

修士論文

高出力レーザー用電気光学結晶の特性評価

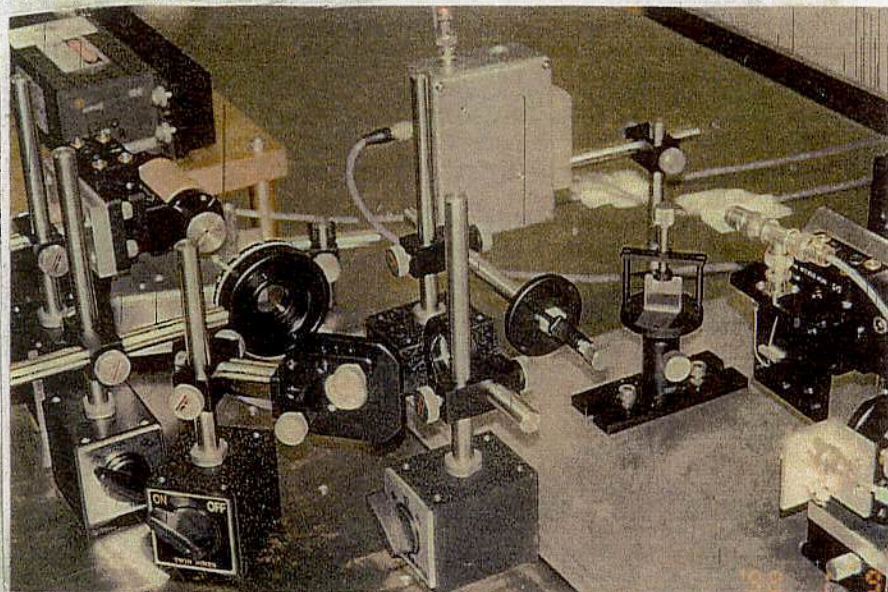
理学系研究科物理学専攻 66109

内藤 豊

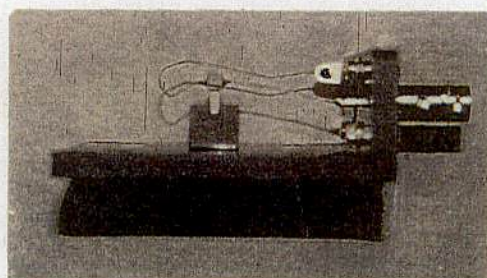
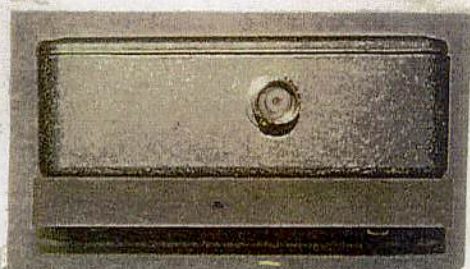
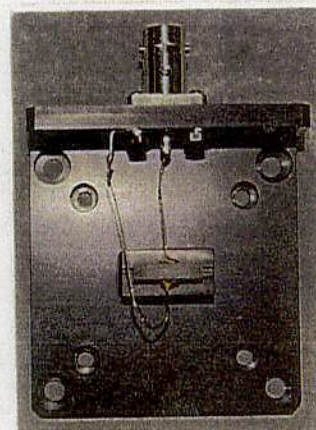
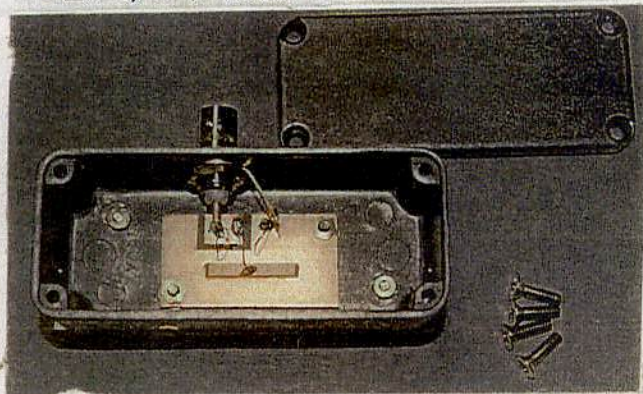
提出日: 1 月

実験装置

・光学系全体



・電気光学結晶



LiNbO_3

RbTiOAsO_4
(KTiOPo_4)

目次

1	はじめに	4
2	重力波	6
2.1	重力場の線形近似と重力波の伝播方程式	6
2.2	真空中を伝播する平面波	7
2.3	重力波のエネルギー	9
2.4	重力波の発生	11
3	レーザー干渉計型重力波検出器	13
3.1	Michelson 干渉計	13
3.2	Michelson 干渉計による重力波の検出	15
3.3	重力波に対する周波数応答と基線長	16
3.4	2 種類のレーザー干渉計	17
3.5	レーザー干渉計における雑音源	17
3.5.1	地面振動	17
3.5.2	熱雑音	17
3.5.3	散乱雑音	17
3.6	世界のレーザー干渉計型重力波検出器	18
4	位相変調器	19
4.1	非等方性結晶	19
4.2	Fresnel 法線方程式	20
4.3	Pockels 効果	23
4.4	Pockels 効果の非線形効果による説明	25
4.5	位相変調器	25
5	実験装置	28
5.1	光学系	28
5.1.1	光源	28
5.1.2	Isolator	28
5.1.3	その他の光学要素: 鏡, Beam splitter, $\lambda/2$ 板, PBS	29

5.1.4	Photo Detector	30
5.2	差動法により lock された Michelson 干渉計の応答	30
5.3	制御系の OpenLoop 伝達関数	33
5.3.1	制御系の OpenLoop 伝達関数の測定法	33
5.3.2	干渉計の伝達関数	36
5.3.3	PZT の圧電係数	36
6	実験: Pockels 係数 r_{33} の測定	39
6.1	光学結晶	39
6.2	原理	39
6.3	実験装置	41
6.4	強度変調とコントラスト	43
6.5	測定結果	44
6.6	Pockels 係数の位相遅れ	49
6.7	まとめ	49
7	実験: インピーダンス測定	51
7.1	誘電体	51
7.2	誘電分極	52
7.2.1	電子分極	52
7.2.2	イオン分極	52
7.2.3	配向分極	53
7.3	分極の周波数依存性	53
7.4	測定法	55
7.4.1	測定結果: 比誘電率と誘電損失	55
7.4.2	ロスタンジェント	58
7.4.3	誘電緩和	58
7.5	まとめ	58
8	実験: RbTiOAsO_4 を用いた 15MHzLC 共振回路の Q 値測定	61
8.0.1	原理	61
8.1	測定結果	63
9	高出力に対する測定	65
9.1	Photo refractive 効果	65
10	結論と今後の課題	67
10.1	まとめ	67

A 回路図	71
A.1 servo 系	71
A.2 photo detector	72
B データ解析	73

Chapter 1

はじめに

重力波とは、質量の四重極運動の際に放出される潮汐の波であり、A.Einstein の一般相対性理論からその存在が予言されている。J.Taylor&A.Hulse は、連星パルサー PSR1913+16 の公転周期の観測により重力波の存在を間接的に証明した。この功績により 1993 年ノーベル物理学賞を授賞している。しかし重力波は物質との相互作用が非常に弱いので、現在までに重力波を直接検出することに成功してしていない。主な重力波源としては、超新星爆発、連星中性子星、そして非軸対称パルサーなどの激しい天体現象が考えられている。

現在重力波を検出する方法としては、レーザー干渉計型、共振型、人工衛星のドップラートラッキング、パルサーのタイミングアナリシスなどが考案されている。共振型は、機械共振を利用するもので、1960 年代から開発が進められており、現在世界各国で稼働している。しかしこの検出器は観測帯域が狭いため、重力波に対して得られる情報が少ない。一方レーザー干渉計型は、干渉計のすべての光学要素を自由質量にして、重力波の到来によって生じた固有距離の変化を検出しようとするものである。この検出器の観測帯域は広く、重力波の波形観測に適している。しかし検出理論によると、例えば 1kHz の重力波に対して最適な基線長は、75km となってしまうため、何らかの工夫をして基線長を実行的に長くする必要がある。その方法としては Fabry-Perot 方式と Delay-Line 方式とがある。

現在世界各国で大型プロジェクトが進められているが、日本では TAMA300 プロジェクト [1] として、東京都三鷹市の国立天文台の敷地内に 300m の Fabry-Perot 型 Michelson 干渉計を建設中である。この干渉計の観測帯域は $300 \pm 150 \text{ Hz}$ であり、ここではレーザー光による散乱雑音が大雑音の一つとなる。この雑音はパワーの平方根に反比例するため、レーザーパワーを大きくすることで、低減できる。そのためレーザーとしては、非常に高出力のものが必要となり、TAMA300 では出力 10W の半導体レーザー励起 Nd:YAG レーザーを使用する。

さらにこの雑音を低減するために、干渉計から光源に戻ってくる光を鏡で打ち返すことで実効的なパワーを上げる、パワーリサイクリングという方法をとる。パワーリサイクリングをした Fabry-Perot 型 Michelson 干渉計では、4 つの自由度を制御しなければならず、特にその信号を分離良く取り出すことが非常に困難とされている。その信号取得において現在もっとも有力なものは Pre-modulation 法であり、この方法では入射光に大きな位相変調をかけるため、低電圧で大きな変調をかけられる位相変調器が必要となる。

しかし光学結晶に高出力のレーザー光を入射させると、熱弾性変化してしまうなど、結晶に物性的変化をもたらすことが考えられ、特に光学結晶に適当な波長の光を照射すると、照射時間に対して漸次的に屈折率が変化してしまう Photo refractive 効果は、大きな問題となる。

したがってレーザー干渉計型重力波検出器では、高周波において比較的容易に大きな変調をかけられ、かつ高出力の入射光に対しても光損傷を起こさないといった位相変調器が必要となる。現在 TAMA300 で用いる位相変調器用結晶の候補としては、光損傷に強い KTiOPO_4 と RbTiOAsO_4 の 2 つの結晶が考えられており、これらの光学的そして電氣的な性質を調べ、よりよい特性をもつ結晶を選び出すことが本論文の目的である。また光変調器として一般的に用いられる LiNbO_3 結晶についても参照用に測定を行う。

Chapter 2

重力波

2.1 重力場の線形近似と重力波の伝播方程式

一般相対論において、時空の2点 x^μ , $x^\mu + dx^\mu$ の間の距離 ds は、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

と表せる。これは物質場中での Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

に従う。ここで $T_{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンソルである。Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ と計量テンソル $g_{\mu\nu}$ との間には、

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2.3)$$

の関係が成り立つので、この方程式は $g_{\mu\nu}$ についての非線形方程式である。以下簡単のため、ほぼ平坦な Minkowski 空間を伝播する微小振幅の重力波について考えていく。

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ からのずれを、対称テンソル $h_{\mu\nu}$ を用いて、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.5)$$

と表す。 $h_{\mu\nu}$ の成分はすべて1に比べて十分小さいものとし、以後 $h_{\mu\nu}$ に関する2次以上の項は無視する。ここでスカラーテンソル $\phi_{\mu\nu}$ を

$$\phi_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

$$h \equiv h^\mu{}_\mu - g^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

と定義すれば、簡単な計算により、

$$h_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \phi \eta_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

$$\phi \equiv \phi^\mu{}_\mu = -h \quad (2.9)$$

となる。また Christoffel 記号 $\Gamma_{\mu\nu\kappa}$, Riemann テンソル $R_{\mu\nu\kappa\lambda}$, Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$, スカラー曲率 R を定義に従って計算すると,

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu\kappa} &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial h_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \eta^{\mu\lambda} \frac{\partial h_{\nu\kappa}}{\partial x^\lambda} \right)\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}R^{\mu\nu\kappa\lambda} &\equiv g^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu\kappa\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} - \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 h_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 h_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 h_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} \right)\end{aligned}\quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} &\equiv R_{\mu\kappa\nu}^\kappa \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial h_\nu^\kappa}{\partial x^\kappa} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^\nu} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial h_\mu^\kappa}{\partial x^\kappa} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^\mu} \right) - \square h_{\mu\nu} \right\}\end{aligned}\quad (2.12)$$

$$R \equiv R_\mu^\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \phi^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{1}{2} \square h \quad (2.13)$$

となり, この結果を (2.2) 式に代入して整理すれば,

$$\begin{aligned}\square \phi_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \phi_\nu^\kappa}{\partial x^\kappa} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \phi_\mu^\kappa}{\partial x^\kappa} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left(\frac{\partial \phi_\alpha^\lambda}{\partial x^\lambda} \right) \eta^{\kappa\alpha} \eta_{\mu\nu} \\ = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}\end{aligned}\quad (2.14)$$

となる。ここでゲージ条件

$$\frac{\partial \phi_j^{i(new)}}{\partial x^{\nu(old)}} = 0 \quad (2.15)$$

$$\iff \frac{\partial \phi_\mu^{\nu(old)}}{\partial x^{\nu(old)}} = \eta_{\mu\kappa} \square \xi^\kappa \quad (2.16)$$

を満たすような微小座標変換 $x^{\mu(new)} = x^{\mu(old)} + \xi^\mu$ を行なうと, 式 (2.14) は

$$\square \phi_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

となる。これを重力場の線形近似の方程式とよぶ。

2.2 真空中を伝播する平面波

前節で導出した重力場の線形近似の方程式から, 真空中を伝播する重力波の平面波解を求める。ここでは簡単のために, x^3 方向に伝播する重力波について考える。

(2.17) 式より, 線形近似の方程式は,

$$\square \phi_{\mu\nu} = 0 \quad (2.18)$$

となる。平面波解として振幅を表す対称な定数テンソル $a_{\mu\nu}$, 重力波の伝播 4 元波数ベクトル k_α を用いて,

$$\phi_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (2.19)$$

と表し, これを (2.18) 式に代入すれば,

$$a_{\mu\nu} k^\alpha k_\alpha = 0 \quad (2.20)$$

となる。これが自明な解を持たないためには,

$$k^\alpha k_\alpha = 0 \quad (2.21)$$

つまり波数ベクトル k としては, Null ベクトルを選ばよく, k^α, k_α を,

$$k^\alpha = (\omega, 0, 0, k) \quad k_\alpha = (\omega, 0, 0, -k) \quad (2.22)$$

と選ぶことができる。

また (2.19) 式をゲージ条件 (2.16) 式に代入すると,

$$a_{\mu\nu} k^\nu = 0 \quad (2.23)$$

となる。ここでゲージ条件を満たす微小座標変換 $\xi^\mu(x)$ として,

$$\xi^\mu(x) = \epsilon^\mu \exp(-ik_\alpha x^\alpha) = \epsilon^\mu \exp(-i\omega t + ikx^3) \quad (2.24)$$

の形を選ぶ。一般に座標変換後の振幅は,

$$a_{\mu\nu}^{(new)} = a_{\mu\nu}^{(old)} - \epsilon_\mu k_\nu - \epsilon_\nu k_\mu + \eta_{\mu\nu} \epsilon^\alpha k_\alpha \quad (2.25)$$

となるので, ϵ_μ として,

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= -\frac{2a_{00} + a_{11} + a_{22}}{4k}, \epsilon_1 = -\frac{a_{01}}{k} \\ \epsilon_2 &= -\frac{a_{02}}{k}, \epsilon_3 = \frac{2a_{00} - a_{11} - a_{22}}{4k} \end{aligned} \quad (2.26)$$

などを選べば, 変換後の定数テンソル成分 $a_{\mu\nu}^{(new)}$ は,

$$\begin{aligned} a_{00}^{(new)} &= a_{01}^{(new)} = a_{02}^{(new)} = 0, \\ a_{11}^{(new)} &= -a_{22}^{(new)} \end{aligned} \quad (2.27)$$

となる。また対称テンソルであることから,

$$a_{12}^{(new)} = a_{21}^{(new)} \quad (2.28)$$

の関係式が成り立つ。よってテンソル $a_{\mu\nu}^{(new)}$ のうち、独立な成分は $a_{11}^{(new)}$, $a_{12}^{(new)}$ の 2 つとなり¹、したがって振幅は、

$$a_{\mu\nu}^{(new)} = A^+ e_{\mu\nu}^+ \exp(-i\omega t + ikx^3) + A^\times e_{\mu\nu}^\times \exp(-i\omega t + ikx^3) \quad (2.29)$$

となる。ここで $\phi = \phi_\mu = 0$ から、重力波の平面波解は、

$$h_{\mu\nu}^{(new)} = h^+ e_{\mu\nu}^+ \exp(-i\omega t + ikx^3) + h^\times e_{\mu\nu}^\times \exp(-i\omega t + ikx^3) \quad (2.30)$$

$$e_{\mu\nu}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{\mu\nu}^\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

となる。これを **TT** 表現 (Transverse-Traceless) とよび、また独立な解をそれぞれ +mode, $\times$ mode とよぶ。図 2.1 は、円環状に並んでいる自由質点にそれぞれのモードの重力波が到達したときの振動の様子を表したものである。

2.3 重力波のエネルギー

重力場のエネルギー・運動量テンソル t_ν^μ は、

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} t_\mu^\nu) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\kappa\lambda} \right) T^{\kappa\lambda} = 0 \quad (2.32)$$

と定義される。 t_ν^μ が h_μ^ν に関して 2 次の量であることに注意しながら積分すると、

$$\begin{aligned} t_\nu^\mu &= \frac{c^4}{64\pi G} \left(\frac{\partial \phi_{\kappa\lambda}}{\partial x^\mu} \eta^{\nu\alpha} \frac{\partial \phi^{\kappa\lambda}}{\partial \phi x^\alpha} - \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \eta^{\nu\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial \phi x^\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \delta_\mu^\nu \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi x^\beta} - \frac{\partial \phi_{\kappa\lambda}}{\partial x^\alpha} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi^{\kappa\lambda}}{\partial \phi x^\beta} \right\} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

となる。これに前節で求めた **TT** ゲージにおける平面波解 (2.17) 式を代入し、時間平均をとれば、

$$F = \langle t_0^3 \rangle c = \frac{k^2 c^5}{32\pi G} (A^{+2} + A^{\times 2}) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

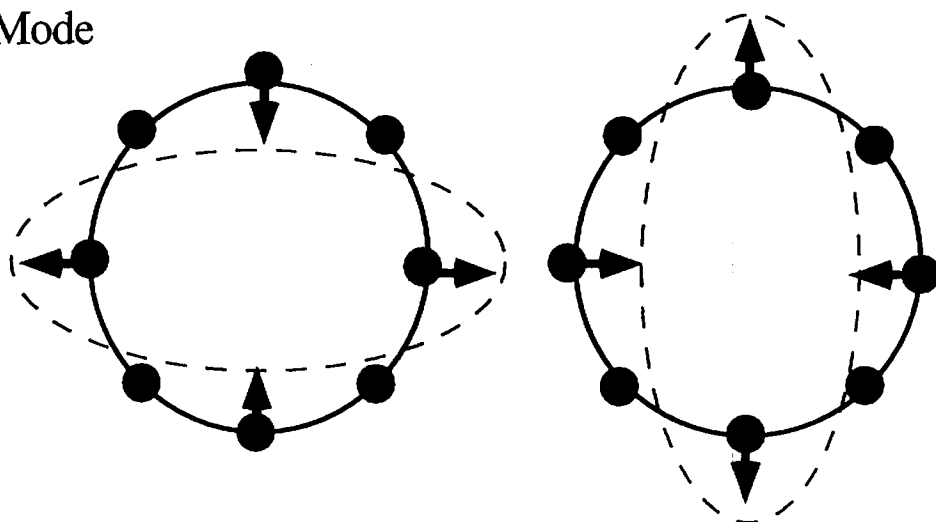
となる。よって x^3 方向に運ばれる重力波のエネルギー流 F^3 は、

$$F^3 = \langle t_0^3 \rangle c = \frac{k^2 c^5}{32\pi G} (A^{+2} + A^{\times 2}) \quad (2.35)$$

となる。

¹本来 $h_{\mu\nu}$ は対称テンソルであるため自由度は 10 個であるが、ゲージ条件およびゲージ変換の自由度がそれぞれ 6 個、2 個あるため、重力波のもつ自由度は残りの 2 個となる。

+ Mode



× Mode

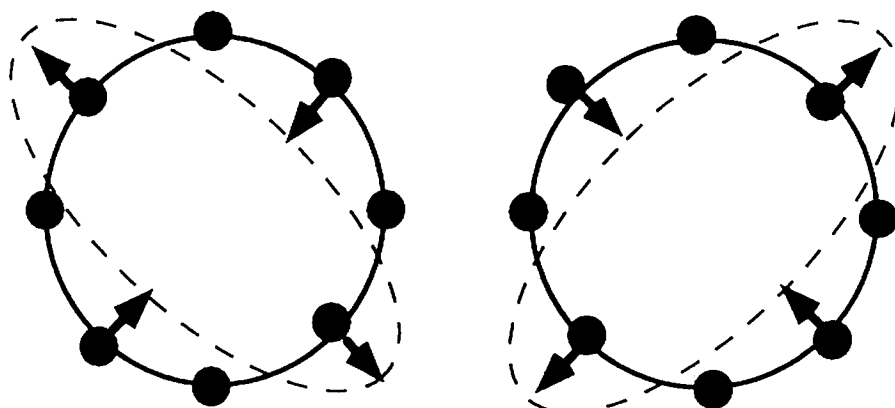


図 2.1: 平面波の偏光には 2 つの mode(×mode と +mode) がある.

2.4 重力波の発生

重力場の線形近似の方程式は,

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.36)$$

である. よって位置 x における Minkowski 時空からのずれ $h^{\mu\nu}(x)$ は, 電磁波の遅延ポテンシャルの場合と同様にして,

$$h^{\mu\nu}(x) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{\mu\nu}(x^0 - r', x'^1, x'^2, x'^3)}{r'} dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad (2.37)$$

$$r' = \sqrt{(x^1 - x'^1)^2 + (x^2 - x'^2)^2 + (x^3 - x'^3)^2} \quad (2.38)$$

と表せる. 物体の大きさに比べて十分遠方では $r' = r$ と近似してよいので,

$$h^{\mu\nu}(x) = \frac{4G}{rc^4} \int T^{\mu\nu}(x^0 - r, x'^1, x'^2, x'^3) dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad (2.39)$$

となる. 物体から十分遠方で観測する場合, 重力波は平面波的になっていると考えてよいので, 空間成分を求めることにする. 物質が空間の有限な領域に存在している場合には,

$$\int T^{ij}(x) dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{(dx^0)^2} \int T_{00}(x) x^i x^j dx^1 dx^2 dx^3 \quad (2.40)$$

が成り立つので,

$$x^0 = ct \quad (2.41)$$

$$T^{00}(x^0 - r, x'^1, x'^2, x'^3) = \rho(t - \frac{r}{c}) c^2 \quad (2.42)$$

などとおけば,

$$h^{\mu\nu}(x) = \frac{2G}{rc^4} \frac{d^2}{(dt)^2} \int \rho(t - \frac{r}{c}) dx'^i dx'^j dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad (2.43)$$

となる. 積分の部分は物質の四重極モーメントであるため, これは重力波の振幅が物質の 4 重極モーメントの時間についての 2 階微分に比例することを示している.

またこの重力波の表現は **TT** ゲージではないが, 進行方向に対して垂直な平面内での振動に変換し, そのトレースを 0 とするようゲージ変換を行なえば, **TT** ゲージの表現が得られる. 原点に重力波源があるとし, 十分遠方の $n^i = x^i/r$ 方向で **TT** ゲージの重力波を観測すれば,

$$h_{ij}^{\mathbf{TT}}(x) = h_{\nu}^{\mu}(x) \quad (2.44)$$

$$= \frac{2G}{c^4 r} \left(P_i^k P_j^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \right) I^{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (2.45)$$

となる。ここで P^{ij}, I^{ij} は,

$$P^{ij} = \delta^{ij} - n^i n^j \quad (2.46)$$

$$I^{ij} = \int \rho(t - \frac{r}{c}) \left(x'^i x'^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} x'^m x'^m \right) dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad (2.47)$$

である。重力波源から放出される全エネルギーは、十分遠方に流出している重力波のエネルギーフラックスを表面積分すればよい。 n^α 方向の微小立体角 $d\Omega$ あたりのエネルギーフラックス $d(dE/dt)$ は,

$$d\left(\frac{dE}{dt}\right) = \langle t_i^0 \rangle \cdot n^i r^2 d\Omega \quad (2.48)$$

$$= \frac{G}{8\pi c^5} \langle \ddot{I}^{ij} \ddot{I}_{ij} - 2n_k n^l \ddot{I}^{ki} \ddot{I}^{lj} + \frac{1}{2} (n^i n^j \ddot{I}^{ij})^2 \rangle d\Omega \quad (2.49)$$

となり、これを全方向で積分することにより、

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{I}^{ij} \ddot{I}_{ij} \rangle \quad (2.50)$$

が得られる。これを重力波放出の4重極公式とよぶ。重力波の放出率は、4重極モーメントの時間についての3階微分の2乗に比例する。

Chapter 3

レーザー干渉計型重力波検出器

3.1 Michelson 干渉計

Michelson 干渉計 (概略図は図 3.1) は, 入射光を Beam splitter で 2 方向 (in-line 方向と perpendicular 方向) に分けて, 各々鏡で打ち返した後, 再び結合させる装置である. その結合光は 2 つの port (Antisymmetric port と Symmetric port) に出力されるが, それぞれ異なる光路を通ってきた光を干渉させるため, その位相差による干渉縞を伴う. それぞれの port における出力信号は, Photo Detector により, パワーとして取り出す. ここでは出力信号と 2 つの光の位相差との関係式を求めることにする.

以下簡単のため, Beam splitter の反射率と透過率¹ をともに $1/2$ とし, また鏡の振幅反射率を r とする. 入射光の電場を $E_{\text{in}} = E_0 e^{i\omega t}$ とし, Beam splitter で分けられてから再び結合するまでの間にそれぞれの光が受けた位相変化を ϕ_I, ϕ_P とすれば², 結合後の各 port における電場 E_A, E_S は,

$$\begin{aligned} E_A &= \frac{1}{2} r E_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi_I} - \frac{1}{2} r E_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi_P} \\ &= \frac{1}{2} r E_0 e^{i\omega t} (e^{-i\phi_I} - e^{-i\phi_P}) \\ &= i r E_0 e^{i\omega t} e^{-i\frac{(\phi_I + \phi_P)}{2}} \sin \frac{(\phi_I - \phi_P)}{2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} E_S &= \frac{1}{2} r E_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi_I} + \frac{1}{2} r E_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi_P} \\ &= \frac{1}{2} r E_0 e^{i\omega t} (e^{-i\phi_I} + e^{-i\phi_P}) \\ &= r E_0 e^{i\omega t} e^{-i\frac{(\phi_I + \phi_P)}{2}} \cos \frac{(\phi_I - \phi_P)}{2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

¹本論文では, 反射 (透過) する光のパワーの割合を反射率 (透過率) とよぶことにし, 振幅反射率 (振幅透過率) とは区別して用いることにする.

²添字 I および P は, それぞれ in-line 方向, perpendicular 方向を, また A および S は, 干渉計の Antisymmetric port, Symmetric port を指すものとする.

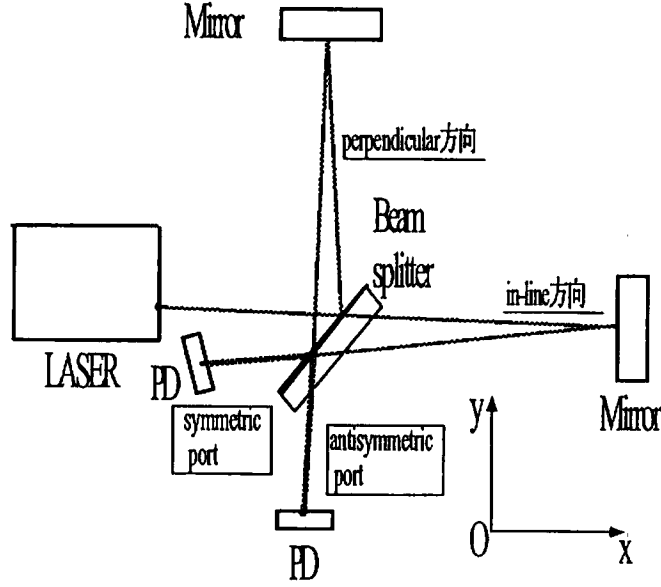


図 3.1: Michelson 干渉計

と表せる. ここで, $\phi_- \equiv \phi_I - \phi_P$ とおけば, 各 port におけるパワー P_A , P_S は,

$$P_A \propto |E_A|^2 = \frac{1}{2} r^2 |E_0|^2 (1 - \cos(\phi_I - \phi_P)) \propto (1 - \cos \phi_-) \quad (3.3)$$

$$P_S \propto |E_S|^2 = \frac{1}{2} r^2 |E_0|^2 (1 + \cos(\phi_I - \phi_P)) \propto (1 + \cos \phi_-) \quad (3.4)$$

となり, このとき Photo Detector の出力信号 V_A , V_S は,

$$V_A \propto P_A \propto (1 - \cos \phi_-) \quad (3.5)$$

$$V_S \propto P_S \propto (1 + \cos \phi_-) \quad (3.6)$$

となる. よって干渉計の出力は, 干渉する 2 つの光の位相差 ϕ_- のみに依存する. また実際の干渉計では, 各光学要素での loss, 波面の乱れ, そして Beam splitter の非対称性³ などから,

$$V^A = \frac{V_{\text{Max}}^A + V_{\text{min}}^A}{2} - \frac{V_{\text{Max}}^A - V_{\text{min}}^A}{2} \cos \phi_- \quad (3.7)$$

$$V^S = \frac{V_{\text{Max}}^S + V_{\text{min}}^S}{2} + \frac{V_{\text{Max}}^S - V_{\text{min}}^S}{2} \cos \phi_- \quad (3.8)$$

³ 反射率と透過率が等しくないなど.

となるが、相変わらず、干渉計の出力は位相差 ϕ_- のみに依存する。 $V_{\text{Max}}, V_{\text{min}}$ は、各 port における出力信号の最大値、最小値を表し、また

$$C = \frac{V_{\text{Max}} - V_{\text{min}}}{V_{\text{Max}} + V_{\text{min}}} \quad (3.9)$$

をコントラスト (Contrast) とよぶ。これは干渉縞の明瞭さを表す指数となる。

3.2 Michelson 干渉計による重力波の検出

Michelson 干渉計は、干渉する 2 つの光の位相差を検出することができる。そこで重力波によって生じる位相差の変化 $\Delta\phi_{\text{GR}}$ を求める。以下簡単のため、干渉計に対して垂直な方向から+mode の重力波が入射した場合を考える。干渉計の腕に沿って x, y 軸をとり、重力波のスカラテンソルの大きさを $h(t)$ (ただし $|h(t)| \ll 1$) とすれば、光子は、

$$\begin{aligned} ds^2 &= 0 \\ \iff -c^2 dt^2 + (1 + h(t)) dx^2 + (1 - h(t)) dy^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

を満たす。まず x 軸方向を往復する光子について、(3.10) 式において、 $dy = 0$ とすれば、

$$-c^2 dt^2 + (1 + h(t)) dx^2 = 0 \quad (3.11)$$

$|h(t)| \ll 1$ より、 $h(t)$ について 1 次までとれば、

$$\left(1 - \frac{1}{2}h(t)\right) c dt \simeq dx \quad (3.12)$$

となる。Beam splitter と鏡との間を往復するのに要する時間を t_x として、(3.12) 式の両辺を t について積分すれば、

$$\begin{aligned} \int_{t-t_x}^t \left\{1 - \frac{1}{2}h(t')\right\} dt' &= \frac{2L_x}{c} \\ \iff t_x &= \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-t_x}^t h(t') dt' \end{aligned} \quad (3.13)$$

となる。よって光が x 軸方向を往復するときの位相変化 ϕ_x は、重力波の周波数を Ω として、

$$\begin{aligned} \phi_x &= \Omega L_x \\ &= \frac{2L_x \Omega}{c} + \frac{\Omega}{2} \int_{t-t_x}^t h(t') dt' \end{aligned} \quad (3.14)$$

となる。 y 軸方向を往復する光子についても同様に、

$$\begin{aligned} \phi_y &= \Omega L_y \\ &= \frac{2L_y \Omega}{c} - \frac{\Omega}{2} \int_{t-t_y}^t h(t') dt' \end{aligned} \quad (3.15)$$

ここで (3.14), (3.15) 式の積分において, $L_x \simeq L_y \simeq L$ と近似すれば, 位相差 $\Delta\phi_- \equiv \phi_x - \phi_y$ は,

$$\Delta\phi_- = \frac{2(L_x - L_y)\Omega}{c} + \Delta\phi_{\text{GR}} \quad (3.16)$$

$$\Delta\phi_{\text{GR}} \equiv \Omega \int_{t-\frac{2L}{c}}^t h(t') dt' \quad (3.17)$$

となり, 第 2 項に重力波によって生じた位相差 $\Delta\phi_{\text{GW}}$ が現れる.

3.3 重力波に対する周波数応答と基線長

一般に重力波源から放出される重力波は単一の周波数ではなく, 周波数の広がりをもっている. 前節で導いた重力波によって生じた位相差の変化 $\Delta\phi_{\text{GR}}$ は, フーリエ級数を用いて議論しなければならない. 重力波のスカラーテンソルの大きさ $h(t)$ を,

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.18)$$

とフーリエ級数で表して, これを (3.17) 式に代入すると,

$$\Delta\phi_{\text{GW}} = \Omega \int_{t-\frac{2L}{c}}^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t'} d\omega \right) t dt' \quad (3.19)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) e^{-i\frac{L\omega}{c}} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.20)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.21)$$

となる. ここで,

$$H(\omega) \equiv \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) e^{-i\frac{L\omega}{c}} \quad (3.22)$$

である. この関数 $H(\omega)$ を l の関数とみなすと, $|H(\omega)|$ が最大となるための条件は,

$$\frac{L\omega}{c} = \frac{\pi}{2} \quad (3.23)$$

となる. これは光の干渉計における滞在時間が $2L/c$, すなわち重力波の周期の $1/2$ に等しい場合に, 干渉計の感度が最適になることを意味する. よって最適な基線長 L は,

$$L = \frac{c}{4f} \quad (3.24)$$

となる. 基線長がこれ以上長くなると, 光が往復する間に重力波の逆符号のものの寄与も積分してしまうため, 感度が低下してしまう.

3.4 2種類のレーザー干渉計

前節では、重力波に最適な Michelson 干渉計の基線長を求めた。これによると、例えば周波数 300Hz の重力波に対して最適な基線長は 250km となってしまう、このような干渉計を作ることにはあまりにも非現実的である。そこで実際の干渉計では、それぞれの腕を何度も往復させることによって実効的に光路長を稼ぐことになる。その方法には、DeLay-Line 方式と Fabry-Perot 方式の2種類の方法が考えられている。DeLay-Line 方式は、各腕に置いた2枚の鏡の間を異なる光路で数回往復させる方法であり、また Fabry-Perot 方式は、各腕に置いた2枚の鏡の間を同じ光路で往復させ多重干渉させる方法である。これらの方法は、それぞれ長所・短所を持っているため、どちらが優れているのかは言い難いが、現在は Fabry-Perot 方式が主流となっている。

3.5 レーザー干渉計における雑音源

レーザー干渉計における主な雑音源としては、地面振動、熱雑音、散射雑音の3つの雑音が上げられる。

3.5.1 地面振動

レーザー干渉計型重力波検出器では、すべての光学要素を自由質量にし、重力波の到来によって生じた固有距離の変化を、位相差の変化として読みとることで重力波を検出する。地面振動は光学要素を揺らしてしまうため、干渉計の雑音となる。そこで振り子やゴム弾性などを使って地面振動による雑音を低減させる。TAMA300では、二重振り子とスタックによる防振システムが開発されており、30Hz以下において大きな雑音となることが予想されている。

3.5.2 熱雑音

光学要素、そして光学要素を吊っているワイヤーは、常温下に置かれるため熱振動する。これも干渉計の雑音となり、熱雑音とよぶ。熱雑音は振り子モードと弾性振動モードとに分類される。TAMA300では、30Hz~300Hzにおいて大きな雑音となることが予想されている。

3.5.3 散射雑音

レーザー干渉計型重力波検出器では、光源としてレーザーを用いる。そのためレーザー光が量子であることに起因する散射雑音は、干渉計の雑音となる。これはパワーの平方根に反比例するため、パワーを上げることによって低減することができる。TAMA300では、高出力10WのNd:YAGレーザーが開発されており、300Hz以上で大きな雑音となることが予想されている。

3.6 世界のレーザー干渉計型重力波検出器

重力波源の位置を決めるためには、異なる方向を向く3台の干渉計が必要である。しかしレーザー干渉計は水平方向からくる重力波に対して感度が小さいため、十分な観測体制を整えるためには互いに異なる方向を向く4台の干渉計が必要となる。現在世界で進められている計画については、下表の通りである。

プロジェクト	国	基線長	方式
LIGO	USA	4km×2	FP
VIRGO	France&Italy	3km	FP
GEO	UK&Germany	600m	DL
TAMA	Japan	300m	FP
AIGO	Australia	400m	DL

Chapter 4

位相変調器

本章ではまず屈折率楕円体を用いて、非等方性結晶中を伝播する光の性質を調べる。次に外部から加えた電場によって結晶の屈折率が変化する現象である Pockels 効果について説明した後、最後にそれを利用した位相変調器について述べる。

4.1 非等方性結晶

結晶に外部から電場 $\mathbf{E}$ を加えると結晶内部には電気分極 $\mathbf{P}$ が生じるが、一般に $\mathbf{P}$ の方向は $\mathbf{E}$ の方向と一致しないので、 $\mathbf{P}$ および電気変位 $\mathbf{D}$ を、

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.2)$$

$$= \epsilon_0 (1 + \chi^{(1)}) \mathbf{E} \quad (4.3)$$

$$\equiv \epsilon \mathbf{E} \quad (4.4)$$

と表し、 $\chi^{(1)}$ を 1 次電気感受率テンソル、また ϵ を誘電率テンソルとよぶ。

ここで誘電率テンソル ϵ を対角化するように座標軸をとり直し¹、その固有値を $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ (ただし $\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_3$) とすれば、

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

と表せる。このとき各軸は、加えた電場と同じ方向に電気分極を生じるという特別な方向を示しており、このような直交座標軸のことを主誘電座標軸とよぶ。結晶はこの固有値によって、

- $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$: 等軸性結晶

¹ ϵ は、2 階の実対称テンソルなので、対角化可能。

- $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 = \epsilon_3$: 単軸性結晶
- $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$: 二軸性結晶

と分類される。これは光に対する結晶の非等方的な性質を指し示すものであり、単軸性および二軸性結晶をまとめて非等方性結晶とよぶ。それぞれに属する結晶は、以表の通りである。

結晶	晶系
等軸性結晶	立方晶
単軸性結晶	六方晶, 三方晶, 正方晶
二軸性結晶	斜方晶, 単斜晶, 三斜晶

4.2 Fresnel 法線方程式

非等方性結晶中を伝播する平面波について考える。Maxwell 方程式は、 $\rho = 0, j = 0$ として、

$$\text{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.6)$$

$$\text{div} \mathbf{E} = 0 \quad (4.7)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (4.8)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \quad (4.9)$$

と表せる。ここで $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{E}$, $\text{div} \mathbf{E} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$, $\text{rot} \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}$ などから、(4.6), (4.9) 式は、

$$\omega \mathbf{D} = -\mathbf{k} \times \mathbf{H} \quad (4.10)$$

$$\mu_0 \omega \mathbf{H} = \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (4.11)$$

となり、これらから $\mathbf{H}$ を消去すれば、

$$\mu_0 \omega^2 \mathbf{D} = -\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \quad (4.12)$$

が得られる。(4.5) 式を用いて $\mathbf{E}$ についての式とし、ベクトル公式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$, そして定義式 $k = \omega/c$, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ などを用いて整理すれば、

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4.13)$$

となる。ただし行列 $\mathbf{X}$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \left\{ \left(k^2 - \mu_0 \omega^2 \epsilon_i \right) \delta_{ij} - k_i k_j \right\} \\ &= \left\{ \left(1 - \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0 n^2} \right) k^2 \delta_{ij} - k_i k_j \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

これが自明な解を持たないための条件, すなわち偏光が変化することなく伝播するための条件は,

$$\det \mathbf{X} = 0 \quad (4.15)$$

となり, 波数ベクトル $\mathbf{k}$ 方向の単位ベクトル $\mathbf{s}$ を導入² して, 条件を具体的に書き下すと,

$$\begin{aligned} & \epsilon_0^2 (\epsilon_1 s_1^2 + \epsilon_2 s_2^2 + \epsilon_3 s_3^2) n^4 \\ & - \epsilon_0 \{ \epsilon_1 (\epsilon_2 + \epsilon_3) s_1^2 + \epsilon_3 (\epsilon_1 + \epsilon_2) s_2^2 + \epsilon_3 (\epsilon_1 + \epsilon_2) s_3^2 \} n^2 \\ & + \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

となる. これを Fresnel 法線方程式とよぶ. これは n^2 についての 2 次方程式であり, この方程式の解は,

- 非等方性結晶では, 独立な 2 解
- 等軸性結晶では, 解は不定.

となる³. つまり非等方性結晶では, 光の伝搬方向に対して屈折率の異なる独立な 2 つの偏光固有モードをもつことになり, この現象を複屈折 (Birefringence)⁴ とよぶ. また各モードの屈折率, 電場方向はそれぞれ Fresnel 法線方程式の解, 行列 $\mathbf{X}$ の固有ベクトル方向として求められる. 電磁波のエネルギー密度 W は,

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (4.17)$$

と表せる. ここで結晶を伝播する電磁波のうちエネルギー密度が W で一定のものについて考える. (4.5) 式を用いて $\mathbf{E}$ を消去すれば, $\mathbf{D}$ は,

$$\frac{D_1^2}{\epsilon_1 W} + \frac{D_2^2}{\epsilon_2 W} + \frac{D_3^2}{\epsilon_3 W} = 1 \quad (4.18)$$

² $\mathbf{k} \equiv \frac{\omega n}{c} \mathbf{s}$

³ (4.16) 式を展開する前の式は,

$$\begin{aligned} & (\epsilon_0 n^2 - \epsilon_1)(\epsilon_0 n^2 - \epsilon_2)(\epsilon_0 n^2 - \epsilon_3) \\ & - \epsilon_0 s_1^2 n^2 (\epsilon_0 n^2 - \epsilon_2)(\epsilon_0 n^2 - \epsilon_3) \\ & - \epsilon_0 s_2^2 n^2 (\epsilon_0 n^2 - \epsilon_3)(\epsilon_0 n^2 - \epsilon_1) \\ & - \epsilon_0 s_3^2 n^2 (\epsilon_0 n^2 - \epsilon_1)(\epsilon_0 n^2 - \epsilon_2) \\ & = 0 \end{aligned}$$

である. この方程式の左辺を $f(n^2)$ とおくと, 二軸性結晶では,

$$f\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right) f\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}\right) f\left(\frac{\epsilon_3}{\epsilon_0}\right) = -\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 s_1^2 s_2^2 s_3^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2 < 0$$

となるので, 異なる 2 解を持つことがわかる (他の結晶についても同様).

⁴ 偏光固有モードのうち, 伝搬方向によらず屈折率が等しいものを常光線とよび, また伝播方向によって屈折率が異なるものを異常光線とよぶ. 単軸結晶は常光線と異常光線とを一つずつ持ち, また二軸性結晶では二つの異常光線を持つ.

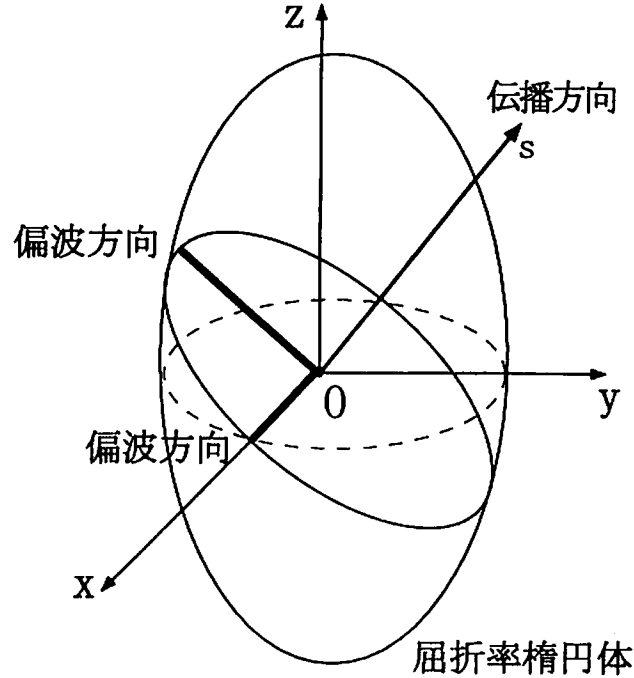


図 4.1: 屈折率楕円体: この楕円体を用いて, 結晶を伝播する光の偏光固有モードに対応する屈折率および $\mathbf{D}$ の方向を求めることができる. ここでは単軸性結晶について描いており, x 軸方向の偏光固有モードは常光線, そしてもう一つ偏光固有モードは異常光線に相当する.

を満たす. ここで,

$$x = \frac{D_1}{\sqrt{\epsilon_1 W}}, y = \frac{D_2}{\sqrt{\epsilon_2 W}}, z = \frac{D_3}{\sqrt{\epsilon_3 W}} \quad (4.19)$$

とおけば,

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1 \quad (4.20)$$

となり, これを屈折率楕円体とよぶ. この屈折率楕円体を用いることによって, 偏光固有モードの屈折率およびその電気変位 $\mathbf{D}$ の方向を, 以下のようにして簡単に定めることができる (図 4.1 を参照). 非等方性結晶中を伝わる光の偏波方向

- 原点 O を通り, s に垂直な面で楕円体を切る. そのとき切断面は楕円となるが, この楕円の主軸方向が偏光固有モードの電気変位 $\mathbf{D}$, そしてその主値が屈折率に相当する.

この手続きの正しさは, 屈折率楕円体 $x^2/n_1^2 + y^2/n_2^2 + z^2/n_3^2 = 1$ を原点 O を通り s を法線ベクトルとする平面 $s_1x + s_2y + s_3z = 1$ で切ったときにできる楕円上において, 原点 O からの距離が最大, 最小となる点 $P(x, y, z)$ を求める⁵ことにより確認できる.

⁵正確には, 点 P の満たす条件を求める

ここでは Lagrange の未定係数法を用いて議論する．原点 O から P までの距離の二乗は， $x^2 + y^2 + z^2$ と表せるので，関数 F を，2つのパラメータ λ_1, λ_2 を用いて，

$$F = (x^2 + y^2 + z^2) + \lambda_1(s_1x + s_2y + s_3z - 1) + \lambda_2\left(\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} - 1\right) \quad (4.21)$$

と定義する． F が極値をとる条件は，

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \iff x + \lambda_1 s_1 + \lambda_2 \frac{x}{n_1^2} = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \iff y + \lambda_1 s_2 + \lambda_2 \frac{y}{n_2^2} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \iff z + \lambda_1 s_3 + \lambda_2 \frac{z}{n_3^2} = 0 \quad (4.24)$$

となり，これより λ_1, λ_2 は x, y, z を用いて，

$$\lambda_1 = (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{s_1 x}{n_1^2} + \frac{s_2 y}{n_2^2} + \frac{s_3 z}{n_3^2} \right) \quad (4.25)$$

$$\lambda_2 = -(x^2 + y^2 + z^2) \quad (4.26)$$

と表せる．(4.25),(4.26) 式を (4.22),(4.23),(4.24) 式にそれぞれ代入し，(4.19) 式を使って (x, y, z) から (D_x, D_y, D_z) へ変数を戻してまとめると，

$$\mu_0 \omega^2 \mathbf{D} = -k^2 \mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{E}) \quad (4.27)$$

となる．これは $\mathbf{s}$ 方向を伝播する電磁波が満たすべき式である (4.12) 式と一致するので，OP 方向は偏光固有モードの $\mathbf{D}$ 方向と等しい．

4.3 Pockels 効果

結晶に外部から電場 $\mathbf{E}^{\text{out}}$ を印加すると屈折率楕円体は歪んでしまい，一般には，

$$\frac{1}{n_{11}^2} x^2 + \frac{1}{n_{22}^2} y^2 + \frac{1}{n_{33}^2} z^2 + 2 \left(\frac{1}{n_{12}^2} xy + \frac{1}{n_{23}^2} yz + \frac{1}{n_{31}^2} zx \right) = 1 \quad (4.28)$$

と表される．これは外部電場によって主誘電座標軸の方向およびその屈折率が変化することを意味し，この現象を電気光学効果とよぶ．この屈折率楕円体の各係数の電場 $\mathbf{E}^{\text{out}}$ に対する応答は，一般に，

$$\Delta \left(\frac{1}{n_i^2} \right) = r_{ij} E_j^{\text{out}} + g_{ijk} E_j^{\text{out}} E_k^{\text{out}} + \dots \quad (4.29)$$

と表せるが, 印加電場が十分小さい場合には, 1 次の項までとればよく,

$$\Delta\left(\frac{1}{n_i^2}\right) = r_{ij} E_j^{\text{out}} \quad r_{ij} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

となる. これを Pockels 効果 (あるいは 1 次電気光学効果) とよび, r_{ij} を Pockels 係数テンソル (あるいは 1 次電気光学係数テンソル. これは 6×3 の行列.) とよぶ⁶. ここで Pockels 係数テンソルの最初の添字 i は 1 から 6 までの値をとり, それぞれ $1=11, 2=22, 3=33, 4=12, 5=23, 6=31$ を表す. また Pockels 係数テンソルは, 結晶のもつ対称性によって成分間に成り立つ関係式が決まっている. 本実験で用いた結晶は, LiNbO_3 が $3m$, そして KTiOPO_4 , RbTiAsO_4 が $mm2$ の点群に属するので, それぞれ

$$\begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & -r_{12} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{42} & 0 \\ r_{42} & 0 & 0 \\ -r_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{42} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

という形のテンソルをとり, これらの値については下表の通りである⁷.

Crystal	LiNbO_3	KTiOPO_4	RbTiOAsO_4
晶系	斜方晶系	三方晶系	三方晶系
点群	$3m(C_{3v})$	$mm2(C_{2v})$	$mm2(C_{2v})$
r_{12}	3.4	×	×
r_{13}	8.6	9.5	13.5
r_{23}	×	15.7	13.5
r_{33}	30.8	36.3	40.5
r_{42}	28	9.3	...
r_{51}	×	7.3	...
n_1	2.229	1.748	1.811
n_2	2.150	1.756	1.815
n_3	2.150	1.840	1.890

⁶電場の 2 次の効果を Kerr 効果とよび, また g_{ijk} は Kerr テンソルとよぶ. 中心対称をもつ結晶では, Pockels テンソル r_{ij} のすべての成分が 0 となるので, Kerr 効果まで考慮しなければならない.

⁷Pockels 係数の単位は $[\text{pm/V}]$. 表中の × は 0 を表し, そして調べられなかったものについては ... と記した. なおここで引用した Pockels 係数の値は, LiNbO_3 については Yariv に, そして KTiOPO_4 , RbTiOAsO_4 については Crystal Associates 社のデータ表に従った. これらはともに波長 633nm の光に対して測定されたものであり, 今回の実験で用いた光源の波長 1064nm とは異なる.

各結晶とも 33 成分が最も大きな値をとるので、この方向に電場をかけることによって最も大きな屈折率変化が得られることになる。

4.4 Pockels 効果の非線形効果による説明

結晶に外部から電場 $\mathbf{E}$ を加えると結晶内部には電気分極 $\mathbf{P}$ が現われ、外部電場が十分小さければ、これは 1 次の電気感受率テンソル $\chi^{(1)}$ を用いて、

$$\mathbf{P} = \chi^{(1)} \mathbf{E} \quad (4.32)$$

と表せる。結晶に入射させる光が十分弱い場合には、線形応答と考えてよいが、レーザー光のような強い電磁波を入射させる場合には、高次の、つまり非線形の応答まで考慮しなければならず、分極 $\mathbf{P}$ を、

$$\mathbf{P} = \chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \quad (4.33)$$

と表す。ここで $\chi_{ij}^{(1)}$, $\chi_{ijk}^{(2)}$, $\chi_{ijkl}^{(3)}$ はそれぞれ 2, 3, 4 階のテンソルであり、1, 2, 3 次の電気感受率テンソルとよぶ。ここでは、2 次の効果まで考えることにする⁸。

結晶に印加している静電場を $\mathbf{E}^{(out)}$ とし、光の電場を $\mathbf{E}^{(\omega)}$ とすれば、結晶内に生じる電気分極 $\mathbf{P}$ の i 成分 P_i は、

$$P_i = \sum_j \chi_{ij}^{(1)} (E_j^{(\omega)} + E_j^{(out)}) + \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} (E_j^{(\omega)} + E_j^{(out)}) (E_k^{(\omega)} + E_k^{(out)}) \quad (4.34)$$

となる。これを展開し、 $\chi_{ijk}^{(2)}(0, \omega) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega, 0)$ であることに注意して、光の電場の 1 次の項 $P_i^{(\omega)}$ のみと取り出すと、電気分極 $P_i^{(\omega)}$ および電気変位 $D_i^{(\omega)}$ は、

$$P_i^{(\omega)} = \left(\sum_j \chi_{ij}^{(1)}(\omega) + \sum_{j,k} 2\chi_{ijk}^{(2)}(\omega, 0) E_k^{(out)} \right) E_j^{(\omega)} \quad (4.35)$$

$$D_i^{(\omega)} = \left(1 + \sum_j \chi_{ij}^{(1)}(\omega) + \sum_{j,k} 2\chi_{ijk}^{(2)}(\omega, 0) E_k^{(out)} \right) E_j^{(\omega)} \quad (4.36)$$

となる。これは光に対する屈折率が外部電場に対して 1 次で変化すること、つまり Pockels 効果を示している。

4.5 位相変調器

結晶に外部から電場を印加することによって屈折率楕円体が歪み、結晶の主軸の方向および屈折率が変化する。ここでは本実験で用いる LiNbO_3 について、結晶の z 軸方向の電場

⁸ 中心対称をもつ結晶では、Pockels テンソル r_{ij} の成分がすべて 0 となるため、3 次の効果まで考慮しなければならない。

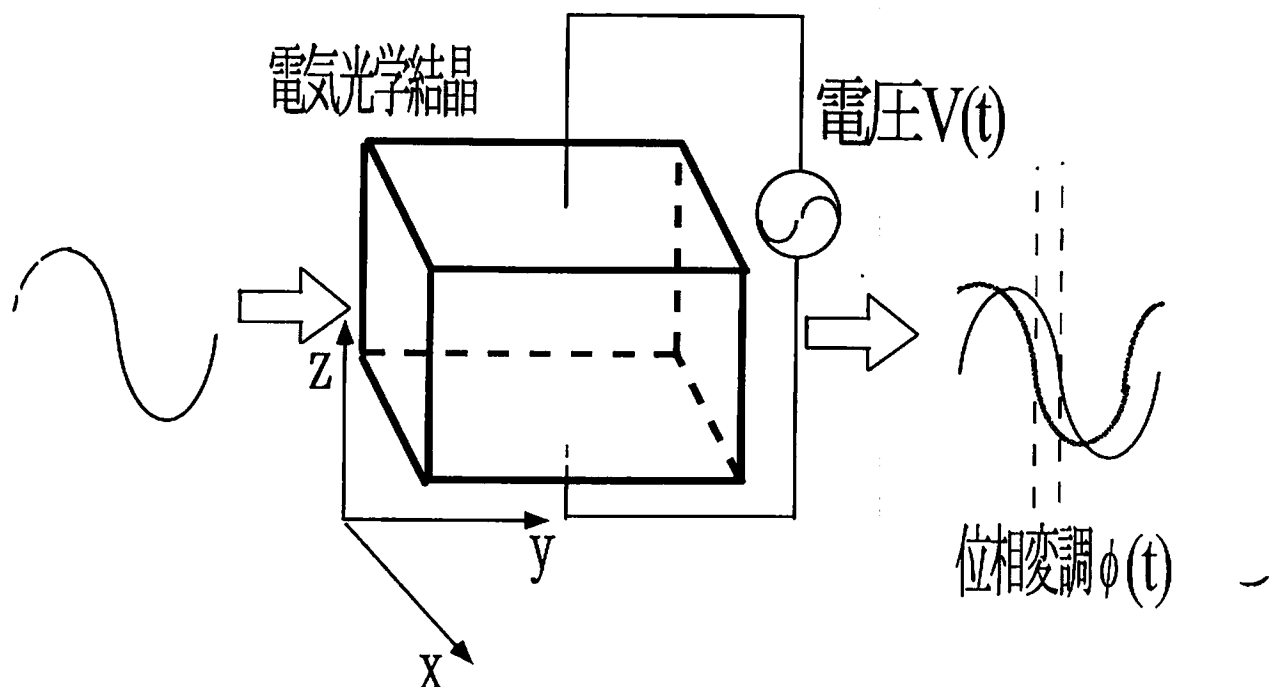


図 4.2: バルク型位相変調器の概形図.

$\mathbf{E}^{\text{out}} = (0, 0, E)$ を加えたときに生じる変化を考えてみる. この結晶は点群 $3m$ に属するので, Pockels 効果より,

$$\Delta\left(\frac{1}{n_i^2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & -r_{12} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{42} & 0 \\ r_{42} & 0 & 0 \\ -r_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{13}E \\ r_{13}E \\ r_{33}E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

よって電場を加えたときの屈折率楕円体は,

$$\left(\frac{1}{n_1^2} + r_{13}E\right)x^2 + \left(\frac{1}{n_2^2} + r_{13}E\right)y^2 + \left(\frac{1}{n_3^2} + r_{33}E\right)z^2 = 1 \quad (4.38)$$

となり, この場合は主誘電軸の方向は変わらずその屈折率の値だけが変化することになる.⁹ ここで, z 軸方向の偏光をもつ光を電場に対して垂直に入射させると¹⁰, この光は偏波方向

⁹KTiOPO₄, RbTiOAsO₄ の場合には, 屈折率楕円体は,

$$\left(\frac{1}{n_1^2} + r_{13}E\right)x^2 + \left(\frac{1}{n_2^2} + r_{23}E\right)y^2 + \left(\frac{1}{n_3^2} + r_{13}E\right)z^2 = 1$$

となり, この場合も主軸の方向は変わらずその屈折率のみ変化することになる.

¹⁰電場と垂直に光を入射させるものを横型, また電場と平行に光を入射させるものを縦型とよぶ.

を変えずに伝播し、電場によって引き起こされる屈折率変化に伴う位相変化のみを受けることになる。

z 軸方向の屈折率の変化を Δn_3 とすれば、

$$\frac{1}{(n_3 + \Delta n_3)^2} = \frac{1}{n_3^2} + r_{13}E \quad (4.39)$$

$\Delta n_3 \ll n_3$ より、

$$\Delta n_3 = -\frac{n_3^3 r_{33}}{2} E \quad (4.40)$$

となる。ここで結晶の長さを l 、極板間距離を d とし、結晶に印加する電圧を $V(t)$ とすれば、

$$\Delta n_3 = -\frac{n_3^3 r_{33}}{2d} V(t) \quad (4.41)$$

となり、よって光の受けた位相変化 $\phi(t)$ は、

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_3 \times l \\ &= -\frac{\pi n_3^3 r_{33} l}{\lambda d} V(t) \end{aligned} \quad (4.42)$$

となる。また結晶に加える電圧 $V(t)$ を $V(t) = V_0 \sin \omega t$ とおけば、

$$\phi(t) = -\frac{\pi n_3^3 r_{33} l V_0}{\lambda d} \sin \omega t \quad (4.43)$$

となり、このときの変調指数¹¹ m および半波長電圧¹² V_π は、

$$m = \frac{\pi n_3^3 r_{33} l V_0}{\lambda d} \quad (4.44)$$

$$V_\pi = \frac{\lambda d}{n_3^3 r_{33} l} \quad (4.45)$$

となる。したがってより効率的に位相変調をかけるには、Pockels 係数 r_{33} の値が大きく、そして d/l が値の小さな¹³ 結晶を選べばよいことがわかる。

¹¹位相変調の振幅

¹²変調指数が π となるような入力電圧の振幅のこと

¹³結晶の口径は入射光の回折によって制限を受けるため、 d/l はいくらでも小さな値がとれるわけではない。

Chapter 5

実験装置

本実験では位相変調器の光学的な特性を調べるために、Michelson 干渉計を用いて測定を行なった。これは光学テーブルに置かれており、差動法によって光路長制御を行っている。本章では Michelson 干渉計の光学系について説明した後、干渉計の測定器としての性能を示す OpenLoop 伝達関数について述べる。

5.1 光学系

まず本実験で用いた Michelson 干渉計の光学系について説明する。

5.1.1 光源

本実験では光源として、LIGHTWAVE 社の Nd:YAG Laser model126-1064-100 を用いた。これは Nd^{3+} をドープした YAG($\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$) をゲイン媒質とする半導体レーザー励起のレーザーで、波長は 1064nm である。この結晶は NPRO(Non Planer Ring Oscillator, あるいは MISER) とよばれる結晶構造をとっており、空間的な内面反射でリング共振器を構成している。出力は 100mW まで可能だが、光検出器の飽和による雑音をさけるため、約 50W に設定して用いた。

5.1.2 Isolator

光源から出たレーザー光は、Beam splitter で 2 方向に分離され、それぞれ鏡によって反射した後、再び Beam splitter で結合される。その結合光は干渉計の光源側にも出力されるが、これが再び光源に戻ってしまうと、レーザー発振が不安定になってしまうため、この光を遮るように Isolator を用いる。本実験では Isolator として、Optics for Research 社の IOT-2-YAG を用いた。これは通過する光の偏光面を 45° 回転させるような Faraday 回転子の両端に、互いに 45° ずれた偏光面をもつ PBS(Polarizing Beam Splitter) が置かれたものである。Isolator を透過した光が偏光面を保って再び Faraday 回転子を通過すると、光の偏

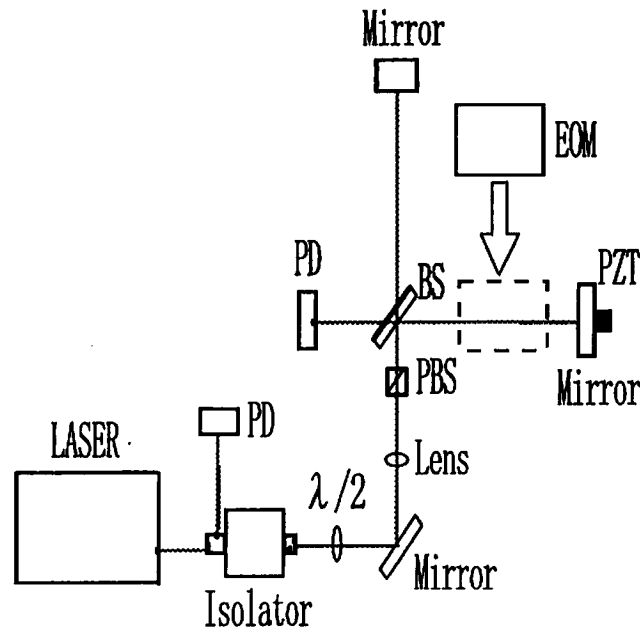


図 5.1: Michelson 干渉計における光学系の配置図

光面は計 90°回転したことになり, PBS で分離される. ここで分離された光は, Symmetric port における出力として活用できる. Isolator は光源からのレーザー光の透過率が最大となるようアラインメントを合わせて用いており, このときの透過率は, 88.3%であった.

5.1.3 その他の光学要素: 鏡, Beam splitter, $\lambda/2$ 板, PBS

位相変調器は光のもつ偏光面によって応答が異なるため, 入射する光をあらかじめ指定しておいた偏光面¹をもつものだけに限定しておかなければならない. そこで Beam Splitter までに $\lambda/2$ 板, および PBS(Polarizing Beam Splitter) を通すことによって, 光学テーブルに対して垂直方向の偏光をもつ光だけを干渉計に入射させるようにした.

Beam Splitter は, 片面が AR コートされている.

鏡としては, とともに Al コートされた平面鏡を用いた. 片方の鏡には PZT を張り付けており, これを制御系のアクチュエータとして用いる.

Michelson 干渉計の両腕の長さは約 20cm と対称にしてあり, 片腕に位相変調器を入れる場合には, Beam Splitter から鏡までの光学的距離が等しくなるよう, 鏡に取り付けてある x 軸ステージで調節した.

¹本実験で用いる位相変調器は横型であるため, 結晶に電圧をかける方向と平行な偏光面

5.1.4 Photo Detector

Michelson 干渉計では各 port に置いた Photo Detector で必要な信号を取り出す。外乱は DC 付近のものが主であり、また本実験では RF の位相変調をかけるため、広帯域の Photo Detector を作成した。この回路図は Appendix の図 A.1 の通り。ここで用いたフォトダイオードは、EG&G 社製の InGaAs-PIN 型フォトダイオード C30641 であり、これに 5V の逆電圧をかけて動作させることで、広い周波数帯域で flat な特性を持つよう工夫してある。主なスペック値は下表の通りである。

InGaAs-PIN 型 Photo Diode	
パラメータ	Typical な値
受光感度	0.7A/W
並列抵抗	50M Ω
端子間容量	2pF
暗電流	5nA

またこのフォトダイオードの受光面にはシリコン窓がついているため、可視光にはほとんど感度がなく、蛍光灯などによる雑音を低減することができる。

この Photo Detector の伝達関数² は図 5.3 の通りである。これは光ビートを用いて測定したものであり、東大工学部三尾研究室の頼本氏と共同で行なった。光ビートとは互いに周波数の異なる 2 台のレーザー光を干渉させたもので、周波数の差に相当するビート信号が得られる (装置の概計図は図 5.2 の通り)。周波数を固定するのが難しいため、あまり多くのデータ数は取れなかったが、周波数を連続的に変えて観察したところ、50MHz までに共振などの構造は確認されなかった。

5.2 差動法により lock された Michelson 干渉計の応答

Michelson 干渉計の光路長を制御する方法として、もっとも単純なものは差動法である。これは干渉計の差動信号を鏡に feedback する³ ことによって、差動信号を 0、つまり各 port の出力信号が等しくなるように光路長を制御する方法である。ここでは、Michelson 干渉計が差動法により lock がかかっている状態において、微小な差動変動⁴ dl_- に対する差動信号 V_{diff} の応答を求める。

² Antisymmetric port で使う Photo Detector のみ測定した。

³ 本実験では、アクチュエーターとしてピエゾ素子 (Piezo electric transducer. 以後 PZT) を用いる。

⁴ 位相差の変化に相当する光路長変化 (片道分) のこと。また位相和の変化に相当する光路長変化 (片道分) のことを同相変動とよぶ。Beam splitter から鏡までの距離の変化をそれぞれ dl_1, dl_P とし、また差動変動、同相変動をそれぞれ dl_-, dl_+ とすれば、

$$\begin{aligned} dl_- &\equiv dl_1 - dl_P \\ dl_+ &\equiv dl_1 + dl_P \end{aligned}$$

と表せる。

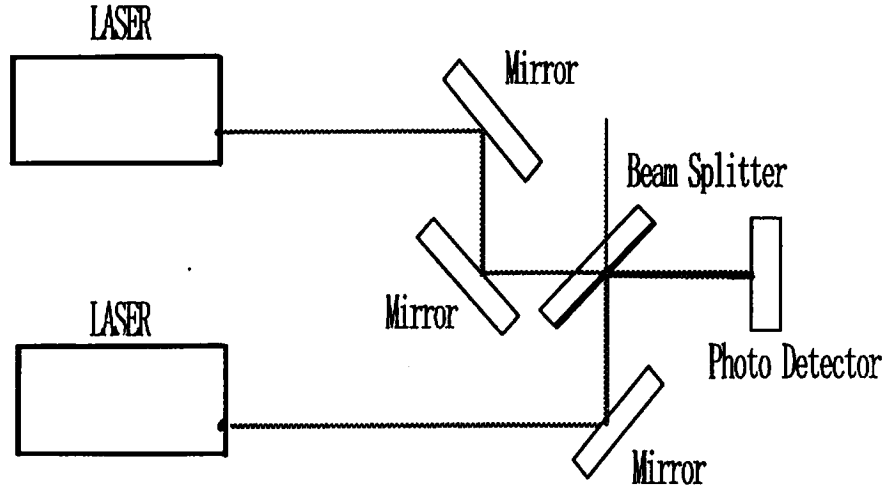


図 5.2: 光ビートを用いた Photo Detector の伝達関数: 2 台のレーザーから互いに周波数の異なる光を出し, それらを干渉させることで, 周波数の差に相当するビート信号が得られる. このビート信号のパワーを Photo Detector で測定し, 適当に換算することで伝達関数を求めた.

干渉する 2 つの光の位相差を ϕ とすれば, 各 port の置かれている Photo Detector の出力信号 $V^A(\phi), V^S(\phi)$ は,

$$V^A(\phi) = \frac{V_{\text{Max}}^A + V_{\text{min}}^A}{2} - \frac{V_{\text{Max}}^A - V_{\text{min}}^A}{2} \cos \phi \quad (5.1)$$

$$V^S(\phi) = \frac{V_{\text{Max}}^S + V_{\text{min}}^S}{2} + \frac{V_{\text{Max}}^S - V_{\text{min}}^S}{2} \cos \phi \quad (5.2)$$

と表すことができる. よって差動信号 V_{diff} ⁵ は,

$$V_{\text{diff}}(\phi) = V_A(\phi) - V_S(\phi) \quad (5.3)$$

$$= \left(\frac{V_{\text{Max}}^A + V_{\text{min}}^A}{2} - \frac{V_{\text{Max}}^S + V_{\text{min}}^S}{2} \right) - \left(\frac{V_{\text{Max}}^A - V_{\text{min}}^A}{2} + \frac{V_{\text{Max}}^S - V_{\text{min}}^S}{2} \right) \cos \phi \quad (5.4)$$

となる. ここで $V^A = V^S$ となる位相差を ϕ_0 とすれば,

$$V^A(\phi_0) = V^S(\phi_0) \quad (5.5)$$

$$\iff \cos(\phi_0) = \frac{V_{\text{Max}}^A + V_{\text{min}}^A - V_{\text{Max}}^S - V_{\text{min}}^S}{V_{\text{Max}}^A - V_{\text{min}}^A + V_{\text{Max}}^S - V_{\text{min}}^S} \quad (5.6)$$

⁵ここでは図 5.1 で示しているように

$$V_{\text{diff}}(\phi) \equiv V_A(\phi) - V_S(\phi)$$

として差動信号 V_{diff} を定義する.

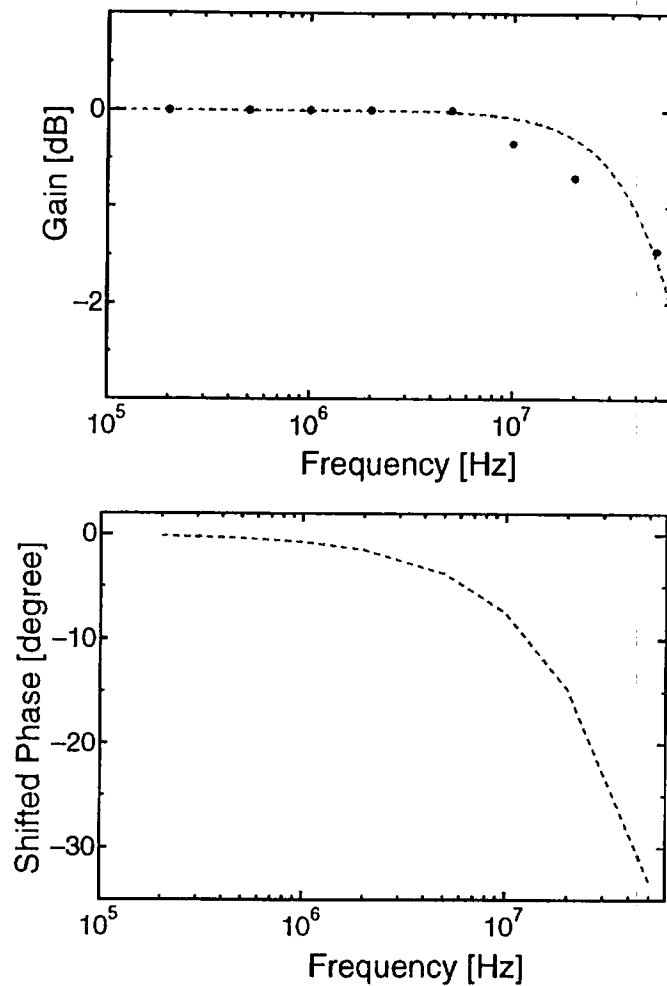


図 5.3: Photo Detector の伝達関数: 上図はゲイン, 下図は位相遅れである. 実際に測定したのはゲインのみであるが, 位相遅れについては, Photo Detecor の周波数応答を 1 次のローパスフィルターと仮定して, 最小二乗 fitting によって cut-off 周波数を推定し, それを用いて計算した値である.

となる。 V_{diff} を ϕ について、 ϕ_0 のまわりで展開し、 1 次までとると、

$$\begin{aligned} V_{\text{diff}}(\phi) &\simeq V_{\text{diff}}(\phi_0) + \frac{dV_{\text{diff}}}{d\phi}(\phi_0)(\phi - \phi_0) \\ &= \left(\frac{V_{\text{Max}}^A - V_{\text{min}}^A}{2} + \frac{V_{\text{Max}}^S - V_{\text{min}}^S}{2} \right) \cdot \sin\phi_0 \cdot (\phi - \phi_0) \end{aligned} \quad (5.7)$$

よって (5.6), (5.7) 式などより、 干渉計の微小な光路長差動変動 dl_- に対する差動信号 dV_{diff} の応答は、 $dl_- = \frac{\lambda}{4\pi} \phi - \phi_0$ に注意して、

$$\frac{dV_{\text{diff}}}{dl_-} = \frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{(V_{\text{Max}}^A - V_{\text{min}}^S)(V_{\text{Max}}^S - V_{\text{min}}^A)} \quad (5.8)$$

となる⁶。

5.3 制御系の OpenLoop 伝達関数

差動法で光路長制御した Michelson 干渉計について、 OpenLoop 伝達関数の測定法および測定結果を示す。

5.3.1 制御系の OpenLoop 伝達関数の測定法

本実験では、 Michelson 干渉計の差動出力を鏡にフィードバックすることにより光路長を制御しているのだが、 この制御に用いたサーボ回路は、 Appendix A の図 A.1 のようにフィルターとアンプで構成されており、 これをアクチュエーターである PZT を通して鏡にフィードバックしている。 差動法で lock がかかっている状態において、 アンプの入力 (図 A.1 の A) から信号を制御系に流し込み、 加算アンプの出力 (図 A.1 の C) とフィルターの出力 (図 A.1 の B) とで取った信号の比をとることで、 制御系の OpenLoop 伝達関数を測定する。 ここではこのようにして制御系の OpenLoop 伝達関数が測定できることを示す。 信号を加えている時の制御系のブロック線図は、 図 5.4 の通りである⁷。

⁶各 port において、 信号の最大値がほぼ等しく、 かつコントラストが十分取れているときには、

$$\sqrt{(V_{\text{Max}}^A - V_{\text{min}}^S)(V_{\text{Max}}^S - V_{\text{min}}^A)} \simeq \sqrt{V_{\text{Max}}^A V_{\text{Max}}^S} \simeq \frac{V_{\text{Max}}^A + V_{\text{Max}}^S}{2}$$

となり、 (5.8) 式は、

$$\frac{dV_{\text{diff}}}{dl_-} \simeq \frac{4\pi}{\lambda} \frac{V_{\text{Max}}^A + V_{\text{Max}}^S}{2}$$

と近似することができる。

⁷以下簡単のため、 アンプのゲインを 1 として計算する。

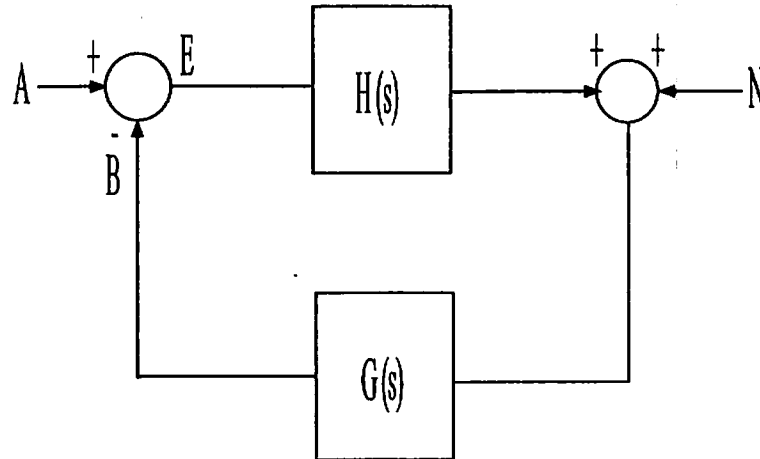


図 5.4: 制御系のブロック線図: B/E として, この制御系の OpenLoop 伝達関数が得られる.

ここで, 図中の文字は各々,

A : 入力信号, B : feedback 信号, E : PZT への入力信号, N : 外乱による差動変動,

$G(s)$: (Michleson 干渉計+PD+差動アンプ+1 次ローパスフィルター) の伝達関数

$H(s)$: PZT の入力電圧に対する出力変位の伝達関数

を表しており, これらの間には,

$$E = A - B \quad (5.9)$$

$$B = G(s)H(s)E + G(s)N \quad (5.10)$$

が成り立つ. これを B, E について解けば,

$$\begin{aligned} \frac{B}{E} &= \frac{G(s)H(s)A + G(s)N}{A - G(s)N} \\ &= \frac{G(s)H(s) + \frac{G(s)N}{A}}{1 - \frac{G(s)N}{A}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

となる. ここで $G(s)N \ll A$ とすれば,

$$\frac{B}{E} = G(s)H(s) \quad (5.12)$$

となる. つまり lock が外れない範囲内で外乱よりも十分大きな信号⁸を制御系に流し込めば, 2つの信号 B, E の比として⁹ 制御系の OpenLoop 伝達関数が得られることになる.

⁸外乱による干渉計の出力信号より十分大きな信号

⁹正確に言えば, B/E にアンプのゲイン (実際に用いた回路では 10 倍) についての補正をしたものとして.

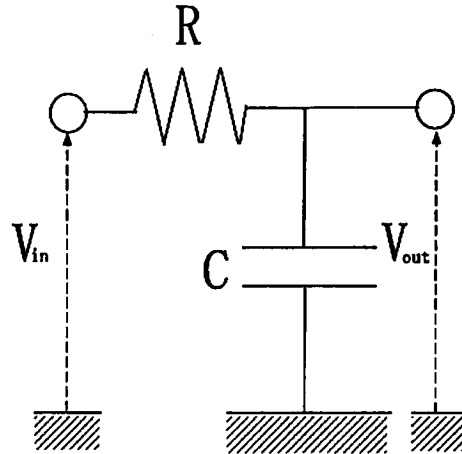


図 5.5: PZT と抵抗とで 1 次のローパスフィルターを形成する.

PZT の電気容量測定

本実験では, 制御系のアクチュエーターとして, PZT を用いた. PZT は電気的にはほぼコンデンサーと等価であるため, 加算アンプの後にある $1\text{k}\Omega$ 抵抗¹⁰ と PZT とで 1 次のローパスフィルターを形成する (図 5.5).

抵抗の抵抗値を R , PZT の電気容量を C とすれば, このフィルターの伝達関数は,

$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1 + i\omega RC} \quad (5.13)$$

となる. またこのフィルターの cut-off 周波数 f_0 は,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \quad (5.14)$$

となる. このフィルターの伝達関数を Advantest 社の FFT Servo Analyzer R9211C を用いて測定した. その結果は図 5.6 の通りである. 最小二乗 fitting により cut-off 周波数を求めたところ,

$$f_0 = 210.486[\text{Hz}]$$

であった. よってこれを (5.15) 式に代入すれば, この PZT の電気容量は,

$$C = \frac{1}{2\pi \cdot 1.0 \times 10^3 \cdot 210.468} \simeq 0.76[\mu\text{F}] \quad (5.15)$$

となる. これはカタログ値¹¹ $0.75 \pm 20\%[\mu\text{F}]$ と比べてよく合っている.

¹⁰サーボ系の回路図については, Appendix の図 A.1 を参照.

¹¹本実験で用いた PZT は, TOKIN 社製の積層圧電アクチュエーター AE0505D08 である/

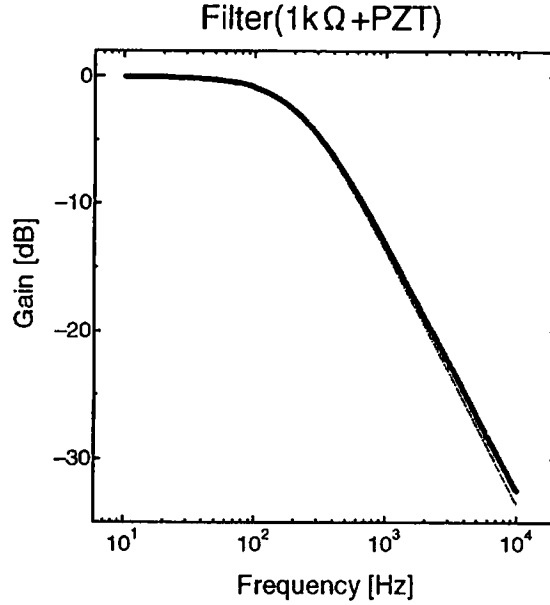


図 5.6: 1k Ω 抵抗と PZT となからなる 1 次のローパスフィルターの伝達関数. 実線は最小二乗 fitting により求めた曲線を表す.

5.3.2 干渉計の伝達関数

干渉計の OpenLoop 伝達関数を FFT Servo Analyzer を用いて測定した. 結果は図 5.7 の通りである. この OpenLoop 伝達関数のユニティ・ゲイン周波数 (Unity Gain Frequency) は約 1.8kHz, また位相余裕は約 30°である. また約 2.2k, 48k, 77kHz に共振が現われており, これは周波数特性から見て, PZT 共振と考えられる¹².

5.3.3 PZT の圧電係数

OpenLoop 伝達関数の測定結果から, PZT の圧電係数 α_{PZT} (単位は [m/V]) を求めることができる. Michelson 干渉計の変位係数を α_{MI} (単位は [V/m]), また OpenLoop 伝達関数とサーボ部分の伝達関数の比を x とすれば,

$$\alpha_{\text{PZT}} \cdot \alpha_{\text{MI}} = x \quad (5.16)$$

ここで (5.8) 式より,

$$\alpha_{\text{MI}} = \frac{4\pi}{\lambda} \sqrt{(V_{\text{Max}}^{\text{A}} - V_{\text{min}}^{\text{S}})(V_{\text{Max}}^{\text{S}} - V_{\text{min}}^{\text{A}})} \quad (5.17)$$

¹²回路をさらに改良すれば, より大きな UGF と位相余裕をもつ, つまりより安定な制御系となり得るが, 変調指数の測定には十分であるため, これ以上改良しなかった.

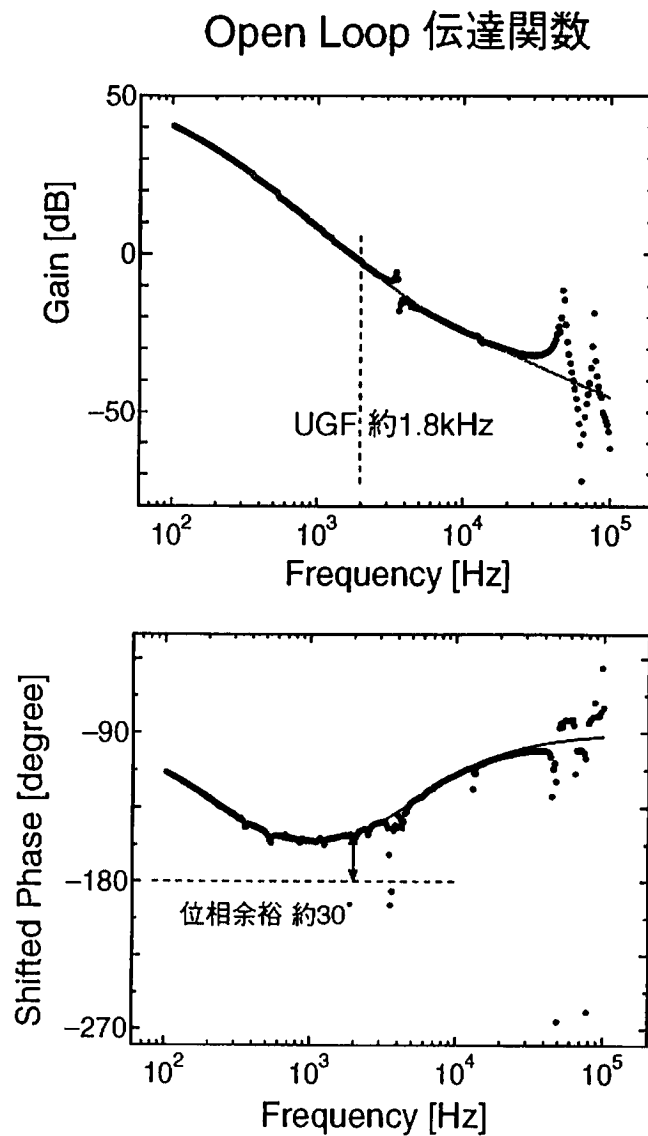


図 5.7: 干渉計の OpenLoop 伝達関数. 上図は伝達関数のゲインであり, また下図は伝達関数の位相遅れである. 実線は回路の伝達関数の計算を用いて, fitting をした曲線である.

となるので,

$$\alpha_{\text{PZT}} = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(V_{\text{Max}}^{\text{A}} - V_{\text{min}}^{\text{S}})(V_{\text{Max}}^{\text{S}} - V_{\text{min}}^{\text{A}})}} x \quad (5.18)$$

となる. この式に最小二乗 fitting により x を求め, その他必要な値を代入すると,

$$\alpha_{\text{PZT}} = 5.3 \times 10^{-8} [\text{m/V}] = 53 [\text{nm/V}] \quad (5.19)$$

となる. これはカタログ値 $61 \pm 1.5 [\text{nm/V}]$ と比べよく合っている

Chapter 6

実験：Pockels 係数 r_{33} の測定

レーザー干渉計型重力波検出器の光路長制御には、大きな位相変調が必要不可欠である。そのため位相変調器用結晶としては、低電圧で大きな位相変調がかけられるよう、大きな Pockels 係数をもつ電気光学結晶を選ばなければならない。Pockels 係数の値は、低周波における値はよく知られているのだが、TAMA300 で用いる周波数 15.25MHz のような高周波における値および紫外領域のレーザー光に対する値については、あまりよく知られていない。そこで本章では、3 つの結晶 LiNbO_3 、 KTiOPO_4 、 RbTiOAsO_4 について Pockels 係数 r_{33} の周波数特性を測定する。

6.1 光学結晶

本実験で用いる 3 つの光学結晶 LiNbO_3 、 KTiOPO_4 、 RbTiOAsO_4 の諸定数については 4.4 で示したが、ここではアセンブリについて補足しておく。これらの概形図は図 6.1 の通り。図 6.1 の左側だが、これは LiNbO_3 についてのものである。結晶には電極として金の膜を蒸着しており、基板およびリード線とは銀ペーストの接着剤で接合している¹。また図 6.1 の右側は、 KTiOPO_4 、 RbTiOAsO_4 についてのものである。これらの結晶についても電極として金の膜を蒸着しているが、支持の方法が異なり、結晶のほぼ中心をセラミックで支えている。また結晶との間には、応力がかからないように²、やわらかい接着材³で張り付けている。⁴

6.2 原理

Michelson 干渉計の片腕に電気光学結晶を入れて、それに電場を印加して位相変調をかける。干渉計の出力信号からその位相変化を読み取ることで、Pockels 係数 r_{33} 、および半波長

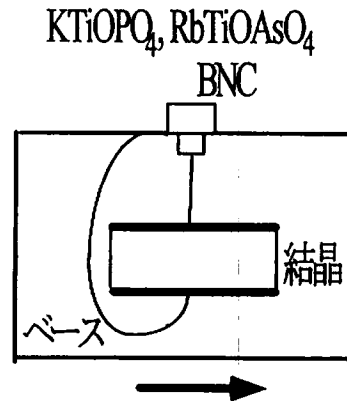
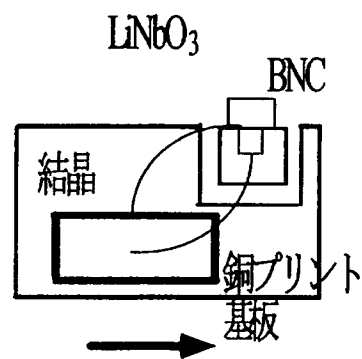
¹この結晶は、応用光電研究室に表面研磨と電極の蒸着電極をしていただいたものを、東大工学部の森脇・松村両氏がハウジングの加工と電気配線をしたものである。

²これは結晶に応力がかかると、弾性変形により屈折率が変化してしまうためである。

³エポキシ系の接着剤

⁴これらの結晶は光学技研にアセンブリしていただいたものである。

正面図



側面図

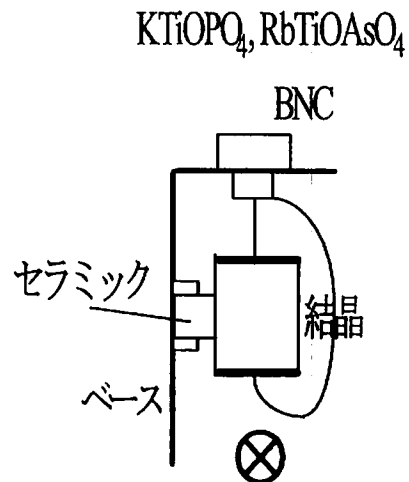
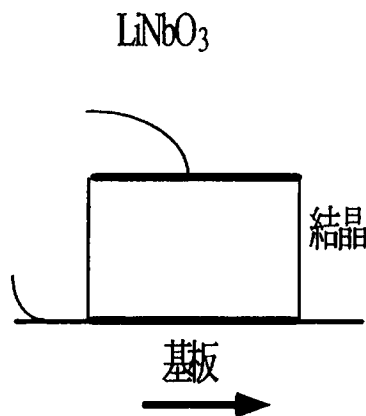


図 6.1: 電気光学結晶の概形図: 右側が KTiOPO₄, RbTiOAsO₄ の, そして左側が LiNbO₃ の正面図および側面図. なお電極については太線で示してある.

電圧 V_π を測定する。本実験で用いる位相変調器は横型であり、これは結晶に印加する電場と垂直に光を入射させる。ここで結晶の長さ、極板間距離をそれぞれ d, l とし、加える交流電圧を $V(t) = V_{\text{ref}} \sin \omega t$ とすれば、4.6 より、光の受ける位相変化 $\phi(t)$ ⁵ は、

$$\phi(t) = m \sin \omega t \quad (6.1)$$

$$m \equiv -\frac{2\pi n_3^3 r_{33} l V_{\text{ref}}}{\lambda d} \quad (6.2)$$

と表せる。ここで差動法で lock している Michelson 干渉計において、干渉する 2 つの光の位相差を $\phi_0 + \delta\phi$ とすれば⁶、Antisymmetric Port における出力信号 $V_A(\phi_0 + \delta\phi)$ は、

$$\begin{aligned} V_A(\phi_0 + \delta\phi) &= \frac{V_{\text{Max}}^A + V_{\text{min}}^A}{2} + \frac{V_{\text{Max}}^A - V_{\text{min}}^A}{2} \cos(\phi_0 + \delta\phi) \\ &= \frac{V_{\text{Max}}^A + V_{\text{min}}^A}{2} + \frac{V_{\text{Max}}^A - V_{\text{min}}^A}{2} \cos \phi_0 \\ &\quad - \frac{V_{\text{Max}}^A - V_{\text{min}}^A}{2} \sin(\phi_0) \delta\phi + O(\delta\phi^2) \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\sin \phi_0 = \frac{\sqrt{(V_{\text{Max}}^A - V_{\text{min}}^S)(V_{\text{Max}}^S - V_{\text{min}}^A)}}{V_{\text{Max}}^A + V_{\text{min}}^A - V_{\text{Max}}^S - V_{\text{min}}^S} \quad (6.4)$$

となる。よって入力電圧と等しい周波数の信号の振幅 V_{sig} は、

$$V_{\text{sig}} = -\frac{V_{\text{Max}}^A - V_{\text{min}}^A}{2} \cdot \sin \phi_0 \quad (6.5)$$

となり、このとき Pockels 係数 r_{33} および半波長電圧 V_π は、

$$r_{33} = \frac{2d}{n_3^2 l \sin \phi_0 (V_{\text{Max}}^A - V_{\text{min}}^A)} \frac{V_{\text{sig}}}{V_{\text{ref}}} \quad (6.6)$$

$$V_\pi = (V_{\text{Max}}^A - V_{\text{min}}^A) \cdot \sin \phi_0 \cdot V_{\text{ref}} \quad (6.7)$$

となる。したがって結晶に加えている電圧 V_{ref} と干渉計の出力信号 V_{sig} とから位相変調器の Pockels 係数 r_{33} および半波長電圧 V_π を測定することができる。

6.3 実験装置

Michelson 干渉計の光学系については、片腕に位相変調器を挿入する他、特に変更はないので、ここでは発振器とオシロスコープについて述べておく。結晶に加える交流電圧源として、HP 社の Pulse/Function Generator 8116A (Max f 50MHz) を用いた。この発振器は比較的高周波の信号を出力できるが、これは周波数シンセサイザ方式ではないため、周波数

⁵ここでは往復分で考えていることに注意。

⁶理想的には $\cos \phi_0 \rightarrow 0$

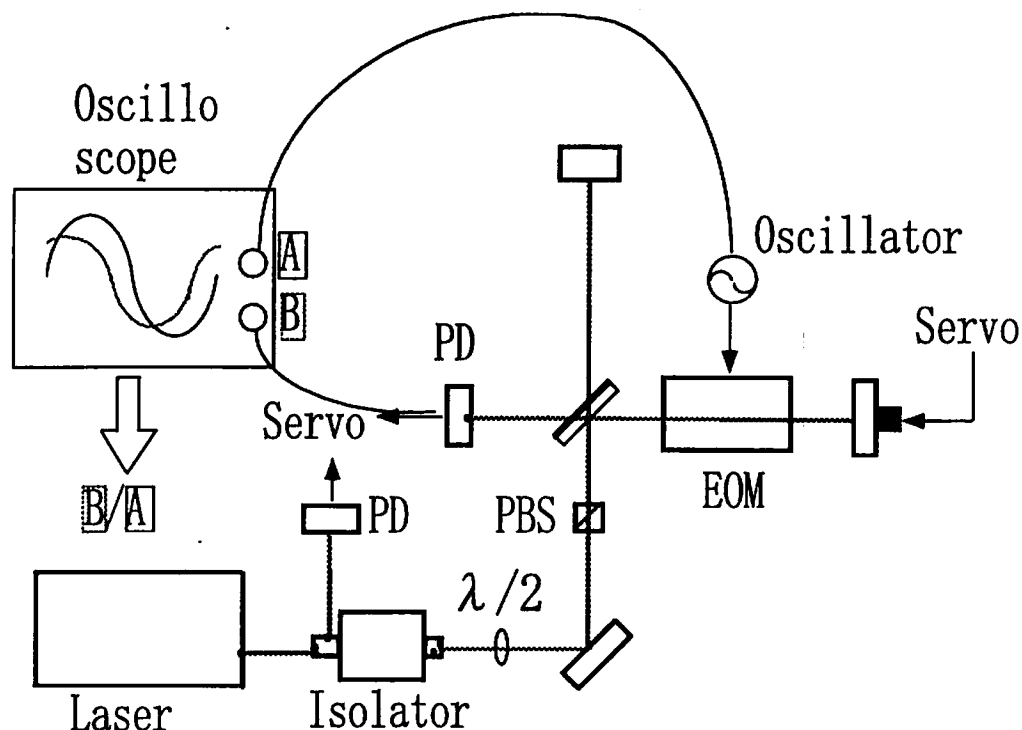


図 6.2: 位相変調の測定実験

の確度が4桁程度しかなかった⁷。そこでもう一台発振器⁸を用意し、これをトリガーとして用いることで、発振器の周波数をlockしたところ、周波数は7桁の精度をもつようになり、十分安定な発振器として用いることが可能となった⁹。

次にオシロスコープについてだが、本実験ではYOKOGAWA社のDigital Oscilloscope DL4100を用いた。このオシロスコープを使って、発振器とPhoto Detectorの信号の振幅比および位相差を測定するのだが、干渉計の出力に低周波のノイズ¹⁰が乗っていたため、精度よく読みとめることは困難であった。そこでオシロスコープの1ショットの波形をデータファイルに落とし、適当なデータ処理によってノイズを落した後、両者の振幅比と位相差を求める、という方法¹¹をとった。

また発振器から結晶へ、そしてPhoto Detectorの出力から差動アンプへ信号を伝送する際には、同軸ケーブルを用いた。ここではその両端の入、出力インピーダンスが50Ωとなるように、50Ω終端抵抗を用いてインピーダンス整合をとっている。

⁷HP社のUniversal Counter 5315Aを用いて測定。

⁸Sony Tecktoronix社のAFG 320。

⁹ただしAFG 320は16MHzまでしか出力できないため、これ以上の周波数ではlockせずに用いた。

¹⁰光学テーブルを空気ばねで浮かせる、エアコンを止めるなど行なったが改善されなかった。

¹¹データ解析については、Appendix Bを参照のこと。

6.4 強度変調とコントラスト

結晶に入射する光の偏光面が主誘電座標軸¹²と一致していない場合、光は2つの偏光固有モードに分かれてそれぞれ異なる位相速度で伝播するため、偏光面が回転してしまい、 $\lambda/2$ 波長板を通過してくる干渉計の Symmetric port の信号は強度変調を受ける。これは結晶のアラインメントを合わせる際に注意すべきことであり、ここでは Symmetric port に出力される光のコントラストが最大となるように結晶のアラインメントを合わせた。各結晶について、アラインメントを調整後の強度変調度¹³は次の通り。

結晶	強度変調度 (ppm)
LiNbO ₃	0.38
KTiOPO ₄	160
RbTiOAsO ₄	0.18

LiNbO₃, RbTiOAsO₄についてはほとんど強度変調がかかっていなかったのだが、KTiOPO₄については、大きな強度変調がかかっていた。またこの強度変調度を最小にするようにアラインメントを合わせてみたところ、LiNbO₃, RbTiOAsO₄についてはほぼ同じ傾きだったのだが、KTiOPO₄については大きくずれており、このとき強度変調度は 13ppm であった。この場合にも他の2つの結晶と比べて強度変調は大きかった。よって KTiOPO₄ は、物質の不均一さなどから結晶軸が一様でないといったことが考えられる¹⁴。

また光が結晶に通ることによって波面が乱れるなどのために、コントラストが劣化してしまっ、干渉計の感度を損ねてしまう恐れがある。各結晶について Pockels 係数などを測定しているときのコントラストは以下の表の通り。

結晶	Antisymmetricport(%)	Symmetricport(%)
LiNbO ₃	96.8	97.7
KTiOPO ₄	97.8	98.5
RbTiOAsO ₄	97.7	98.7
reference	98.5	99.1

どの結晶についても 95%以上のコントラストが得られており、コントラストの劣化は見られなかった。

¹²横型の位相変調器では、この方向に電場を印加する

¹³ここでは強度変調度として、結晶に電圧をかけていないときの Symmetric port に置かれた Photo Detector の出力との比として求めている

¹⁴極論してしまうと、電極の張り付け方が間違っているか、もしくは結晶をカットする際の軸決定で間違っているのではないかとと思われる。

6.5 測定結果

まず各結晶について Pockels 係数 r_{33} , および半波長電圧 V_{π} を測定した。結果は図 6.3～図 6.5 の通り。これらの測定結果は, Photo Detector および干渉計の OpenLoop 伝達関数を用いて較正した¹⁵。

まず低周波について, 4.4 で示したカタログ値と比較すると, $\text{LiNbO}_3, \text{KTiOPO}_4, \text{RbTiOAsO}_4$ の順に, 94%, 62%, 83% となった。KTiOPO₄ については, 他の 2 つの結晶と比べて極端に値が低く, 結晶の軸が一樣でないといったこと考えられる。

また結晶の成長法について考察してみると, LiNbO_3 は引き上げ法¹⁶ で成長させるのに対し, $\text{KTiOPO}_4, \text{RbTiOAsO}_4$ はフラックス法¹⁷ による成長が主流である。一般にフラックス法では, 成長中に不純物が混入しやすいため, 純度のよい結晶ができないという欠点をもつ。これは Pockels 係数の値を下けている要因のひとつと考えられる。

次に高周波についてだが, 各結晶とも低周波に比べると値が下がっている。これは光弾性効果によるものだと考えられる。光弾性効果とは, 結晶の弾性的な変形によって結晶の電荷分布が変化し, その結果屈折率が変化する現象である。高周波数では, 結晶の加えた電場の変化に結晶の変形が追従できず, 値が下がってしまっていると考えられる。

また各結晶ともいくつか共振が見られるが, これも結晶の機械的な共振が光弾性効果を通して現れていると考えられる [11]。

RbTiOAsO_4 については, 他の結晶と比べて共振の Q 値が大きいので, 16MHz まで共振を拾ってみたところ,

193kHz, 1~2MHz¹⁸, 2.95~3.15MHz, 3.30~3.45MHz, 4.28~4.29MHz,
4.90~5.20MHz, 7.05~7.15MHz, 9.05~9.15MHz, 10.85~10.95MHz,
11.1~11.2MHz, 13.1~13.2MHz, 15.15~15.25MHz

となった。この中には, 1MHz から 2MHz 間隔で並んでいる共振があり, これは電場方向に進む縦波について, 定常波が生じていると考えれば説明できる。この結晶は中心を支持し

¹⁵干渉計の出力 x' は, 真の出力 x の $\frac{1}{|1-G(s)|}$ 倍となる。ただし $G(s)$ は Openloop 伝達関数。

¹⁶炉の中においたルツボの中で原料を溶融させ, これを融点よりも高い温度に保っておき, 種子結晶を降下させて融液と接触させ, 種子結晶を回転させながら引き上げるにより結晶を成長させる方法のこと。チョクラスキー法あるいはキロボロス法ともよばれる。この結晶成長法の特徴としては,

- 大きな単結晶が得られる。
- フラックス法の場合に混入する不純物が避けられる。
- ひずみを受けずに成長できる。

などが挙げられる。

¹⁷原料を溶媒となる適当な塩または酸化物に溶かし込み, 徐々に冷却しながらあるいは溶媒を蒸発させながら, 過飽和溶液状態から結晶を析出する方法のこと。溶液析出法という別名もある。この結晶成長法の特徴としては,

- 他の方法に比べて容易に結晶を成長できる。
- 不純物が混入しやすい。

などが挙げられる。

¹⁸非常に複雑な構造になっており, 共振を分けるのが困難だったためこのような表記にした。

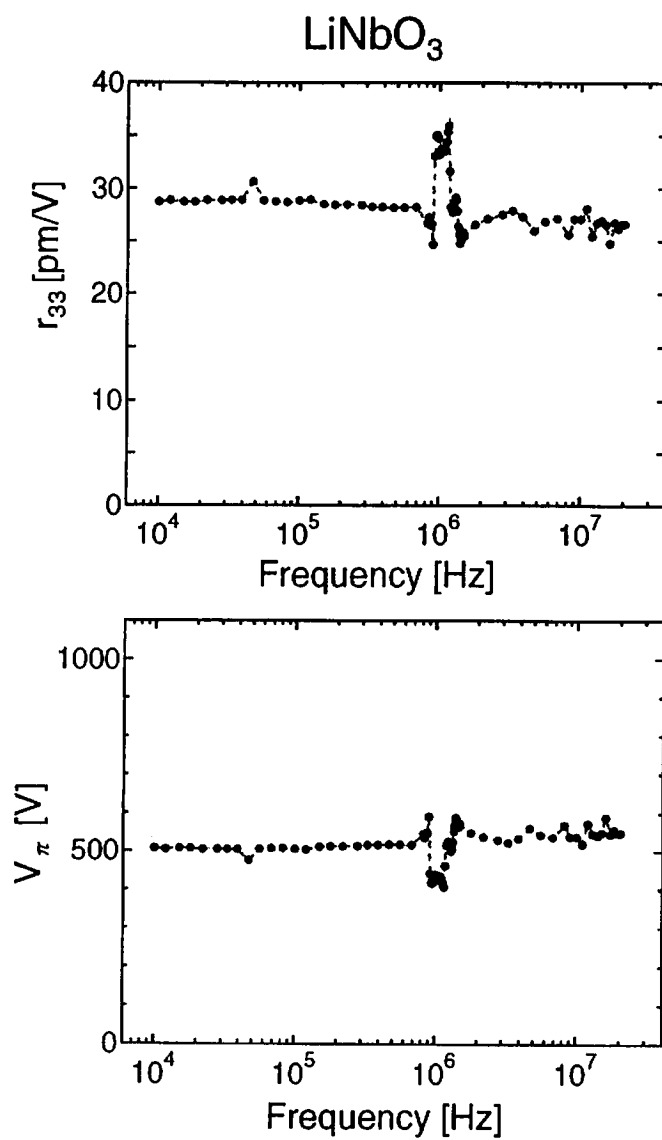


図 6.3: LiNbO_3 の Pockels 係数 r_{33} と半波長電圧 V_π

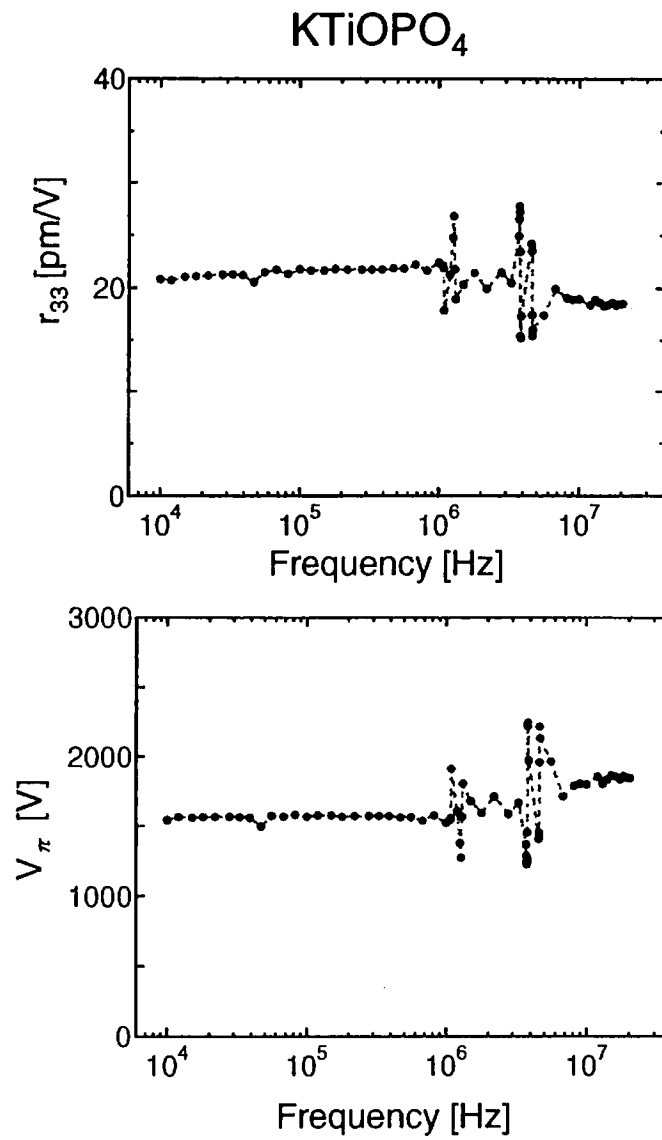


図 6.4: KTiOPO_4 の Pockels 係数 r_{33} と半波長電圧 V_π

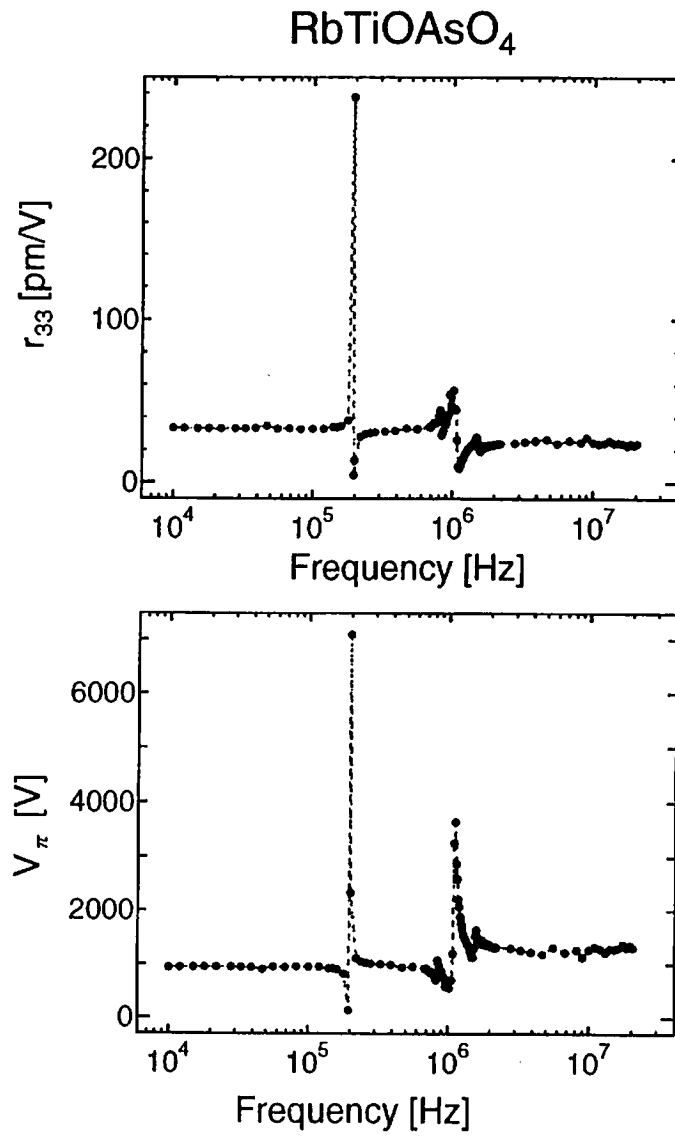


図 6.5: RbTiOAsO_4 の Pockels 係数 r_{33} と半波長電圧 V_π

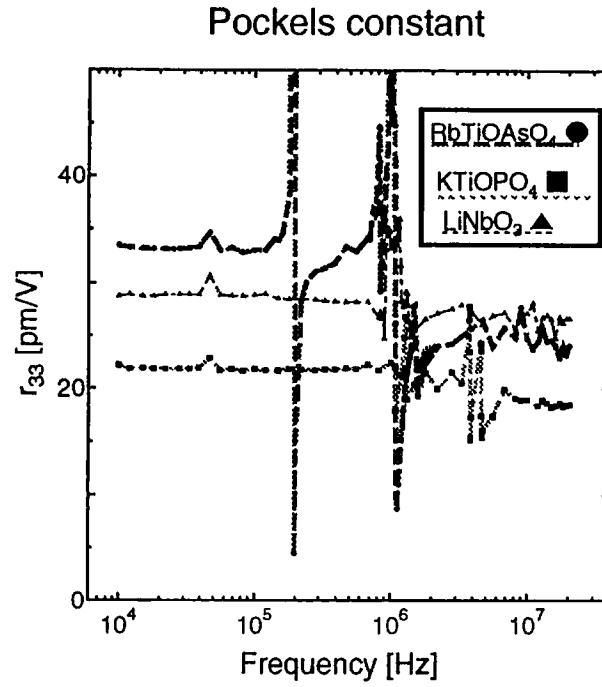


図 6.6: 各結晶の Pockels 係数 r_{33}

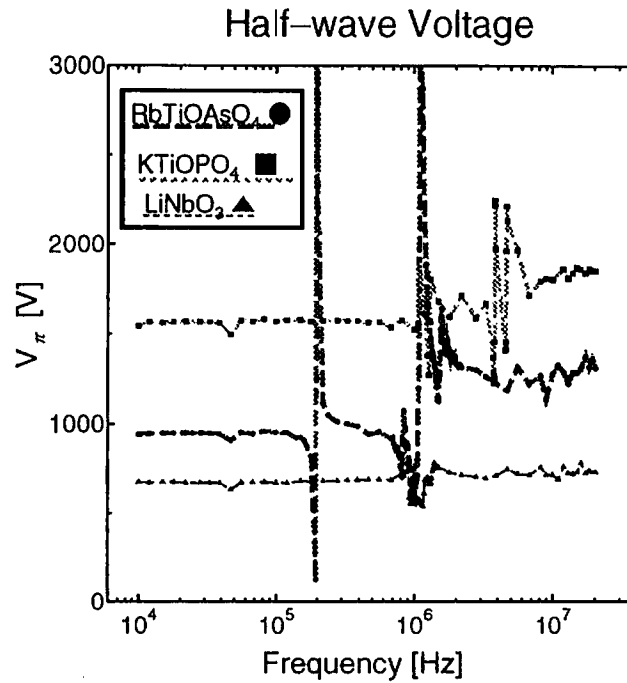


図 6.7: 各結晶の半波長電圧 V_π

ているので、この方向には両端を腹、中心を節とする定常波のみ生じ、その n 番目のモードの周波数 f_n は、縦波の音速を $v_{||}$ として、

$$\frac{\lambda}{2} + n\lambda = d$$

$$\iff f = \frac{2n+1}{2d} v_{||}$$

と表せる。モード間隔が 2MHz であることから、音速 $v_{||}$ は、

$$v_{||} = 2fl = 6.3[\text{km/s}]$$

となる。また 193kHz の共振は非常に大きな Q 値をもつが、これを光の伝播方向に進む横波についての定常波の基本モード¹⁹と考えれば、音速 $v_{\perp}$ は、

$$v_{\perp} = fl = 5.9[\text{km/s}]$$

となる。

6.6 Pockels 係数の位相遅れ

Pockels 効果によって生じる位相差の変化は、結晶に加えられる電場に対して、ある位相遅れをもって追従すると考えられる。この位相遅れを測定した結果は、図 6.8 の通りである。ここでは、ケーブルによる遅延および Photo Detector での位相遅れについて校正した²⁰。共振においては位相が遅れ、共振を過ぎると位相は戻るという傾向をもっている。

6.7 まとめ

以上、考察をまとめると次の通り。

- Pockels 係数 r_{33} の最も大きな結晶は、低周波においては RbTiOAsO_4 、高周波においては LiNbO_3 であった。
- KTiOPO_4 はカタログ値からは予想できないほど低い値であった。これより、 KTiOPO_4 は結晶の軸が一様でないといったことが考えられる。
- Pockels 係数の値といった結晶の品質と大きく関わってくる物性定数の値を評価するためには、結晶の成長法についても考慮すべき要因の一つである。
- Pockels 係数には、結晶の機械共振において共振が現れ、その Q 値は結晶の支持の仕方に依ると考えられる。

¹⁹ 棒の曲げ振動に相当する

²⁰ 高周波においては位相が遅れているが、これは結晶に依らないことから、測定器による位相の遅れだと考えられる。他の遅れを考慮していないためかもしれないが、Photo Detector での位相遅れが正しく見積もれていないことも一つの原因である。

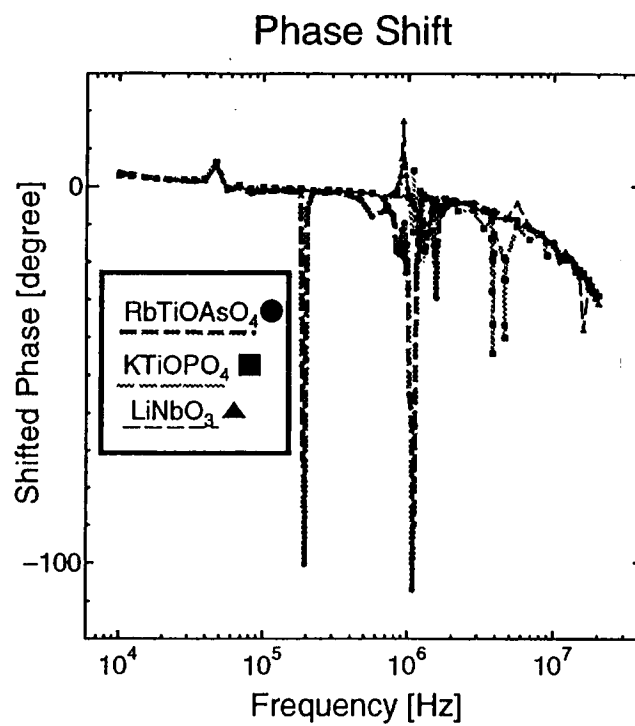


図 6.8: 各結晶の印加電圧に対する Pockels 係数の位相遅れ

Chapter 7

実験：インピーダンス測定

前章では結晶の Pockels 係数 r_{33} および半波長電圧 V_{π} を測定したが、結晶に直接電圧をドライブしようとする、変調指数 1 程度の位相変調をかけるためには、数百 V といった大出力の発振器が必要となる。このような発振器を作成するのは困難であり、もっと低電圧の発振器で十分な位相変調をかけられるよう工夫しなければならない。そこで結晶が電氣的にコンデンサーと等価であることを利用する。具体的には目的の変調周波数で共振をもつように結晶にコイルをつけ、LC 共振を利用して、実効的に大電圧をかけるという方法をとる。LC 共振回路の Q 値は通常コイルの直列抵抗によって制限されるのだが、これは大きな Q 値をもつはずである。しかし結晶の場合にはコンデンサーと並列に大きな抵抗が入っており、これが LC 回路の Q 値に制限を与えることになる。そこで本章では各結晶のインピーダンスを測定し結晶のもつ抵抗成分を調べる。

7.1 誘電体

本実験で用いる電気光学結晶 LiNbO_3 , KTiOPO_4 , RbTiOAsO_4 は、常温においてすべて強誘電体である。誘電体に交流電場 E をかけたとき、生じる電気変位 D は電場 E に追従するが、一般に位相遅れをもつため、これらを複素数まで拡張して議論しなければならない。そこで比複素誘電率 ϵ^* の実数部分および虚数部分を ϵ' , ϵ'' とおく。

$$\epsilon^* \equiv \frac{D}{E} \equiv \epsilon' - i\epsilon'' \quad (7.1)$$

これらをそれぞれ比誘電率、誘電損失とよぶ。また電気変位 D の電場 E に対する位相遅れを δ とすれば、これは比誘電率 ϵ' , 誘電損失 ϵ'' を用いて、

$$\tan\delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \quad (7.2)$$

と表せる。 $\tan\delta$ をロstanジェントとよぶ。これは誘電体におけるエネルギー損失を表す指標となる。電気容量 C_0 の平行平板コンデンサーにこの誘電体を挿入したものについて、こ

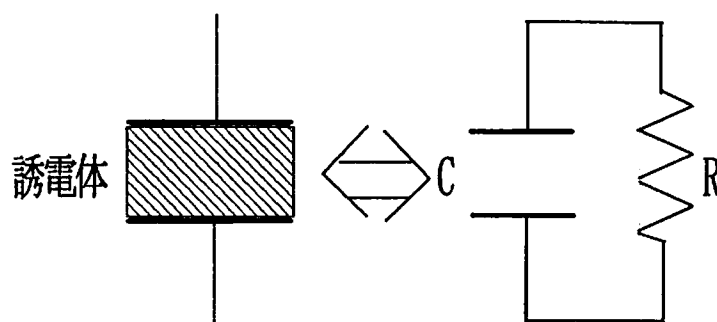


図 7.1: 誘電体を挿入した平行平板コンデンサーは、コンデンサーと抵抗とを並列に接続した回路と等価である。

のアドミッタンスを Y とすれば、

$$Y = i\omega\epsilon_0\epsilon^*C_0 \quad (7.3)$$

と表せる。これに (7.1) 式を代入すれば、

$$Y = \omega\epsilon_0\epsilon''C_0 + i\omega\epsilon_0\epsilon'C_0 \quad (7.4)$$

となる。これ結晶が電気容量 $\epsilon_0\epsilon'C_0$ のコンデンサーと抵抗値 $\omega\epsilon_0\epsilon''C_0$ の抵抗とを並列に接続した回路と等価であることを示している。

7.2 誘電分極

誘電体の分極には、一般に電子分極、イオン分極、配向分極の 3 種類存在する¹。まずこれら 3 つの分極について簡単に説明する。

7.2.1 電子分極

結晶を構成している原子内で電子と原子核の重心は一致している。ここに電場をかけると、それぞれの重心がずれて電気双極子をもつようになる。これを電子分極とよぶ。

7.2.2 イオン分極

イオン結晶は正、負のイオンからなっており、その重心は一致している。ここに電場をかけると、これらの重心がずれ、電気双極子をもつようになる。これをイオン分極とよぶ。こ

¹多結晶や不均質な結晶では、界面分極をもつので 4 種類となる。

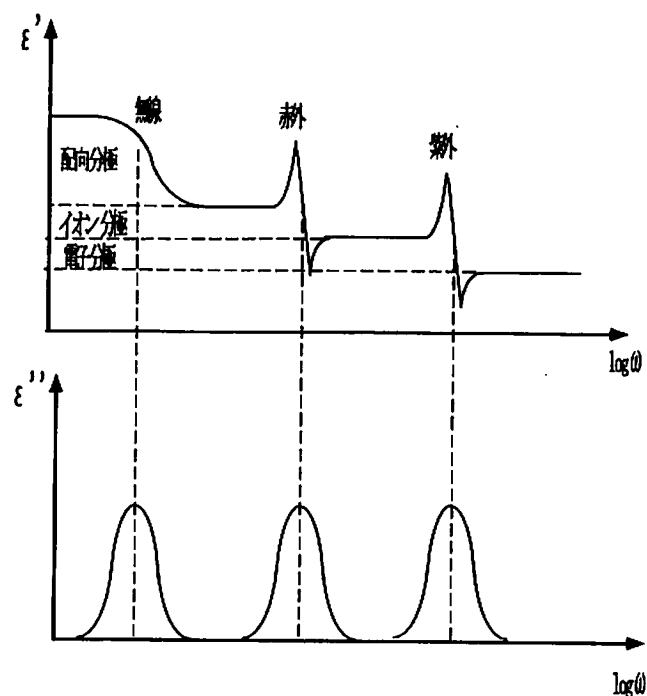


図 7.2: 分極の周波数依存性

これは電子分極と同じく電荷分布の相対的な変位による分極なので、これらをまとめて変位分極とよぶ。

7.2.3 配向分極

永久双極子は熱運動によってばらばらの方向を向いているため、平均化されて特定の方向性をもっていない。ここに電場をかけると永久双極子にトルクが働き、統計に従ってある方向性をもつようになる。これを配向分極とよぶ。

7.3 分極の周波数依存性

誘電体に加える電圧の周波数を増加させていくと、誘電率は図 7.2 のように減少する。これを異常分散とよぶ。それぞれの分極によって異常分散を示す周波数帯域は、電子分極とイオン分極がそれぞれ赤外、紫外領域、そして配向分極はラジオ領域であるため、電氣的に最も重要なのは配向分極となる。そこで配向分極の周波数依存性について調べる。

配向分極の周波数依存性

誘電体を単位体積当たり N 個の永久双極子をもつ液体とみなす。これにステップ状の電場 E を印加させ、分極が定常状態に達したときの配向分極を P_0 とする。電場 E によって永久双極子にかかるトルクによる位置エネルギーを双極子のエネルギーと考え、この系が Boltzmann 分布に従うと仮定すれば、 P_0 は、

$$P_0 = N\mu(\coth a - \frac{1}{a}) \quad (7.5)$$

$$a \equiv \frac{\mu E}{kT} \quad (7.6)$$

と表せる。ここで電場 E を切った後の時間に対する分極の応答を指数関数的と仮定すると、分極 $P(t)$ は、緩和時間 τ を用いて、

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\frac{P(t)}{\tau} \quad (7.7)$$

と表せる。配向分極に基づく比誘電率を ϵ_r とすると、

$$P_0 = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E \quad (7.8)$$

となるので、これを (7.7) 式に代入すれば、

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}(\epsilon_0(\epsilon_r - 1)E - P_0(t)) \quad (7.9)$$

となる。これを $P(t)$ について解けば、

$$P_0(t) = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)E}{1 + i\omega\tau} \quad (7.10)$$

となる。したがって Clausius-Mosotti の関係式

$$P_M = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{M}{\rho} \quad (7.11)$$

を用いれば、Debye のモル分極 P_M は、

$$P_M = \frac{N_0}{3\epsilon_0} \left(\alpha + \frac{1}{1 + i\omega\tau} \frac{\mu^2}{3kT} \right) \quad (7.12)$$

となる。ここで $\omega\tau \ll 1, \omega\tau \gg 1$ における極限值をそれぞれ $\epsilon_{r0}, \epsilon_{r\infty}$ とし、また $\chi \equiv \frac{\epsilon_{r0} - \epsilon_{r\infty}}{\epsilon_{r\infty} + 1} \omega\tau$ とすれば、

$$\epsilon_r' = \epsilon_{r\infty} + \frac{\epsilon_{r0} - \epsilon_{r\infty}}{1 + \chi^2} \quad (7.13)$$

$$\epsilon_r'' = \frac{\epsilon_{r0} - \epsilon_{r\infty}}{1 + \chi^2} \chi \quad (7.14)$$

となる。この周波数依存性のグラフは図 7.3 の通りである。共振はなく単調減少する。これを緩和現象とよぶ。また式 (7.13)、式 (7.14) から χ を消去すれば、

$$\left(\epsilon_r' - \frac{\epsilon_{r0} + \epsilon_{r\infty}}{2} \right)^2 + \epsilon_r''^2 = \left(\frac{\epsilon_{r\infty} - \epsilon_{r0}}{2} \right)^2 \quad (7.15)$$

となり、これは半円を描く。これを Cole-Cole 表示 (図 7.3 を参照) とよぶ。

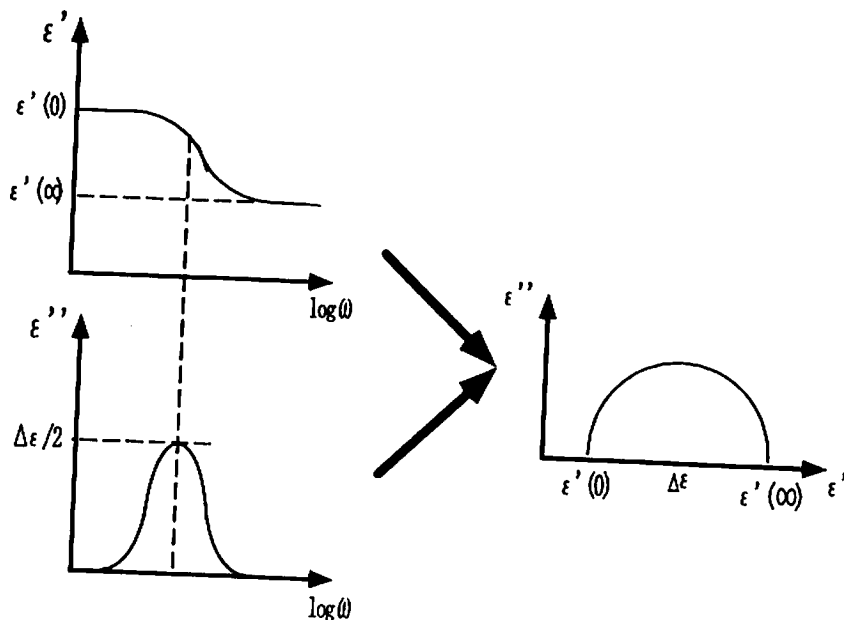


図 7.3: 配向分極

7.4 測定法

東大工学部の伊藤耕三研究室で HP 社の LF インピーダンスアナライザー 4192A を借りてまず結晶の測定を行い、それを用いて比誘電率 ϵ' および誘電損失 ϵ'' を求めた。この LF インピーダンスアナライザーはバランス・ブリッジ法を用いており、他のインピーダンス測定に比べ精度よく測定することができる。しかしこの測定器の周波数レンジは 5Hz~13MHz なので、目的の周波数における 15MHz は測定できない。

7.4.1 測定結果: 比誘電率と誘電損失

カタログ値² は下表の通りである。

結晶	比誘電率 ϵ_{33}	ロスタンジェント δ_{33}
LiNbO ₃	32	...
KTiOPO ₄	23.	0.70
RbTiOAsO ₄	19	0.0004

各結晶のインピーダンス測定結果は図 7.4~図 7.6 の通り。この結果、比誘電率 ϵ' は Pockels 結晶を理想的な平行平板コンデンサーだとみなして換算したのだが、比較的よく合ってい

²ここでも KTiOPO₄, RbTiOAsO₄については Crystal Associates 社のカタログ値による。また LiNbO₃ について調べられなかった。

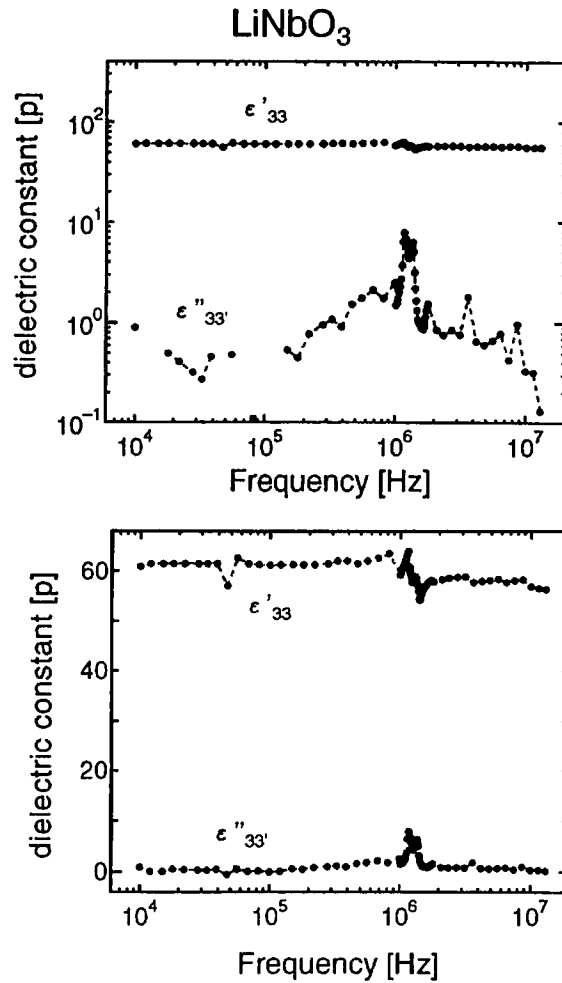


図 7.4: LiNbO₃インピーダンス測定

る³。また誘電損失 ϵ'' は高周波においては誤差に埋もれてしまってきちんと測れなかった。

KTiOPO₄は他の結晶に比べて大きな誘電損失を持っており、低周波になるにしたがって増加した。これは結晶の成長法によるものであると考えられる。純度の高いKTiOPO₄を得るためには、通常結晶低温の水熱合成法⁴を用いるのだが、これはフラックス法によって成長したものであると考えられる。フラックス法で成長させた結晶は不純物が混入しており、低周波では、この欠陥部分を K^+ が移動することによって大きな電流が流れていると考えられる⁵。

³境界条件が長方形となり、対称性がよくないため解析的に求めることは厳しい。数値的に有限要素法による解析が必要であると思われる。また結果から構造因子は約2と推定される。

⁴水晶の人工的な合成法と同じ原理。

⁵この結果KTiOPO₄に直流電圧をかけると、あまりにも多くの K^+ が移動してしまうため、結晶はもろくなり構造破壊が起こると考えられる[10]。

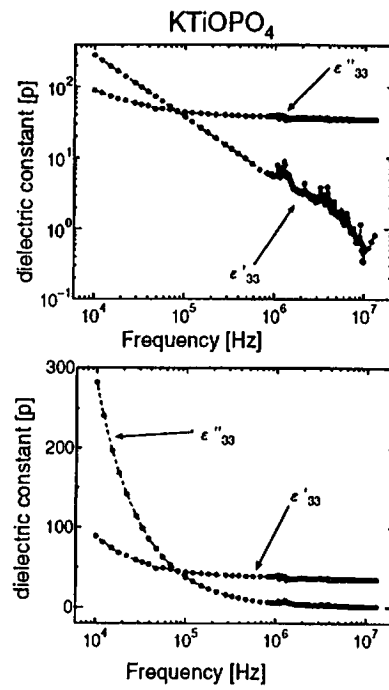


図 7.5: KTiOPO_4 のインピーダンス測定

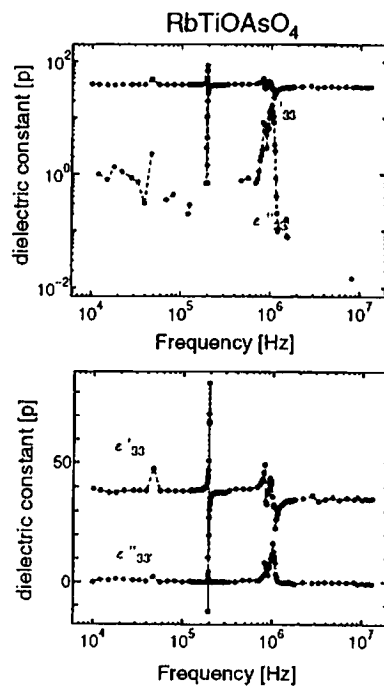


図 7.6: RbTiOAsO_4 のインピーダンスの測定

7.4.2 ロスタンジェント

次に各結晶のロスタンジェントについて、結果は図 7.7の通りである。KTiOPO₄については、カタログ値よりも大きな値をもっていたが、他の2つの結晶についてはカタログ値とオーダー的には一致していた。また RbTiOAsO₄は測定器の検出限界を越えてしまったことが多く、きちんと測定できなかった。

7.4.3 誘電緩和

インピーダンスの結果、および図 7.8の Cole-Cole 表示から、LiNbO₃, RbTiOAsO₄の結晶については、配向分極による誘電緩和が生じていると考えられる。これを単一緩和だと仮定して、緩和強度 $\Delta\epsilon$ および緩和時間 τ を求めたところ、下表の通りである。

結晶	$\Delta\epsilon$	$\tau[s]$
LiNbO ₃	4.86	1.55×10^{-7}
RbTiOAsO ₄	4.88	2.12×10^{-7}

KTiOPO₄についても誘電緩和が起こりかけているように見えるが、別の効果が覆っているため、これだけでは判断しきれない。

7.5 まとめ

以上、考察をまとめると次の通りである。

- LiNbO₃, RbTiAsO₄は小さなロスタンジェントをもつ
- KTiOPO₄については、低周波において非常に小さな抵抗成分をもつようになり、比誘電率よりも大きな誘電損失をもつ。このためこの結晶は低周波では用いることができず、広帯域用位相変調器には不向きである。
- LiNbO₃, RbTiAsO₄については 1MHz 付近で分極緩和が見られた。

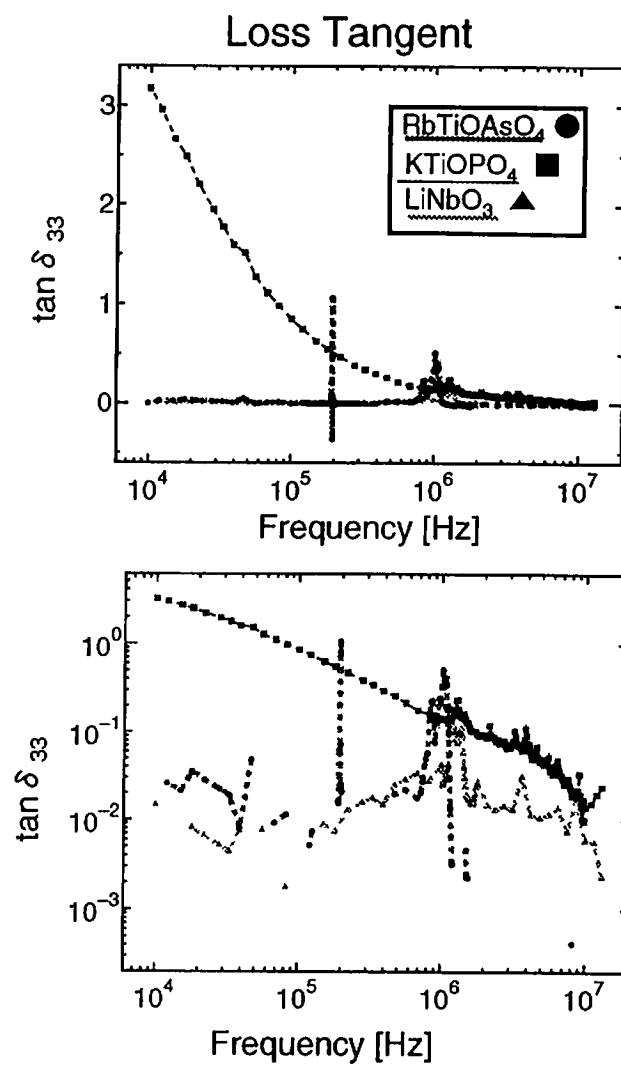


図 7.7: 各結晶のロスタンジェント測定.

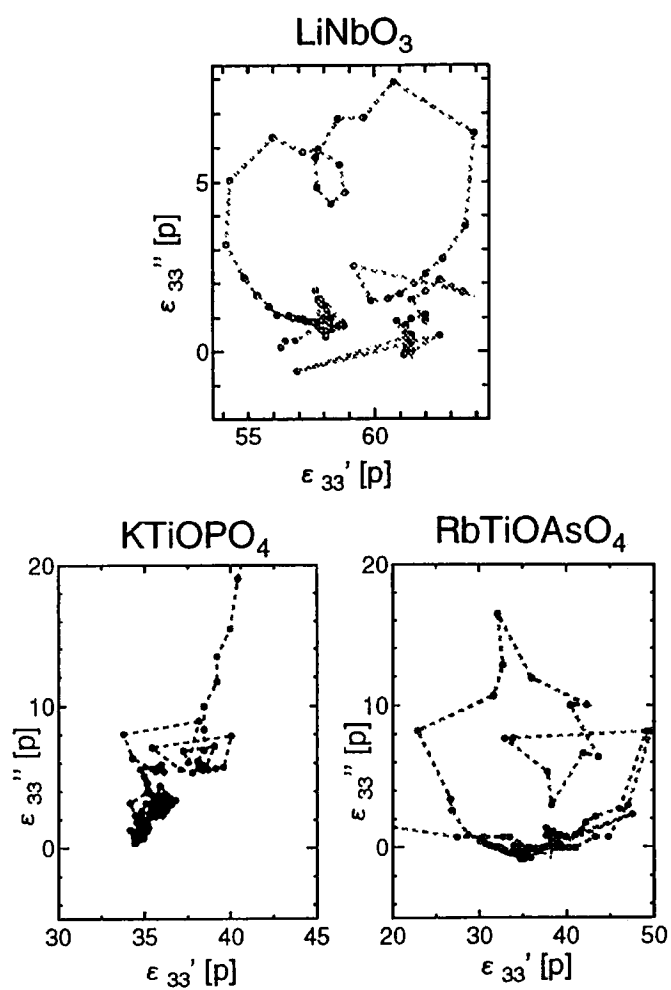


图 7.8: Cole-Cole 表示

Chapter 8

実験: RbTiOAsO_4 を用いた 15MHz LC 共振回路の Q 値測定

前章までの結晶についての光学および電氣的な測定結果より, LiNbO_3 と RbTiOAsO_4 の特性がよいことがわかった. しかし LiNbO_3 については, 光損傷に対してもろいことがよく知られているため, RbTiOAsO_4 が TAMA300 で用いる位相変調器用結晶の第一候補といえる. 実際の位相変調器では, 目的の周波数において実効的に大きな電圧をかけられるよう, 結晶にコイルをつけて LC 回路を利用する. この位相変調器の半波長電圧は, Pockels 係数 r_{33} および LC 回路の Q 値で決まり, これらの値が大きければ大きいほど, 低い電圧で大きな位相変調をかけることができる. そこで本章では, RbTiOAsO_4 を用いて 15MHz に共振をもつような LC 回路を作り, その Q 値を測定する.

8.0.1 原理

結晶にコイルを直列に接続し, その両端に発振器から交流電圧をかける. このときコイルの両側での電圧の比を測定することによって LC 共振回路の Q 値を求める. 発振器の内部抵抗を R , コイルのコンダクタンスを L , そして結晶の電気容量および抵抗値をそれぞれ C, r とすれば, この回路のインピーダンス Z は,

$$\begin{aligned} Z &= R + i\omega L + \frac{\frac{r}{i\omega C}}{\frac{1}{i\omega C} + r} \\ &= R + i\omega L + \frac{r}{1 + i\omega r C} \end{aligned} \quad (8.1)$$

と表せる. したがって発振器の電圧を V_0 とすれば, コイルの両端 A, B (図 8.1 を参照) での電圧 V_A, V_B は, それぞれ,

$$\frac{V_A}{V_0} = \frac{i\omega L + \frac{r}{1 + i\omega r C}}{Z} \quad (8.2)$$

$$\frac{V_B}{V_0} = \frac{1}{Z} \frac{r}{1 + i\omega r C} \quad (8.3)$$

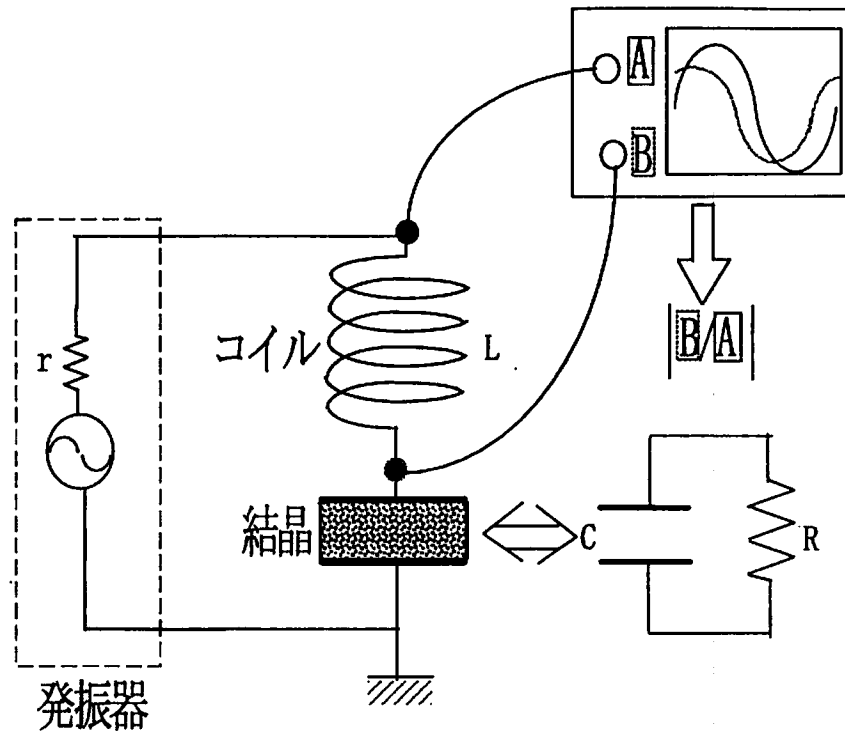


図 8.1: Q 値の測定: 結晶とコイルとからなる LC 回路

となる．よってこれらの比をとれば，

$$\begin{aligned} \frac{V_B}{V_A} &= \frac{\frac{r}{1+i\omega rC}}{i\omega L + \frac{r}{1+i\omega rC}} \\ &= \frac{r}{L(i\omega)^2 + rLC(i\omega) + r} \end{aligned} \quad (8.4)$$

となり，これは結晶とコイルとからなる LC 回路の伝達関数に相当する¹．

実際の測定では，結晶にかかる電圧を干渉計を用いて測定した²．変調指数は結晶の両端にかかる電圧に比例するため，変調指数とコイルの電圧側 (A 側) の電圧で比をとり，低周波における値を 1 となるよう換算すれば LC 回路の伝達関数が求められることになる．本実験では結晶のリード線は BNC コネクターにつながれているため，借りはんだしたコイルをジャックの部分に差し込んで LC 回路を作成した．ここで用いたコイルは TDK 社製のシー

¹一般に Q 値が Q_0 の 1 次のローパスフィルターの伝達関数 $T(s)$ は，

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2\frac{Q}{\omega_0}s + \omega_0^2}$$

と表せる．

²プローブなどを用いて電氣的に測定しようと試みたが，結晶の電気容量は 4.8pF と非常に小さいため，測定器のもつ電気容量の方が大きくなってしまい結晶に正しく電圧がかからない．

ルド型コイル $18\mu\text{H}$ である、この抵抗成分をマルチメータ³ を用いて抵抗を測定したところ、 0.5Ω であった。ただしこれは低周波における値であり、 15MHz では表皮効果によりこれより大きな値をもつと考えられる。

8.1 測定結果

LC 回路の伝達関数は図 8.2 の通りである。この結果、 Q 値は 28.8 となった。6 章の結果より RbTiOAsO_4 の半波長電圧は 1365V であることから、共振回路を利用することにより半波長電圧は 47.4V となる。しかし結晶には BNC コネクターが接続されており、カタログ値によるとこの結晶の電気容量は 2.2pF と測定値の約半分と予想されるので、BNC コネクターを取り払ってしまうことにより、測定で得られた Q 値の約 $\sqrt{2}$ 倍が期待できる。また半波長電圧は 33.5V 程度が期待でき、よって発振器から 10.7V 程度の電圧を結晶に加えることによって変調指数 1 が実現できることになる。

³HP 社のデジタル・マルチメータ 6 1/2 34401A

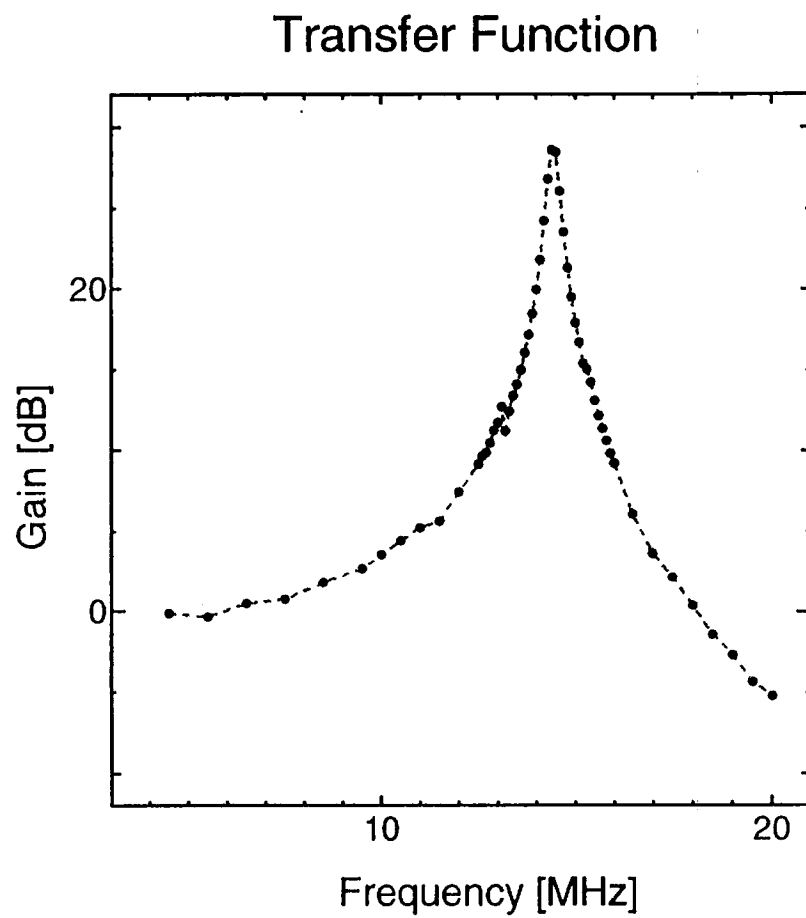


図 8.2: Q 値の測定: 結晶とコイルとからなる LC 回路の Q 値

Chapter 9

高出力に対する測定

前章までは、低出力レーザーに対して結晶の特性を調べたのだが、高出力レーザーに対しても使えるのかどうか、試してみなければならず、本論文のテーマは完結しない。しかし諸事上により、現在までに実験は行なわれていない。高出力レーザーを用いた場合には、熱弾性効果により結晶軸が変化するという障害が考えられるが、最も大きなものは Photo refractive 効果である。ここではこの効果についてまとめておく。

9.1 Photo refractive 効果

Photo refractive 効果 (光励起屈折率効果) とは、結晶に強い光を照射することにより結晶内部に電荷分布が生じて屈折率が変化する現象で、光損傷ともよばれる。この現象は多くの強誘電体結晶および非線形光学結晶で観測されており、現在この現象をもっともよく説明するモデル¹にしたがって、この原理を説明する。それによると、Photo refractive 効果は、光照射によって F 中心的な欠陥から電子が励起されて、光が照射されていない領域に移動し、電子濃度の分布を形成して空間電場を結晶の内部に生じて、結晶の持っている電気光学効果を介して屈折率変化となる、と説明される。Photo refractive 効果の現われる結晶は、大きな電気光学効果²をもち、かつ深いトラップ準位、あるいは光照射により carrier を放出し得る不純物³あるいは欠陥をもつといった条件が必要であり、次のような特徴をもつ。

Photo refractive 効果の特徴

- 照射される光のパワーではなく、光のエネルギーで決まり、mW 程度の光でも大きな非線形屈折率変化が得られる
- 可視光から近赤外領域で生じる非共鳴的な効果

Photo refractive 効果の機構をエネルギーバンド図 (図 9.1) を用いて説明する。トラップ準位はバンドギャップの深い準位に位置し、熱によってはほとんど励起されないが、光を吸

¹KuKhtarev et al[13] による

²Pockels 効果および Kerr 効果

³Fe のように異なる電価状態をとり得る不純物

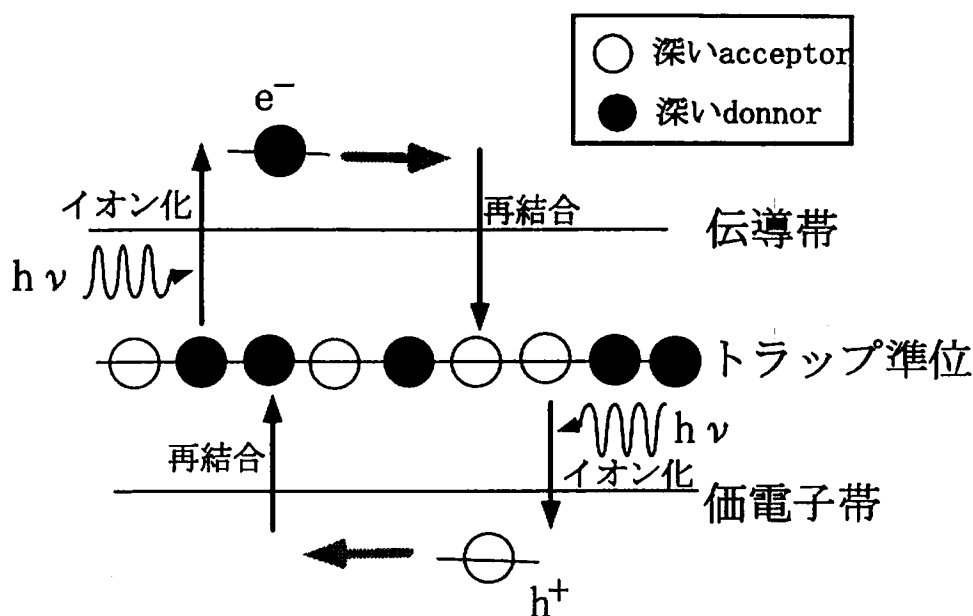


図 9.1: Photo refractive 効果

収することで carrier を生成し、イオン化される。励起された carrier は結晶中を移動して、別のイオンと再結合する。これは結晶中の電荷の分布が変化したことを意味し、その結果内部電場を生じさせ、電気光学効果を通して屈折率変化となる。このような効果が現われるためには、光を照射していない状態において、イオン化されたトラップ準位が存在しなければならず、その深いトラップ準位がドナーであれば浅いアクセプターが存在し、かつそれがイオン化されることによって Photo refractive 効果が現われる。LiNbO₃では、主に鉄がドーブされており、⁴ Fe²⁺がドナー準位を形成している。これが光照射によってイオン化されると Fe³⁺となる。Photo refractive 効果は、遷移金属イオンの混入に敏感であり、結晶原料、炉材などからの Fe, Cu, Mn といったイオンの混入を極力抑えて結晶成長させる⁵ 必要がある。

⁴一般に LiNbO₃は、チョクラルスキー法での結晶成長が主流であり、残留不純物として鉄が混入してしまうことが多い。

⁵また LiNbO₃では、MgO を少量ドーブすると Photorefractive 効果を起こさないことが知られている。

Chapter 10

結論と今後の課題

10.1 まとめ

以上の測定結果をまとめると次の通り.

- Pockels 係数 r_{33} のもっとも大きな結晶は, 低周波においては RbTiOAsO_4 , 高周波においては LiNbO_3 であった.
- KTiOPO_4 はカタログ値からは予想できないほど低い値をとっており, 結晶の一様性など, その質が疑われた. 質のいい結晶を得るためにも, 結晶の育成法まで考慮して選ぶ必要がある.
- Pockels 係数には, 結晶の機械的な共振周波数において共振が現れ, その Q 値は結晶の支持の仕方に依るため, 目的の周波数で構造が現れないよう工夫する必要がある.
- LiNbO_3 , RbTiAsO_4 のロスタンジェントは小さく, また約 1MHz において誘電緩和現象が見られた.
- RbTiOAsO_4 を用いて, LC 共振回路を利用した共振型の位相変調器を作成したところ, 約 30 と大きな Q 値を得ることができた.

以上の測定結果から, TAMA300 の位相変調器用結晶としては, 電氣的にも, 光学的にも RbTiOAsO_4 がよいと考えられる. 今後高出力 10W のレーザーを用いて実験を行ない, この結晶は位相変調器として正常に動作するのかなど, 確認しなければならない.

Bibliography

- [1] 坪野公夫, TAMA300 Project Desin Report, 1996
- [2] レーザー干渉計による重力波検出-TAMA300 の光技術- 応用物理 66(1997) 944
- [3] Curt Cutler, The Last Three Minutes: Issues in Gravitational Wave Measurements of Coalescence Compact Binaries, preprints
- [4] 中村 卓史, 最後の三分間, 岩波 科学ライブラリー
- [5] B.F.Schutz, A First Course in general relativity, Cambridge University Press, 1985
- [6] 三尾典克, 大橋正健編, 重力波アンテナ技術検討書-干渉計ハンドブック-, 1992
- [7] 安東 正樹, Fabty -Perot 型レーザー干渉計重力波検出器の制御, 東京大学修士論文 (1996)
- [8] 大須賀 公一, 制御工学, 共立出版 1995
- [9] Yariv, Optical Electoronics forth edition, Oxford University Press(1997)
- [10] John D. Bierlein et.al., J.Opt.Soc.Am. B6 4 (1989) 622
- [11] 小川 智哉, 結晶物理工学, 昇華房, 1976
- [12] 宮澤 信太郎, 光学結晶, 培風館, 1995
- [13] N.Kukhtarev, et.al., Opt.Communi 23.338 (1977)

謝辞

また本実験を行う上で、多くの方々に貴重なご指導、ご援助をいただきました。

指導教官である坪野公夫助教授には、位相変調器の特性評価という大変興味深いテーマを与えていただきました。また研究面でのサポートはもちろんのこと、さまざまな相談に乗っていただきました。

助手の河邊 径太氏には、様々なことでお世話になり、とくに発表などの練習では非常に丁寧に指導していただきました。また忙しい中、実験室まで何度か足を運んでいただき、貴重なアドバイスをいただきました。

博士課程2年の安東 正樹氏には、干渉計の計算法で分からないことを教えていただきました。そして本実験で用いた Photo Detector の回路図を提供して下さいました。また同じく博士課程2年の柄久保 邦治氏には、整理せずに疑問を投げたのにも関わらず、真剣に対応していただき、さまざまな知識を得ることができました。

博士課程1年の新井宏二氏には、修士1年の際に防振系の計算についてたくさんのご指導をいただきました。また計算機関係のことで数々の有用な知識を得ることができました。博士課程1年の大石 奈緒子氏、山元 一広氏には、研究面ばかりではなく、事務的なことについても親切に教えていただきました。

修士2年の佐々木 愛一郎、高森 昭光、そして修士1年の上田 晃三、谷口 信介、堀越 一雄氏からは、輪講や輪読そして雑談などからさまざまな知識を得ることができました。

理学部物理学科の大塚茂巳技官には、工作を教えていただき、この実験で使われているものを快く作っていただきました。

本実験は東京大学工学部三尾研究室で行いました。

当研究室の三尾 典克助教授には、初心者のお私を光学の分野へ誘っていただきました。また本実験の指針を与えていただき、実験を軌道修正する際には貴重なアドバイスをいただきました。また研究が滞りなく行なえるようさまざまなサポートをしていただきました。

三尾研究室の森脇成典助手には、実験を進めていく上で生じたさまざまな疑問などについて、非常に多くのことを教えていただきました。氏は非常に丁寧に答えていただいいてくれ、知識の豊さには感心させられました。また忙しい中多くの時間を割いて指導していただき、本修論は氏の協力なくしてあり得ません。

三尾研究室修士2年の丸山 正純氏には、コンピューター関係で多くのことを教えていただきました。

三尾研究室修士1年の頼本 賢治氏には、Photo Detector に関する測定で協力していただきました。

坪野研究室 OB である東大地震研の新谷昌人助手には、会合などで寄られた際には気軽に声をかけて下さり、非常に多くのことを教えていただきました。

また黒田研究室修士2年の桑原 文彦氏には、特に研究以外のことで非常にお世話になりました。

最後に蔭で研究を支えてくれた友人、そして両親に感謝します。

Appendix A

回路図

実験で用いたサーボ系および Photo Detector の回路図を示す.

A.1 servo 系

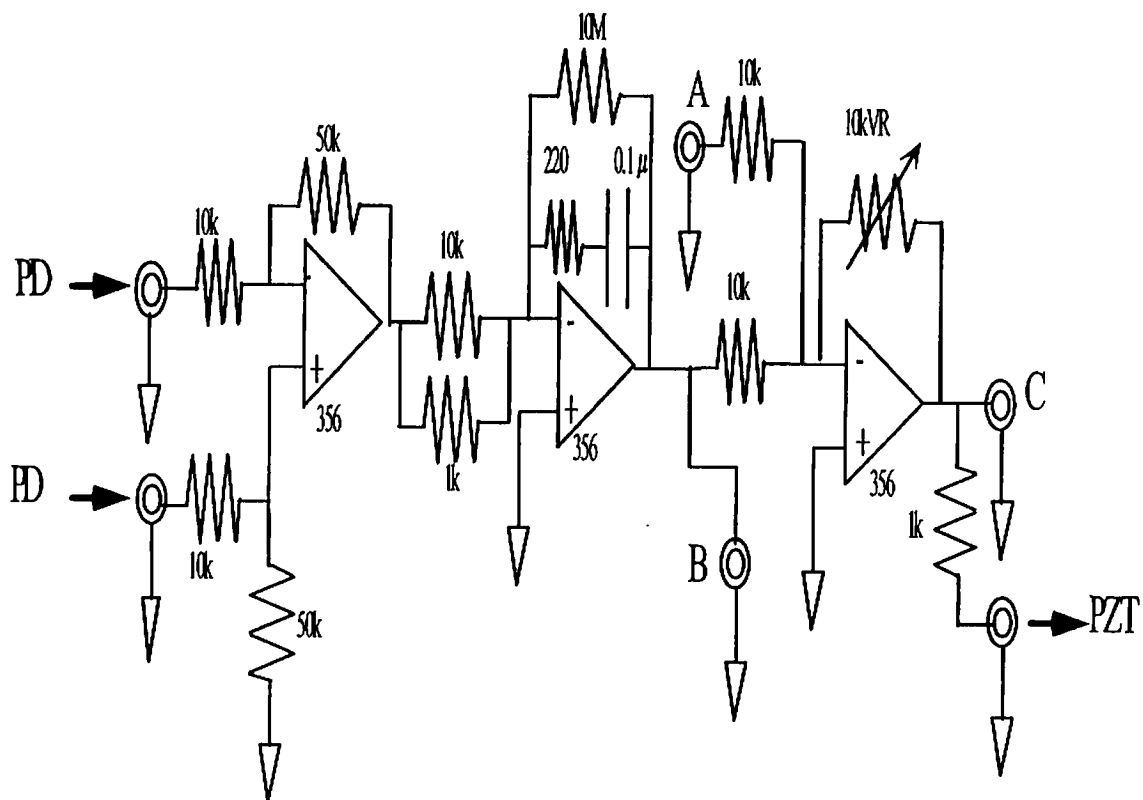


図 A.1: feedback 回路: このサーボ系は, 差動アンプ, 1 次のローパスフィルタ-, そしてアンプからなる.

A.2 photo detector

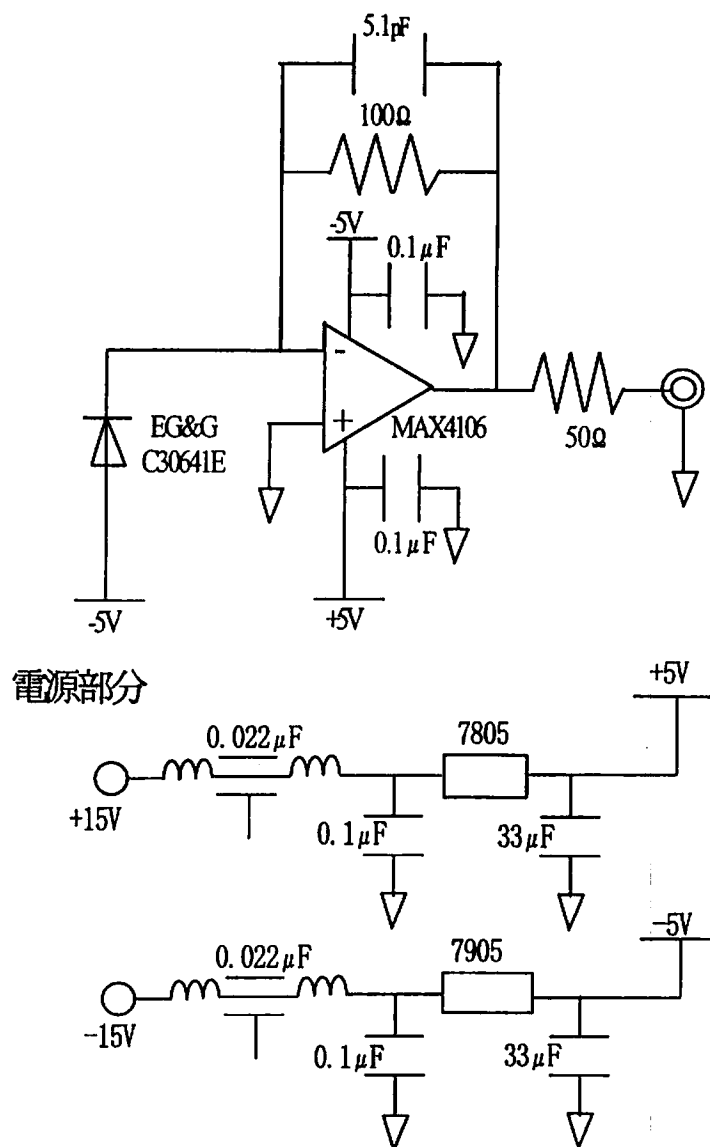


図 A.2: photodetector: PIN 型のフォトダイオードに逆電圧をかけることで高周波までフラットな特性をもつようにしてある.

Appendix B

データ解析

Pockels 係数や半波長電圧を求めるためには、発振器からの信号と干渉計の出力との振幅比と位相差を測定しなければならない。しかし干渉計の出力信号には、高周波および低周波のノイズがのっており、Oscilloscope の値を読みとることは困難であった。そこで以下のようにして、2つの信号の振幅比および位相差を求めた。

まず Oscilloscope の Average 機能 (128 回) およびフィルター (100MHz) を用いて高周波のノイズを落した。トリガーとして発振器からの信号を用いているため、Average によって信号が変形される心配はない。またフィルターも両方の信号にかけるので、補正する必要はない。

次に一周期ごとにオフセットを取り除くことで低周波のノイズを落した。周波数はカウンターで記録したものを使い、オフセットは一周期の積分によって求めた。

最後にノイズを落した信号について、両者の積を積分し、振幅比については平均化して、そして位相差については積分と平均化の比として求めた。それぞれ信号を、

$$A(t) = A\sin(\omega t + \theta) \quad (\text{B.1})$$

$$B(t) = B\sin(\omega t) \quad (\text{B.2})$$

とすれば、

$$\int_0^T A^2(t)dt = \frac{A^2}{2} \quad (\text{B.3})$$

$$\int_0^T B^2(t)dt = \frac{B^2}{2} \quad (\text{B.4})$$

$$\int_0^T A(t)B(t)dt = \frac{AB\cos\theta}{2} \quad (\text{B.5})$$

となり、これによって振幅 A, B , および位相差 θ を求めることができる。