮したとき、中心は、等方性弾性体ではほとんどのモードで、異方性弾性体では一部のモードで、完全な不動点 (節点) となる。そこで、円柱形の試料の上下の中心をルビーの小球で支持する方法を考案した。この方法では、鏡の損失を知る上で大きな問題となっていた、支持による損失が原理上存在しないはずである。

本章では、この方法で行った鏡材料の Q 値の実験とその結果について述べる。

6.1 実験装置と試料

等方性弾性体では Order $n > 1$ のモードで、異方性弾性体では、円柱軸と結晶軸の配置によって決まる Order のモードで中心が不動点になることが第 5 章で分かった。この特性を利用して、試料自体の損失を直接測定することを考え、実験装置を構成した。

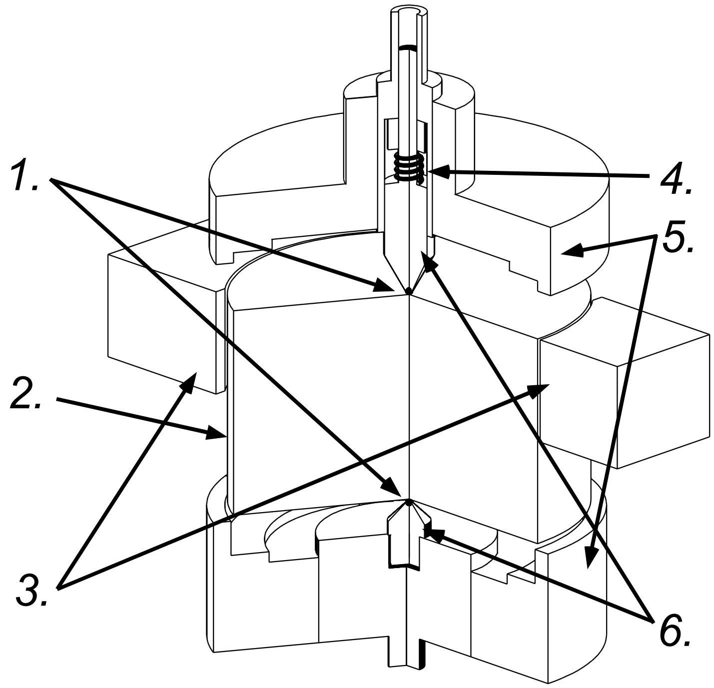

図 6.1: 試料支持系 (断面図)。1. ルビー球 (直径 2mm)、2. 試料 (直径 10cm, 高さ 6cm)、3. 励起用極板の土台 (励起系の項参照)、4. ばね、5. アジャスター、6. ロッド。

円柱の中心で試料を点接触で支持できれば、中心が不動点となるモードで、試料自体の損失が直接測定できるはずである。

そのため、試料の支持系として、円柱の中心をルビーの小球で支持する装置を製作した。この装置の各部は、ルビー球が円柱の中心に精度よく一致するように、工夫がなされている。

ここでは、試料の内部共振を励起し、その減衰の速さから Q 値を求める手法をとる。そのため、試料の振動を励起する励起系を用意した。静電型の電極と、PZT を場合に応じて用いた。

試料の微小振動の計測のために、差動型マイケルソン干渉計を構成する光学系を用意した。光の波長よりも小さい変位を測定するため、干渉計の制御が必要となる。そのため、電気回路からなる制御系も用意した。

振動の減衰を記録するためのデータ取得系としては、ロックインアンプと PC を用いた。また、大気による損失の効果を除去するため、試料と支持系は真空系に収められている。

この節では、これらの系について順に説明し、測定した試料についても述べる。

6.1.1 試料支持系

試料支持系の図を図 6.1 に示す。写真を口絵 Fig.1 に示した。

ルビー球

試料と接触する部分には、直径 2mm のルビー球を用いた。ルビー球 2 つで、試料の上下の中心を支持する (口絵写真 Fig.2)。ルビー球は動かないようにロッドにはめ込まれる。

ルビーの小球を選択した理由は、以下の通りである。

- ルビーは硬いので変形しにくく、接触面積を低く保てる。また、繰り返し使用にも耐えられる。

- ルビーはサファイアと同じ結晶構造をもち、含まれるイオンが異なるだけである。そのため、Q 値が低くないと期待される。
- 球の直径が小さい方が、接触面積が小さくなると期待される。

他の例を試したわけではないが、結果は十分満足できるものであり、変更を要すような状況には迫られなかった。

ロッド

ルビー球はステンレス製のロッドにはめ込まれる。散逸を導入する原因となる可能性のある接着剤は、使用していない。

上側のロッドは外側の枠 (アルミニウム製) の中を上下に動くことができる。図 6.1-4 のバネがロッドを下向きに押し付ける役割をし、試料が不安定に倒れるのを防ぐ。接触している効果を少なくするため、試料が倒れない程度に、できる限り弱くバネの強さを設定した。およそ 100g 重程度の力が下向きに加わる設計になっている。下側のロッドはロッドの土台 (アルミニウム製) にはめ込まれる。これら、上下のロッドの可動部分、はめ込み部分はすり合わせの精度[1]で加工されている。

ダイヤルゲージを用いて測定を行いながら、ロッドの位置を周りの外枠に対して固定した。上下のルビー球の位置の誤差は 0.1mm 以下となっている。

アジャスター

試料の位置あわせをするための器具である。材質としては、試料よりもずっとやわらかい材質であるジュラコンを選んだ。それは、試料に直接触れるためである。

試料の大きさは直径 10cm 、高さ 6cm の円柱形である。しかし、試料により微妙に直径が異なる[2]。そのため、試料ごとに、それとすり合わせではめ込みができるよう、下側のジュラコンのアジャスターを用意した。上下のアジャスターを用いたことにより、ルビー球と、試料の中心との距離は 0.3mm 程度に抑えられていると考えられる。

アジャスターとそれがはまるアルミの円柱部は、すり合わせの精度で加工されている。わずかな傾きや熱変形によってアジャスターが動かなくなることを避けるために、真空対応のシリコングリスを塗った。

装置の骨組み

装置の他の部分はアルミ製である。上下のルビー球の位置が一致するように、注意が払われている。また、ロッドが垂直に立つよう、骨組みが工夫されている。

これまでの鏡の Q 値の測定 [25] では鏡を振り子状に懸架する装置が用いられていた。そのため、装置自体が、地面振動や真空系の振動を防振する役割も果たしていた。しかし、本章の実験装置ではその効果が期待できない。そこで、装置の下にやわらかいゴムをいれ、防振を行っている。

6.1.2 励起系

第 3 章で、二つの Q 値の測定法を示した。ここでは、試料の内部共振を励起して、その励起の減衰を観測することにより Q 値を測定する方法を採用した。そのため、試料の内部共振を励起す

[1] あそびがほとんどない状態。誤差 0.1mm 未満は達成されている。

[2] 実際の試料は、円柱であるべきだが、楕円錐台になっている。ただし、1/100mm のレベルでの話である。マイクロメータを使うと、上下の円で、また、円の面内でも方向により微妙に長さが異なっているのが確認できる。おそらく、旋盤で加工している際の誤差によるものであろう。

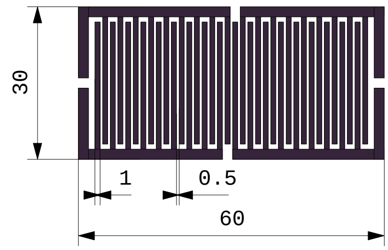

図 6.2: 励起用くし型電極。単位 mm。フレキシブル基板上に作成した。これを曲面をもったアクリルの土台に貼り付けている。

るための励起系が必要となる。ここでは、試料に接触せずに励起を行える静電型電極と、試料に接触して振動を励起し、励起後に試料からはずされる PZT の二つを場合に応じて用いた。

静電型電極

絶縁体の試料に対し、電極を用いた引力により力を加える方式である。ここでは、電極をくし型に配置したくし型電極 [63, 64] を用いた。これは、交互に並んでいる電極による電場を効率よく利用するための工夫である。力は、加える電圧の 2 乗と極板の面積に比例して強くなる。また、誘電体との距離が大きくなるほど、指数関数的に力は弱くなる。

本実験では、試料側面での励起を行った。図 6.2 のような電極パターンをフレキシブル基板上に作成した。それを曲面をもったアクリルの土台 (図 6.1-3) に接着した。極板と試料側面の間の距離は、0.5mm 程度になるように調節される。

励起を行う際には、シンセサイザからでた出力を高電圧アンプに通して、100V の DC オフセットを乗せ、200V_{P-P} の電圧をくし型電極の片方の極板に加えた。この場合、電気系と試料の間のカップリングは非常に小さいと考えることができ、実際に確認してある。

PZT

試料と接触しないという点でくし型電極は有利である。しかし、その力が弱いため、励起できないモードがでてきてしまう。そのため、電極に比して強い力を加えることができる PZT を用意した。

用いた PZT の共振は 330kHz 程度にある。そのため、実験で注目している周波数帯 (100kHz 以下) の振動の励起を行うことができる。この PZT を機械式のリレーに固定した。PZT は、試料の内部共振の励起のために、試料側面に接触する。共振の励起後、リレーの機械的な動作により、PZT は試料から外される。

6.1.3　光学系

試料の微小振動の変位を読むために、差動型のマイケルソン干渉計を組んだ。

差動型マイケルソン干渉計の原理

まず、差動型マイケルソン干渉計の原理を示す。図 6.4 のようにレーザ、ビームスプリッタ、二つの鏡、二つのフォトディテクタ (PD1,PD2) を配置する。振幅反射率、透過率、距離を図のように定義する。

$$E_0 = Ae^{i\omega t} \tag{6.1}$$

の入射光があるとして、PD1,2 に入る電場 E_1, E_2 は、

$$E_1 = Arte^{i\omega t}(Re^{-2ikl_1} - e^{-2ikl_2}) \tag{6.2}$$

$$E_2 = Ae^{i\omega t}(t^2Re^{-2ikl_1} + r^2e^{-2ikl_2}) \tag{6.3}$$

と書ける。ただし、k はレーザの波数、λ は波長で、両者には、

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{6.4}$$

の関係がある。PD1,PD2 に流れる電流 I_1, I_2 は放射感度を η とすれば、

$$I_1 = \eta|E_1|^2 = \eta r^2t^2A^2\left(R^2 + 1 - 2R\cos\left(2k(l_1 - l_2)\right)\right) \tag{6.5}$$

$$I_2 = \eta A^2\left(t^4R^2 + r^4 + 2Rt^2r^2\cos\left(2k(l_1 - l_2)\right)\right) \tag{6.6}$$

と書ける。この差をとって、I とする。

$$I \equiv I_2 - I_1 = \eta\left(A^2(t^4R^2 + r^4 - r^2t^2R^2 - r^2t^2) + 4Rr^2t^2A^2\cos\left(2k(l_1 - l_2)\right)\right) \tag{6.7}$$

これを、$l_1 - l_2 = \Delta l$ として、

$$I = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2} + \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2}\cos\left(2k\Delta l\right) \tag{6.8}$$

と書く[3]。

これに DC オフセットを乗せて、正負に等しく $|I_P|$ だけ振れるようにする。

$$I = |I_P|\cos\left(2k\Delta l\right) \tag{6.10}$$

$I = 0$ 付近では、$2k\Delta l = \pi/2 + n\pi$ なので、変位に対する信号の微係数は、

$$\frac{\partial I}{\partial \Delta l} = \pm 2|I_P|k \tag{6.11}$$

となる。電圧 V が電流 I に比例するような素子を用いれば、電圧の振幅を V_{P} として、

$$\frac{\partial V}{\partial \Delta l} = 2V_{\mathrm{P}}k = 4\pi V_{\mathrm{P}}/\lambda \tag{6.12}$$

これが、マイケルソン干渉計の伝達関数 (変位/出力換算係数) となる。ただし、符号は正の方をとってある[4]。式 (6.10) から、変位 Δl と出力 V が比例するような小さな変位すなわち、

$$|\Delta l| \ll \lambda/8 \tag{6.13}$$

なる変位を、測定可能なことが分かる。

ただし、このためには、干渉計を最も感度のよい状態である動作点 ($I = 0$) に保持することが必要である。そのために、この実験では干渉計を構成する二つの鏡のうちの一つを参照鏡とし、その位置を制御している。

以下、光学系の各部について示す。

[3] 干渉計のコントラスト C は、

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \tag{6.9}$$

で定義される。これは、干渉縞の明瞭度を表す指標である。

[4] 今のマイケルソン干渉計の場合、係数が正か負かどちらか一方でロックする。

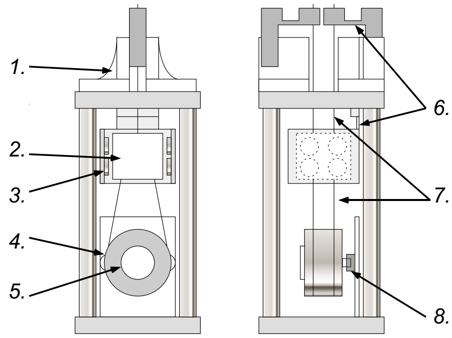

図 6.3: 参照鏡用 2 重振り子。1:XZ ステージ、2:中段マス、3:永久磁石、4:テストマス、5:アルミ蒸着ミラー、6:板バネ、7:タングステンワイヤ、8、コイルマグネットアクチュエータ

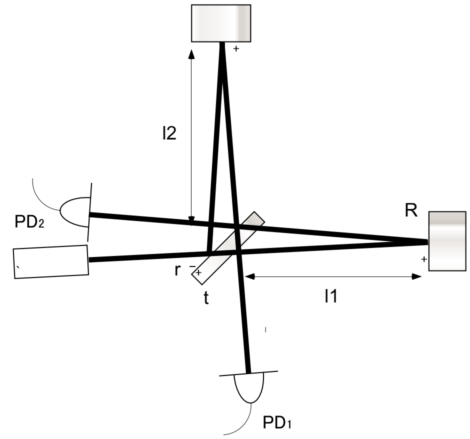

図 6.4: 差動型マイケルソン干渉計

レーザ

光源として、波長 633nm の He-Ne レーザを用いた。この He-Ne レーザ管にはヒータが巻かれている。レーザ管の温度調整により周波の安定化を行っている。具体的には、レーザ光の出力の方向と反対側に設置された PBS と PD により得られる信号を使った、2 モード法 [65] を用いている。

参照鏡

参照鏡は、干渉計の片方の腕を構成する鏡である。この鏡により干渉計を動作点に保つ。

ここでは、図 6.3 に示すような、2 重振り子に懸架された参照鏡を用いた。用いているワイヤは磁気を帯びない、タングステンワイヤである。中段マスは銅で作られている。その周囲に配置された強力な Nb 磁石により誘起される渦電流で、振動がダンピングされる。2 段目の振り子のアルミマスに取り付けられている、アルミ蒸着の鏡をとりつけている。アルミマスには水平方向に 2 個所、小さい Nb 磁石が取り付けられている。コイルをここに近づけ、電流を同相で流すことにより、光路長の制御を行う。

試料の側面反射

試料側面での反射を利用し、試料の変位を読む。レーザビームのあたる位置は、試料の上面から 1cm ほどの個所である。円柱の側面中央付近にあたるようにしている。試料 (半径 5cm) の手前に焦点距離 8cm の円筒型レンズを入れ、反射光の広がりを防止している。しかし、試料の反射率の低さから、干渉計のコントラストは数% から 20% 程度と低いものになっている。

これらの光学系の設置の様子を図 6.5 に示す。

6.1.4　制御系

干渉計を動作点に保つために、電気回路による制御系を用意した。

図 6.6 は干渉計の動作のための制御系の概念図である。ここで、H_M はマイケルソン干渉計の変位から出力電圧への伝達関数である。干渉計と、二つの PD からの差動信号を増幅する回路、オフセットを乗せる回路から構成されている。H_C は回路系の入力電圧からコイルに流れる電流の伝達関数である。制御用のフィルタ回路とコイルに電流を流すためのドライバ回路からなる。G は、コ

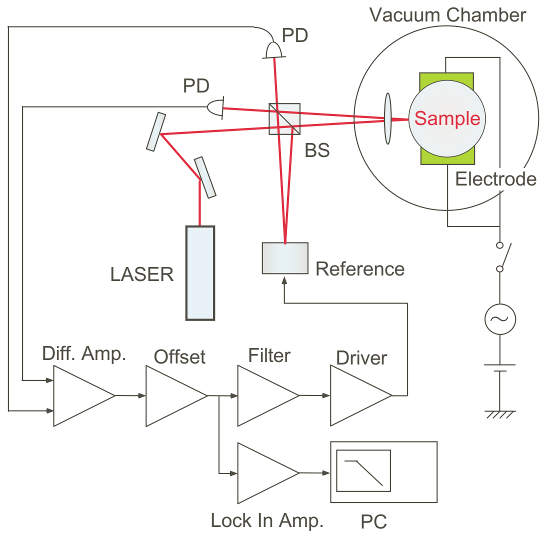

図 6.5: 光学系をはじめとする測定系。装置、試料、円筒型レンズと極板 (PZT) は真空系に収められる。

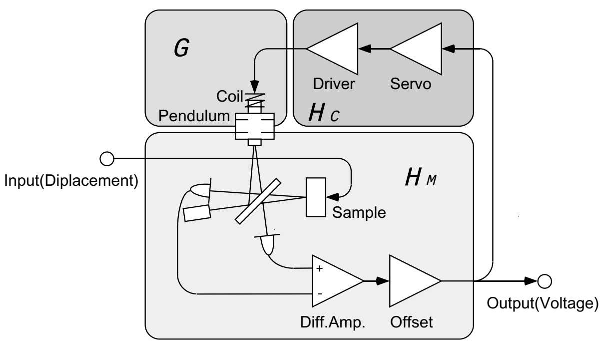

図 6.6: 制御系の概念図

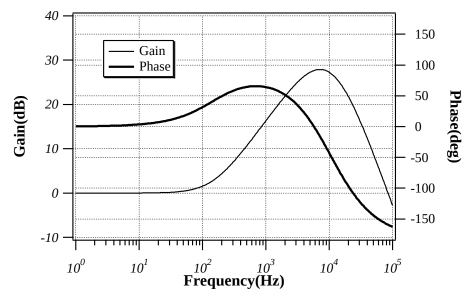

図 6.7: 制御用フィルタの振幅、位相特性。実際にはゲインは可変である。

イルに流れる電流から、振り子状に懸架されている参照鏡の変位への伝達関数である。

ここで重要なのはフィルタの設計である。H_M は先ほど見たようにフラットな特性を持つ[5]。G はすぐに知ることはできないが、一段振り子で、下段を振ったときの変位への伝達関数に比例するとしてよかろう。これは、周波数が高くなると位相が $-180°$ に漸近していき、絶対値は周波数の自乗に比例して小さくなる。オープンループ伝達関数 $H_M H_C G$ が 1 となる周波数までは位相が 180° 以上遅れない、という無条件安定条件を満たすためには、低周波領域で位相が進むようなフィルター H_C を導入すればよい。

ここでは、図 6.7 のような特性をもつフィルターを用いて、干渉計の制御を行っている。

6.1.5 データ取得系

試料の振動に比例した信号が干渉計の出力から得られる。これを記録するために、ロックインアンプと PC を用意した。

試料の内部共振の励起にはシンセサイザからの交流信号を利用する。これと同じ周波数にロック

[5]本当はローパス特性を持つが、ここでは利かない。

したロックインアンプに干渉計の信号を入力し、振動の周波数成分の信号を取り出している。

その信号の大きさは時間と共に減衰していく。今回の場合、数秒から数十分の減衰時間となる。この記録のため、PC を用意した。ロックインアンプの出力信号は、ADC を通して、PC に入力される。

6.1.6　真空系

試料とその支持系は真空容器に収められる。これは、空気によるエネルギーの損失を避けるためである。

真空容器は、ベルジャーと呼ばれる、強化ガラス製の透明な容器である。

真空ポンプとして、ロータリーポンプとディフュージョンポンプを用意した。両者を用い、10^{-4}Torr 程度の真空中で、実験を行った。実際には、ロータリーポンプで 0.1Torr 程度の真空度となれば、大気の散逸は無視できる領域に入る。実験でもこれは確認されている。

6.1.7　試料

試料として、TAMA300 で用いられる鏡と同じ大きさ (直径 10cm, 高さ 6cm) を持つ、溶融石英、シリコン、サファイアを用意した。

溶融石英は、現在の世界の大型レーザ干渉計計画で用いられている鏡材料である。また、シリコンやサファイアは、将来計画に用いられる可能性がある鏡材料である。

以下、これらの試料について述べる。

溶融石英

溶融石英の成分は二酸化珪素 SiO_2 である。ガラス状 (非結晶) の構造をもっている。

ここでは、SUPRASIL P-10、SUPRASIL P-30 と呼ばれる二つの溶融石英について測定を行った[6]。どちらも、信越石英 (株) で作られた、超高純度光学用合成石英である [60]。原料は天然の結晶質二酸化珪素であり、1700°C 以上の高温で溶融されて製造される。P-10 は全方向に脈理がないが、P-30 は脈理は含んでいる。屈折率の規則的変化は、P-30 の方が大きい。両者とも、天然石英ガラスのような粒状構造は含んでおらず、泡の含有量も非常に少ない。

文献 [60] によれば、OH 基の含有量は約 1200pm である。Cl 基の含有量は掲載されていない[7]。

ここでは、以下のような P-10,P-30 の測定を行った (口絵写真 Fig.3)。

- SUPRASIL P-30
  過去に坪野研究室で、懸架条件での Q 値が測定されていた [25]P-30 である。両面は平面研磨され、側面も研磨されている。ただし、側面の研磨は粗い (口絵写真 Fig.4)。片側の平面にはアルミコーティングが施されている。作成から数年が経過しており、大気中に触れている時間も長く、傷も目立つ。

- SUPRASIL P-10
  この試料は TAMA300 のリサイクリングミラーの基盤である。片面は平面研磨されている。他方の面はリサイクリングミラーとしての大きな曲率 (9km) を持って研磨されている。側面も研磨されている。実際のミラーでは誘電体多層膜コーティングが施されるが、ここで用い

[6]SUPRASIL というのは製造工程によりつけられている名前である。
[7]他の方法で製造された溶融石英では、OH 基の含有量が数 ppm 以下となるものもある。OH 基、Cl 基の含有量と Q 値の関係については文献 [33, 66, 67] 等を参照。

た試料にはコーティングは施されていない。表面粗さは 3Å 程度、形状誤差は $\lambda/10$ 以下である。

シリコン

ここで扱ったシリコンは単結晶である[8](口絵写真 Fig.5)。

平面部、側面部とも研磨されている。コーティングは施されていない。円柱の軸は、結晶の [111] 方向であるが、その方向の一致度についての情報はない。純度は非常に高いと考えられている。

懸架条件での測定では、Q 値の最高値は 3×10^6 程度であった [57][9]。

サファイア

ここで扱ったサファイアは単結晶である[10](口絵写真 Fig.6)。

サファイアは酸化アルミニウム Al_2O_3 の単結晶である。結晶構造はルビーと同じ[11] で、α-Al_2O_3 と呼ばれる安定な三方晶系コランダム型である。

米国の専門会社 Crystal Systems により製造されたもので、グレードは HEMLITE と呼ばれるものである[12]。

この試料の結晶軸の方向は、c 軸 ([0001]) が円柱軸を向く方向である。試料につけられていたデータシート [58] によると、そのずれは角度にして 7 秒である。不純物イオンは除かれており、色は無色である。全面光学研磨され、中央の数 cm の領域はスーパーポリッシュ(粗さ 1Å 程度) されている。他の領域は 3Å 程度で、形状誤差は $\lambda/4$ 以下となっている。

6.2 測定方法

次に、実際の測定方法について述べる。実験では、まず共振周波数をすべて探し出し、次に、それぞれの共振における Q 値を測定する。

6.2.1 共振周波数の探索

試料の共振を全て探し出すために、以下の方法をとった。

励起信号を生成しているシンセサイザの周波数を、探索する周波数範囲でスイープさせる。ロックインアンプの出力信号が設定した閾値を超えると、シンセサイザのスイープが止まるように設定しておく。スイープが止まった際には、共振が探し出せた可能性があるので、確認を行う。

全ての周波数範囲について探索を行ったが、探索された共振が計算と対応しないことはなかった。

なお、温度の変化によって、試料の共振周波数は変化した。例えば、シリコンの 60kHz 付近のモードでは、日によって 2Hz(0.003%) 程度の共振周波数の変化が見られた。

[8] このシリコンは、計量研究所から借りているものである。

[9] 第 5 章の計算により、これは歪んだ n=2 モード (平面内四重極モード) であったことが判明した。

[10] このサファイアは、宇宙線研究所重力波グループにから借りているものである。

[11] Ti^{4+} イオンが含まれるものをサファイア、Cr^{3+} イオンが含まれるものがルビーと呼ばれる。鉱物学ではコランダムと総称して呼ばれる。

[12] HEM は製造工程につけられた名前である。最高のグレードは HEMEX と呼ばれるもので、以下、結晶の一様性や散乱光に関する特性が落ちていくごとに、HEMLUX,HEMLITE,HEMCOR,HEMVERNEUIL という製品名がつけられている。

6.2.2　Q 値の測定

Q 値を測定する方法は、第 3 章で述べたように大きく分けて二つ存在する。伝達関数を測定しその共振の幅から計算する方法と、振動の減衰の速さから Q 値を計算する方法である。Q 値が高い場合には、後者の方が測定しやすいので、ここでは後者を用いた。

ここでは、ロックインアンプを使用した。Q 値を Q、共振角周波数を ω_0 とする。この減衰振動の信号を、参照周波数を ω_r としたロックインアンプに入力する。この時、その出力の大きさは、

$$\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \tag{6.14}$$

に比例する [68]。記録されたデータをこの式でフィットすることにより、Q 値を計算している。

なお、式 (6.14) を用いてフィッティングを行う際、フィッティングの範囲が問題になる。条件を揃える為に、どの測定データに対しても同じフィッティング範囲を設定することが望ましい。そのため、基本的に、

- 測定データの半減期の 3 倍までのデータを用いてフィッティングを行う。

という条件を設定した。ただし、減衰時間が長すぎるためと、ノイズが大きいためにこの条件を満たせないデータもあり、すべてのデータがこの条件で解析されてはいない。

6.2.3　縮退モードにおけるビート

第 5 章で延べたように 円柱における Order $n > 0$ のモードはすべて縮退している。つまり、同じ周波数に対して二つの基底を選ぶことができる。実際には、試料の形状の不完全性[13]で非常に接近した二つの周波数に共振が発見されることが多い。

この実験でも、溶融石英の振動の励起の際、周波数が非常に接近した二つの共振 (縮退モード) を同時に励起してしまうことがあった。その場合、出力信号にはビートが現れる。入力信号が、接近している二つの共振周波数を持つ場合、どのような出力信号が得られるか、図 6.8, 図 6.9 に計算例をあげる[14]。二つのモード間で Q 値が大きく異なると、注目しているモードの Q 値を知ることが難しくなる。

大きなビートを示した例を図 6.10,6.11 に示す。ここでは、縮退している二つのモードで Q 値は等しいと仮定した[15]。その場合、図 6.8 から分かるように、信号の包絡線から Q 値を知ることができる。そのため、大きなビートを示している溶融石英のデータに対しては、包絡線でフィッティングを行った。シリコン、サファイアの場合には、縮退モード間でこのようなビートが起きることはなかった。

6.3　実験結果と解析

実験結果とその解析をそれぞれの試料について述べる。ここでは、各試料について、以下のような流れでみていくことにする。

- 共振周波数の探索結果：実際に存在する全ての内部共振を実験的に全て検出できているか、計算結果と比較する。また、モードの同定も行う。これは第 5 章でも触れた。
- Q 値の測定結果：おのおのの共振に対して測定された Q 値をまとめる。

[13] 非等方物質の場合には円柱軸と結晶軸のずれ等も利く。
[14] このような場合、モードカップリングによるエネルギーの損失が発生する可能性があるが、ここでは考慮していない。
[15] これが非常によい近似であることはビートを見せることがすくなかった、P-10 の測定で確認されている。

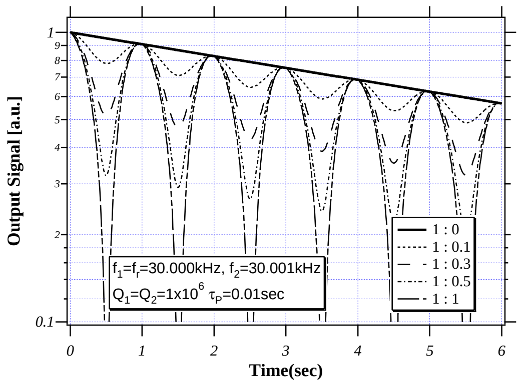

図 6.8: ビートがある場合のロックインアンプの出力 (1)。共振周波数は $f_1 = 30.000$(kHz),$f_2 =$ 30.001(kHz), 参照信号は f_1 に同期し、ロックインアンプの時定数は τ_P=0.01(sec) とした。f_1 成分に対する f_2 成分の混入比を 0 から 1 まで変化させている。両者の時刻 $t = 0$ における位相はそろっているとした。Q 値は共に 1×10^6。

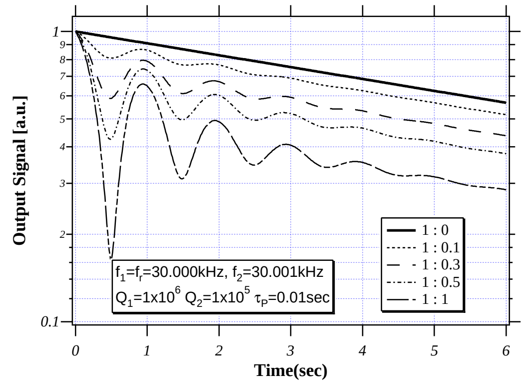

図 6.9: ビートがある場合のロックインアンプの出力 (2)。f_1 の Q 値が 1×10^6,f_2 の Q 値が 1×10^5。逆に、注目しているモードの Q 値が悪い場合も単純な減衰曲線ではなくなる。これらの図 6.8,6.9 は計算値である。

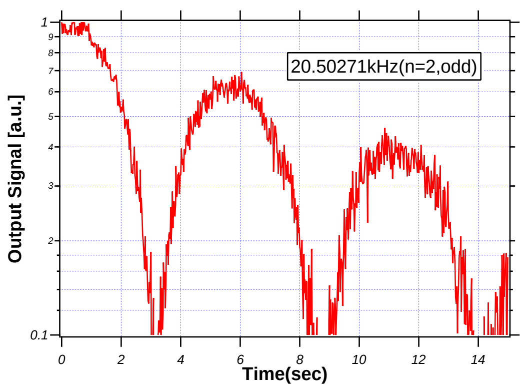

図 6.10: P-30 の最低次モード (n=2,odd) の縮退モードの片方の測定結果。共振は 20.50271kHz にあった。

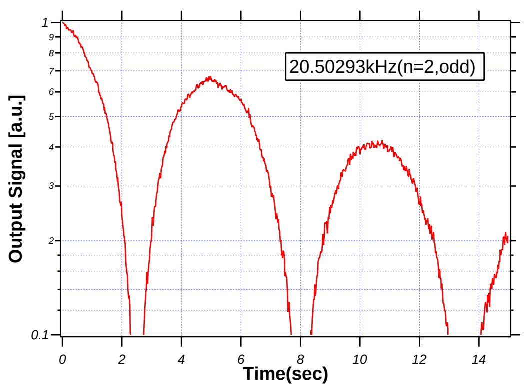

図 6.11: 縮退モードの他方の測定結果。この共振は 20.50293kHz にあった。両者の差は 0.22Hz しかない。

- 支持系による損失：試料の中心が変位するモードでは、支持系による損失が測定される Q 値を制限してくると考えられるので、計算された中心の変位と Q 値との関係を調べる。試料の内部損失を知るという目的からは、これらのモードは適さないモードである。
- 試料の内部損失：支持系による損失で Q 値が決まっていないモードに関して、Q 値を決めているものが何であるか考える。特に今の試料の場合、表面の損失に原因を求められる可能性がある。そのため、表面変位と Q 値の関係を調べる。

以下、溶融石英 (P-30,P-10)、シリコン、サファイアの順に結果を述べることにする。

6.3.1　溶融石英 P-30

共振周波数の探索結果

20kHz から 80kHz までの範囲を探索し、P-30 の発見できる共振を全て調べた。結果を表 6.1 に示す。

モード No.	Hutchinson(Hz)	FEM(Hz)	実験 (Hz)	Order n	Parity p	Best Q
1	20373	20578	20502.71	2	1	8.0E+05
	20373	20578	20502.93			
2	27789	28041	27857.10	0	1	6.5E+04
3	27938	28147	28101.15	2	0	9.6E+05
	27938	28147				
4	31171	31461	31312.90	1	0	2.2E+05
	31171	31461	31314.32			
5	31230	31482		0(torsion)	1	
6	32980	33298	33127.65	1	1	5.6E+05
	32980	33298	33128.54			
7	34967	35512	35202.76	3	1	7.7E+05
	34967	35520	35202.89			
8	35215	35450	35310.27	0	0	3.5E+05
9	42167	42747	42386.73	2	0	5.9E+05
	42167	42747				
10	42621	43135	42876.08	3	0	9.1E+05
	42621	43147	42876.23			
11	43137	43507	43363.46	1	1	5.4E+05
	43137	43507	43367.00			5.3E+05
12	43308	44107	43443.40	1	0	5.7E+05
	43308	44107	43445.75			6.0E+05
13	43429	43985	43507.60	0	0	1.7E+05
14	44409	44936	44620.16	2	1	9.5E+05
	44409	44936				
15	48003	48453	48258.34	3	0	5.8E+05
	48003	48454				
16	48437	49592	48777.32	4	1	7.1E+05
	48437	49592				
17	49838	50555	49983.50	2	0	7.3E+05
	49838	50555				
18	50353	50769	50338.43	0	0	4.7E+05
19	50400	50824	50546.90	1	0	6.8E+05
	50400	50824	50848.43			6.8E+05
20	51090	51833	51330.05	0	1	1.1E+05
21	52546	53388	52806.81	1	1	1.2E+05
	52546	53388	52808.83			
22	54551	55511	54938.03	4	0	7.8E+05

表 6.1: 溶融石英 (P-30) の計算結果と実験結果。

	54551	55511				
23	55217	56123	55479.30	3	1	9.1E+05
	55217	56139	55479.21			
24	57069	57869	57335.18	4	0	7.4E+05
	57069	57869				
25	57421	58155	57736.66	2	1	7.3E+05
	57421	58155				
26	60288	60932	60488.73	2	0	8.9E+05
	60288	60932				
27	61151	63275	61600.97	5	1	6.8E+05
	61151	63275	61601.17			
28	61263	61964		0(torsion)	0	
29	62460	64772		0(torsion)	0	
30	64988	66543	65489.36	5	0	6.4E+05
	64988	66543				
31	65789	66107	66042.40	0	0	
32	65807	67386	66113.54	4	1	7.7E+05
	65807	67386				
33	66542	68118	66845.00	2	1	7.7E+05
	66542	68118				
34	66726	67622	66903.64	1	0	2.3E+05
	66726	67622	66905.44			
35	67241	68549	67512.75	3	0	7.5E+05
	67241	68554	67512.86			
36	67893	70045	68137.47	0	1	1.8E+05
37	68349	70278	68650.39	5	0	7.6E+05
	68349	70278				
38	68764	69500		0(torsion)	1	
39	69460	70959	69750.40	1	0	5.8E+05
	69460	70959	69749.00			
40	69936	71422	70210.18	1	1	3.7E+05
	69936	71422	70211.90			
41	70563	71697	70809.09	3	0	
	70563	71718				
42	70692	72502	71024.48	1	0	1.8E+05
	70692	72502	71025.98			
43	71589	73295	71992.50	3	1	7.1E+05
	71589	73305				
44	73386	76889	73904.04	6	1	8.7E+05
	73386	76892				
45	75598	78438	76212.95	6	0	6.4E+05
	75598	78439	76213.02			
46	76354	78941	76704.80	5	1	9.0E+05
	76354	78941				
47	77337	80334	77653.50	1	1	5.5E+05
	77337	80334				
48	78211	80471	78577.10	3	1	6.4E+05
	78211	80510				
49	78847	80473	79246.08	2	0	8.2E+05
	78847	80473				
50	79454	81526	79816.20	4	0	7.6E+05
	79454	81526				
51	79835	83349	80188.10	6	0	7.9E+05
	79835					

表 6.1: 溶融石英 (P-30) の計算結果と実験結果。

Hutchinson の方法により計算すると、80kHz 以下の共振は縮退を除いて、51 個存在する。

この周波数範囲にある、4 つのねじれモードは検出することができなかった。ここで用いた励起系では基本的に半径方向の力しか加えることができず、半径方向の変位を持たないねじれモードを励起しにくいこと、また、円筒面の側面反射を利用しているので、変位を検出しにくいことがその理由として考えられる[16]。

その他の共振は全て発見でき、モードも同定した[17]。いくつかの低次のモードについては、文献 [8] の方法を発展させた方法で、実験的にその Order を確かめた[18]。

縮退している 40 個のモードのうち、18 個は非常に接近した二つの周波数に共振があることが確認でき、ビートとして観測された。残り 22 個については縮退モードの他方を発見できなかったが、これは試料の対称性がよく、共振が近すぎるために分離ができなかったのだと考えられる。

Q 値の測定結果

それらのモードについて測定された Q 値を図 6.12 に示す。数度の測定を行った結果のうち、おのおののモードで測定された最も高い Q 値を示す。試料を支持系に再度とりつけた場合も、Q 値の変化はほとんどのモードで 10% 未満にとどまった[19]。実験装置の精度がよく、点接触であるため、この種の測定としては、このようなよい再現性が得られていると考えられる。

Order $n > 1$ のモードは中心が不動点であるが、それらのモード間にも Q 値に 10% 以上の有意なばらつきが見られ、最大で倍ほどの違いが常に観測された。

最高の Q 値は、

$$Q_{\max} = 9.6 \times 10^5 \tag{6.15}$$

で、モード 17、周波数 49.838kHz(Hutchinson の計算値), Order $n = 2$, Parity even のモードであった。これは、図 6.13 のようなモードである。

同じ試料を懸架した条件[20]で、Q 値が 1×10^6 に達した例がある [25]。このモードは 89kHz の伸縮モードで、ここでは測定されていない。ここでは、Q 値が 1×10^6 を超えるようなモードは、その測定法の有利さにもかかわらず存在しなかった。

以下、P-30 について測定された Q 値とそのモード形状との関連を調べる。

支持系による損失 (Order $n = 0, 1$ モード)

Order $n = 0, 1$ のモードの場合、支持点である中心が変位するので、そこでの散逸が測定される Q 値を決定する要因となっていることが考えられる。そこで、中心における変位と Order $n = 0, 1$ モードにおいて測定された Q 値との関連を調べることにする。計算結果としては、半解析的に形状を決めることができる Hutchinson の方法による結果を主に用いた。

Hutchinson の方法での変位の規格化は以下の式を用いて行った。

$$1 = \int_V |\overline{u}|^2 dV \tag{6.16}$$

---

[16] 試料が真の円柱から大きく外れていて、半径方向以外の力が励起系の非対称性により生じればねじれを検出できる可能性もある。しかし、ここではその効果は小さかった。

[17] ただし、換算質量の最も小さい 65.789kHz(実測 66.042kHz) の Order $n = 0$,Parity even のモード 31 は、共振は励起できるのだが、隣のモード 32($n = 4$) の寄与が含まれてしまい、Q 値を測定することができなかった。また、モード 41 の共振はカップリングのためか正しい減衰曲線を得ることができなかったので、Q 値は計算していない。

[18] 試料を懸架し、共振を励起する。中心付近の数箇所で励起信号との位相差を観測することで、節線がいくつあるか判断する方法である。

[19] ただし、Orderv $n = 0, 1$ のモードは Q 値が数割の変化をすることがあった。

[20] タングステンワイヤ、1Loop、直径 60μm による。

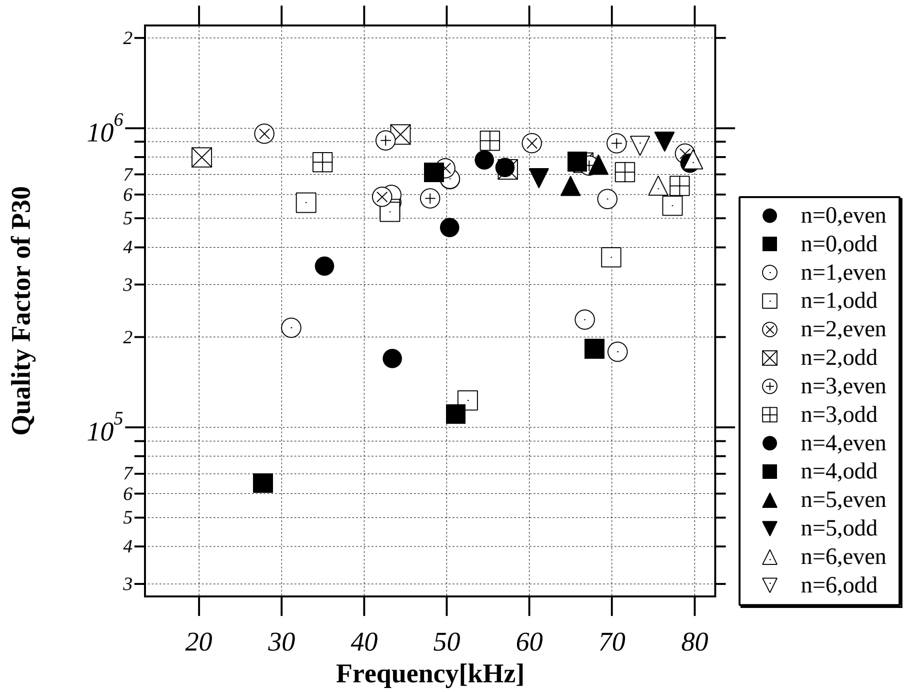

図 6.12: P-30 の共振周波数と Q 値。中心が不動点となる、Order $n > 1$ のモードにも Q 値にばらつきが見られた。

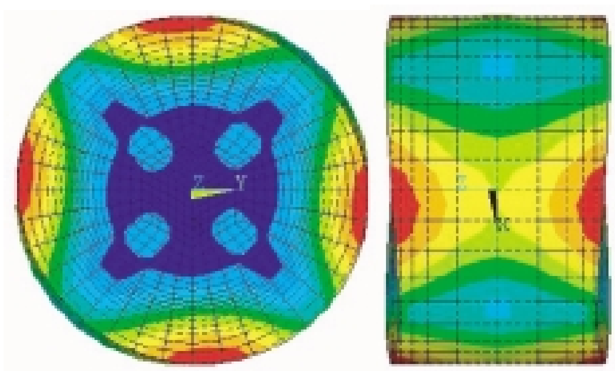

図 6.13: 溶融石英 P30 で最高の Q 値を示したモード。モード 17、Order $n = 2$、Parity even。

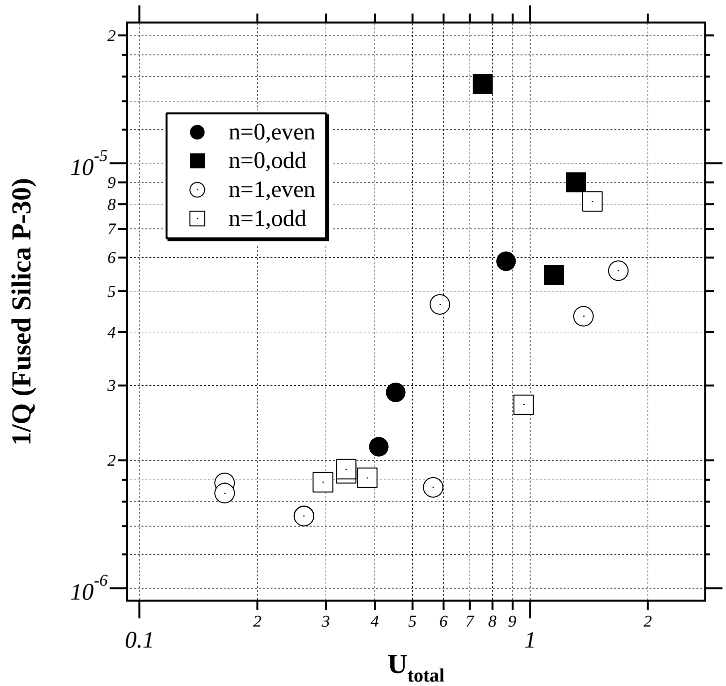

図 6.14: P-30 の中心の変位に対する散逸の大きさ (1/Q)。

ただし、ここでの体積 V は半径が 1 となるように規格化された円柱である。ANSYS による出力の規格化は式 (5.45) により行われる。今の場合、両者で計算される変位は因子 0.52 だけ値が異なる[21]が、その違いは本質的なものではない。

計算される変位と Q 値の関係を考えてみる。あるモード i(共振角周波数 ω_i とする) の振動の運動エネルギー U_i は、

$$U_i \propto \int_V \omega_i^2 |\overrightarrow{u}|^2 dV \tag{6.17}$$

と書ける。また、支持点での変位が $\overrightarrow{v}$ の場合、そこから散逸するエネルギー E は

$$E \propto \omega_i^2 |\overrightarrow{v}|^2 \tag{6.18}$$

と考えられよう。両者の比が Q 値であるので、Q 値はモードの周波数 ω_i には依存せず、支持点の変位によって決まる。全エネルギーを式 (6.16) などで規格化していれば、今の場合、モードが異なっても、支持点の変位の自乗に対する相関を見れば、比較が可能であると考えられる。

そこで、Order $n = 0, 1$ のモードの中心部の変位に対し[22]、$1/Q$ をプロットしたものが図 6.14 である。

Order $n = 0, 1$ のモードは、それぞれで、変位の方向が異なる[23]。今の場合の損失の原因は、ロッド内の損失と考えられる。Order $n = 0$ と $n = 1$ では変位の方向が異なるので、ロッド内での損失の程度が異なる可能性がある。従って、厳密にいうとこれら Order の異なるモードを同一に扱うことは、正しいとはいえないかもしれない。しかし、ここでは、同一に扱っておく。

[21] Hutchinson の変位の方が有限要素法の変位より小さくなる。これは、密度 2203kg/m^3 と体積の違い 8000 倍を考慮した結果 ($\sqrt{2203/8000} \sim 0.52$) である。
[22] 自乗するか否かは今の場合 Log スケールなのでファクターが変化するだけである。
[23] Order $n = 0$ のモードは z 方向の変位のみを持つ。Order $n = 1$ のモードは z 方向の変位は持たないが、r, θ 方向の変位のみ持っている。

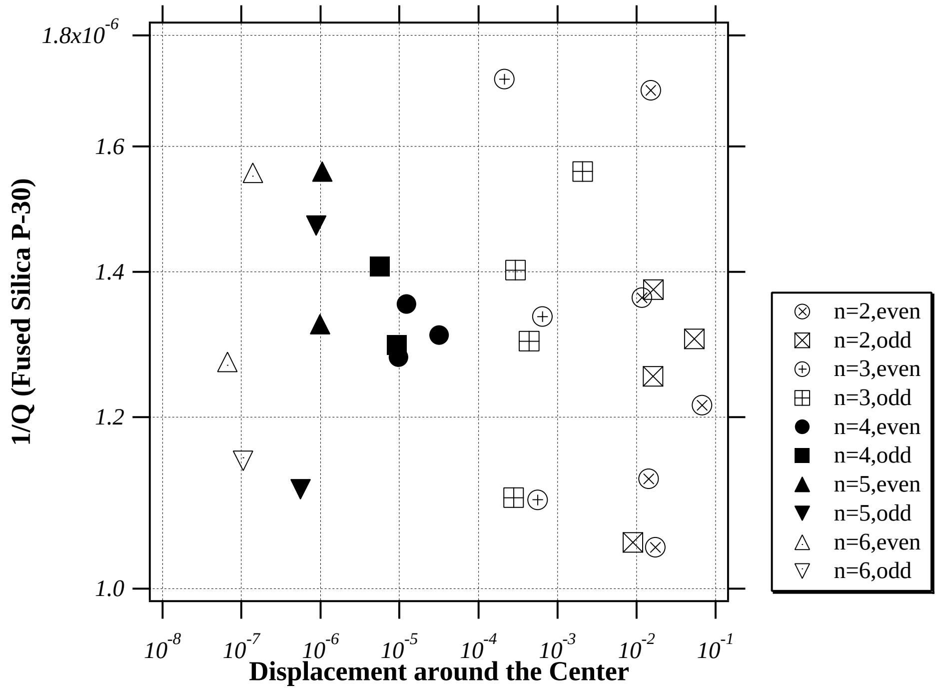

図 6.15: P-30 の中心付近の変位に対する散逸の大きさ (1/Q)。

図 6.14 から、中心での変位が大きいほど散逸が大きくなる傾向があることが分かる。Log をとった場合の変位と 1/Q の相関係数は、

$$r = 0.78 \tag{6.19}$$

であった。これらのモードで測定された Q 値は、試料内部の損失でなく、支持系による損失で決まっていると推察される。

支持系による損失 (Order $n > 1$ モード)

試料の中心とルビー球が完全に一致していないため、Order $n > 1$ モードでも、支持による散逸が生じている可能性がある。ここでは、その効果を考える。

溶融石英は等方体であり、その各モードの変位は Hutchinson の方法で半解析的に計算することが可能である。そこでここでは、試料の中心付近、直径の 1/25(4mm に相当) の領域の変位の平均と $1/Q$ の関係を見ることにした。4mm というのは、実際の装置の誤差が 0.3mm 程度であることを考えると、非常に大きな領域である。しかし、あまり小さい領域で考えると計算誤差が生じやすい。また、ここで考えている 80kHz までのモードでは、半径方向にせいぜい数波長を持つモードしかない。そのため、適当な選択であろうと思う。図 6.15 にこの結果を示す。第 5 章の式 (5.39),(5.40),(5.41) に見られるように、中心付近 r の変位は r^n に比例しているので、Order n が高くなるほど中心付近の変位は小さくなる[24]。

この図 6.15 から、中心付近の変位に対して、測定された Q 値は相関を持っていない、ということが分かる。つまり、ここで測定された Order $n > 1$ モードに対する Q 値のばらつきは、装置のルビー球が中心からずれていることによる効果ではない。従って、支持系からの損失よりも支配的な、損失の機構が存在することが示唆される[25]。

[24] 厳密には式 (5.39),(5.40),(5.41) の α の効果も考えなくてはいけないので、一般にこうまとめるのは誤りである。

[25] なお、後に見るように、シリコンの試料では 1×10^8 に達する Q 値を測定することができており、装置の限界による

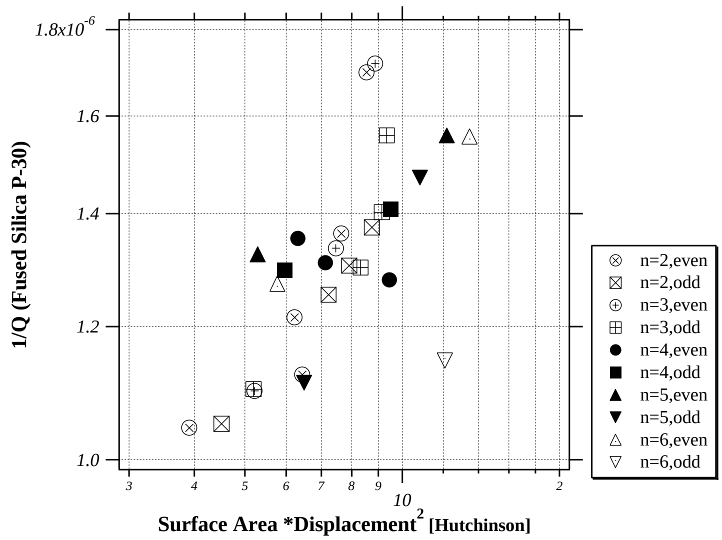

図 6.16: P-30 の表面の変位に対する散逸の大きさ (1/Q)。Order $n > 1$ のモードを考慮している。表面の変位は 2 乗され面積分されている。Hutchinson の方法を用いた。

試料の内部損失 (Order $n > 1$ モード)

Order $n > 1$ のモードの Q 値のばらつきは鏡自体の損失によるものだと考えられる。

ここでは試料の表面での損失を考えることにする。第 5 章で紹介したように、溶融石英でも表面のダメージ層が Q 値を制限してくる可能性があることが報告されている。それらの報告では、異なる試料で測定された Q 値と、見積もられたダメージ層の厚さを比較している。これまでと違って、ここでは、同じ試料での異なる共振間で、Q 値と表面の効果の関係を調べることができる[26]。

試料の表面の効果の程度を表す物理量として、試料の表面での変位の大きさ $|\overrightarrow{u}|$ の自乗を表面で積分したものを考えた。[27]。

$$\int_S |\overrightarrow{u}|^2 dS \tag{6.20}$$

ここで、S は試料の全表面。ダメージ層の厚みをかければ表面が持つ運動エネルギーに比例する値となる。

まず、表面として円柱の全表面を考慮した場合の、式 (6.20) の値に対する $1/Q$ を図 6.16 に示す。これは、Hutchinson の方法を用いて計算されたものである[28]。図 6.13 のモード 17(n=2) が最高の Q 値を示したが、これは測定された全モードの中で、最も式 (6.20) の値が小さかったものであった。

図 6.16 を基に計算すると、両者の間の相関係数は

$$r = 0.67 \tag{6.21}$$

となる。これは中心付近の変位に対する Q 値に全く関係が見られなかった (図 6.15) のとは異なり、表面での損失の効果が、この試料では寄与していることを示唆している。

ものでもない。

[26] ただし、測定されている Q 値が 1×10^6 にも達しておらず、他に比して桁が低い。

[27] 本来なら、変位があったとしても応力 (歪み) がなければ損失の原因とはならない [69] はずなので、ここでの考察は応力と弾性エネルギーから行うのが望ましい。しかし、これには Hutchinson の方法のプログラムの大幅な変更が必要とされるため、現時点では終了していない。

[28] 同様の計算を有限要素法の結果を用いて計算することも行った。結果はほとんど等しく、この計算がチェックされている。

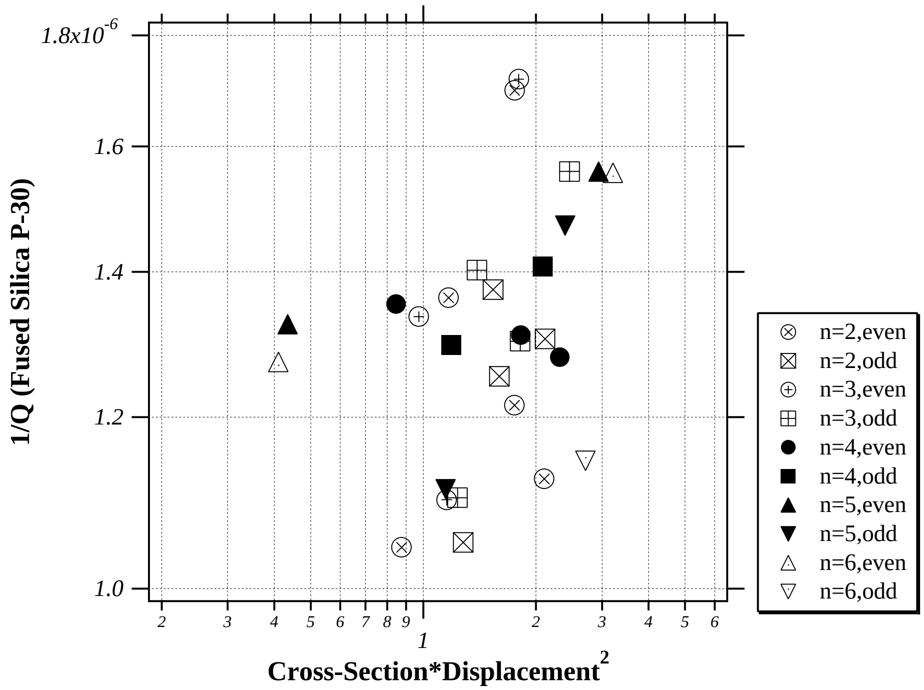

図 6.17: P-30 の平面部の変位に対する散逸の大きさ。相関は見られない。

円柱形なので、その平面部と円周部に分けて考え、どちらの寄与が効いているのが調べてみる。この P-30 は、平面は研磨されているが片側はアルミコーティングにより鏡面が作られている。また、側面も研磨されてはいるが、磨りガラス状の構造はなくなっているものの、研磨痕が残った荒いものである (口絵写真 Fig.4)。この両者のうち、どちらがこの表面変位に対する相関に寄与しているか考える。

図 6.17 に平面部の変位 (の自乗を面積分したもの) に対する、測定された損失の大きさを示す。この場合相関はなく、相関係数は、

$$r = 0.29 \tag{6.22}$$

と計算された。平面部の変位は Q 値に大きな影響を与えていない。従って、アルミコーティングの影響を受けていないと考えられる。

一方、円柱の側面に対して同じ計算を行った。その結果を、図 6.18 に示す。この場合、両者には相関が見られ、相関係数は

$$r = 0.72 \tag{6.23}$$

であった。このことから、図 6.16 の相関の原因は、主に、側面部にあるといえる。今の場合、側面の研磨が粗いため、このような効果が生まれたのではないかと考えられる[29]。

ただし、ここで測定されている Q 値の範囲が非常に狭く、試行による変化 (10% ほど) と同じ程度であることから、判断は急げない。この考えを確実にするには、同じ試料をさらに研磨してから Q 値を測定する必要がある。

[29]次の試料、溶融石英 P-10 では、このような結果は得られなかった。その側面は P-30 よりも研磨の程度がよい (口絵写真 Fig.4)。なお、文献 [33] では平面部より側面部のダメージ層が Q 値を制限するのではないかと想像している。

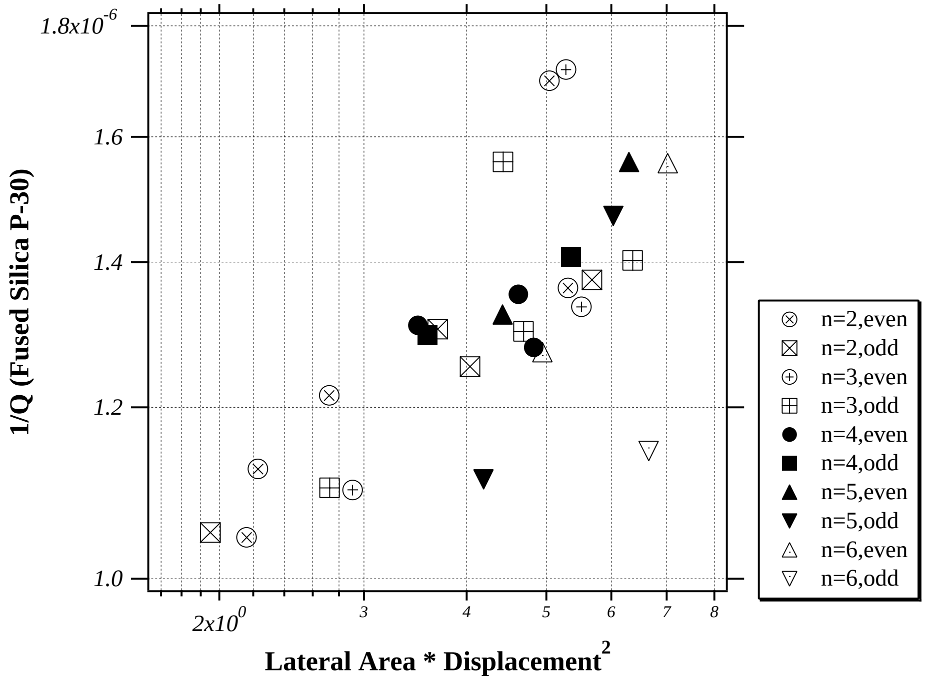

図 6.18: P-30 の側面部の変位に対する散逸の大きさ。相関が見られる。

[参考]P-30 にスタンドオフを取り付けた場合の Q 値

TAMA300 に導入される溶融石英鏡 (P-10) には、スタンドオフと呼ばれる、小さなアルミの器具 (図 6.19) が貼り付けられる。これは、主に、

- 懸架用ワイヤの鏡側面との摩擦を減らして振り子モードの Q 値を悪化させない。
- 懸架した際、ワイヤの鏡側面での位置が正確に決まるようにする。

という目的で取り付けられるものである。これが、鏡の Q 値にどのような影響を与えるか、簡単に調べてみた。

図 6.20 に TAMA 仕様のスタンドオフを接着した場合の P-30 の Q 値を示す。この測定の際アジャスターがなく、セッティングに応じて大きく Q 値が変動するということがあった。しかし、ここでは測定された最も高い Q 値を示しておく。また、全てのモードを発見しきれておらず、モード同定も完全ではないため、Q 値の変化は詳細に比較できない。

図 6.20 より、特に高周波側で Q 値が低下してしまっていることが分かる。これは、高周波になると含まれる波の波数が多くなり、スタンドオフが固定されている小さな領域の損失の効果が大きくなってくるからだと思われる。また、図 6.20 より、中心が不動点であるモードでも図 6.12 に比して、Q 値が低下していることが分かる。

この場合の損失の主な原因はスタンドオフであるといえる。

6.3.2　溶融石英 P-10

続いて、溶融石英 P-10 についての測定結果を示す。この試料は TAMA300 のリサイクリングミラー基盤である。

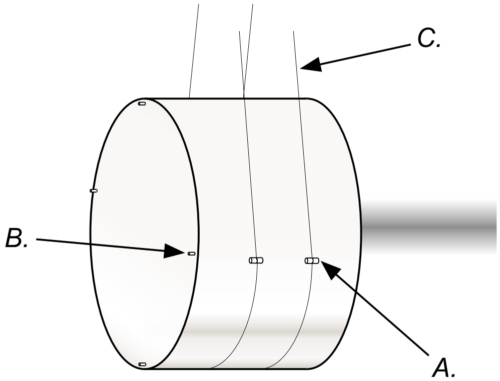

図 6.19: 干渉計に導入される鏡。A:スタンドオフ、B:磁石、C:ワイヤ。スタンドオフの直径は 2mm で長さは 4mm。アルミ製。間隔 2cm で、4 個所に取り付けられる。スタンドオフや磁石は真空対応の接着剤で固定される。ここでは、スタンドオフのみ TAMA と同様に取り付けた P-30 製の鏡の測定を行った。

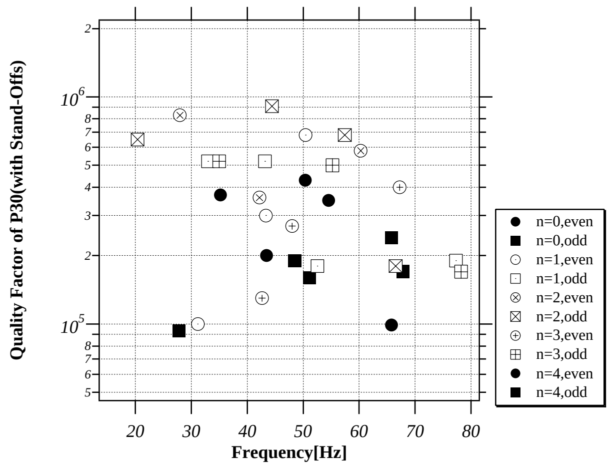

図 6.20: スタンドオフを取り付けた場合の P-30 の Q 値。特に高周波側で Q 値の低下が見られる。この実験の際の位置あわせの精度と、モード同定の信頼性が高くなかった。

共振周波数の探索結果

P-10 の弾性定数は P-30 と等しい。また、今の場合サイズも等しいので、その共振周波数の計算値は P-30 と同じになる。しかし、実際には、微妙に形状やサイズが異なっていること[30]から、実際の共振はまた探しなおす必要がある。そこで、ここでも P-30 と同様にしてまず共振の探索を行った。

周波数範囲は 20kHz から 80kHz までに限定した。Hutchinson による計算で得られる 51 個のモードのうち、ねじれの 4 モードを除く全ての共振を発見し、全てを同定することができた。この結果を表 6.2 に示す。

40 個の Order $n > 1$ モードのうち、26 個のモードについてはその縮退モードの両方を分離して観測することができた[31]。それらの周波数は接近しているが、測定に問題となるような激しいビートを起こすことは少なかった。曲率の中心が試料の中心になく、縮退モードが分裂するためかも知れない。

Mode 番号	Hutchinson(Hz)	FEM(Hz)	実験 (Hz)	Order n	Parity p	Best Q
1	20373	20578	20445.36	2	1	3.0E+06
	20373	20578	20446.15			3.1E+06
2	27789	28041	27737.40	0	1	2.1E+05
3	27938	28147	28076.56	2	0	2.8E+06
	27938	28147	28076.96			2.7E+06
4	31171	31461	31251.98	1	0	6.6E+05
	31171	31461	31282.14			5.3E+05
5	31230	31482		0(torsion)	1	
6	32980	33298	33134.87	1	1	1.5E+06
	32980	33298	33136.00			1.5E+06
7	34967	35512	35117.53	3	1	3.3E+06
	34967	35520	35118.05			3.3E+06
8	35215	35450	35256.75	0	0	9.9E+05

表 6.2: 溶融石英 (P-10) の計算結果と実験結果。

[30]特に P-10 ではリサイクリングのためにわずかな曲率 (9km) がついている。

[31]別の試行時にはさらに 5 つの縮退モードを発見した。ただし、その場合、見えなくなる縮退モードもでてくる。試料の設置方向により励起、検出の効率が変わるようだ。

9	42167	42747	42388.53	2	0	3.1E+06
	42167	42747	42390.65			3.3E+06
10	42621	43135	42831.74	3	0	2.8E+06
	42621	43147	42832.02			2.8E+06
11	43137	43507	43321.16	1	1	1.6E+06
	43137	43507	43331.18			1.9E+06
12	43308	44107	43418.28	1	0	2.4E+06
	43308	44107	43420.20			2.4E+06
13	43429	43985	43446.83	0	0	4.8E+05
14	44409	44936	44603.55	2	1	2.7E+06
	44409	44936	44604.04			2.8E+06
15	48003	48453	48197.17	3	0	3.1E+06
	48003	48454				
16	48437	49592	48679.75	4	1	3.2E+06
	48437	49592	48680.70			3.3E+06
17	49838	50555	49871.06	2	0	3.0E+06
	49838	50555	49873.58			2.9E+06
18	50353	50769	50272.60	0	0	1.3E+06
19	50400	50824	50550.53	1	0	1.9E+06
	50400	50824	50552.30			1.9E+06
20	51090	51833	51307.50	0	1	2.7E+05
21	52546	53388	52726.03	1	1	2.4E+05
	52546	53388				
22	54551	55511	54842.20	4	0	3.2E+06
	54551	55511				
23	55217	56123	55442.00	3	1	2.8E+06
	55217	56139	55442.18			
24	57069	57869	57278.87	4	0	2.9E+06
	57069	57869				
25	57421	58155	57690.13	2	1	3.3E+06
	57421	58155	57693.25			
26	60288	60932	60454.60	2	0	2.8E+06
	60288	60932				
27	61151	63275	61457.58	5	1	3.5E+06
	61151	63275	61457.78			
28	61263	61964		0(torsion)	0	
29	62460	64772		0(torsion)	0	
30	64988	66543	65336.08	5	0	3.4E+06
	64988	66543				
31	65789	66107	65987.33	0	0	3.4E+05
32	65807	67386	66055.33	4	1	3.0E+06
	65807	67386				
33	66542	68118	66704.75	2	1	2.7E+06
	66542	68118				
34	66726	67622	66754.20	1	0	3.6E+05
	66726	67622	66757.80			3.6E+05
35	67241	68549	67405.75	3	0	3.2E+06
	67241	68554	67406.43			
36	67893	70045	67991.43	0	1	5.2E+05
37	68349	70278	68594.89	5	0	2.6E+06
	68349	70278				
38	68764	69500		0(torsion)	1	
39	69460	70959	69747.17	1	0	1.3E+06
	69460	70959	69748.67			1.4E+06
40	69936	71422	70231.55	1	1	7.3E+05
	69936	71422	70234.40			7.5E+05
41	70563	71697	70743.03	3	0	2.9E+06
	70563	71718	70743.53			

表 6.2: 溶融石英 (P-10) の計算結果と実験結果。

42	70692	72502	71074.60	1	0	2.6E+05
	70692	72502	71076.23			2.9E+05
43	71589	73295	71947.97	3	1	3.5E+06
	71589	73305	71949.27			
44	73386	76889	73718.95	6	1	3.5E+06
	73386	76892				
45	75598	78438	76009.81	6	0	3.5E+06
	75598	78439	76010.31			
46	76354	78941	76625.61	5	1	3.0E+06
	76354	78941				
47	77337	80334	77504.00	1	1	1.9E+06
	77337	80334				
48	78211	80471	78401.30	3	1	2.9E+06
	78211	80510	78402.10			
49	78847	80473	79245.23	2	0	2.9E+06
	78847	80473				
50	79454	81526	79760.42	4	0	3.0E+06
	79454	81526				
51	79835	83349	80120.93	6	0	2.8E+06
	79835					

表 6.2: 溶融石英 (P-10) の計算結果と実験結果。

Q 値の測定結果

発見できた共振に対して、Q 値を測定した。試行により、Order $n > 1$ のモードでは 10% 程度のばらつきが存在した。Order $n = 0, 1$ のモードでは、さらに大きく変動することがあり、これらのモードでは試料のセッティングの条件が非常に測定される Q 値に影響を与えやすかった。ここでも、おのおのの共振で測定された Q 値の最高値を採用することにする[32]。この結果を図 6.21 に示す。

図 6.21 から、中心が不動点となる Order $n > 1$ のモードではほぼ一定の Q 値が測定された事がわかる。測定値に 10% 程度の誤差はあることを考えると、これらのモードについて一定の Q 値であったといってよい。その平均値は、

$$Q_{\mathrm{intrinsic}} = 3.0 \times 10^6 \tag{6.24}$$

であった。この Q 値は、P-30 で測定された最高の Q 値より、3 倍ほど高い値である。

支持系による損失

支持点からの損失の効果を考える。。ここでも、P-30 の時と同様に、Order $n = 0, 1$ のモードでの中心での変位に対する損失の大きさを調べる事にする。変位の計算値は、P-30 と等しい。図 6.22 にこの結果を示す。

この場合も、支持点での変位が小さいほど Q 値が高く測定されていたことが確認できる。特に、Order $n = 1$, Parity even のモード 12 はこれらの中で最も変位が少なく、確かにこの中で最高の Q 値 (2.5×10^6) が測定されている。これはほとんど intrinsic な Q 値に近い。図 6.22 における両者の相関係数は、

$$r = 0.67 \tag{6.25}$$

[32] ここで測定された Q 値は全て同一の試行で得られたものとなっている。

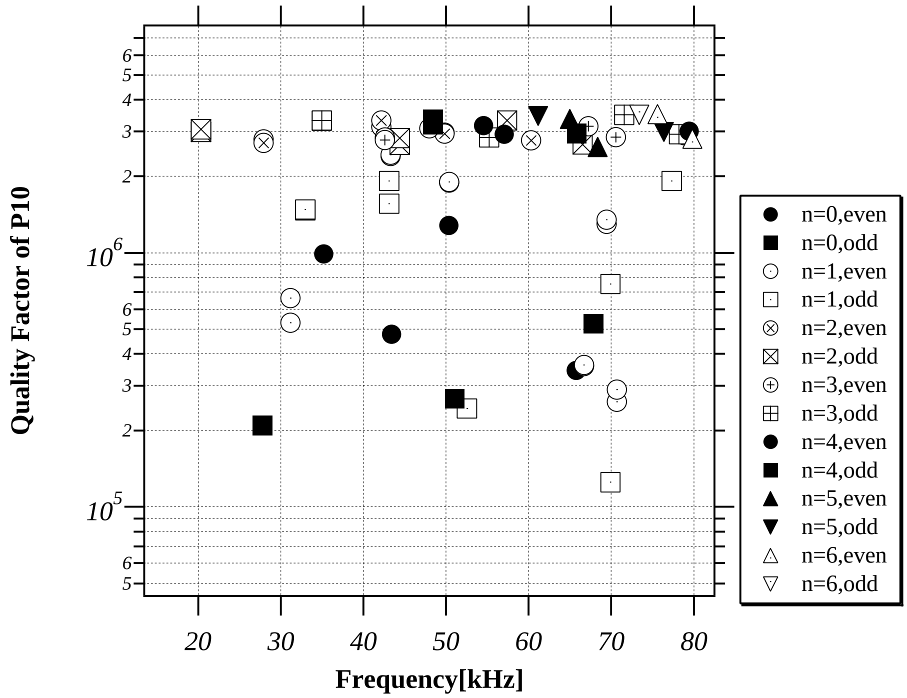

図 6.21: P-10 の共振周波数と Q 値。中心が不動点となる、Order $n > 1$ のモードでは全周波数に渡りほぼ一定の Q 値が測定された。

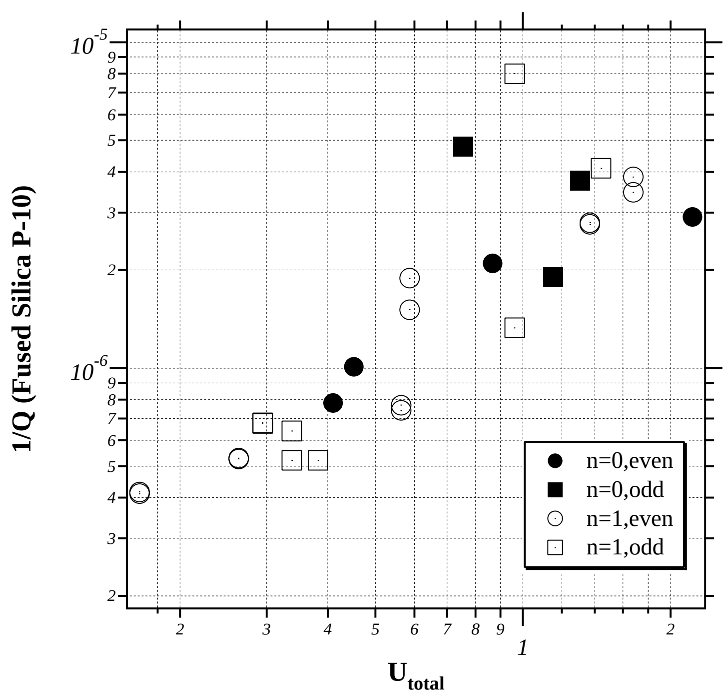

図 6.22: P-10 の中心の変位に対する散逸の大きさ (1/Q)。Order $n = 0, 1$ モードのみ考慮している。

であった。

支持系による損失の効果を定量的に解析するのは、ロッド内での損失の、モード形状や周波数との関係などを考えなければならない。これまでのところ、その依存性を知るのが難しいため、支持形の損失の定量的な解析は行えていない。しかし、一般に、支持点での変位が大きいモードは測定される Q 値が低くなる傾向がある、ということはいえる。

試料の内部損失 (Order $n > 1$ モード)

この P-10 の場合、P-30 であったような、Order $n > 1$ モードでの Q 値に有意な差が見られなかった。従って、中心付近での変位や、表面での変位との関係を見ても意味がない。Q 値を決めているのはモード形状に依存するようなもの[33]ではなく、試料の材質自身からきまる損失であろうと考えられる。その値が、周波数によって異ならなかったことも考えると、

- 溶融石英の内部損失は損失が周波数に依存しない Structure Damping モデルに従っている。
- 一定の損失は、$Q = 3.0 \times 10^6$ であり、これは P-10 試料の intrinsic な Q 値である。

ということがいえる。

内部損失が周波数に依存しない系の存在は、簡単な形の試料において、主に金属に対して確認されている。しかし、ここでの P-10 のようなバルクの試料で、損失が周波数に依存しないことを確認した例は存在していなかった。この実験では、内部共振の別々のモードでそれを確認しているが、そのような報告例は少ない。

P-30 の試料では側面での損失が Q 値を制限している可能性があった。この P-10 のでは、表面損失が制限要因にはなっていない。これは、研磨の仕方と扱われ方によっていると考えられる。P-30 の試料の側面研磨が荒かったのに対し、P-10 の試料の側面研磨は平面と同程度であり、裸眼ではまったく傷や構造が見られない (口絵写真 Fig.4)。また、P-30 が長年研究室の大気中に放置されていたのに対し、P-10 は作成から 1 年程度であり、その保管状態もよかった。これらの要因で、P-10 では表面に関する損失が効いていないのではないかと考えられる。ただし、研磨と大気中での放置とどちらの効果が支配的であるのか、ここでは区別できなかった。

6.3.3 シリコン

次にシリコンについての測定結果を示す。このシリコンの円柱軸は [111] 方向である。

共振周波数の探索結果

共振周波数を求めるのには、有限要素法を用いた。

ここでも、20kHz から 80kHz までのモードを対象とした。計算によると、縮退モードを二つと数えると、38 個のモードがあることになる。実験では、このすべての共振が過不足なく発見された。また、モード同定も全ての共振について行うことができた。この結果を表 6.3 に示す。

縮退モード (Order $n = 1, 2, 4$) 同士が、ビートを起こす、ということはなかった。これは、共振周波数が 100Hz 程度は常に離れていた[34]ことと、それぞれのモードの Q 値が高かったことの効果だと考えられる。

[33] 支持点での変位、表面での損失、熱弾性効果など。
[34] 試料の異方性と形状の誤差が縮退を強く解く役目を果たしていると想像される。

モード No.	FEM(Hz)	実験 (Hz)	誤差 (%)	Order n	Parity p	Best Q
1	28634	28564.23	0.24	2	1	1.2E+06
2	28635	28584.00	0.18			1.5E+06
3	38504	38499.84	0.01	2	0	1.6E+06
4	38505	38535.05	-0.08			2.1E+06
5	41271	41265.94	0.01	0(torsion)	1	7.6E+07
6	41325	41251.26	0.18	0	1	1.6E+05
7	45781	45716.04	0.14	1	0	6.7E+05
8	45782	45732.90	0.11			5.8E+05
9	47129	47015.36	0.24	1	1	5.2E+06
10	47130	47050.37	0.17			4.1E+06
11	48980	48600.56	0.78	3	1	7.0E+07
12	49188	48829.17	0.73	3	1	1.3E+07
13	54885	54928.25	-0.08	0	0	9.4E+05
14	60431	60373.33	0.10	1	1	3.5E+05
15	60431	60390.20	0.07			4.3E+05
16	60830	60628.97	0.33	3	0	2.3E+06
17	61250	60815.09	0.72	2	1	2.9E+06
18	61251	60846.08	0.67			5.8E+05
19	62627	62345.99	0.45	3	0	1.0E+08
20	64118	63602.80	0.81	2	0	1.1E+07
21	64120	63623.50	0.78			1.0E+07
22	66649	65789.60	1.31	1	0	2.2E+07
23	66649	65804.87	1.28			2.4E+07
24	67824	67379.96	0.66	0	0	5.9E+05
25	68633	67588.89	1.54	4	1	1.6E+07
26	68634	67592.55	1.54			1.7E+07
27	71345	70829.18	0.73	2	0	6.6E+05
28	71347	70851.58	0.70			6.4E+05
29	71533	71182.56	0.49	3	0	2.1E+06
30	72724	72493.50	0.32			4.9E+07
31	75035	74388.95	0.87	3	1	7.0E+07
32	75323	74666.18	0.88	1	1	9.2E+05
33	75324	74689.06	0.85			1.8E+06
34	76259	76003.53	0.34	0	1	3.6E+05
35	76897	76653.15	0.32	1	0	4.3E+07
36	76899	76656.26	0.32			4.2E+07
37	78030	77518.65	0.66	3	1	3.5E+06
38	79383	79258.20	0.16	0	0	3.7E+06

表 6.3: シリコン [111] の計算結果と実験結果。

Q 値の測定結果

これらの 38 個の共振について、全て Q 値を測定した。おのおののモードについて得られた Q 値の最高値を図 6.23 に示す。試料の置き具合により、Q 値は、数割の変化をすることがあった。これは、Q 値が高いモードの場合に多かった。Q 値が高いモードの場合、支持系の損失が無視できなくなり、ルビー球の接触位置に敏感なるためだと考えられる。

Q 値の最高値は、Order $n = 3$, Parity even[35]のモード 19 (計算値:62.63kHz、実験値:62.35kHz)

[35]第 5 章で述べたように、等方体で定義した、Order, Parity という量子数は異方性物質のモード形状を表現するのには、必ずしも適切でない。しかし、何らかの基準は設けなければいけないので、今後も等方極限を考えたときの名前をつけて呼ぶことにする。

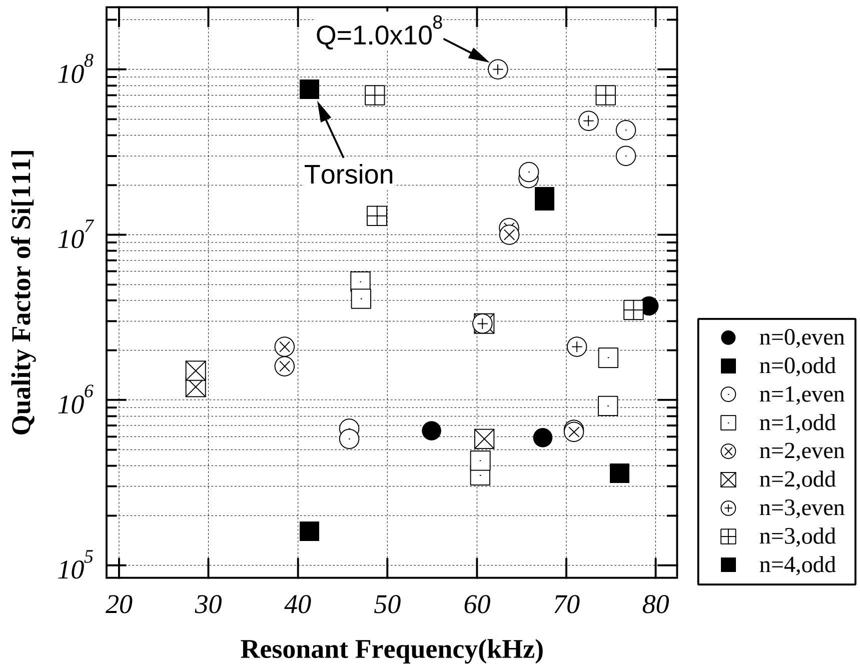

図 6.23: シリコンの共振周波数と Q 値。Q 値の最高値は、Order $n = 3$ のモードで得られ、1.0×10^8 に達した。

で得られ、その値は、

$$Q_{\max} = 1.0 \times 10^8 \tag{6.26}$$

であった。この Q 値は、室温でのシリコンで得られている Q 値では最も高いものである。本論文の実験を通じて、これが測定することのできた最高の Q 値であった。これがシリコンの intrinsic な Q 値であるかどうか、測定装置の限界によるものなのか、これだけでは判断することはできなかった。

この最高の Q 値を示したモードの形状は図 5.8(下側の Mode19) に示した。また、このときの減衰曲線を図 6.24 に示す[36]。

第 5 章で述べたように、Order $n = 3$ のモードは二つの周波数に分裂し、計算によるとその片方では、中心 (支持点) での変位が 0 になる。このようなモードは、最高値を示したモード 19 の他に、モード 11(計算値:48.98kHz),30(計算値:72.72kHz),31(計算値:75.04kHz) があるが、これらは軒並み高い Q 値 (5×10^7 以上) を示した。

他方、中心が変位を持つ Order $n = 3$ モードもそれぞれに対応して 4 つあるが、それらは最高でも 1.7×10^7 の Q 値にとどまった。

図 6.25 のねじれモードも、計算によると中心が不動点となるモードであるが、この Q 値は 7.6×10^7 と高く測定されている。

最低の Q 値は伸縮の基本モード、 モード 6 (計算値:41.27kHz) で得られ、値は 1.6×10^5 であった。従って、同じ試料で 3 桁にわたる Q 値が測定されたことになる。

[36] 2 位相ロックインアンプの出力の非対称性により、出力が小さくなるとビートがあるように見えるデータとなったので、オフセットを補正した。

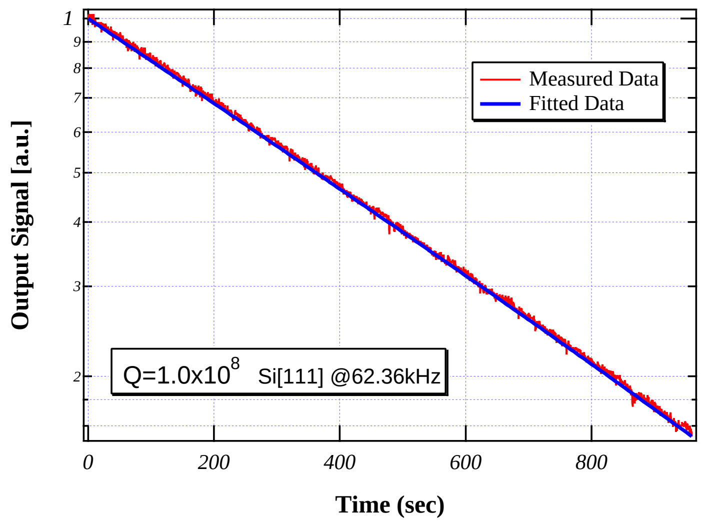

図 6.24: シリコンの最高の Q 値を示したモードの減衰曲線。

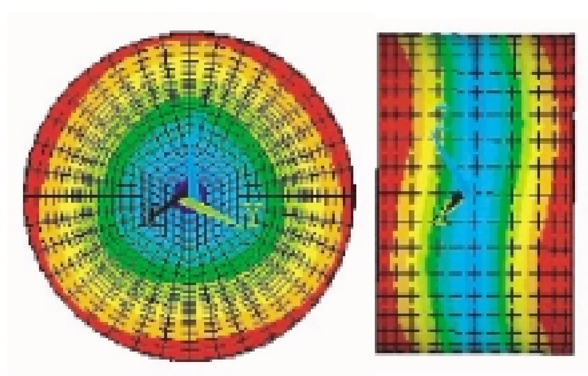

図 6.25: シリコンのねじれモード。

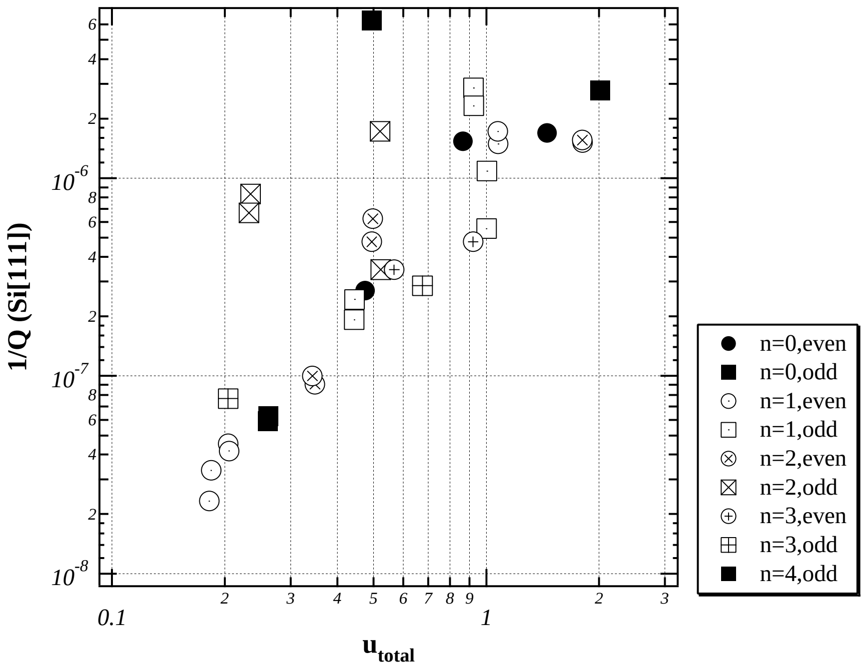

図 6.26: シリコンの中心での変位に対する損失の大きさ $(1/Q)$。試料が等方体であれば、Order $n > 1$ のモードは中心での変位がないためにこの図には表れないはずであるが、異方性のために有限の変位を生じ、グラフに現れる。変位と Q 値の間には負の相関が確認される。

支持系による損失 (中心の変位するモード)

このように非常に幅の広い Q 値が測定された理由として、最も主要な要因は、支持点での変位であろう。このシリコンは結晶方向 [111] が円柱軸を向いており、弾性定数が円柱軸に対して 3 回対称に分布しているが、それが原因となって Order $n = 3$ 以外のモードでは形が歪み、中心での変位が有限となることを第 5 章で述べた。

有限要素法で計算された、中心での変位の大きさに対して、測定された Q 値の逆数をプロットしたものが図 6.26 である。中心の変位が有限であるものを考慮しているが、それはシリコンの場合ほとんど全てのモードを考慮することに相当する。中心での変位としては、任意の方向への変位の大きさを考えた。この値は、式 (5.45) で規格化されたものとした。

この図 6.26 から、両者に確かに相関があることが分かる。その相関係数は、

$$r = 0.78 \tag{6.27}$$

と計算された。

Order $n = 1$, Parity even の高次モード モード 35(計算値:76.90kHz、実験値:76.65kHz) のモードは中央での変位がこの中では最も小さく、測定された Q 値も 4.3×10^7 とこれらのモードの中では最高であった。このモードの形を図 6.27 に示す。$n = 1$ モードであるが、中心付近に非常に変位の小さい部分のあるモードであることが分かる[37]。しかし、この Q 値は、中心が変位しないモードの Q 値を超えていない。そのため、中心が変位するモードでは、支持系による損失しか見ることができていないといえる。

[37] また、このモードは表面での変位も小さいモードであった。

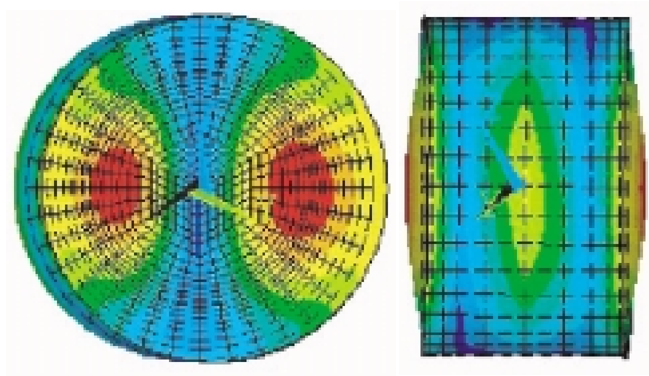

図 6.27: Order $n = 1$ であるが、Q の高かったシリコンのモード 35。Order $n = 1$, Parity even。中心が変位するモードの中では、中心の変位が最も少ないモードである。

支持系による損失 (中心の変位しないモード)

中心が変位しないモードでも、試料、測定装置の工作精度により、支持系によるの損失が試料に導入される可能性がある。

円柱軸と結晶方向 [111] が完全に一致せずに傾きを持っていると、これらのモードでも中心が節にはならなくなる。そのため、精度よくルビー球を中心に一致させても、必ず支持系による損失が存在してしまうことになる。計算では Order $n = 1, 2, 4$ のモードは縮退しているが、実際には大きく分裂していた。そのため、この予期しない非対称性が混入している可能性は否定できない。しかし、結晶軸の傾きのデータがないので、この効果を見積もることができなかった。

装置の精度を考えるため、中心が変位しないモードの中心付近の変位を有限要素法により求め、測定された Q 値と比較しても関連は見られなかった。ただし、有限要素法での微小領域の計算には誤差が伴うことと、中心の変位しないモードがそもそも少ないことから、これらのモードで支持系による損失が完全に無視できるかは断言できなかった。

試料の内部損失

予期しない誤差を無視すれば、試料の内部損失が測定できる可能性があるのは、中心の変位しないモードである。そのようなモードは、有限要素法の計算より、1 つのねじれモードと、4 つの Order $n = 3$ モード (縮退が解けたもの) のみであることが分かっている。これら 5 つのモードの Q 値は有意に異なっていた。

ここでは、表面での損失がこの差異を生んでいると仮定してみる。図 6.28 に、全表面での変位の 2 乗の積分値と $1/Q$ の関係を示す。

この図 6.28 だけでは、表面の損失がシリコンの Q 値を決めているとはいえない。

第 3 章で見たように、シリコンではいくつかの原理的な損失が Q 値を制限する可能性がある。そのため、支持系による損失の可能性を完全に排除することができれば、原理的な損失を観測していると言えるようになる。しかし、これまでの結果では、各モードでどのような機構が Q 値を決めているのか、考えるのは難しい。

6.3.4　サファイア

続いて、サファイアの測定結果を示す。このサファイアの円柱軸は c 軸に一致している。

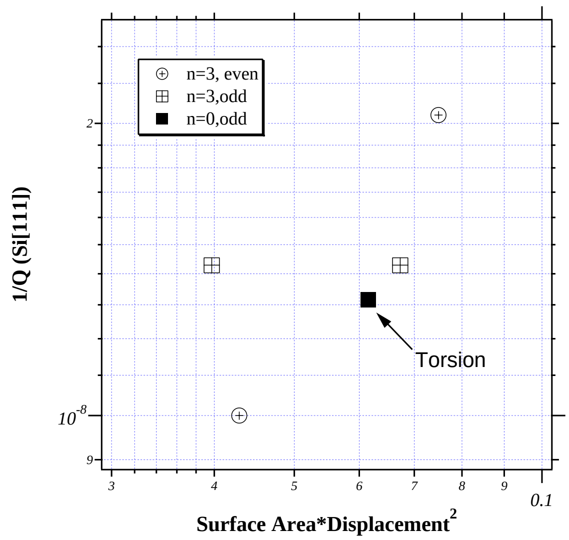

図 6.28: シリコンの表面の変位に対する散逸の大きさ。有限要素法の結果を用いている。中央で変位が 0 となる 5 つのモードのみ考慮した。

共振周波数の探索結果

ここでは、30kHz から 100kHz までの共振を測定対象とした。

第 5 章の計算によると、この周波数範囲で共振は縮退モードを 2 つと数えて 40 個存在する。実験では、全てを過不足なく発見することができ、それらのモードを同定することもできた。計算で共振のない領域には、確かに共振は発見できなかった。これらの結果を表 6.4 に示した。

縮退モードはすべて数 Hz 以上の周波数差をもって検出された。Q 値が高いこともあり、これらのモード間のビートが問題となることはなかった。これは、シリコンと同様の結果である。試料の異方性が、わずかな形状の非対称性を通じて、縮退を大きく解く役目をしているのではないかと推察される。

モード No.	FEM(Hz)	実験 (Hz)	誤差 (%)	Order n	Parity p	Best Q
1	34581	34250.42	0.97	2	1	1.2E+07
2	34581	34290.50	0.85			1.2E+07
3	47245	46838.79	0.87	2	0	9.8E+06
4	47245	46924.81	0.68			1.0E+07
5	50239	49992.83	0.49	0(torsion)	1	9.2E+06
6	51096	50673.78	0.83	0	1	2.5E+05
7	55716	55264.56	0.82	1	1	5.7E+05
8	55716	55301.12	0.75			1.6E+06
9	55750	55399.19	0.63	1	0	7.1E+06
10	55750	55486.58	0.47			3.7E+06
11	59190	58370.01	1.40	3	1	1.4E+07
12	59338	58516.39	1.40	3	1	1.1E+07
13	67969	67569.10	0.59	0	0	1.4E+06
14	73865	73337.38	0.72	1	1	2.3E+05
15	73865	73375.87	0.69			1.1E+05
16	73882	73057.20	1.11	3	0	6.5E+06
17	74315	73468.00	1.15	2	1	2.6E+06
18	74315	73541.08	1.05			4.1E+06
19	74745	73977.01	1.04	3	0	6.4E+07
20	77620	76483.04	1.49	2	0	7.1E+06

表 6.4: サファイア [0001] の計算結果と実験結果。

21	77620	76532.62	1.42			7.9E+06
22	79960	78495.56	1.87	1	0	6.7E+06
23	79960	78545.45	1.80			8.7E+06
24	82646	80883.46	2.18	4	1	8.1E+06
25	82646	80886.61	2.18			8.7E+06
26	82807	81835.32	1.19	0	0	6.6E+05
27	86790	85848.12	1.10	3	0	1.7E+06
28	87463	86618.97	0.97	3	0	8.7E+06
29	87463	86231.55	1.43	2	0	1.6E+06
30	87464	86303.47	1.34			8.4E+05
31	90902	89633.17	1.42	1	1	2.4E+06
32	90902	89694.40	1.35			6.4E+06
33	91139	90439.78	0.77	0	1	4.3E+05
34	92258	90895.39	1.50	3	1	3.1E+07
35	93227	92407.77	0.89	1	1	4.8E+07
36	93227	92413.14	0.88			5.9E+07
37	94239	93073.12	1.25	3	1	8.2E+06
38	95905	95330.26	0.60	0	0	5.6E+06
39	97693	96101.94	1.66	4	0	4.3E+06
40	97694	96103.23	1.66			4.4E+06

表 6.4: サファイア [0001] の計算結果と実験結果。

Q 値の測定結果

これら、40 個の共振に対して、全て Q 値を測定することができた。Q 値の再現性は 10% 程度であった[38]。ここでは、測定された Q 値の最高値を採用する。図 6.29 に、周波数に対して Q 値の測定結果をプロットしたものを示す。

Q 値の最高値は、Order $n = 3$, Parity even のモード 19(計算値:74.75kHz、実験値:73.98kHz) で得られ、その値は、

$$Q_{\max} = 6.4 \times 10^7 \tag{6.28}$$

であった。このモードの形状は図 5.21(下側) に示した。シリコンに関する測定で、$Q = 1 \times 10^8$ までの測定はこの装置で少なくとも行えることが分かっている。従って、これがこのサファイアの intrinsic Q であろう[39]と推測される。

この値は、このグレード (HEMLITE) で報告されているサファイアの Q 値の室温での測定結果 [24][40]による 5×10^6 よりも 1 桁大きい値である。従って、ここでの実験方法の有効性が示されたことになる。

中心での変位が 0 となる残りのモード (ねじれと Order $n = 3$ の一部) では、9×10^6 程度まで低い Q 値を示すものがあった。シリコンでは、これらのモードが軒並み高い Q を示していたので、傾向が異なる。

最も低い Q 値は 1×10^6 程度であり、同じ試料で 2 桁にわたる Q 値が測定されたことになる。

[38]ただし、中心が大きく変位するモードではこれより大きいことがあった。
[39]ただし、鏡の intrinsic Q である。モード依存性もある。
[40]この文献と今回の実験の試料は、宇宙線研究所で同時に 2 つ購入されたもので、取り扱いの違いと研磨の違いを除いてグレードや大きさは共通である。その実験では、直径 250μm のサファイアワイヤ 2Loop による懸架を行い、最低次から 2 つの Order $n = 0$ にのみ注目している。

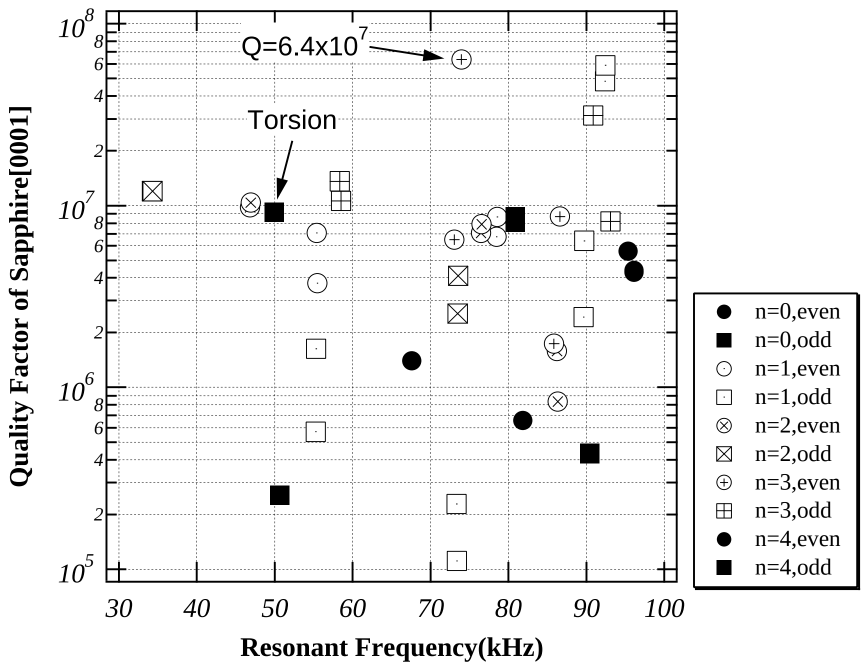

図 6.29: サファイアの共振周波数と Q 値。Q 値の最高値は、Order $n = 3$ のモードで、6.4×10^7 であった。

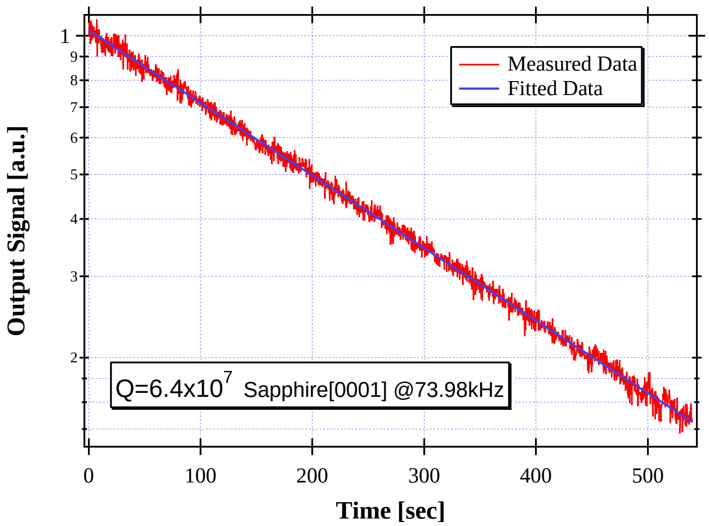

図 6.30: サファイアの最高の Q 値を示したモードの減衰曲線。

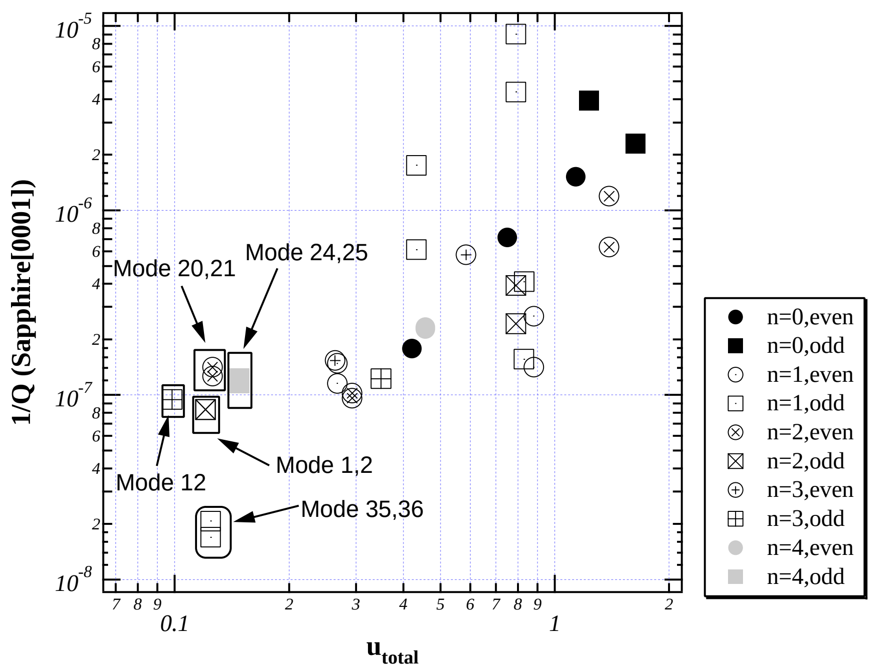

図 6.31: サファイアの中心での変位に対する損失の大きさ $(1/Q)$。シリコンの場合と同様、試料が等方体であれば、Order $n > 1$ のモードは中心での変位がないためにこの図には表れないはず。変位と Q 値の間には負の相関が確認される。変位の特に小さなモードについては、モード番号を示した。これら 9 個のモードは後の図 6.34 で考慮される。これらのモード間の Q 値のばらつきは、表面の損失で説明できる可能性がある。

支持系による損失 (中心が変位するモード)

支持点からの損失の効果を見るために、中心での変位に対し測定された損失の大きさを、考える。図 6.31 に、有限要素法で計算された中心での変位に対する損失の大きさを示す。中心の変位が 0 となるモード以外の全てをプロットしている。

この図 6.31 から、この場合も確かに変位と Q 値の間には負の相関があることが分かる。その相関係数は、

$$r = 0.74 \tag{6.29}$$

であった[41]。

Q 値の最高値は 6.4×10^7 であると述べたが、次に高い値は、Order $n = 1$, Parity odd のモード 36(計算値:93.23kHz) で得られた 5.9×10^7 であった。このモードは図 6.31 において、確かに中心での変位が小さいモードである[42]。このモードの形状を図 6.32 に示した。

このように、中心が変位しないモードよりも、中心が変位するモードのほうが Q 値が高く測定されている場合がある。そのため、変位が有限であるが小さいモードでは、支持系による損失が Q 値を制限しているとはいえない。従って、図 6.32 のうち変位の小さなものは、別に扱った方がよい。しかし、中心での変位が大きいほど測定される Q 値は低くなる傾向がある、ということは言えるであろう。

[41] 後に示すように、表面の損失がサファイアでは効いている可能性がある。損失の原因が全て支持系によっている訳ではない。相関係数の解釈には注意が必要である。
[42] 後に、このモードは表面の変位も少ないことを示す。

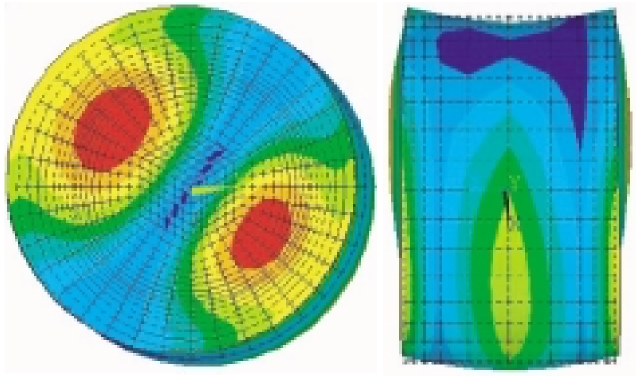

図 6.32: Order $n = 1$ であるが、Q の高かったサファイアのモード 36。モード 35 はこの縮退モードで同形。側面に変位の小さい領域が広がっていることにも注目。このモードは、シリコンで高い Q を示す傾向にあったモード (図 6.27) と酷似したモードである。

支持系による損失 (中心の変位しないモード)

シリコンの場合と同様、中心が変位しないモードでも、試料、測定装置の工作精度により、支持系による損失が存在する可能性がある。

試料の円形からのずれは、0.01mm 程度である。結晶軸の傾きに関していえば、データシートによると 7" である。従って、上下の中心からの結晶軸のずれは、2/1000 mm 程度と見積もられる。装置の精度はこれよりも劣り、0.3mm 程度であるので、問題となる可能性がある。

しかし、この装置で、サファイアの最高の Q 値を上回る値を、中心が不動点となるシリコンのモードで測定できている。従って、この装置の精度でも不足ではないと考えられる[43]。

このようなことから、中心の変位しない複数のモードで測定される Q 値が大きく異なるのは、試料や測定装置の工作精度によるのではなく、試料の内部損失が原因ではないかと推察される。

試料の内部損失

計算によるとこのサファイアで中心の変位が 0 になるモードは、Order $n = 0$, Parity odd のモード 5(ねじれモード、計算値:50.23kHz) と、Order $n = 3$ の一部、モード 11(計算値:59.19kHz), 19(74.74kHz), 28(87.46kHz), 34(92.26kHz) の 5 つである。しかし、この中で 1×10^7 を超える Q 値が測定されたのは、モード 19 と 34 のみである。

第 3 章で見たように、加工や研磨の際の表面のダメージ層が制限する Q 値は、適当なパラメータを用いると、

$$Q_{\rm surf} = 3.1 \times 10^6 \tag{6.30}$$

程度と見積もられる。これは、最高の Q 値の測定結果よりもファクター以上悪い見積もりであり、これが Q 値を制限していることが考えられる。そこで、ここでも、表面での変位[44]と Q 値の関係について調べてみる。

図 6.33 に、サファイアにおける、表面の全変位の自乗を全表面で積分した結果を示す。変位はこれまでと同様の方法で規格化されている。図 6.33 では、40 個全てのモードについて表示した。ここには、中心での変位が 0 でないモードもすべてプロットしてある。そのため、相関があるのかどうか判定するには中心での変位が少ないものを選び出す必要がある。

[43] 今の場合のシリコンとサファイアのモード形状が非常に似ていることを考慮している。

[44] 本来は応力かひずみで考慮すべきであるが、それらの有限要素法の結果が現時点では存在しない。

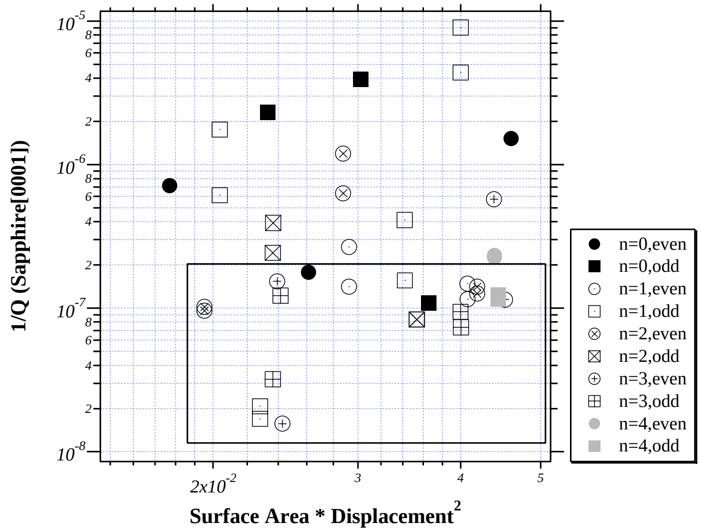

図 6.33: サファイアの表面の変位に対する散逸の大きさ。ここには、全てのモードを示している。一見したところ、相関がないように見えるが、図中の四角で囲ってある領域を拡大図として次の図 6.34 に示す。

そこで、図 6.33 のうち、中央での変位が 0 になる 5 つのモードと、変位の小さい 9 つのモード (図 6.31) が含まれている領域に注目する。図 6.34 にこの領域の拡大図を示す。これら 14 個のモードに注目すると、表面変位に対する Q 値が強い相関を持っていることが分かる。高い Q 値を示したモード 35,36(Order $n = 1$, even) は、中心の変位、表面の変位が共に少ないモードであった。

これら 14 個のデータのみ考慮すると、両者の間の相関係数は、

$$r = 0.96 \tag{6.31}$$

と計算される。

モード 19,34 は共に Order $n = 3$ の中心が変位しないモードである。図 6.34 を見ると、これらの表面変位にも大きな違いはないが、測定されている Q 値は倍ほど異なっている。この理由は今のところよく分かっていない。

しかし、

- 中心の変位が 0 であるモード、および、中心の変位が非常に小さいモードでは、表面の変位が少ないほど測定される Q 値が高い。従って、表面層における損失がこれらのモードの Q 値を決定している。

ということは十分に示唆されている。この主張を確実にするためには、

- 表面状態の異なるサファイア試料を用意して測定を行う。
- 表面体積比の異なる試料を用意して測定を行う。
- 表面付近の応力分布を調べる。
- 有限要素法のモード形状に関する精度を向上させる。

といったことを実行する必要があろう。

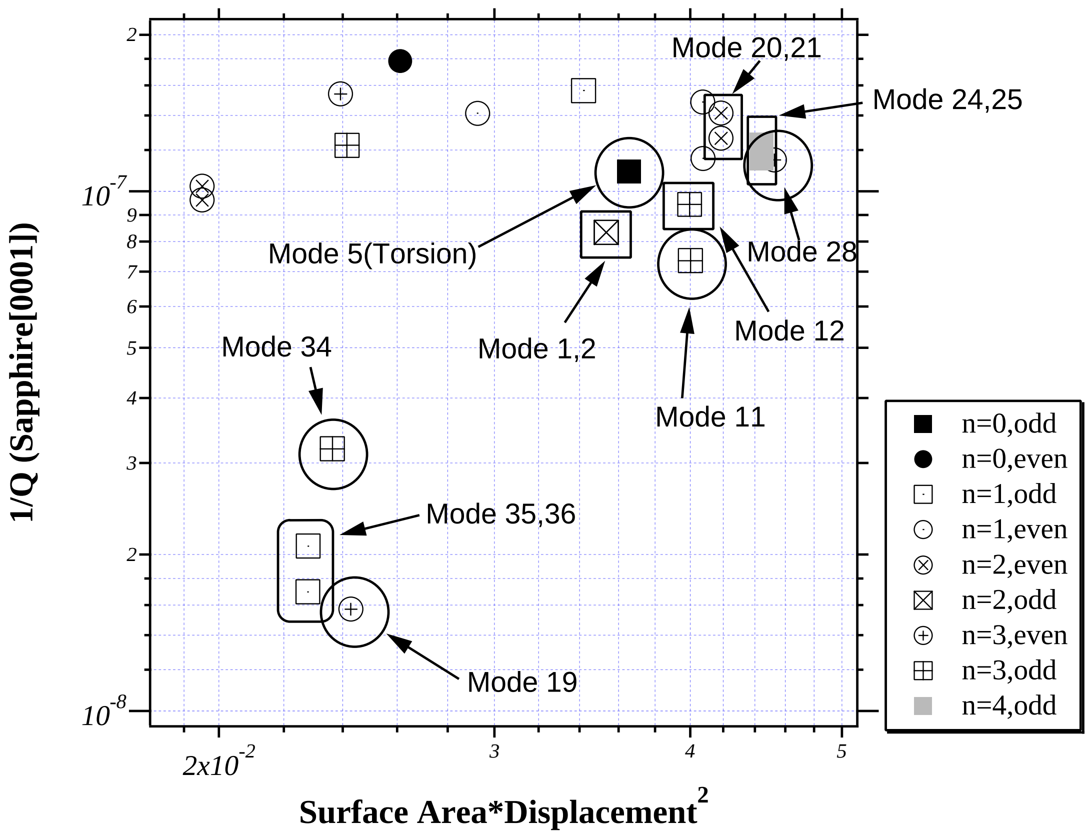

図 6.34: サファイアの表面の変位に対する散逸の大きさ (拡大図)。丸で囲ってある 5 つのモードは計算によると中心の変位が 0 となるモードである。これらのモード間では表面変位が少ないほど Q 値は高く測られる傾向にある。一方、四角で囲ってある 9 個のモードは中心の変位は有限であるが、その大きさが非常に小さい、図 6.31 において図中に示されているモードである。これらのモードを考慮すると、中心の変位よりも表面の変位に対して Q 値が依存していることが示唆される。この 14 個以外のモードは中心での変位が大きいため、支持による損失が支配的となってきていると考えられる。

6.4 この章のまとめ

支持系による散逸を導入することなく、鏡材料の機械損失を直接測定するため、不動点支持を行って鏡材料の Q 値を測定した。

測定のための装置は、以下のような特徴をもっている。

- 円柱状試料の上下の中心を直径 2mm のルビー球で支持する。
- 振動の検出には試料の側面反射を利用した、光検出であり、試料とのカップリングは無視できる。
- 装置の各部分は試料を中心に設置するために、高精度に加工されている。
- 真空中、室温での測定を行う。

そして、TAMA300 に用いられる鏡と同じサイズの、二つの溶融石英 (SUPRASIL P-30,P-10)、シリコン、サファイアについて Q 値の測定を行った。これらの共振は、第 5 章の計算結果と合わせて全て同定された。

その結果、それぞれの試料について、以下の主な結果を得た。

- 溶融石英 SUPRASIL P-30
  - Q 値の最高値は 9.6×10^5 であり、Order $n = 2$, Parity even のモードで得られた。
  - Order $n = 0, 1$ のモードは中心が変位するが、その変位の量と測定される Q 値には負の相関が認められた。これは、これらのモードにおけるエネルギーの損失が、支持系に由来しているものであることを示している。
  - Order $n > 1$ のモードは中心が変位しないが、これらのモード間では有意な Q 値の差が見られた。
  - それらのモードでは、表面変位、特に側面の変位と Q 値に負の相関があった。これは、側面の研磨の粗さがそれぞれのモードの Q 値を制限していることを示唆している。
  - これを確認するためには、研磨条件や表面状態を変えて測定する必要がある。
- 溶融石英 SUPRASIL P-10
  - TAMA300 のリサイクリングミラー基盤の測定を行った。
  - Order $n > 1$ の全てのモードでほぼ一定の Q 値が測定された。その値は、3.0×10^6 であった。これは、P-10 の intrinsic な Q 値であると考えられる。
  - 周波数に対し、損失の大きさが変化しないことから、その内部損失が Structure Damping モデルに従うことが明らかになった。これは、バルクの試料でははじめての結果である。
  - Order $n = 0, 1$ のモードにおいては、中心での変位と測定される Q 値に負の相関があった。これは支持系の損失によるものであると考えられる。
- シリコン
  - 円柱軸が [111] 方向を向いている単結晶シリコンについて測定を行った。
  - Q 値の最高値は 1.0×10^8 に達した。これは、これまでに測定されたことのない高い値である。また、これは、Order $n = 3$ の中心の変位がない特殊なモードであった。
  - この Q 値が装置で決まっているか、内部損失できまっているか、ここでの測定からは断言することができなかった。しかし、この装置では、少なくとも 1×10^8 の Q 値を測定可能なことが保証された。

  - 計算で中心部の変位が 0 となる、Order $n = 3$ の半分のモードとねじれのモードは高い Q を示す傾向があった。しかし、その Q 値が内部損失のみで決まっているかどうかは判断することができなかった。
  - その他のモードは全て中心で有限の変位を持つが、その変位の大きさと測定される Q 値の間には負の相関が認められた。これらの Q 値は支持系で制限されていた。

- サファイア
  - 円柱軸が [0001] 方向を向いている単結晶サファイア (HEMLITE) について測定を行った。
  - Q 値の最高値は 6.4×10^7 である。このモードも Order $n = 3$ の中心の変位しないモードであった。このモードの形状は、シリコンで最高の Q 値を示したモードの形状と酷似している。
  - 中心部が変位するモードでは、その変位の大きさと Q 値に負の相関が認められた。
  - Order $n = 3$ の一部とねじれのモードは中心部の変位を持たないが、それらのモード間でも測定される Q 値には差が見られた。
  - それらのモード間では、表面の変位が少ないほど Q 値が高く測定される傾向があり、中心の変位が有限である場合でも表面の変位が少ないモードは高い Q 値が測定されていたことが分かった。
  - つまり、サファイアの場合、それぞれのモードで測定される Q 値は中心部の変位と、表面の変位の兼ね合いで決まっていることが推察される。
  - この効果を確認するにはさらなる実験が必要である。

モード形状と測定される Q 値に明確な相関が確認できたのは、この実験が初めてであろう。

このような結果から、鏡材質の固有の Q 値を支持系の損失を導入することなく測定する、という本論文の目的はほぼ達成されたと考える。ここで行われたような、材質の中心を点接触で支持する方法によって、低損失材料の Q 値を測定する手段は確立されたと言える。

第7章

まとめと考察

これまで、鏡材料の機械損失に関する研究のために行った計算と実験について述べてきた。本章では、結論としてこれらの結果をまとめる。また、干渉計型検出器における鏡の熱雑音の下限について考察し、本研究に関する今後の課題と展望について述べる。

7.1　有限要素法による振動モード解析

鏡材料固有の Q 値の測定実験のためには、材料の振動モードの変位のない部分や、振動モードの形状を計算しておくことが、必要である。この目的のため、異方性を含む、円柱形状の材料の振動モードを有限要素法によって解析した。実験で測定された共振周波数を計算結果と比較すると、シリコンで誤差 0.5%、サファイアで誤差 1% 程度であった。これは、これまでの計算精度を 1 桁改善したことになる。誤差をこのように小さく抑えることができたことにより、シリコン、サファイアにおいて、測定された全てのモードの同定を行うことができた。

また、異方性材料の振動モード形状が、等方性材料と異なる特徴をもつことも明らかにした。円柱軸に対する結晶の対称性と、振動モードの対称性に関連が見られた。等方性材料とは異なり、一部のモードでのみ、円柱の中心が不動点となることが分かった。計算されたモードの形状は、実験で得られた Q 値の解析に有効に用いられた。従って、振動モード解析の目的は十分に達せられた。

7.2　材料の Q 値の測定実験

鏡材料の機械損失を支持系の損失を導入することなく、直接測定するため、不動点支持による鏡材料の Q 値の測定を行った。

支持点における変位と測定された Q 値には相関があり、支持系による損失が、低損失材料の Q 値を測定する際には無視できなくなる、ということが確認された。また、支持点における変位の少ないモードでの Q 値の測定結果から、各試料について以下のことが分かった。

- 溶融石英 P-30：Q 値の最高値は 9.6×10^5 であった。円柱形の試料の側面の損失が P-30 の Q 値を制限している可能性が示唆された。

- 溶融石英 P-10：周波数の異なる多くのモードで一定の Q 値 3.0×10^6 が測定された。これは、P-10 の材質自体で決まっている Q 値であると考えられる。Q 値に周波数依存性がなかったことにより、内部損失が、Structure Damping Model に従うことが示された。

- シリコン：Q 値の最高値として、1.0×10^8 を得た。これは、これまでに室温で測定されたシリコンの最高の Q 値を上回るものであった。
- サファイア：Q 値の最高値は 6.4×10^7 であった。サファイアの Q 値は、表面の損失で制限されている可能性があることが示された。

このような知見を得ることが可能になったのは、これまで問題であった支持系による損失が、試料に導入されない測定法を採用したことによる。この実験により、低損失な鏡材料に固有の Q 値を測定する手段が確立されたと考える。

7.3　干渉計型重力波検出器における鏡

本研究は、干渉計型重力波検出器 TAMA300 における鏡の熱雑音を低減する目的からスタートしている。そこで、その観点から結果を考察してみる。

TAMA300 で実際に用いられる鏡 溶融石英 P-10 の材質自身で決まる Q 値は 3.0×10^6 であった。これから計算すると、TAMA300 における鏡の熱雑音の下限は観測帯域である 300Hz 近傍において、

$$8 \times 10^{-20}\ (\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}) \tag{7.1}$$

となる。この雑音レベルは、Phase I と呼ばれる観測体制の際には問題とならない。しかし、Phase II の目標感度は、300Hz 近傍において、

$$5 \times 10^{-20}\ (\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}) \tag{7.2}$$

である。これは溶融石英 P-10 では達成することができない。従って、目標感度達成のためには、より高い Q 値を示すような鏡材質に変更する必要がある。

他の干渉計計画における実験では、懸架された溶融石英で Q 値 2×10^7 が測定されている。TAMA における溶融石英の材質自身で決まる Q 値が 1 桁低いのは、製法や成分、表面状態の違いなどによると考えられる。従って、種類の異なる溶融石英の Q 値を測定し、より低損失な溶融石英を探索、開発することも必要である。

溶融石英に変わりうる候補としては、シリコンやサファイアが考えられている。ここで行われた実験で得られた Q 値の最高値を使って考えると、これらの材質を用いた際の熱雑音は Phase II の目標感度の 3 分の 1 程度にできる可能性がある[1]。本論文の実験では、表面の損失がサファイアの損失を決める可能性があることが示唆されている。従って、サファイア鏡を干渉計型重力波検出器に導入するには、特に表面状態に留意しなければならないであろう。

また、鏡を懸架する際に導入される損失が懸架鏡の Q 値を制限してくるため、損失を導入しない懸架法の開発は欠かせないものとなろう。鏡に取り付けられる磁石やスタンドオフにより導入される損失も、評価されねばならない。

干渉計型重力波検出器のための低損失鏡材料の研究には、ここで確立された鏡固有の Q 値を直接測定する方法が、有力な手段となっていくと考えられる。

7.4　これからの課題と展望

本論文で行われた計算や実験に対する今後の課題や展望を述べる。

[1]詳しくは補遺 B を参照。

7.4.1 有限要素法による計算の課題と展望

現在の有限要素法の共振周波数の計算結果は、モード同定には十分な精度をもっている。しかし、有限要素モデルが粗いため、周波数が高くなると計算精度が落ちてくる。また、モード形状の微細な構造を見ることができない。これを改善するためには、モデルの要素を増す必要がある。その場合は、計算時間を増大させない工夫が必要となる。これが達成できれば、より正確に熱雑音の推定が行えるようになる。これまで等方体に対して行われてきた様々な推定が、異方性材質においても、行えるようになる、ということである。

計算された異方性物質の振動モードの特性を説明する、理論的な説明が欠如しているため、これを整理する必要もある。これには、対称性に関わる議論が適用可能であろう。

また、形の摩擦や損失を考慮した有限要素法の計算、静的応答などの計算を行うことができれば、より一般の熱雑音の解析へ応用が広がると考えられる。

7.4.2 実験における課題と展望

現在の装置では、試料の設置の精度が不足している可能性がある。支持点を能動的に振動モードの不動点に一致させる支持系を開発すれば、さらに確実に内部損失の機構が考察できるようになるであろう。

熱雑音の低減のため、内部損失の少ない鏡を実現するには、鏡材料や懸架法の開発も要求される。そのためには、この装置で様々な試料を、様々な条件下で測定していくことが必要である。これまでの Q 値の測定は、試行錯誤にのみよっていた、といっても過言ではない。しかし、ここで確立された測定法では、実験結果から様々な情報を得ることが可能である。そのため、この方法は、これからの鏡材料や懸架法の開発のための Q 値の測定の手段として、一般的な手段となりうる可能性を持っている。

補 遺 A

結晶における弾性定数

スティフネス (もしくはコンプライアンス) 行列の独立な 21 個の成分は、結晶内の対称性によって、さらにその数が制限される。ある座標変換を行った場合、結晶が同じ性質を示すのなら、そのスティフネス行列 (コンプライアンス行列) も変化してはいけない。従って、弾性定数行列に対して座標変換を施し、変換前の行列と比較することで、弾性定数の成分に対して制限が加えられる。詳しい議論は [70] などを参照。

ここでは、等方体、立方晶系、三方晶系の三種の場合について行列の特徴を述べておく。

A.1 定義

x 軸に垂直な面の単位面積あたりに働く応力の x, y, z 成分をそれぞれ、P_{xx}, P_{xy}, P_{xz} などとする。また、物体内の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ が $\mathrm{P}'(x+u, y+v, z+w)$ に変位したときのひずみの各成分を、

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{A.1}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{A.2}$$

などと定義する。簡便のために添え字の変換を決めておく。

$$P_{xx} = P_1,\ P_{yy} = P_2,\ P_{zz} = P_3,\ P_{yz} = P_4,\ P_{zx} = P_5,\ P_{xy} = P_6 \tag{A.3}$$

スティフネス行列は応力の各成分を歪みの線形結合で表したときの係数である。

$$P_i = \sum_{j=1}^{6} c_{ij}\varepsilon_j \tag{A.4}$$

コンプライアンス行列は歪みの各成分を応力の線形結合で表したときの係数である。

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^{6} s_{ij}P_j \tag{A.5}$$

この行列は互いに逆行列の関係にある。また、おのおのは対称行列である。

A.2 等方体

独立な弾性定数は 2 つであり、スティフネス行列 c_{ij} は以下の形となる。

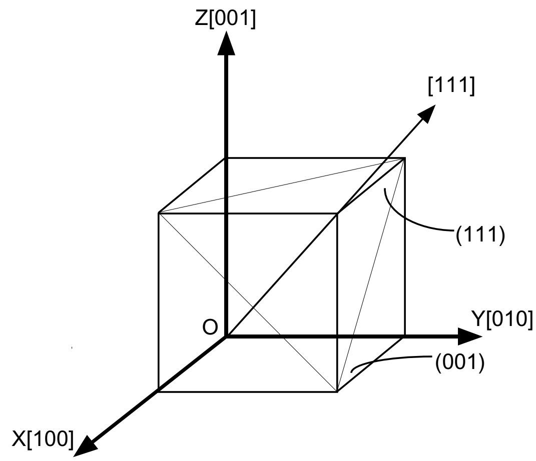

図 A.1: 立方晶系における結晶軸と座標軸の関係

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

コンプライアンス s_{ij} で書けば、

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(s_{11}-s_{12}) & 0 & 0 \\ & & & & 2(s_{11}-s_{12}) & 0 \\ & & & & & 2(s_{11}-s_{12}) \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

である。これらの行列は、任意の対称操作に対してその形を変えない。”結晶軸”という概念がないので、座標系のとり方も任意でよい。

また、等方体の場合には、

$$\lambda = c_{12},\ \mu = c_{44} = \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) \tag{A.8}$$

の関係にある Lame の定数 λ, μ を独立な二つの弾性定数と選ぶことがある。このとき、

$$c_{11} = \lambda + 2\mu \tag{A.9}$$

である。

A.3　立方晶系

独立な弾性定数は 3 つである。直交した結晶軸を座標軸にとる (図 A.1)。

スティフネス行列 c_{ij} は、

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & c_{44} \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

である。また、コンプライアンス s_{ij} で書けば、

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & 0 \\ & & & & & s_{44} \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

である。互いに逆行列であるので、両者には以下の関係がある。

$$s_{11} = \frac{c_{11}+c_{12}}{(c_{11}-c_{12})(c_{11}+2c_{12})},\ s_{12} = \frac{-c_{12}}{(c_{11}-c_{12})(c_{11}+2c_{12})},\ s_{44} = \frac{1}{c_{44}} \tag{A.12}$$

逆も同様である。

立方晶系の場合、

$$K = \frac{1}{3}(c_{11}+2c_{12}),\ C = c_{44},\ C' = \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) \tag{A.13}$$

という関係にある体積弾性率 K と、ずれ弾性率 C, C' を独立な弾性定数にとることがある。ここで、二つのずれ弾性率の比、

$$A = \frac{C}{C'} = \frac{2c_{44}}{c_{11}-c_{12}} = \frac{2(s_{11}-s_{12})}{s_{44}} \tag{A.14}$$

を非等方性因子という。A が 1 からずれるほど非等方性が強いことを表す。

ヤング率 E はある方向に働く応力をその方向への歪みで割ったものと定義される。例として、x 軸方向のヤング率を考える[1]と、

$$E_x = \frac{(c_{11}-c_{12})(c_{11}+2c_{12})}{c_{11}+c_{12}} = \frac{1}{s_{11}} \tag{A.15}$$

と書ける。

また、ポアソン比 ν は一方向に応力が働いたとき、それと直角方向の歪みを平行方向の歪みで割り、符号を変えたものと定義される。例として、x 方向に応力が働くときの y 方向への縮みを考えたとき、

$$\nu_{xy} \equiv -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{c_{12}}{c_{11}+c_{12}} = -\frac{s_{12}}{s_{11}} \tag{A.16}$$

先ほど述べた、ずれ弾性率 C を剛性率 G ともいう。これは、(010) 面に働く応力による [100] 方向への純粋なすべり変形の時の弾性定数にあたる。

$$G_{xy} = c_{44} = \frac{1}{s_{44}} \tag{A.17}$$

なお、一般の方向に対するこれらの弾性率を考えることもでき [14]、座標軸 (結晶軸) とその対角方向でヤング率は極値を取ることが知られている。

[1] 立方晶なので、y, z 軸に関しても等しくなる。

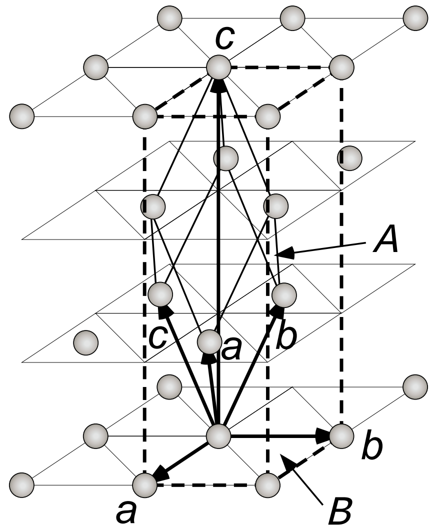

図 A.2: 三方晶系における単位胞のとり方。A を単純菱面体単位胞、B を複合六方単位胞と呼ぶ。

A.4 三方晶系

三方晶系の場合、許される対称操作により独立な弾性定数の数が異なる。結晶の対称要素が、三回回転軸 (3) もしくは、三回回反転軸 ($\bar{3}$) のみの場合、独立な弾性定数の数は 7 個、それ以上の対称要素が加わると 6 個に減る。実験で用いるサファイアは、回反の操作が加わった、($\bar{3}c$) という対称要素をもつため、後者に該当する。ここでは、6 つの独立な弾性定数を持つ場合を示す。

座標軸のとり方には注意が必要である。三方晶系の場合、図 A.2 に示すような、二つの結晶格子のとり方があることに留意しなければばならない。以下では、複合六方単位胞を用いて考える。

この場合、結晶面を表す際、通常のミラー指数 (hkl) と異なり、4 本の結晶軸を用いた形式で表すことが多い。図 A.3 のように、c 軸と直交する平面上に残りの 3 本の結晶軸 a_1, a_2, a_3 があって、その 3 本は互いに 120° で交わっている。結晶面はこれら 4 本の結晶軸 a_1, a_2, a_3, c についての指数をこの順序に並べて (hikl) と書く。また、a 軸、b 軸の方向も図 A.4 のように定義される。

三方晶系における独立な 6 つの弾性定数は以下のように表せる。これらは、a 軸が x 軸と一致し、c 軸が z 軸と一致するような直交座標系 (x, y, z) を採用したものである。スティフネス c_{ij} で表現すると、

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & c_{14} \\ & & & & & \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}) \end{pmatrix} \tag{A.18}$$

である。コンプライアンス s_{ij} で書けば、

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{13} & -s_{14} & 0 & 0 \\ & & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & 2s_{14} \\ & & & & & 2(s_{11}-s_{12}) \end{pmatrix} \tag{A.19}$$

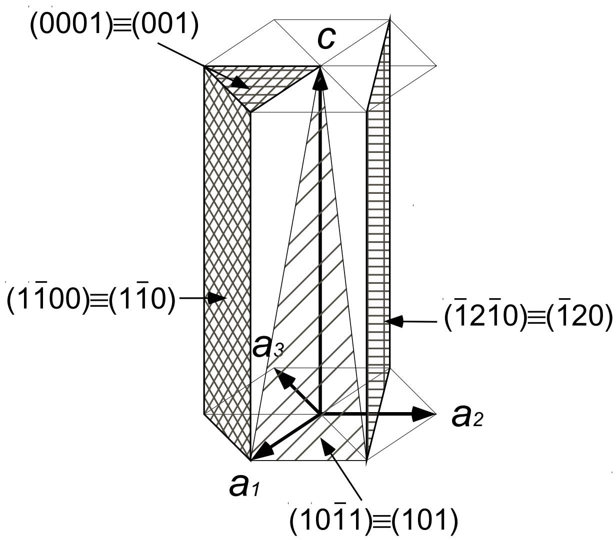

図 A.3: 三方晶系における結晶面

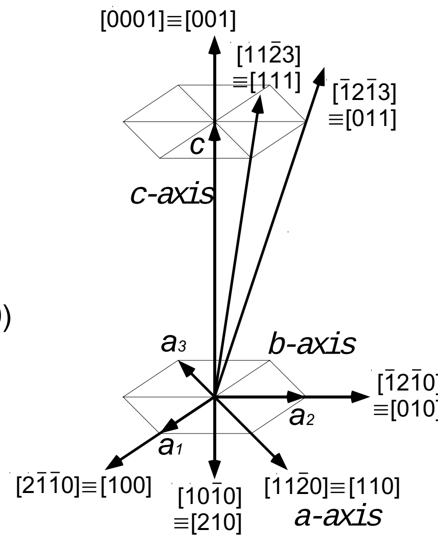

図 A.4: 三方晶系における方向

となる。

補 遺B

異方性を考慮に入れた鏡の熱雑音推定

サファイアはその Q 値の高さ、結晶化技術の向上などから、次世代の干渉計型重力波検出器の鏡としての有力な候補となっている [24, 71]。また、Delay-Line 型干渉計の不透過鏡として、また、表面の回折格子を利用した全反射型干渉計の鏡 [72] として、結晶化の技術も成熟しているシリコンは注目されている。

しかし、これまで、このような結晶性 (異方性) 材質の振動モード形状を正確に計算することができなかったため、それらの鏡を用いたときの鏡の熱雑音は、等方体と近似してしまって推定するにとどまっていた。しかし、本論文の第 5 章の計算では異方性材質の共振周波数を正確に計算することができ、その振動モードが等方体と大きく異なっているものであることが分かった。そこで、これまでの等方近似による推定が正しいかどうか、見直してみる必要がある。具体的には、換算質量 (第 3 章) を計算しなおすことが必要である。

ここでは、有限要素法を用いた換算質量の計算結果について述べ、これまでの推定が妥当であったかどうか検討する。そのためにまず、溶融石英の場合について、Hutchinson の方法による計算結果と比較し、ここでの計算結果の範囲で非常によく一致したことを見る。次に、同じ計算をサファイアとシリコンに適用する。これらの物質は円柱に対する結晶軸の向きが変化すると、モード形状も変化することが分かったので、結晶軸の違いによる換算質量の変化についても論ずる。そして、最後にそれらの鏡を用いた場合の、TAMA300 での鏡の熱雑音レベルについて述べることにする。

B.1 等方体 (溶融石英) の場合

B.1.1 計算の方法

ここで用いた有限要素モデルは図 5.3 のようなモデルである。換算質量を計算するには、式 (3.51) に従えばよく、幸いなことに、ANSYS の節点ごとの変位の出力では、この積分の部分は 1 になるように式 (5.45) で規格化できる。従って、求めるのは式 (3.47) の Δl だけとなる。

光軸方向への変位 u_z は各接点に対して出力されてくるので、それを利用して Δl の計算を行うことができる。ただし、要素が粗いので、積分を行う際には適当な補間を行って[1]求めることにした。

まず、溶融石英を考える。この場合、Hutchinson の方法が適用できる。全熱雑音、式 (3.55) の低周波のモードからの足し合わせが、Hutchinson の方法で計算したものと一致するかどうか、調べてみる。以下、全て鏡の大きさは TAMA サイズ (直径 10cm, 高さ 6cm)、ビーム半径はフロントミラーで 0.8cm、エンドミラーで 1.5cm とこれも TAMA の設計値にして計算している。

[1]具体的には、おのおのの要素を 100 分割し、それぞれの要素の変位を重みつき平均から推定して計算している。

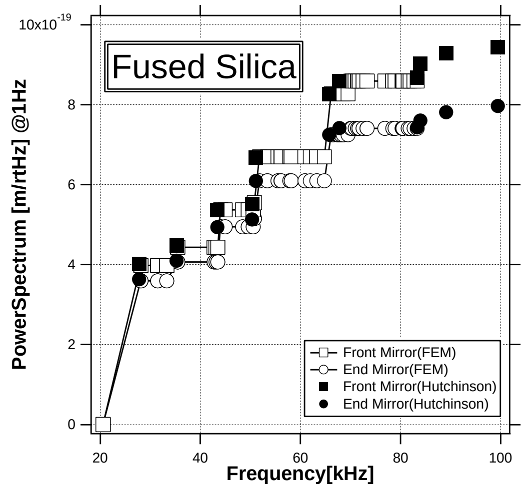

図 B.1: 溶融石英の熱雑音のパワースペクトル (低周波の寄与のみ考慮)。Hutchinson の方法では、Order $n = 0$ のモードのみ考慮しているが、有限要素法では、計算された全てのモードについて足し合わせている。

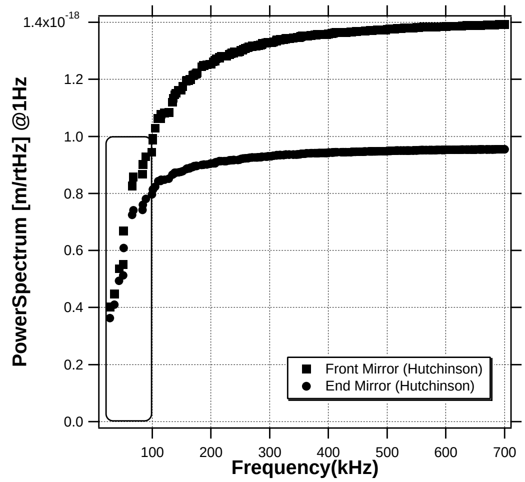

図 B.2: 溶融石英の熱雑音のパワースペクトルが収束するまで足し合わせたもの。Hutchinson の方法で計算。図の枠で囲ってある部分が図 B.1 に相当。

B.1.2 Hutchinson との比較

図 B.1 に 1Hz における熱雑音のパワースペクトルの、低周波側からの足しあわせを両方の方法について計算した結果を示す。ただし、Q 値は文献 [8] と同条件にするために、1×10^6 とした。

実際には、図 B.2 に示すように、700kHz 程度のモードまでの寄与を考えなければ低周波の熱雑音レベルは収束しないので、ここでの計算 (80kHz 程度まで) では全熱雑音を計算するには不足している。しかし、図 B.2 によると、この周波数の範囲では両者でよく一致した計算結果を得ている事がわかる。有限要素法では Order $n > 0$ のモードも考えているが、これらのモードは換算質量が大きいため、熱雑音に寄与していない。

B.2 異方性物質の場合

前節で、有限要素法の結果から計算された換算質量の値は、少なくとも 100kHz 程度までは問題がなさそうだと分かった。

ここでは、同じ計算を異方性物質に適用する。比較のために等方極限を考える。

B.2.1 シリコン

結晶軸の向きとして、二つの場合を考えた。[111] が円柱軸を向いている場合と、[001] が円柱軸を向いている場合である。両者の結果を図 B.3,B.4 に示す。ただし、Q 値は第 6 章で得られた最高の Q 値、1×10^8 を用いている。

80kHz ほどまででは、両者のレベルはほとんど変わらない。シリコン [111] の場合には、Order $n = 3$ のモードが中心で z 成分の変位を持つことが分かっていたが、図 B.3 によると、そのモードの換算質量は大きく、熱雑音への寄与は非常に小さいことが分かる。また、シリコン [001] の場合には、Order $n = 4$ のモードがわずかに寄与している以外、やはりほとんど等方体でいう Order

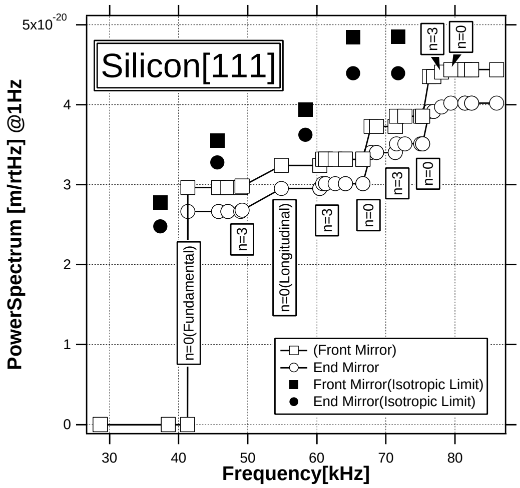

図 B.3: シリコン [111] の熱雑音スペクトルの足し合わせ。

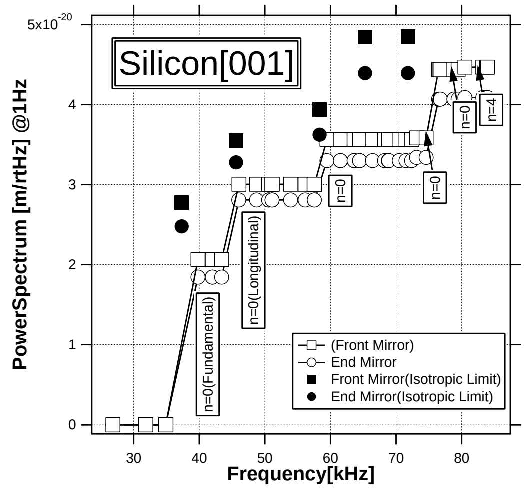

図 B.4: シリコン [001] の熱雑音スペクトルの足し合わせ。

$n = 0$ の伸縮モードしか寄与してこないことが分かる。

比較のために、等方体であると近似して考えた場合の Hutchinson の方法による計算値も図 B.3,B.4 に示した。等方体と近似する場合には、第 5 章と同じく、実際のシリコンの剛性率 G を無視した。この近似の仕方では、実際の共振周波数よりも周波数を低く計算してしまう (図 5.6,5.12)。等価なモードまでの足し合わせを考えた場合、1 割ほど等方近似の方が大きく計算されている。しかし、全てのモードの換算質量が大きくなっているわけでもない。そのため、収束するまで足し合わせたときの値が有意に異なってくるかは、ここだけでは判定することができない。しかしファクターが変化する、ということはないのではないかと思われる。

B.2.2 サファイア

同様に、サファイアも c 軸が円柱軸を向いている場合と、a 軸が円柱軸を向いている場合について、計算を行った。両者の結果を図 B.5,B.6 に示す。ただし、Q 値は第 6 章で得られた最高の Q 値、6.4×10^7 を用いている。

c 軸が円柱軸の場合 ([0001])、中心が z 方向へ変位するほうのモードがわずかに寄与してくることが図 B.5 より分かる。また、a 軸が円柱軸の場合 ([11$\bar{2}$0])、Order $n = 2$ のモードなどが寄与してくるが、そのレベルは大きな問題にはなっていない。

等方極限の場合の計算値も同時に示した。その近似の仕方は、第 5 章と同様である。この場合の近似では、各々の伸縮モードの周波数はそれほど大きな変化をしない (図 5.16,5.24)。また、換算質量の値もほとんど変化していないため、等方極限での足し合わせの値も両者の場合で、異方性を考慮した場合とほとんど変わっていない。

B.2.3 両者の特徴と課題

これらの結果より、

- 結晶軸の方向により、熱雑音の振幅は大きく変化することはない。
- そのレベルは、等方近似から考えても大きく異ならない。

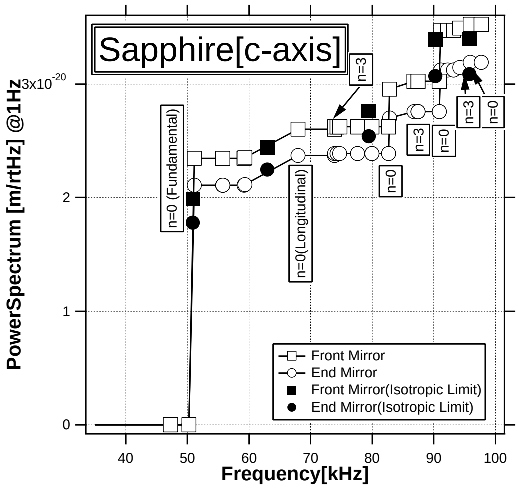

図 B.5: サファイア [0001] の熱雑音スペクトルの足し合わせ。

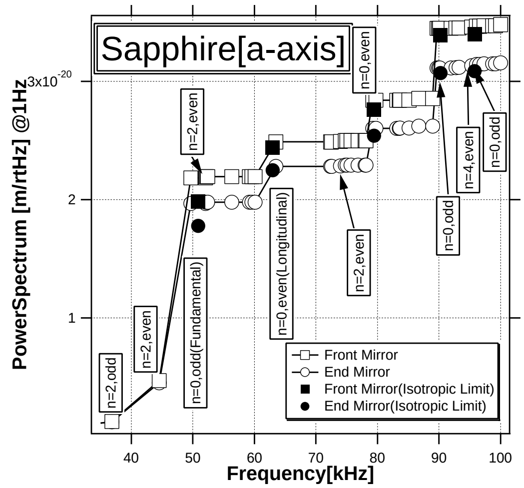

図 B.6: サファイア [11$\bar{2}$0] の熱雑音スペクトルの足し合わせ。

と考えられる。しかし、ここでの計算はごく低周波に限っており、より高い周波数のモードの寄与を考えて足し合わせなければ、収束値が等方近似とどの程度異なってくるかは分からない。

周波数が高くなってくると有限要素法の計算は不利になってくる。ここでは、図 5.3 のモデル (節点数 7733、要素数 6840) を用いている。これまでに節点数を 10413、要素数を 9216 まで増加させて、100kHz を超える程度の計算を行うことができている。しかし、~700kHz という周波数までのモード計算を行わせるには、要素の数を 10 倍ほど増さねばならないだろうと考えられている[2]。そのような要素数では、解くべき行列が大きくなってしまい、現在のマシンパワーでは解くことができない。

従って、別のアプローチが必要であろう。今の場合、観測帯域が鏡の共鳴周波数よりもずっと低い。そのため、観測帯域でのエネルギーの損失は、静的な力を加えたときの弾性エネルギーから計算することができる [69]。有限要素法では、力を加えたときの応答を、異方性物質の場合でも計算することが可能であるので、むしろこの方法を用いて推定するほうが現実的である。そのため、現在この方法を適用できないか、探っている。

B.3 異方性物質を用いた場合の熱雑音レベル

これまでの結果では、異方性を含んだ場合も熱雑音レベルは等方近似の場合と大きな違いはない、すなわち、”ヤング率”と Q 値のみに依存すると考えてもよいと分かった。結晶軸の向きの効果はほとんど効いてこないであろう。

そこで、シリコンやサファイアといった材質に対して、ヤング率と Q 値の分、溶融石英の結果を補正しておよその熱雑音レベルを描くことができる。図 B.7 に、TAMA300 にこれらの鏡を導入したときに期待される最大限に期待される熱雑音レベルを示す。

ただし、サファイアについては、複屈折の問題があり、透過鏡として用いてもよいか、慎重な検討が必要とされている [73]。また、シリコンについては、光を透過しないために、Fabry-Perot 型の検出器のニアミラーには用いることができないという欠点がある。

[2] Hutchinson の計算では、NR, NZ として 20 ほどを指定すると熱雑音レベルが収束する。これは、各方向で波数 20 ほどの波まで考慮していることになり、有限要素法では、少なくとも 40 分割する必要がある。従って、$40^3 \sim 60000$ 分割程度は必要であろうと概算できる。

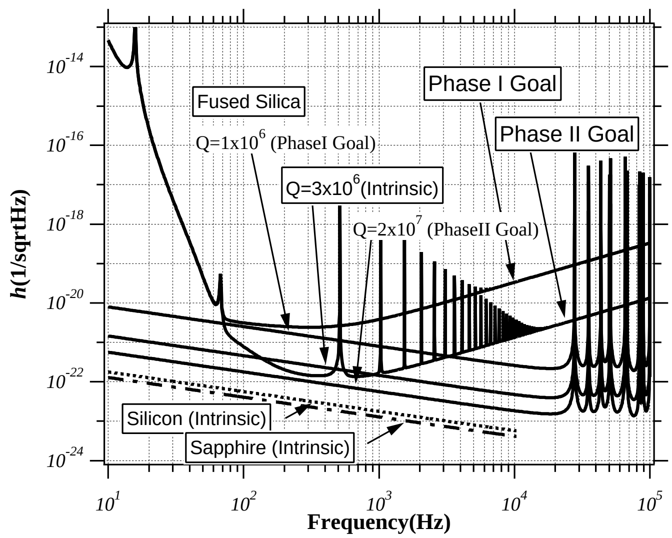

図 B.7: 異方性を含んだ鏡の熱雑音の推定。溶融石英 P-10 で測定された intrinsic な Q 値 3.0×10^6 を使って、P-10 で期待できる最良の熱雑音レベルも示した。これによると、P-10 を用いている限りは、PhaseII の目標感度に到達できない事がわかる。しかし、シリコンやサファイアであれば、目標感度に到達可能であることが分かる。ただし、各々の Q 値は測定された最高値、1.0×10^8、6.4×10^7 を用いている。また、等方体であると近似して計算している。この近似が正しいかどうか、さらに計算を行ってみる必要がある。

参考文献

[1] 三尾典克, 大橋正健編, 重力波アンテナ技術検討書, 1992/10.

[2] 坪野公夫, 21 世紀の重力波天文学, 日本物理学会誌, **54** (1999) 328.

[3] 中村卓史 他, 重力波をとらえる, 京都大学出版会 (1998).

[4] A. Abramovici et al., *Science*, **256** (1992) 325.

[5] The VIRGO Collaboration, *VIRGO Final Design Report* (1997).

[6] K. Danzmann et al., *Max-Plank-Institut für Quantenoptik Report* (1994).

[7] K. Tsubono, *Gravitational Wave Experiments*, World Scientific, **122** (1995).

[8] 山元一広, TAMA300 における Suspension System および鏡の熱雑音の推定, 修士論文, (1996).

[9] N. Mio, *Jpn. J. Appl. Phys.*, **31** (1992) 1243.

[10] A. Gillespie, *Phys. Lett.*A, 178 (1993) 357.

[11] M. Ando, *TAMA noise budget calculation program for Matlab*, (1999).

[12] H. B. Callen, *Phys. Rev.*, **83** (1951) 34.

[13] H. B. Callen, *Phys. Rev.*, **86** (1952) 702.

[14] 佐藤常三, 石橋善弘訳, ランダウ=リフシッツ, 弾性理論, 東京図書, (1997), ISBN4-489-00278-5.

[15] P. R. Saulson, *Phys. Rev.* D, **42** (1990) 2437.

[16] A. L. Kimball et al., *Phys. Rev.*, **30** (1927) 948.

[17] P. R. Saulson et al., *Rev. Sci. Instrum.*, **65** (1994) 182.

[18] G. I. Gonzalez et al., *Phys. Lett.* A ,**201** (1995) 12.

[19] M. Kajima et al., *Phys. Lett.* A (accepted)

[20] Y. Levin, *Phys. Rev.* D, **57** (1998) 57.

[21] A. Gillespie et al., *Phys. Rev.* D, **52** (1995) 577.

[22] Francǫis Bondu, *Phys. Lett.* A, **198** (1995) 74.

[23] J. R. Hutchinson, *J. Appl. Mech.*, **47** 901 (1980).

[24] T.Uchiyama et al. , *Phys. Lett.* A ,**261** (1999) 5.

[25] 大石奈緒子, 干渉計型重力波検出器に用いる鏡の Q 値測定, 修士論文, (1997).

[26] J. Kovalik et al. , *Rev. Sci. Instrum.*, **64** (1993) 2942.

[27] S. Rowan et,al. , *Phys. Lett.* A, **227** (1997) 153.

[28] 大石奈緒子, 溶融石英ファイバーの Q 値測定 TAMA300 レポート, 1998/10/5.

[29] A. M. Gretarsson et,al. , *Rev. Sci. Instrum.*, **70** (1999) 4081.

[30] S. Traeger et al., *Phys. Lett.* A, **2250** (1997) 39.

[31] M. Taniwaki et al. , *Phys. Lett.* A, **246** (1998) 37.

[32] A. D. Gillespie, PhD Thesis, California Institute of Technology, 1995.

[33] W. J. Startin et al. , *Rev. Sci. Instrum.*, **69** (1998) 3681.

[34] V. B. Braginsky et al., *Systems with Small Dissipation*, Univ. Chicago Press, 1985.

[35] D. F. McGuigan et al., *J. Low. Temp. Phys.* **30** (1978) 621.

[36] 比企能夫, 弾性、非弾性, 共立出版, (1972).

[37] 能本 乙彦 他, 音波物性とその応用, オーム社, (1969).

[38] C. Zenner, *Phys. Rev.*, **52** (1937) 230.

[39] C. Zenner, *Phys. Rev.*, **53** (1938) 90.

[40] 物理学辞典, 培風館 , (1984).

[41] R. H. Randall et al., *Phys. Rev.*, **56** (1939) 343.

[42] W. Duffy Jr., *J. Appl. Phys.*, **68** (1990) 5601.

[43] 鈴木敏一, 低温重力波アンテナの開発, 修士論文 (1978).

[44] D. B. Fraser, *J. Appl. Phys.*, **41** (1969) 6.

[45] P. W. Anderson et al. *Philos. Mag.*, **25** (1972) 1.

[46] D. Tielbürger et al., *Phys. Rev.* B, **45** (1992) 2750.

[47] A. Granato et al, *J. Appl. Phys.*, 27 (1956) 583.

[48] J. L. Routbort et al., *J. Appl. Phys.*, **37** (1966) 4803.

[49] W. Duffy Jr., *J. Appl. Phys.*, **72** (1992) 5628.

[50] D.H. Douglass, *Academia Nazionale dei Lincei International Symposium on Experimental Gravitation, Pavia, Italy*, 1976/9/17-20.

[51] J. E. Logan et al., *Phys. Lett.* A, **161** (1991) 101.

[52] 大森啓一訳, 結晶音響学, 内田老鶴圃新社, (1978).

[53] 尾上守夫監修, 固体振動論の基礎, オーム社, (1982), ISBN 4-274-02947-6.

[54] 三好俊郎, 有限要素法入門. 培風館, (1994), ISBN 563-03490-8.

[55] サイバネットシステム (株), ANSYS Solid Modeling セミナー, (1996).

[56] サイバネットシステム (株)，ANSYS 動解析セミナー, (1996).

[57] 大石奈緒子，坪野研究室内現状報告 シリコンの Q 値測定と有限要素法による計算結果との比較, 1997/5/7 .

[58] Crystal Systems Inc., *INSPECTION SHEET*, 1998/3/4.

[59] Bertolotto Bianc Biuseppe，計量研からの TELEFAX, 1997/4/8.

[60] 信越石英株式会社，石英ガラス総合カタログ, 発行年不明

[61] T. Goto et al., *J. Geophys. Res.*, **94** (1989) 7588.

[62] J. B. Wachtman. Jr., W. E. Tefft, D. G. Lam. Jr., and R. P. Stinchfield, *J. Res. Natinal Bur. Standards*, **64** (1960) 213.

[63] 坪野公夫，Mirror 制御のための静電 Actuator, 坪野研輪講資料, 1998/3/10.

[64] S. Grasso et al.. *Phys. Lett.* A, **244** (1998) 360.

[65] K. Seta et al., *Opt. Comm.*, **55** (1985) 367.

[66] 鈴木敏一，小サンプルによる Fused Silica の Q 測定, 小レポート, 1995/9/21.

[67] R. Brückner, *J. Non-cryst Solids.*, **5** (1970) 123.

[68] 坪野公夫 他，学生実験 ブラウン運動 テキスト.

[69] Y. Levin, *Phys. Rev.* D, **57** (1998) 659.

[70] T. S. Narasimhamurty, *Photoelastic and Electro-Optic Properties of Crystals*, Plenum Press, New York (1981),ISBN 0-306-31101-1

[71] L. Ju et al., *Phys. Lett.*, A **218** (1996) 197.

[72] Traeger, *LSC Meeting. Transparencies*, 1999/6

[73] Beyersdorf, *LSC Meeting. Transparencies* , 1999/6

謝辞

本研究を行うにあたり、多くの方々の指導と援助を仰ぐことができました。

指導教官である、東京大学理学部物理学科の坪野公夫教授には、研究のテーマを与えていただきました。そもそも、本研究で行われた実験のアイデアは坪野教授が出されたものです。深い学識に基づいた助言と、暖かい励ましにより、研究を進ませることができました。

実験装置試作室 技官 大塚茂巳氏には、実験装置のほぼ全てを製作していただきました。非常に高い精度で、工作をしてくださいました。設計の際にも、常に熱心に相談に乗ってくださり、工作の指導もしてくださいました。氏の協力を仰げたのは、私にとって非常に幸運なことでした。

坪野研究室の助手である、河辺径太氏には、筆者が学部 4 年生で学生実験にきていたころからお世話になりました。氏の鋭い物理的考察に、何度も驚かされ、刺激を受けました。

同じく坪野研究室の助手である、安東正樹氏にも大変お世話になりました。TAMA の仕事で忙しいにも関わらず、実験や論文に関して様々な助言を与えつづけてくださいました。

国立天文台 助手 新井宏二氏にも大変お世話になりました。どんなことでも丁寧に教えてくださり、時には厳しい言葉で叱咤してくださいました。氏の研究に対する姿勢に刺激を受け、毎日励まされてきたといっても過言ではありません。

博士課程 3 年 大石奈緒子氏には、実験の最初から指導をしていただきました。そもそも、氏が修士課程に行っていた鏡の Q 値の研究がなければ、本研究は生まれないものでした。真空装置や光学定番を私のために快く、譲ってくださいました。

博士課程 3 年、山元一広氏には、毎日のように質問をさせていただきました。私の稚拙な質問に、熱心にかつ真剣に答えて下さいました。氏の熱雑音に関する知識に、何度助けられたか分かりません。

博士課程 2 年、高森昭光氏には、非常によく面倒をみていただきました。私の生意気な態度に呆れつつも、真摯な態度で指導をしてくださいました。特に、氏の機械系の工作に関する知識は豊富であり、本論文の実験装置の設計の際には適切な助言を与えてくださいました。

博士課程 1 年、谷口信介氏には、TAMA に関する小タスクでお世話になっています。私の質問に、いつも即座に答えてくださいました。

修士課程 2 年、関谷淳氏にも、感謝したいと思います。同級生として、実験や大学院での生活に関して、様々な相談を行うことができました。本論文の実験で用いられている、静電型電極は氏が実験を行っていたものでした。

宇宙線研究所 助教授 大橋正健氏は、サファイア、P-10 の試料を貸し出して下さいました。特に、私が試料に傷をつける可能性があるにも関わらず、TAMA のために用意されている P-10 を貸し出す決断をして下さったことには、感激すら覚えました。氏の私の研究に対する理解がなければ、このような形で論文をまとめることはできなかったでしょう。

高エネルギー加速器研究機構 助手 鈴木敏一氏には、ANSYS の使用方について零から教えていただきました。氏が過去に、有限要素解析を行っていなければ、本論文の計算はありえないものです。また、私は、氏の内部損失に関する深い知識を頼りに、何度も稚拙な質問をさせていただきました。そのたびに氏は、明確な回答をして下さり、様々な文献を紹介して下さいました。

計量研究所 元研究員 Giuseppe Bertolotto Bianc 氏には、ANSYS による有限要素法のモード解

析の指導をしていただきました。本論文で、異方性物質の振動モード解析を行うことができたのは、ひとえに、氏の助言であるといっても過言ではありません。氏自身も様々な解析を行っており、氏との情報交換は、非常な解析のヒントになりました。

修士課程の 2 年間、私を支えて続けてくださった全ての人に、心からお礼を言いたいと思います。

最後に、私が大学院での研究を行うことを理解して、応援をして下さった、両親と姉に最高の感謝の意を表します。