

修士論文
高反射率鏡の評価

物理学専門課程 長滝重博

1995 年 1 月

目次

0.1	Introduction	4
1	重力波の導出	6
1.1	真空解としての平面波	6
1.2	Energy flux と 擬 Tensor	8
1.2.1	擬 Tensor	8
1.2.2	重力波の発生	10
1.2.3	平面波の energy flux	10
1.2.4	球面上の energy flux	12
1.3	回転体から放出される重力波	13
1.3.1	一般的性質	13
1.3.2	連星からの重力波	14
1.3.3	超新星爆発からの重力波	16
2	Laser 干渉計	19
2.1	レーザー干渉計のスキーム	19
2.2	重力の free mass に与える影響	20
2.3	重力波のレーザー干渉計に与える効果	20
2.4	Fabry-Perot cavity の Response	21
2.5	干渉計の雑音	23
2.6	Feed back は重力波の効果を消す?	24
2.7	世界の重力波検出計画	27
3	鏡の透過率、反射率	31
3.1	重力波観測における鏡に対する要求	31
3.2	Fabry-Perot cavity による反射率測定の原理	31
3.2.1	Fabry-Perot cavity の透過率、反射率	31

3.2.2	強度変調	33
3.2.3	cavity の制御系への要求	35
3.3	測定誤差の原因について	37
3.3.1	空気の loss の影響	38
3.3.2	ロックの硬さの反射率への影響	39
3.3.3	強度変調成分は周波数変調の error signal にどう影響するのか	44
3.3.4	周波数変調成分は強度変調による伝達関数の測定に影響を及ぼすのか	46
4	鏡の透過率、反射率測定実験	47
4.0.5	実験の意義	47
4.1	鏡の透過率の測定	47
4.1.1	実験の概説	47
4.1.2	実験の Set up	48
4.1.3	実験における諸注意	49
4.1.4	実験結果	50
4.2	反射率測定実験の概説	51
4.2.1	実験の Set up	51
4.2.2	実験上の注意	53
4.3	系の状態および実験装置の状態	54
4.3.1	cavity のロックの硬さの評価	54
4.3.2	error signal の S/N 比	58
4.3.3	photo detector の特性	58
4.3.4	変調指数の測定	60
4.3.5	補助実験・sweep による反射率、変調指数の測定	60
4.4	実験結果	62
4.4.1	真空中に引かない場合	62
4.4.2	空気の loss を無視した場合	63
4.4.3	空気の loss を考慮した場合	65
4.4.4	真空中に引いた測定	67
4.4.5	真空中の実験結果	70
4.5	まとめ	72
A	補足説明	73
A.1	測地線偏差の方程式	73
A.1.1	共振型重力波検出器	75

A.2	Feed back について	76
A.3	振り子の特性	77
A.4	Mode matching について	79
A.4.1	Gaussian Beam	79
A.4.2	各 component の位置の決定	81
B	実験に使った回路	82
C	実験装置の写真	88

0.1 Introduction

重力波は A.Einstein が 1916 年に一般相対論を提唱した後、氏自身によって予言され、以来 80 年近くになるが未だ直接的な実証はなされていない。直接的な実証が困難である理由は (電磁波などと違って) 非常に他の物質との相互作用が小さいことに起因している。例えば Virgo cluster から超新星爆発による典型的な重力波がやってきたとして、その効果は等時間座標をもつ、重力波がこない時固有距離 L だけはなれた 2 つの時空点間の固有距離が $\Delta L = 10^{-22}L$ 程度の振幅で振動するのみであり、それがいかに小さいかが分かる。間接的な証拠としては重力波放出に起因すると考えられる連星パルサー PSR1913+16 の軌道周期の減少が観測されており、それを報告した Taylor らは 1993 年ノーベル物理学賞を受賞している [1]。尚、この連星の軌道周期の観測結果は一般相対性理論の consistency を与えただけでなく、その他発表されている重力理論に対して厳しい制限を与えたという意味も持っている。

この間接的な証拠からでも重力波の存在自体はもはや疑いのないものとなっているのだが、生き残っている重力理論に対する制限をさらにつけようと思えば、直接的な重力波の観測が必要になってくる。それは理論によって重力波の伝搬速度や偏波の種類に対して異なる予言をしているからである。しかし一般相対論は今のところ重力理論として特に矛盾が示された事例はないし (重力レンズ効果や水星の近日点移動など相対論を裏付ける観測結果がすでに幾つか報告されている)、そういう意味では現在のところ重力理論は一般相対論で十分だということも出来る (もちろんミクロな場合はこの限りではない)。それにもかかわらず重力波が現在注目を浴びつつあるのは、むしろその天文学的な意味であろう。というのは重力波の性質である相互作用の弱さが逆に天文学的には重要であり、超新星爆発の core 部分の情報や銀河中心、あるいは宇宙の晴れ上がり以前の情報すら重力波の観測によって得られる可能性が指摘されている。例えば重力崩壊型超新星爆発に関して言うと、その崩壊後に作られる中性子星は多重極運動を行なっているが重力波の放出によりその多重極運動は減衰していく。この様子はすなわち重力波の減衰振動に反映されるのであるがその減衰の仕方は生成直後の中性子星の大きさや状態方程式に関係してくる。従ってその観測により高密度物性についての情報が得られることになる [12]。またブラックホールが形成される時はその減衰が時空の歪みについての情報を与えてくれる。このような情報は他の手段では得られることができず、重力波観測の天文学的意義は非常に大きいと期待されている。

重力波観測を天文学として成立させるためには観測される event の頻度がどれくらいかということが問題になってくるが、それは観測器の感度と関係してくる。現在重力波観測の project として動いている主なものは LIGO 計画と VIRGO 計画だが、どちらも今世紀

末位までに $h \sim 10^{-21}$ 程度を目標としている。Virgo cluster を覆うような感度にするには $h \sim 10^{-22}$ 程度が必要とされている (日本の新プロジェクトは 1999 年に $h \sim 3 \times 10^{-21}$ を持つ 300m 干渉計の建設を予定している。この感度では大体銀河系を覆う程度)。観測方法としては以前から共振型重力波検出器が研究されて来た [5]。これは重力波から弾性体に与えられるエネルギーにより重力波を捉えようとするものである。この研究は今でも行なわれているが最近主流になっているのはレーザー干渉計によって重力波を捉えようとするものである。これは重力波による光路長の変化を利用して干渉光の位相の変化から重力波の信号を読みとろうとするものである。感度としては現在のところ共振型も干渉計型も同程度ではあるが、観測帯域がレーザー干渉計の方が広いことと、将来的にはレーザー干渉計のほうが高感度を達成するということがレーザー干渉計が主流になってきた原因である。

これらの計画の目標値を達成するために要求される技術は高く、高出力レーザーや低損失鏡の開発など重力波観測に伴う技術革新も見逃せない。例えばレーザーについては単一モードで 100W 程度のレーザーが要求されており、鏡については高反射率 (干渉計の end mirror など。)、低損失、高一様性が要求されている。今後それらの要素が改善されればされるほどそれは観測領域を広げることにつながり、それだけ宇宙の謎に迫ることになると言っても過言ではないだろう。本論文は日本航空電子株式会社製の反射率 99.99% の鏡の特性について評価を行ない、その結果をまとめたものである。

Chapter 1

重力波の導出

1.1 真空解としての平面波

以下ではギリシャ文字を 0 ~ 3、ローマ字を 1 ~ 3 を表すとする。Einstein equation は (宇宙項をゼロとすれば)

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \quad (1.1)$$

と書ける。ここで $G_{\alpha\beta}$ は Einstein tensor、 $T_{\alpha\beta}$ は energy-momentum tensor であり、

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}\Gamma_{\rho\gamma}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho}\Gamma_{\beta\rho}^{\gamma} \quad (1.2)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \quad (1.3)$$

はそれぞれ Ricci tensor、Christoffel 記号と呼ばれている。以下しばらく $c = G = 1$ の単位系を使う。ここで重力場が非常に弱く、かつ真空での Einstein equation について考えてみる。この時 metric tensor は重力場の弱さから

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (h_{\alpha\beta} \ll 1) \quad (1.4)$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

と書ける。 $\eta_{\alpha\beta}$ は Minkowski 時空の metric である。この時

$$g^{\mu\alpha} = \eta^{\mu\alpha} + h^{\mu\alpha} \quad (1.6)$$

とした時

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\beta} = \delta_{\beta}^{\mu} + \eta^{\mu\alpha}h_{\alpha\beta} + h^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\beta} \quad (1.7)$$

とならなければならないので、

$$h^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}h_{\alpha\beta} \quad (1.8)$$

となる。この h の小ささを利用して Einstein equation を h の次数に従ってまとめることを考える。しばらく h の 1 次までを考える。この時 Christoffel 記号は

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(h_{\beta\mu,\nu} + h_{\beta\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\beta}) \quad (1.9)$$

となり、すべての項が (0 次でなく) 1 次の項になっている。次に Ricci tensor は

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\rho}^{\gamma}}{\partial x^{\beta}} \quad (1.10)$$

$$= \frac{1}{2}[-h_{\alpha\beta,\rho}^{\rho} - h_{\rho,\alpha\beta}^{\rho} + h_{\beta,\alpha\rho}^{\rho} + h_{\alpha\rho,\beta}^{\rho}] \quad (1.11)$$

となる。さらに Ricci scalar は

$$R = -h_{\mu,\rho}^{\mu,\rho} + h_{\mu,\lambda}^{\lambda,\mu} \quad (1.12)$$

と計算される。これを踏まえて Einstein tensor を h の 1 次までで求めることにする。

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h_{\rho}^{\rho} \quad (1.13)$$

とすると

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}^{\mu} + \eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}^{\mu\nu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}^{\mu} - \bar{h}_{\beta\mu,\alpha}^{\mu}] \quad (1.14)$$

となる。(尚、これはすでに h の 1 次のみ関数になっているので添字の上げ下げは $\eta_{\alpha\beta}, \eta^{\alpha\beta}$ で行なえば良い。) これは更に Gauge 変換 $x^{\alpha'} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^{\beta})$ ($|\xi_{,\beta}^{\alpha}| \ll 1$) によって $\bar{h}_{,\nu}^{\mu\nu} = 0$ とする自由度があり (調和座標の条件)、この座標系では

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\alpha\beta} \quad (1.15)$$

と書ける。従って Einstein equation は

$$\square\bar{h}_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.16)$$

になるのだが、この解は

$$A_{\alpha\beta}e^{ik_\mu x^\mu} \quad (1.17)$$

で

$$A_{\alpha\beta}k^\beta = 0, k_\beta k^\beta = 0 \quad (1.18)$$

を満たすものである。さらに自由度が残っているので、

$$\bar{h}_{\mu 0} = 0, \bar{h}_\mu^\mu = 0 \quad (1.19)$$

という条件を課す。(TT gauge) この座標系で z 方向に進む波の解は $k_\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$ として

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (1.20)$$

と書ける。実際に物理的に使用する時は h を複素数と考え、全体の実部だけを用いる。

1.2 Energy flux と 擬 Tensor

1.2.1 擬 Tensor

重力場中での局所的な energy-momentum の保存の式は

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{-g} T^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\beta\gamma} \right) T^{\beta\gamma} \quad (1.21)$$

$$= 0 \quad (1.22)$$

である。しかし、このような共変微分の形では大域的な保存則を考える場合 Gauss' law がただちに使える形をしておらず不便である。そこで Einstein equation の内容を変更することなく保存則の形を便利なものにするために導入するのが擬 Tensor である [2]。以下で擬 tensor を導く。まず上で求めた Ricci tensor と Ricci scalar が共に h の一次までのものだということをあらわにするために $R_{\mu\nu}^{(1)}, R^{(1)}$ とおくと厳密な Einstein equation は

$$R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^{(1)} = 8\pi (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) \quad (1.23)$$

と書ける。但し

$$t_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi}[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - R_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R_{\lambda}^{(1)\lambda}] \quad (1.24)$$

であり、これは h の 2 次以上の項の足し合わせである。左辺については調和座標の条件を満たしていれば $h_{\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}h_{\nu}^{\rho}$ であるから、

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}[R^{(1)\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}R^{(1)}] = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}[h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h] \quad (1.25)$$

$$= 0 \quad (1.26)$$

となる。ここまでは特に h の大小に関わらず成立する。左辺について上の式が成立するので当然右辺についても

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}[T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}] = 0 \quad (1.27)$$

が成立する。この式の形は共変微分の式と違って積分の際 Gauss' law を適用しやすい。実際に積分を行なってみる。この時閉曲面は十分大きくとり、境界面ではほとんど Minkowski 空間であるようにする。すると境界面では特殊相対論と同様の解釈をすることが出来、その解釈に従えば $T^{0i} + t^{0i}$ は i 方向への energy-flux である。この時、 T^{0i} を物質からの寄与、 t^{0i} を重力場からの寄与とすることができる。しかしここで注意しなければならないことは t は擬 tensor であり、座標変換に対して Tensor の変換則に従わない。極端な場合には局所的には局所慣性系をとることで $t^{\alpha\beta}$ 全ての成分を 0 にすることも出来る。そういう意味で $t^{\alpha\beta}$ をただちに重力場による energy-momentum tensor とは解釈できないのである [3][4]。それに対して $t^{\alpha\beta}$ を上のような条件の下で積分したものは Tensor の変換則に従う。積分値を見るために上式を時間成分と空間成分に分けると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (T^{\mu 0} + t^{\mu 0}) d^3x = - \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^i} (T^{\mu i} + t^{\mu i}) \quad (1.28)$$

$$= \int dS n_i (T^{\mu i} + t^{\mu i}) \quad (1.29)$$

となる。最後の式についてはいわゆる 3 次元の Gauss' law を用いた。 $\vec{n}$ は閉曲面上での外向き単位法線 vector である。左辺を書き直して

$$-\frac{\partial}{\partial t} P^{\mu} = \int dS n_i (T^{\mu i} + t^{\mu i}) \quad (1.30)$$

としてみる。右辺を見ると $\mu = 0$ の時は単位時間あたり閉曲面から放出されるエネルギー (放出される時正の値をとる)、 $\mu = i$ の時は単位時間あたり放出される運動量成分であ

る。従って P^μ は閉曲面内の物質場と重力場を合わせた 4-momentum vector と解釈出来る。又、ここで注意することは閉曲面のとり方として等時間座標での 2 次元曲面にしているということである。又、今は領域の全域にわたって重力場が弱いとしたが、結果としての上式の右辺は閉曲面上でさえ重力場が弱ければその曲面を通過する単位時間あたりのエネルギーという意味をもつので内部に強い重力場の領域があってもこの式は成立する。特に閉曲面上で物質の移動や物質によるエネルギー、あるいは力のやりとりがない場合、そこでは $T^{\mu\nu} = 0$ で $t^{\mu\nu}$ だけが値を持ち得る。この項が重力波によるエネルギーの放出に相当する。 $t^{\mu\nu}$ に関しては h の 2 次までで考えたとしても幾つかの表現方法があるが、積分としてはどれも同じ結果を与える。ここでは、

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{4k} \left\{ \bar{h}_{\alpha\beta}^{\cdot\mu} \bar{h}^{\alpha\beta,\nu} - \frac{1}{2} \bar{h}^{\cdot\mu} \bar{h}^{\cdot\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left(\bar{h}_{\alpha\beta,\gamma} \bar{h}^{\alpha\beta,\gamma} - \frac{1}{2} \bar{h}^{\cdot\alpha} \bar{h}_{,\alpha} \right) \right\} \quad (1.31)$$

を採用する。

1.2.2 重力波の発生

上では真空を伝わる重力波を導いたが、重力波とは metric の時間変化と考えられるので、その起源は Einstein equation から分かるように energy-momentum tensor の時間変化、すなわち (h の 1 次までの式では) 物質の時間的变化である。すなわち物質が運動をすると (球対称や軸対称など特別な場合を除いて) 重力波が放出される。

考えている系が必ずしも真空であるとは限らない時、Einstein equation は

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -2\kappa(T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}) \quad (1.32)$$

と書ける。これは電磁気学での Poisson 方程式と同じ形をしており、その解は物理的に起こりやすい遅延 potential の方を採用すれば

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(t, x, y, z) = \frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{(T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta})(t - r', x', y', z')}{r'} dx' dy' dz' \quad (1.33)$$

と表せる。

1.2.3 平面波の energy flux

energy 擬 tensor の表式を用いて平面波の energy flux を計算してみる。平面波を考えているということは、そこでは真空であり従ってそこでは物質場による energy-momentum tensor は 0 である。従ってエネルギーの輸送は重力場によって (すなわち重力波で) 行なわれる。今位相は最も簡単なものにとり、 $h_+ = h_\times = h$ (実数) とする。この時全体の実部は TT-Gauge で

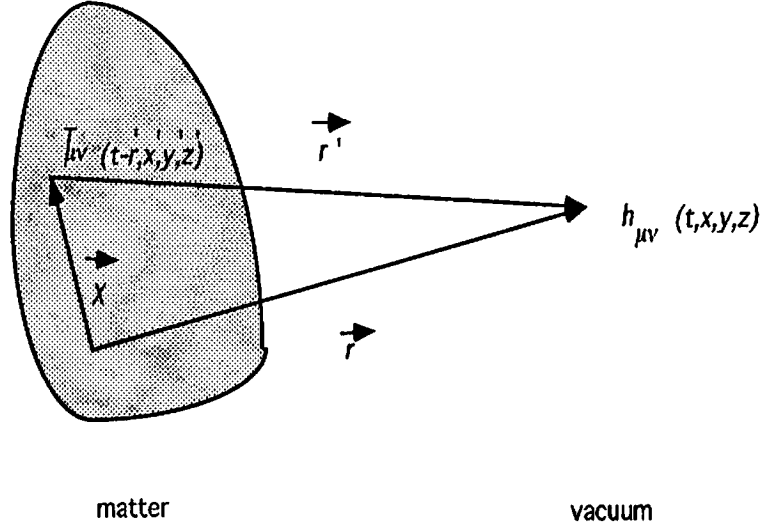


図 1.1: metric と energy momentum tensor の関係

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & h & 0 \\ 0 & h & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(-kt + kz) \quad (1.34)$$

と表せる。この時 $\bar{h}_{\mu\nu}^{\text{TT}} = \bar{h}^{\mu\nu\text{TT}}$ である事に注意する。次に $\bar{h}_{\mu\nu}^{\text{TT},\alpha}$ で 0 でないものを計算すると (以下簡単のため $\bar{h}_{\mu\nu}^{\text{TT}}$ を単に $h_{\mu\nu}$ と表す。)

$$h_{11}^0 = h_{12}^0 = h_{21}^0 = h_{11,0} = -h_{12,0} = -h_{21,0} = -kh \sin(-kt + kz) \quad (1.35)$$

$$h_{22}^0 = -h_{22,0} = kh \sin(-kt + kz) \quad (1.36)$$

$$h_{11}^3 = h_{12}^3 = h_{21}^3 = h_{11,3} = h_{12,3} = h_{21,3} = -kh \sin(-kt + kz) \quad (1.37)$$

$$h_{22}^3 = h_{22,3} = kh \sin(-kt + kz) \quad (1.38)$$

である。また trace を考えると

$$\text{Tr}(h_{\alpha\beta}) = 0 \quad (1.39)$$

なので

$$h^\mu = (0, 0, 0, 0) \quad (1.40)$$

である。これから

$$h^\alpha h_{,\alpha} = 0 \quad (1.41)$$

$$h^{\mu}h^{\nu} = 0 \quad (1.42)$$

$$h_{\mu\nu}^{\alpha}h^{\mu\nu,\beta} = \begin{pmatrix} 4k^2h^2\sin^2(-kt+kz) & 0 & 0 & 4k^2h^2\sin^2(-kt+kz) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4k^2h^2\sin^2(-kt+kz) & 0 & 0 & 4k^2h^2\sin^2(-kt+kz) \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

$$h_{\alpha\beta,\gamma}h^{\alpha\beta,\gamma} = 0 \quad (1.44)$$

と計算される。従って $t^{\mu\nu}$ は以上のものを擬 Tensor の表式に代入して

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{4k} \begin{pmatrix} 4k^2h^2\sin^2(-kt+kz) & 0 & 0 & 4k^2h^2\sin^2(-kt+kz) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4k^2h^2\sin^2(-kt+kz) & 0 & 0 & 4k^2h^2\sin^2(-kt+kz) \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

となる。従って energy-flux は

$$F = t^{03} = \frac{1}{4k} 4k^2h^2\sin^2(-kt+kz) \quad (1.46)$$

である。時間平均して、単位系を MKS に戻すと

$$\langle F \rangle [\text{Wm}^{-2}] = \frac{c^3}{16\pi G} (2\pi f)^2 h^2 \quad (1.47)$$

となる。以下では MKS 単位系を用いる。

1.2.4 球面上の energy flux

重力波を出す物体を取り囲む球面上での energy flux を考える。結果だけをここでは示す（証明は [2]）。まず

$$J^{ij} = \int \rho x^i x^j dx^1 dx^2 dx^3 \quad (1.48)$$

という量を定義する。これは質量分布の 2 次の moment である。これを使うと

$$\begin{aligned} S_R(n_1, n_2, n_3) &= \frac{Gc}{4\pi R^2} \left\{ -\frac{1}{4} (\sum J^{(3)ii})^2 + \frac{1}{2} (\sum J^{(3)ii}) (\sum J^{(3)ij} n_i n_j) + \frac{1}{4} (\sum J^{(3)ii} n_i n_j)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\sum (J^{(3)ij})^2) - (\sum J^{(3)ik} J^{(3)jk} n_i n_j) \right\} \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$P = \frac{Gc}{5} \left\{ \sum (J^{(3)ij})^2 - \frac{1}{3} (\sum J^{(3)ii})^2 \right\} \quad (1.50)$$

と書ける。ここで S_R は単位面積あたりの energy flux で (n_1, n_2, n_3) は方向 vector, P は total energy-flux である。

1.3 回転体から放出される重力波

1.3.1 一般的性質

1 点のまわりで回転する剛体からの重力波を計算してみることにする。簡単のため慣性主軸 (x_3 とする) のまわりで剛体が回転している場合を考えることにする。あるデカルト座標系 (S 系とする) でその剛体を見た時剛体の角速度が Ω であるとする。これにたいして剛体の静止系 (S' 系とする。) を考える。 S' 系から見た時質量分布の 2 次の moment は

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

と書けるのだが、これを S 系からみると

$$J_{ij} = R^t J R \quad (1.52)$$

に見える。ここで

$$R = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t & 0 \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

である。これに従って $J_{ij}^{(3)}$ を計算すると 0 でない成分は

$$J_{11}^{(3)} = \left(\frac{2\Omega}{c}\right)^3 \frac{J_1 - J_2}{2} \sin 2\Omega t \quad (1.54)$$

$$J_{22}^{(3)} = -\left(\frac{2\Omega}{c}\right)^3 \frac{J_1 - J_2}{2} \sin 2\Omega t \quad (1.55)$$

$$J_{12}^{(3)} = J_{21}^{(3)} = -\left(\frac{2\Omega}{c}\right)^3 \frac{J_1 - J_2}{2} \cos 2\Omega t \quad (1.56)$$

となる。これと先に書いた energy flux と total energy の式から

$$S_R = \frac{Gc}{4\pi R^2} \left(\frac{2\Omega}{c}\right)^6 \left(\frac{J_1 - J_2}{2}\right)^2 \left(1 - \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^4 \theta \sin^2(2\Omega t - 2\phi)\right) \quad (1.57)$$

$$P = \frac{32G}{5c^5} (J_1 - J_2)^2 \Omega^6 \quad (1.58)$$

となる。これから分かることはまず軸対称な回転体からはエネルギーの放射がないこと、次に回転角速度の2倍の周波数で重力波が放出されること、さらに角速度の6乗に比例してエネルギーの放出がおこなわれること、回転と重力波の強度の時間変化に位相差があることなどである。次にこのことを使って連星から放出される重力波を実際に計算してみる。

1.3.2 連星からの重力波

最も簡単な場合として、質量 m_1, m_2 の星が1点を中心に円軌道を保って回転している場合を考える。星の間隔を a とする。中心と各々の星との間隔を r_1, r_2 とすると、つりあいの式から

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}a \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}a \quad (1.59)$$

となる。静止系として星が x 軸上にあるようなものを選ぶと質量分布の2次の moment は

$$J_1 = m_2(r_2)^2 + m_1(r_1)^2 \quad (1.60)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2 \quad (1.61)$$

$$= \mu a^2 \quad (1.62)$$

$$J_2 = J_3 = 0 \quad (1.63)$$

と計算される。これを Luminosity の式に代入すると、

$$P = \frac{32G}{5c^5} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 a^4 \Omega^6 \quad (1.64)$$

が得られる。次に a と Ω の関係を計算する。まず遠心力と求心力のつりあいの式から

$$F = g \frac{m_1 m_2}{a^2} = m_1 r_1 \Omega^2 \quad (1.65)$$

となり、これをまとめると

$$G(m_1 + m_2) = a^3 \Omega^2 \quad (1.66)$$

となる。これを使うと系の Luminosity は

$$P = \frac{32G^4 \mu^2 (m_1 + m_2)^3}{5c^5 a^5} \quad (1.67)$$

と書ける。

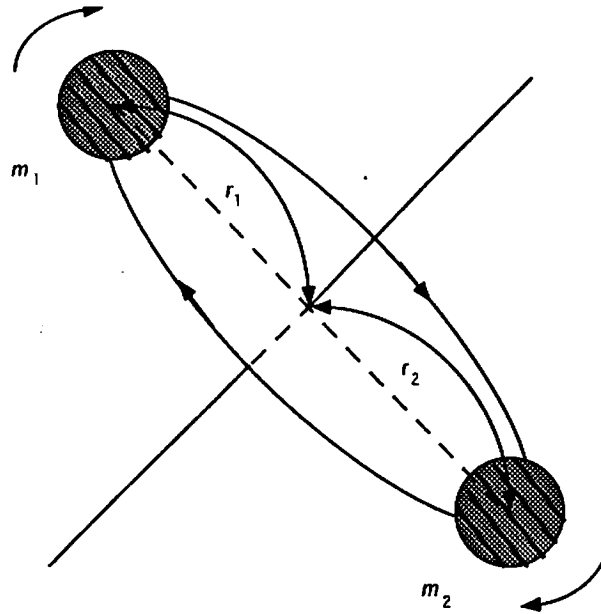


図 1.2: 連星からの重力波

次に系のエネルギーは

$$W = \frac{1}{2}m_1(\Omega r_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\Omega r_2)^2 - \frac{Gm_1m_2}{a} \quad (1.68)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{Gm_1m_2}{a} \quad (1.69)$$

と求まる。

さらに角運動量は

$$L = m_1r_1^2\Omega + m_2r_2^2\Omega \quad (1.70)$$

$$= \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}a^2\Omega \quad (1.71)$$

$$= \mu\sqrt{G(m_1 + m_2)a} \quad (1.72)$$

となる。

さて、エネルギー収支の関係式は

$$-\frac{dW}{dt} = P \quad (1.73)$$

だから、これにそれぞれの表式を代入するとこれは a に関する微分方程式になる。これは

$$-\frac{da}{dt} = \frac{\lambda}{4a^3}, \quad \lambda = \frac{256G^3m_1m_2(m_1 + m_2)}{5c^5} \quad (1.74)$$

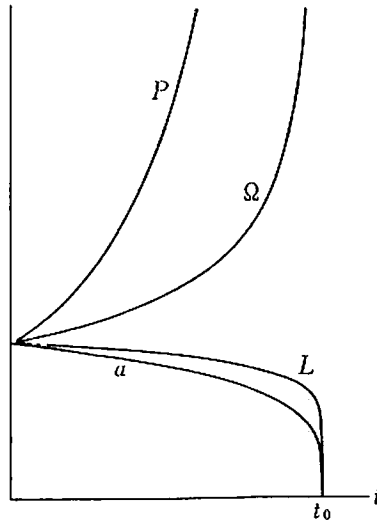


図 1.3: 連星の諸量の時間変化、平川浩正：相対論より転載

であり、この解は

$$a = \{\lambda(t_0 - t)\}^{\frac{1}{4}} \quad (1.75)$$

である。ここで $a_0 = (\lambda t_0)^{\frac{1}{4}}$ は始めの連星の距離であり、 $t = t_0$ で星は衝突することを示している。すなわち星間距離は時間と共に小さくなっていく。上にあげた量はすべて a の関数に直してあるので定性的な様子が見えやすい。その様子としては距離が近くなるにつれ角速度が大きくなり、高速回転を行なうとともに重力波によるエネルギー放出も大きくなる。角運動量自体は小さくなっていく。これは角速度の大きくなりかたよりも距離の小さくなりかたの方が effective だということである。以上で簡単な連星の合体による重力波放出の考察を終えるが、連星中性子星の合体による重力波の放出は(よりコンパクトでより重いから) 地上で観測できる重力波源として期待が大きく、より細かく軌跡ならびに重力波の波形が計算されている。波形の計算は実際の観測においても S/N 比の向上につながるので、観測の立場からも大きな意味を持つ [6][7]。

1.3.3 超新星爆発からの重力波

連星中性子星の合体時の重力波と共に波源として期待されているものに超新星爆発がある。以下でその時の h の大きさを見積もってみる。まず、total energy-flux を考えると十分遠方では重力波は平面波になっていると考えられるので、以前に求めた平面波の energy

flux を全立体角にわたって積分すると (簡単のため重力波は等方的にでると考える)

$$P = 4\pi R^2 \frac{c^3}{16\pi G} (2\pi f)^2 h^2 \quad (1.76)$$

である。 h を表す式に変形すると

$$h = \left(\frac{G}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2\sqrt{P}}{(2\pi f)R} \quad (1.77)$$

と書ける。又、重力崩壊における特徴的な time scale は

$$\tau = \frac{2GM}{c^3} \quad (1.78)$$

なので (Schwarzschild 半径を光速で割ったもの)、そのとき (質量の四重極以上のものによって) 放出されるエネルギーを $\epsilon M c^2$ とすると total energy flux は

$$P = \frac{\epsilon M c^2}{\tau} \quad (1.79)$$

と書ける。これから

$$h \sim 3 \times 10^{-17} \left(\frac{1\text{kHz}}{f}\right) \left(\frac{10^4\text{pc}}{R}\right) \left(\frac{\epsilon}{0.01}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.80)$$

$$\sim 3 \times 10^{-18} \left(\frac{M}{10M_{\odot}}\right) \left(\frac{10^4\text{pc}}{R}\right) \left(\frac{\epsilon}{0.01}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.81)$$

が得られる。超新星爆発による重力波はどれだけ非対称性をもって星が爆発するかによってその大きさが変わってくる (事実球対称な爆発では重力波は出ない。)。しかし、超新星爆発の非球対称性についてはまだよく調べられておらず、従って重力波の波形を予想することも困難な状況にある。それは観測の立場からはデータ処理の際 S/N 比が悪くなってしまう事を意味する。そのため同じ h を持つ場合でもその S/N 比の関係で、超新星爆発よりは連星中性子星の合体の方が波源としては期待されているのが現状である。しかし逆に超新星爆発からの重力波を捕らえることが出来たとすれば、それから逆に超新星の様子を調べることが出来る。特に爆発のメカニズムとして core の回転の効果が考えられているが [14]、core 部分の回転に起因するような重力波がみつければ、core がどれ位の周波数で回転しているかを知ることが出来るし、またそこでの状態方程式に何らかの制限をつけられることも期待される。以下に超新星爆発と連星中性子星の合体の比較を示す [12]。覆う領域はどちらも 20 Mpc 程度である。

重力波源	周波数	h	頻度
超新星爆発	1 kHz	10^{-21}	年に数回
連星中性子星の合体	1 kHz	10^{-21}	年に一回

その他の重力波源としては以下のようなものがあるが、いずれも周波数が低く、地上で観測するのには適さない。

重力波源	周波数	h	頻度
超大質量ブラックホール形成	10^{-3}Hz	10^{-17}	年に一回
宇宙ひも	10^{-7}Hz	10^{-15}	ゆらぎ

Chapter 2

Laser 干渉計

2.1 レーザー干渉計のスキーム

重力波は free mass の間の固有距離を変化させる。その効果を測る方法として近年レーザー干渉計が注目を浴びるようになった [10]。レーザー干渉計の基本的な検出原理は次のようなものである。まず腕の部分の鏡と beam splitter をワイヤーで吊すことにより水平方向について free mass 状態を実現させておく。すると上で述べたような重力波の効果により 2 本の腕は固有距離が振動する。従ってその干渉縞をみてやることで重力波の効果が測定出来るというものである。重力波の波源として予言されているものはいくつかあるが、地上に干渉計をつくる場合、低周波のものに対しては地面振動が大きく測定が困難である。それらのものを観測することを目指すのであれば干渉計を宇宙空間に作るということが考えられ、事実そのような動きもあるが現在の主流はその設計の簡単さから地上で重力波をとらえようとするものである。高周波の重力波源としてはすでに述べたように kHz 付近で超新星爆発と連星中性子星の合体がある。仮に周波数を 1kHz とすると、干渉計の干渉縞により測定する場合、片腕の最適基線長は Michelson 干渉計の場合 75km になる。そのため単純な Michelson 干渉計を地上に作ったのではあまりに規模の大きいものになってしまい、敷地や建設費などの問題が出てくる。そこで腕の中に向かい合わせた鏡を入れ、その多重反射を利用して基線長を稼ぐ方法が現在採用されている。その多重反射のさせかたにより Delay-line 干渉計と Fabry-Perot (FP) 干渉計がある。それらの性能については一長一短があるが、世界的には FP 方式が好まれている。その干渉計の感度を limit するのは周波数帯によって異なるが低周波では地面振動、そこから高くなるにつれ熱雑音、shot noise がになっていくといわれている。境界の周波数は干渉計の設計によって変わってくる。これらの雑音を抑え、現在世界各地で干渉計の精度をあげるべくさまざまな技術革新が進められている。以下に FP cavity による重力波検出の原理を述べる。

2.2 重力の free mass に与える影響

TT-Gauge から見た重力波の影響

等価原理により一点における重力場の有無は重力場と加速度との違いを見分けられないので意味が無い。重力波の有無もそういう意味で離れた二質点の 4 元速度 vector の変化の差 (測地線の偏差) をみてやらないと分からない。重力波が通る所に 2 つの free mass があり、それらの空間座標を $(0, 0, 0), (\epsilon, 0, 0)$ の位置にあるとする (z 軸方向に波は進行)。その座標系に対して初め free mass は静止していたとする。free mass の測地線の方程式は

$$\frac{d}{d\tau} U^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu = 0 \quad (2.1)$$

であるが TT gauge で

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = -\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(h_{\beta 0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}) = 0 \quad (2.2)$$

である。従ってこの座標系に対して静止している free mass はその座標値が変化しない。物理的な量としてはその座標値ではなく二点間の固有距離である。固有距離を計算すると、

$$\Delta l \sim (1 + h_+)^{\frac{1}{2}} \epsilon \quad (2.3)$$

$$\sim (1 + \frac{1}{2}h_+) \epsilon \quad (2.4)$$

となりこれは時間と共に変化していることが分かる。同様の考察を測地線偏差の方程式を使って考えることも出来る。(see. Appendix A)

2.3 重力波のレーザー干渉計に与える効果

次にレーザー干渉計に与える効果を考えてみる。簡単のため metric が

$$dS^2 = -c^2 dt^2 + (1 + h(t))dx^2 + (1 - h(t))dy^2 + dz^2 \quad (2.5)$$

であるとし、干渉計の腕が x 軸と y 軸に平行に伸びているとする。まず簡単のため、Michelson 干渉計の場合について考える。 x 軸方向を往復する光についてはヌル測地線を進むので

$$dS^2 = -c^2 dt^2 + (1 + h(t))dx^2 = 0 \quad (2.6)$$

であり、 $h \ll 1$ なのでその 1 次までで展開すると

$$(1 - \frac{1}{2}h(t))cdt = dx \quad (2.7)$$

となる。今、鏡が原点と座標値 l のところにあるとし、座標時間 Δt_x かけて光がその間を往復するとする。この時上の式を積分すれば

$$\Delta t_x = \frac{2l}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\Delta t_x}^t h(t') dt' \quad (2.8)$$

が導かれる。 Δt_x を h の 1 次まで求めれば、

$$\Delta t_x = \frac{2l}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2l}{c}}^t h(t') dt' \quad (2.9)$$

となる (逐次近似)。ところで、先の考察から重力波が来ても、静止している質点はこの座標計では静止し続けるのでこの Δt_x は鏡にとっての固有時間に相当する。第一項は重力波がなくても存在する項であり、重力波の効果は第二項である。従って固有時間間隔の差は

$$\delta \Delta t_x = \int_{t-\frac{2l}{c}}^t \frac{1}{2} h(t') dt' \quad (2.10)$$

である。同様に y 軸方向については

$$\delta \Delta t_y = -\delta \Delta t_x \quad (2.11)$$

となる。

2.4 Fabry-Perot cavity の Response

上の結果をもとにして重力波に対する FP cavity の応答を考える (FP についての詳しい説明は次章を参照)。簡単のため空気による loss は無視する。near mirror, end mirror の透過率、反射率を次章と同様にとれば、入射光を $e^{i\Omega t}$ とすると、反射光は、

$$A_r = r_1 e^{i\Omega t} + t_1^2 (-r_2) e^{i\Omega t_1} + t_1^2 (-r_2)^2 (-r_1) e^{i\Omega t_2} + \dots \quad (2.12)$$

$$= r_1 e^{i\Omega t} + \frac{t_1^2}{-r_1} \sum_{n=1}^{\infty} (r_1 r_2)^n e^{i\Omega t_n} \quad (2.13)$$

$$= r_1 e^{i\Omega t} + \frac{t_1^2}{-r_1} e^{i\Omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (r_1 r_2)^n e^{i\Omega(-\frac{2nl}{c} - \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2nl}{c}}^t h(t') dt')} \quad (2.14)$$

$$\left(t_n = t - \frac{2nl}{c} - \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2nl}{c}}^t h(t') dt' \right) \quad (2.15)$$

となる (詳しくは次章参照)。ここで exponential の肩の第二項は小さいとして 1 次まで展開し、さらに

$$h(t) = \int d\omega h(\omega) e^{i\omega t} \quad (2.16)$$

と Fourier 変換したものを使うと上式は

$$\sim e^{i\Omega t} \left[r_1 - \frac{t_1^2 r_2 e^{-\frac{2i\Omega l}{c}}}{1 - r_1 r_2 e^{-\frac{2i\Omega l}{c}}} + \frac{i\Omega}{2} \int d\omega \frac{h(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} \left\{ \frac{t_1^2 r_2 e^{-\frac{2i\Omega l}{c}}}{1 - r_1 r_2 e^{-\frac{2i\Omega l}{c}}} - \frac{t_1^2 r_2 e^{-\frac{2i(\Omega+\omega)l}{c}}}{1 - r_1 r_2 e^{-\frac{2i(\Omega+\omega)l}{c}}} \right\} \right] \quad (2.17)$$

となる。今 cavity が共振条件を満たす時 ($e^{-\frac{2i\Omega l}{c}} = 1$)、上式は

$$= e^{i\Omega t} \left(\frac{r_1 - (r_1^2 + t_1^2)r_2}{1 - r_1 r_2} \right) \left[1 + \frac{i\Omega}{2} \frac{t_1^2}{r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2} \int d\omega \frac{h(\omega)}{i\omega} e^{i\omega t} \left\{ \frac{r_2(1 - e^{-\frac{2i\omega l}{c}})}{(1 - r_1 r_2 e^{-\frac{2i\omega l}{c}})} \right\} \right] \quad (2.18)$$

$$= e^{i\Omega t} \left(\frac{r_1 - (r_1^2 + t_1^2)r_2}{1 - r_1 r_2} \right) [1 - i\Delta\Phi_{GR}] \quad (2.19)$$

$$\Delta\Phi_{GR} = \int h(\omega) e^{i\omega t} H_{FP}(\omega) d\omega \quad (2.20)$$

$$H_{FP} = \frac{t_1^2 r_2}{(t_1^2 + r_1^2)r_2 - r_1} \frac{\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{\omega l}{c}\right) e^{-\frac{i\omega l}{c}} \frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{-\frac{2i\omega l}{c}}} \quad (2.21)$$

と書ける。 H_{FP} を FP cavity の応答関数と言う。これを x 軸に沿った腕と考え、y 軸に沿った腕の光との干渉光は BS における透過率、反射率をそれぞれ t_s, r_s とし、2つの腕は全く対称であるとすれば、

$$I = \left[t_s r_s e^{i\Omega t} \left(\frac{r_1 - (r_1^2 + t_1^2)r_2}{1 - r_1 r_2} \right) [1 - i\Delta\Phi_{GR}] - t_s r_s e^{i\Omega t} \left(\frac{r_1 - (r_1^2 + t_1^2)r_2}{1 - r_1 r_2} \right) [1 + i\Delta\Phi_{GR}] \right]^2 \quad (2.22)$$

$$= \left[-2i \left(\frac{r_1 - (r_1^2 + t_1^2)r_2}{1 - r_1 r_2} \right) \Delta\Phi_{GR} e^{i\Omega t} \right]^2 (t_s r_s)^2 \quad (2.23)$$

$$= 4 \left(\frac{r_1 - (r_1^2 + t_1^2)r_2}{1 - r_1 r_2} \right)^2 (\Delta\Phi_{GR})^2 (t_s r_s)^2 \quad (2.24)$$

重力波の周波数に対して干渉光の周波数は2倍になっていることに注意。また、干渉計がこのように全く対称に作られていれば、レーザーの周波数雑音は cancel されることが特徴である。周波数雑音による位相変化は重力波によるそれとは違って同相にかかるからである。以上が Fabry-Perot 型レーザー干渉計の原理であるが、それと並んで重力波検出器として考えられているものに共振型重力波検出器がある。この原理は free mass ではなく、弾性体に与える重力波の効果を考えると導かれるものである。(see Appendix A)

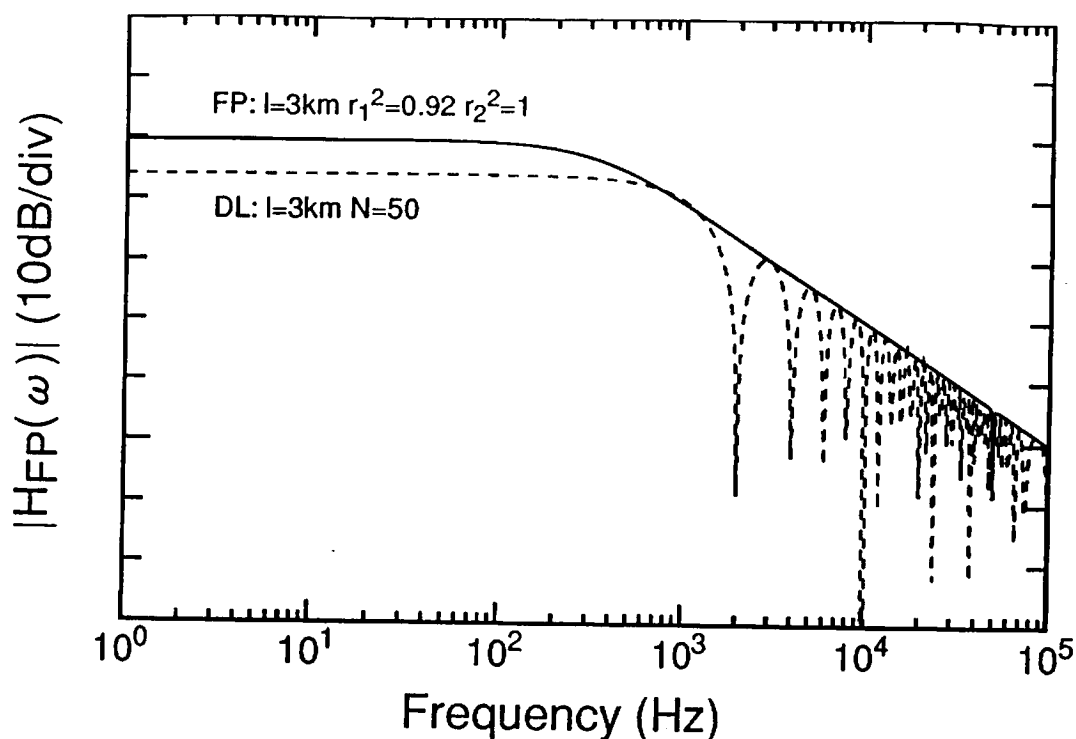


図 2.1: FP cavity の応答関数

2.5 干渉計の雑音

上で干渉計の基本的な原理を説明した。ここでもし雑音が無ければ重力波がすぐ受かるのだが現実にはいろいろな雑音が干渉計の感度を limit している [13]。これら limit しているものを周波数の低い順に示すと

- 1 地面振動
- 2 shot noise
- 2 熱雑音

となる。まず地面振動について説明する。地上の地面振動のスペクトルはおおよそ次のように書ける。

$$\delta l \sim \frac{10^{-7}}{f^2} \quad [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (2.25)$$

これから低い周波数で地面は大きく振動していることが分かる。干渉計を設計するにあたっては振り子で各要素を吊すのであるが、これによりとりあえず高周波成分は防振することが出来る。その上で周波数変調法などを使った feed back 系を用意し、低周波数をも

もちろん、高周波まで出来るだけ外乱を押えるようにする。次に shot noise であるが、これは干渉光を photo detector で受ける場合、その光の強度によって生じる雑音である。この雑音の大きさは次のような式に従う。

$$i_{\text{shot}} = \sqrt{2eI_D} \quad [\text{A}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (2.26)$$

従って干渉光を受けるところは dark fringe にしておくことが望ましい。さらに dark fringe に設定したとして、このときの干渉光の位相雑音として shot noise は

$$\delta\phi_{\text{shot}} \sim \sqrt{\frac{e}{2I_0}} \quad (2.27)$$

となる。従ってこの雑音を押えるにはレーザーの出力を出来るだけ大きくすることが望ましい。そのため単一 mode で kW クラスの高出力レーザーの開発や、Recycling 技術の導入を目指すなどの研究が行なわれている。最後に熱雑音であるが、これは熱によって鏡などの各要素が熱振動を起こしてしまうことに起因する雑音である。特に cavity を構成する鏡ではそこでレーザーが多重反射を行なうのでそこでの雑音が特に効く。この雑音を低減するためには

- 1 温度を下げる。
- 2 Q 値をあげる。

ということがあげられる。しかし 1 の場合は実用的な km クラスの干渉計を常時冷やしておくことは困難であるし、費用もかかる。それに対して現在のバースト的な波源を target とする重力波天文学はその性格上常時観測しておくことが要求される (事実 1987A を我々は捕えそこなった!)。そこで鏡の Q 値をあげる努力が現在行なわれている。また、kW クラスのレーザーを通す訳なので、鏡の loss が大きいとそこでの発熱が大きくなってしまふ。したがって低 loss の鏡を作ることも熱雑音を押えるのには重要なことである。その他の noise としてはレーザーの周波数雑音や強度雑音があり、特に周波数雑音は高周波で効いてくる。これに対し、レーザー光をまず FP-cavity に入射させる Mode-Cleaner 法や直接干渉により周波数雑音を cancel させる (Common Mode Rejection) ことで、周波数雑音を落している。

2.6 Feed back は重力波の効果を消す？

干渉計の雑音をなるべく小さく抑えようという努力の一つに負の feed back をかけるという手法がある (詳しくは see Appendix A)。Appendix A で述べられているように feed

back 系は外乱を抑える効果がある。ところで重力波は干渉計から見て外乱である。ということとは重力波の効果も抑えてしまうのであろうか？という疑問が生じる。それに対する回答は次のようなものである。まず直観的な説明から始める。干渉計の制御を簡単のため片腕の反射光の error signal から (周波数変調法をもちいてあるとする。) レーザーに返すことにより、周波数を変化させて lock するように設計してあるとする (もう一方の腕については低い周波数での feed back を腕に返すことのみで Lock をかけてあるとする。こうすれば kHz 程度の周波数をもった重力波に対しては効力をもたない)。この状態で重力波が入射してきたならば、応答があるのはレーザーに返す feed back 系のみである。するとその腕に関しては重力波の効果を打ち消すような方向に feed back がかかり、共振状態を保とうとする。しかし他方の腕からみると重力波は逆相にかかっているので、その feed back は共振状態からはずそうとする方向にかかることになる。従ってそれらの干渉光としては全く重力波の効果を損ねることにはない。kHz 付近でのその他の noise としては周波数雑音が主にあるが、これは feed back 系によって効果を小さくすることが出来る。従って S/N 比としては大きくなり、十分 noise を小さくすることが出来れば重力波をとらえることが可能である。もう少し正確に式で考えてみることにする。スキームとしては両腕に逆相の周波数変調をかけ、直接干渉光の復調信号で重力波をみるというものにする。逆相にかけるのは干渉計の腕が対称になっている時、周波数雑音は cancel されてしまうからである (周波数変調は一種の周波数雑音である)。両腕は同じ共振周波数を持つようにしてあるとする。今、共振状態から周波数がわずかにずれているとする。また簡単のため符合を除いて beam splitter の透過率、反射率をともに 1 として考える (こうしても結果は定数倍しか変わらない)。この時両腕からの反射光は

$$E_{r1}(t) = e^{i\Omega t} \left[a(\Omega_0) + \frac{\partial a(\Omega)}{\partial \Omega} \Delta\omega - \frac{m}{2} (e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t}) \right] \quad (2.28)$$

$$E_{r2}(t) = e^{i\Omega t} e^{i\theta} \left[a'(\Omega_0) + \frac{\partial a'(\Omega)}{\partial \Omega} \Delta\omega + \frac{m}{2} (e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t}) \right] \quad (2.29)$$

ここで Ω_0 は共振周波数、 $\Delta\omega$ はレーザーの周波数の共振周波数からのずれ、 $e^{i\theta}$ 両腕の対称からのずれ、微分は Ω_0 での値を意味している。この時干渉光は

$$I = |E_{r1} - E_{r2}|^2 \quad (2.30)$$

$$= \left| (1 + e^{i\theta}) e^{i\Omega t} \left(-\frac{m}{2} \right) (e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t}) + e^{i\Omega t} \left(\frac{\partial a(\Omega)}{\partial \omega} \Delta\omega - e^{i\theta} \frac{\partial a'(\Omega)}{\partial \omega} \Delta\omega \right) + e^{i\Omega t} \left(a(\Omega_0) - e^{i\theta} a'(\Omega_0) \right) \right|^2 \quad (2.31)$$

と書ける。このうち $e^{\pm i\omega_m t}$ 成分だけ取り出す。

$$\frac{\partial a(\Omega)}{\partial \omega} = i\gamma_1, \frac{\partial a'(\omega)}{\partial \omega} = \gamma_2 \quad (\gamma_1, \gamma_2 < 0) \quad (2.32)$$

と置くと、

$$I_\omega = \left[(1 + e^{i\theta}) \left(-\frac{m}{2} \right) \{ e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t} \} \{ -i\gamma_1 \Delta\omega - e^{-i\theta} (-i\gamma_2) \Delta\omega + a(\Omega_0) - e^{-i\theta} a'(\Omega_0) \} \right. \\ \left. + (1 + e^{-i\theta}) \left(-\frac{m}{2} \right) \{ e^{-i\omega_m t} - e^{i\omega_m t} \} \{ i\gamma_1 \Delta\omega - e^{i\theta} (i\gamma_2) \Delta\omega + a(\Omega_0) - e^{i\theta} a'(\Omega_0) \} \right] \quad (2.33)$$

$$= 2Re \left[(1 + e^{i\theta}) \left(-\frac{m}{2} \right) \{ e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t} \} (-i\gamma_1 \Delta\omega - e^{-i\theta} (-i\gamma_2) \Delta\omega) \right] \\ + a(\Omega_0) \left(-\frac{m}{2} \right) (e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t}) (1 + e^{i\theta} - 1 - e^{-i\theta}) \\ - a'(\Omega_0) \left(-\frac{m}{2} \right) (e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t}) (1 + e^{-i\theta} - 1 - e^{i\theta}) \quad (2.34)$$

$$= 2m \sin \omega_m t \sin \theta \left(a(\Omega_0) + a'(\Omega_0) \right) + m \Delta\omega (2 \sin \omega_m t) (\gamma_2 - \gamma_1) (1 + \cos \theta) \quad (2.35)$$

以上が周波数のずれに対する干渉光の response である。それに対して重力波の場合は片腕が伸びている時逆の腕は縮んでいるので (そのように重力波がきたとする。)、共振からのずれは片方が ΔL の時逆の腕は $-\Delta L$ である。さらにこのずれを周波数に起因するものだと考えると、

$$\Delta\omega = \frac{\Omega}{L} \Delta L \quad (2.36)$$

と解釈できる。この解釈に基づいて干渉光を計算すると上式と同じような計算から

$$I_\omega = 2m \sin \omega_m t \sin \theta \left(a(\Omega_0) + a'(\Omega_0) \right) + m (1 + \cos \theta) (2i \sin \omega_m t) \frac{\Omega}{L} \Delta L (i\gamma_1 + i\gamma_2) \quad (2.37)$$

となる。さて、ここで feed back をかける事を考える。まず周波数のずれの場合は open-loop 伝達関数を GH とすると、

$$I_\omega = 2m \sin \omega_m t \sin \theta \left(a(\Omega_0) + a'(\Omega_0) \right) + m \frac{\Delta\omega}{1 + GH} (2 \sin \omega_m t) (\gamma_2 - \gamma_1) (1 + \cos \theta) \quad (2.38)$$

となる。一方重力波の場合、一方の揺れを

$$\Delta L' = \frac{1}{1 + GH} \Delta L \quad (2.39)$$

となるよう Feed back をかけた場合、他方の腕にとってはこれは正の feed back になっており、こちらの揺れは

$$\Delta L'' = L + \frac{1}{1+GH}L = \frac{1+2GH}{1+GH}\Delta L \quad (2.40)$$

になっている。従って feed back をかけた時、

$$\begin{aligned} I_\omega = & 2m \sin \omega_m t \sin \theta \left(a(\Omega_0) + a'(\Omega_0) \right) \\ & + m(1 + \cos \theta)(2i \sin \omega_m t) \frac{1}{1+GH} \frac{\Omega}{L} \Delta L (i\gamma_1 + i\gamma_2(1+2GH)) \end{aligned} \quad (2.41)$$

になる。loss が小さく、同じ性質の鏡を用いた場合、透過光の第一項はほとんどゼロになるので比較するのは第二項同士で良い。 GH をどんどん大きくしていった場合、周波数のずれはどんどんなくなり、重力波の方は(γ_1 と γ_2 が同じ場合)変わらない。従って S/N 比はどんどん良くなっていくことが分かる。

2.7 世界の重力波検出計画

現在世界で幾つかの重力波検出のための project が進行している。その主なものはアメリカの LIGO 計画とイタリア、フランスの VIRGO 計画である。共に km クラスの干渉計を用いて観測を行なうもので観測開始時期としては今世紀末とされている。重力波の観測器は世界に一つあれば良いというものでなく、最低3つで波源の方向がわかり、4つで偏波が分かる。それ以上作れば統計処理によって観測量の精度が上がる。以下に現在進行中の project の主なものを示す。

国	計画名	基線長	方式	観測開始予定時期
米 (caltech, MIT)	LIGO	4 km	FP	1998 年
伊、仏	VIRGO	3 km	FP	1998 年
豪	AIGO	3 km	FP	?
独、英	GEO	600m	Dual Recycling	数年以内
日本	TAMA	300m	FP	1998 年

以下に3つの図を示す。1つめは重力波源と世界の重力波検出計画の感度 ([8] より転載)、2つめは干渉計の概念図、3つめは東京大学坪野研究室にある 3m Prototype Fabry-Perot 型重力波検出器の setting である。

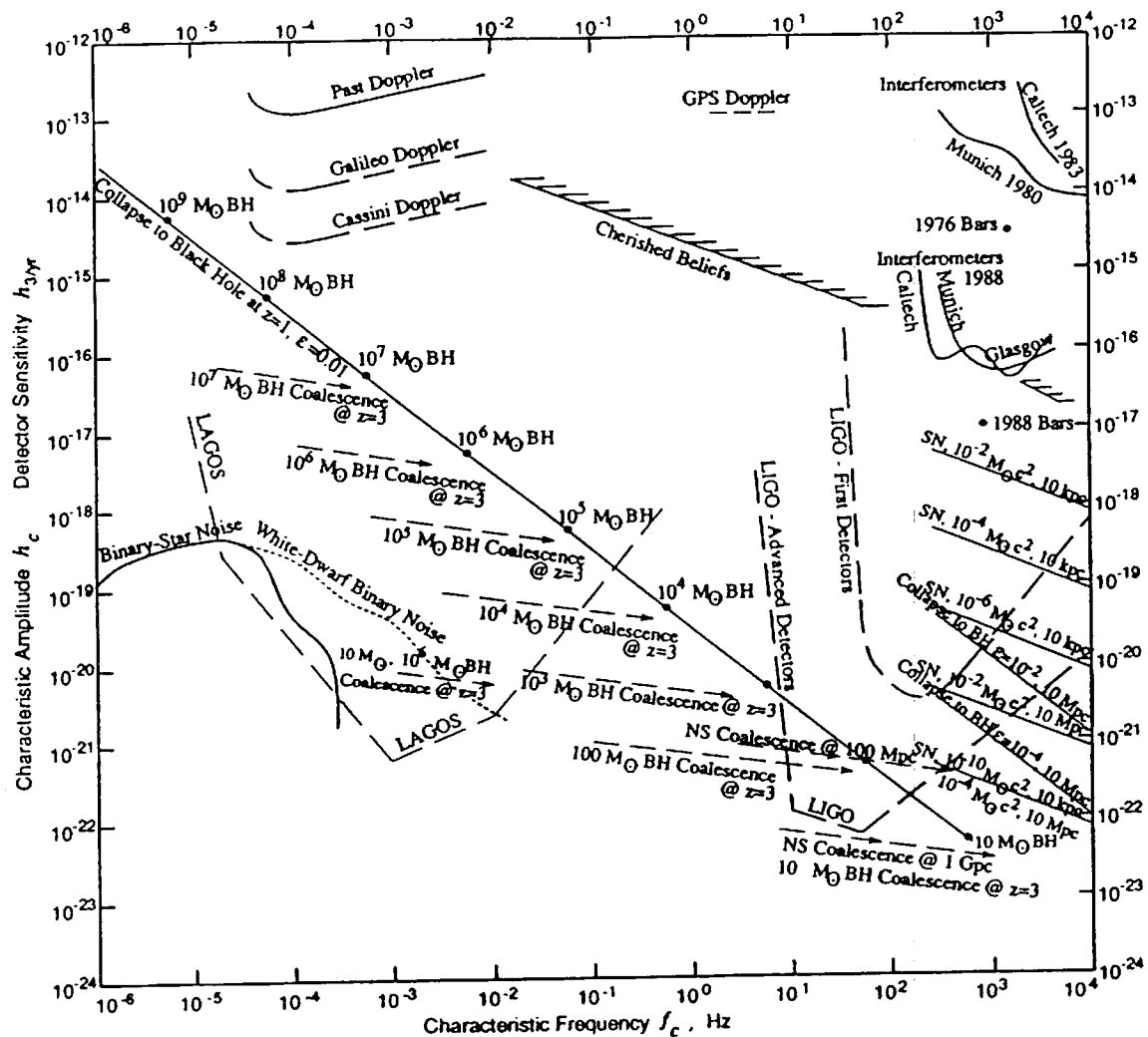


図 2.2: 重力波源と世界の重力波検出計画

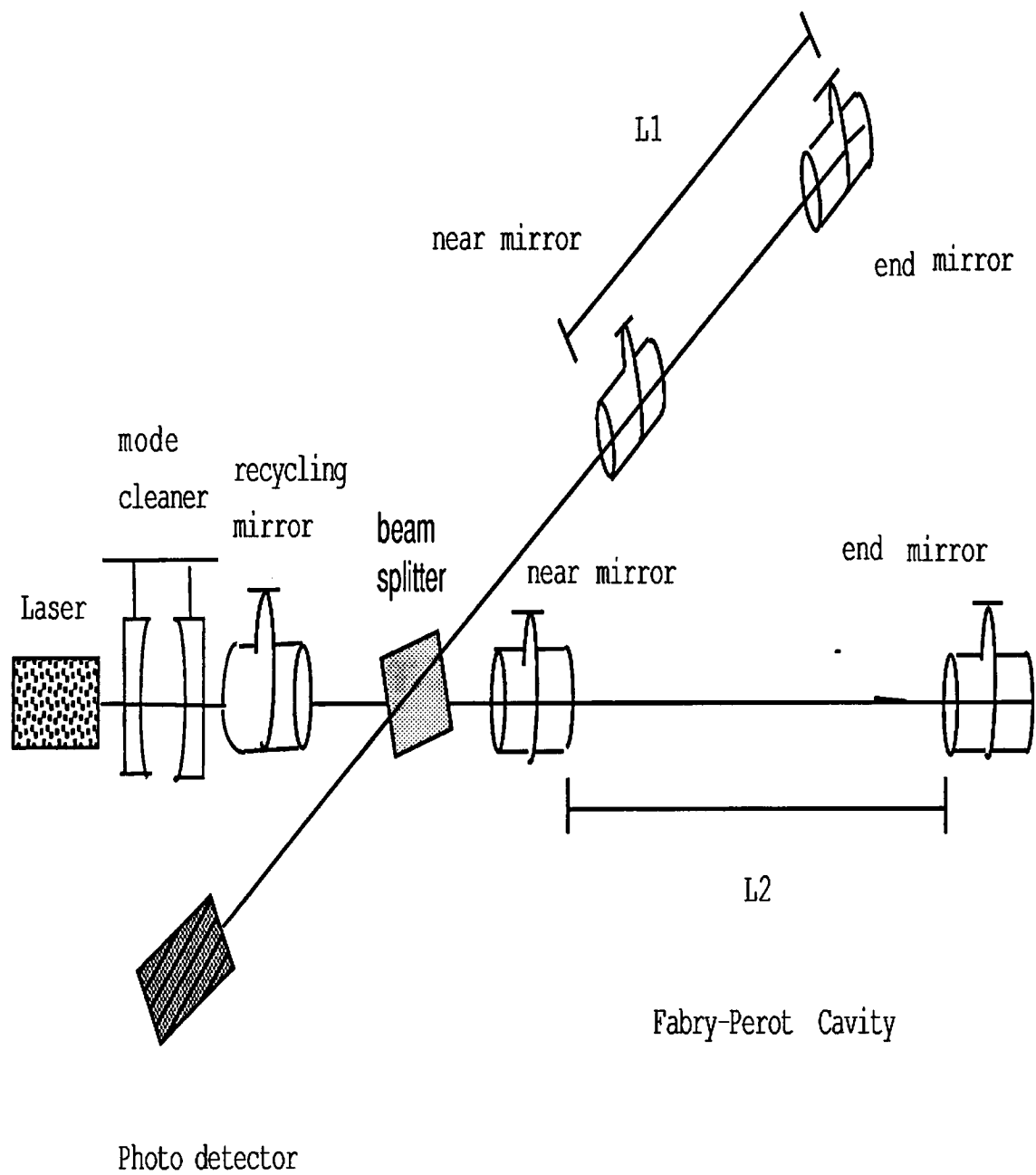


図 2.3: 干渉計の概念図

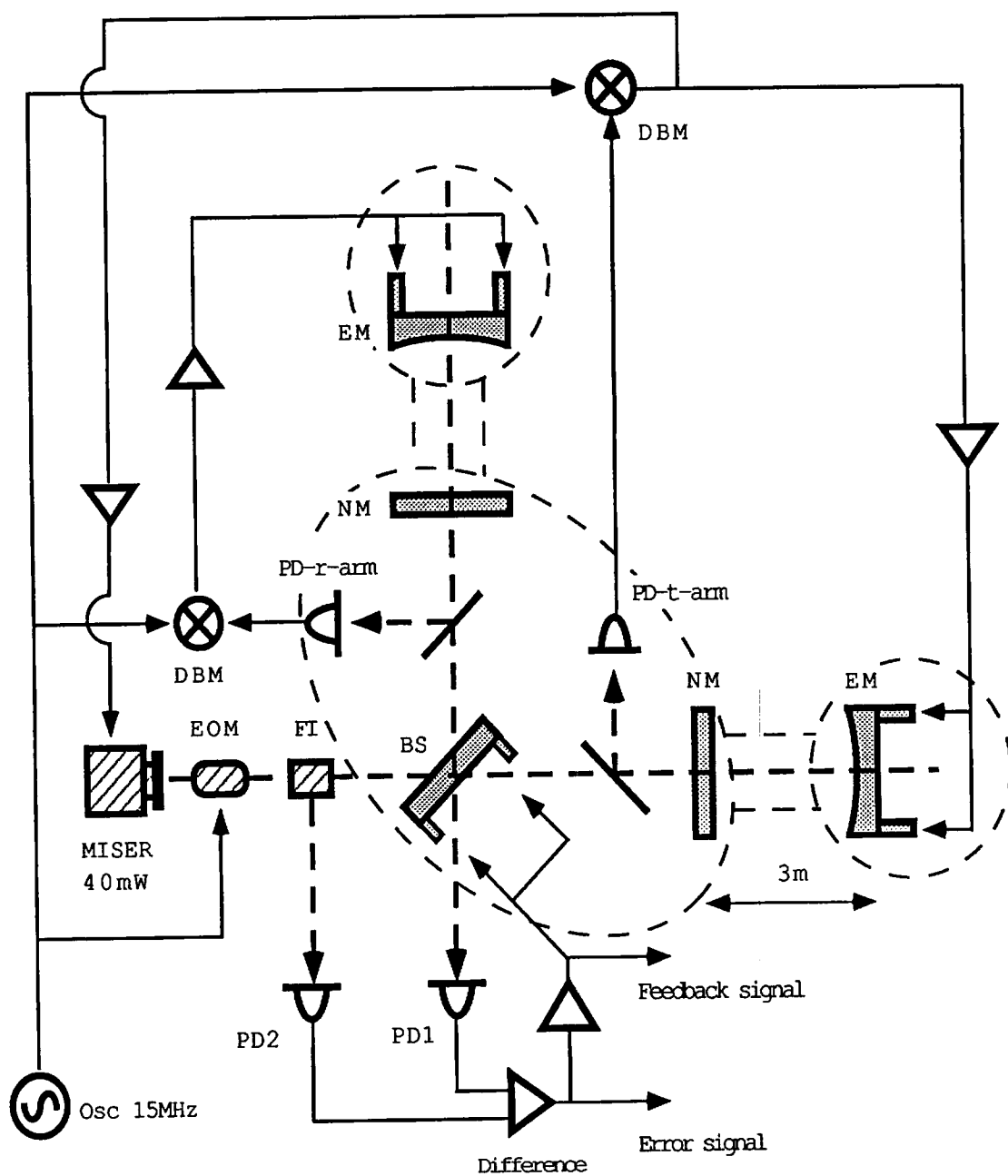


図 2.4: 東大理の 3m Prototype FP 型干渉計の setting

Chapter 3

鏡の透過率、反射率

3.1 重力波観測における鏡に対する要求

重力波観測においてはS/N比を良くするために(実効的に)kWクラスの出力をもつレーザーが必要となる。従って干渉計(特にFP内部)では高出力レーザーが行き交うことになる。従って干渉計の component となる鏡が大きな loss を持っているとそこで発熱を起こし、鏡が変形してしまう恐れがある。鏡の変形は mode matching の低下を意味し、error signal における S/N 比の低下を引き起こし、干渉計の感度が悪くなってしまう。またレーザーが単一モードで kW level の物が実現出来ない場合 Recycling 技術が要求されることになるが、そこでも増幅率が $1/\text{loss}$ で表されるため、ここでも鏡の loss の小ささが要求されることになる。Recycling における loss は FP の透過光も含めて考えるので、共振器の end mirror は高反射率であることが要求される (99.99%程度)。また干渉計の基線長は数 km にわたるので、ビーム径は cm 程度になり、その程度にわたって鏡の反射率が一様であることが最低限要求される。このように鏡に対する要求は低損失、高反射率、高一様性と非常に高く、重力波観測の難しさの一端をここでも伺える。

以上の理由から重力波検出のためには鏡の特性を正しく評価しておくことが重要であるが、1枚の鏡を精度よく測定することは難しい。鏡の反射率を精度よく測る方法の一つとして2枚の鏡で Fabry-Perot cavity を組み、その特性を使って鏡の特性を調べるというものがある。この場合、2枚の鏡は同じ特性をもつとして解析される。以下で Fabry-Perot cavity についての説明を行なう。

3.2 Fabry-Perot cavity による反射率測定の実理

3.2.1 Fabry-Perot cavity の透過率、反射率

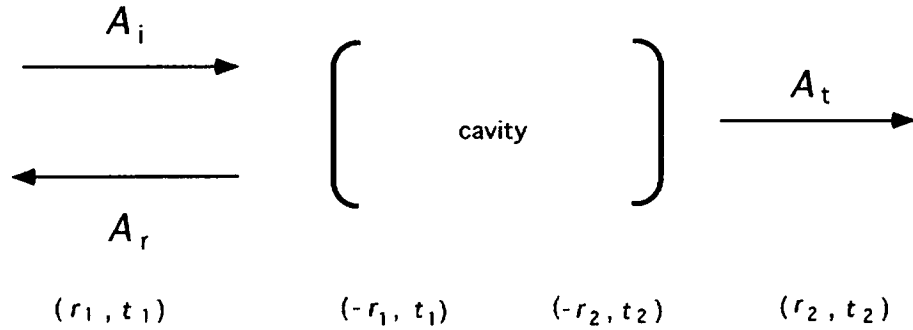


図 3.1: cavity の透過、反射

Fabry-Perot cavity とは 2 枚の鏡を向かい合わせ、その間で光を多重反射させるものである。この時光軸は 1 本であり、往復する光は干渉しあっている。式にして表すと以下のようになる。

2 枚の鏡の振幅透過率を t_1, t_2 とし、振幅反射率を r_1, r_2 とする。cavity で囲まれている空気層の片道分の振幅透過率を t とする。これが 1 からずれる時は、それだけ空気による散乱・吸収が効果として現れていると考えられる。この時入射光の振幅が

$$A_i(t) = A_i e^{i\omega t} \quad (3.1)$$

で表される時、cavity による反射波は振幅で表すと

$$A_r = r_1 A_i + (t_1)^2 t^2 (-r_2) e^{-2i\delta} A_i + (t_1)^2 t^4 (-r_2)^2 (-r_1) e^{-4i\delta} A_i + \dots \quad (3.2)$$

$$= r_1 A_i + \sum_{i=1}^{\infty} A_i (t_1)^2 t^2 (-r_2) e^{-2i\delta} (t^2 r_1 r_2 e^{-2i\delta})^n \quad (3.3)$$

$$= r_1 A_i + A_i (t_1)^2 t^2 (-r_2) e^{-2i\delta} \frac{1}{1 - t^2 r_1 r_2 e^{-2i\delta}} \quad (3.4)$$

$$= \frac{r_1 - t^2 r_2 \{1 - (p_1)^2\} e^{-2i\delta}}{1 - t^2 r_1 r_2 e^{-2i\delta}} A_i \quad (3.5)$$

と書ける。ここで l を cavity 長とすると、 δ は

$$\delta = \frac{\omega l}{c} \quad (3.6)$$

で p^2 は鏡の loss を表す。同様に透過光は振幅で

$$A_t = t_1 t_2 t A_i e^{-i\delta} \frac{1}{1 - r_1 r_2 t^2 e^{-2i\delta}} \quad (3.7)$$

と書ける。

従って強度で表せば反射光は

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{A_r}{A_i} \right)^2 = \frac{F^2 \frac{\{r_1 - r_2 t^2 (1 - p_1^2)\}^2}{4 r_1 r_2 t^2} + F^2 (1 - p_1^2) \sin^2\left(\frac{\omega l}{c}\right)}{1 + F^2 \sin^2\left(\frac{\omega l}{c}\right)} \quad (3.8)$$

透過光は

$$\frac{I_t}{I_i} = \left(\frac{A_t}{A_i} \right)^2 = \left(\frac{t_1 t_2 t}{1 - r_1' r_2'} \right)^2 \frac{1}{1 + F'^2 \sin^2\left(\frac{\omega l}{c}\right)} \quad (3.9)$$

で表される。但し $F = \frac{2}{\pi} \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2 t^2}}{1 - r_1 r_2 t^2}$, $F' = \frac{2}{\pi} \mathcal{F}'$, $\mathcal{F}' = \frac{\pi \sqrt{r_1' r_2'}}{1 - r_1' r_2'}$, $r_1' = r_1 t$, $r_2' = r_2 t$ である。 $\mathcal{F}$ は finesse と呼ばれる量で式からわかる様に反射率が高くなるにつれてその値も大きくなる。

特に上の式の DC 成分を書くと、

$$\left(\frac{I_r}{I_i} \right)_{\text{DC}} = \frac{\{r_1 - r_2 t^2 (1 - p_1^2)\}^2}{(1 - r_1 r_2 t^2)^2} \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{I_t}{I_i} \right)_{\text{DC}} = \left(\frac{t_1 t_2 t}{1 - r_1' r_2'} \right)^2 \quad (3.11)$$

となる。

3.2.2 強度変調

上の結果からもし2枚の鏡の特性が全く同じだと仮定すればその透過率、反射率は cavity の透過率、反射率の DC 的な値から求めることは可能である。しかし値をオシロスコープで読みとることや外部からの光が photo detector へ入射することなどの影響を考えると有効数字としてはあまり良い精度は期待できない。そこで入射光に強度変調をかけて、伝達関数を調べてやると良い。強度変調による測定とは、まずレーザーに、ある一定の周波数で強度が振動するようにしておき、そのレーザーを cavity に入射させ、透過光の強

度変調成分を検波してその入射光に対する強度比と位相の変化を求めることである。そして強度変調の周波数を sweep させてやることで、その周波数依存性を見てやる事が出来る。その周波数依存性は以下に示すように鏡の反射率、透過率に関係しているので、そこから反射率を求める事が出来る。

強度変調された入射光は、

$$\begin{aligned}\{A_0 + A_1 \sin(\omega t + \psi)\} e^{i(\Omega t + \phi)} &= \left\{ A_0 + A_1 (e^{i(\omega t + \psi)} - e^{-i(\omega t + \psi)}) \frac{1}{2i} \right\} e^{i(\Omega t + \phi)} \\ &= A_0 e^{i(\Omega t + \phi)} + \frac{A_1}{2} e^{i\{(\Omega + \omega)t + \psi + \phi - \frac{\pi}{2}\}} + \frac{A_1}{2} e^{i\{(\Omega - \omega)t + \phi - \psi + \frac{\pi}{2}\}}\end{aligned}\quad (3.12)$$

と書ける。ここで $A_0 \gg A_1$ とする。透過光についてはもともとのレーザーの周波数が cavity に対して共振しているとする ($2\frac{\Omega}{c} = 2n\pi$)、以下のように書ける。

$$\begin{aligned}A_t &= A_0 \frac{t^2}{1 - r^2} e^{i(\Omega t + \phi)} + \frac{A_1}{2} \frac{t^2 e^{-i\delta}}{1 - r^2 e^{-2i\delta}} e^{i\{(\Omega + \omega)t + \psi + \phi - \frac{\pi}{2}\}} \\ &\quad + \frac{A_1}{2} \frac{t^2 e^{i\delta}}{1 - r^2 e^{2i\delta}} e^{i\{(\Omega - \omega)t + \phi - \psi + \frac{\pi}{2}\}}\end{aligned}\quad (3.13)$$

従って透過光強度は

$$\begin{aligned}I_t &= A_0^2 \left(\frac{t^2}{1 - r^2} \right)^2 + \frac{A_1^2}{2} \frac{t^4}{1 + r^4 - 2r^2 \cos(2\delta)} \\ &\quad + A_0 A_1 \frac{t^2}{1 - r^2} \frac{t^2 e^{-i\delta}}{1 - r^2 e^{2i\delta}} e^{i(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})} + A_0 A_1 \frac{t^2}{1 - r^2} \frac{t^2 e^{i\delta}}{1 - r^2 e^{-2i\delta}} e^{-i(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})} \\ &\quad + \left(\frac{A_1}{2} \right)^2 \frac{t^4 e^{-2i\delta}}{(1 - r^2 e^{-2i\delta})^2} e^{i(2\omega t + 2\psi - \pi)} + \left(\frac{A_1}{2} \right)^2 \frac{t^4 e^{2i\delta}}{(1 - r^2 e^{2i\delta})^2} e^{-i(2\omega t + 2\psi - \pi)}\end{aligned}\quad (3.14)$$

と書ける。このうち周波数が ω の成分のものだけを取り出すと、 δ が十分小さいとして若干の近似をした後、以下の様に書ける。

$$\left\{ \frac{2A_0 A_1 t^4}{(1 - r^2)^2} \frac{\sqrt{\cos^2 \delta + \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2}}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2 \delta} \right\} \sin(\omega t + \psi + \alpha)\quad (3.15)$$

但し

$$\cos \alpha = \frac{\cos \delta}{\sqrt{\cos^2 \delta + \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 \sin^2 \delta}}\quad (3.16)$$

$$\sin \alpha = -\frac{\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right) \sin \delta}{\cos^2 \delta + \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 \sin^2 \delta}\quad (3.17)$$

である。それに対して入射光は

$$I_i = A_0^2 + A_1^2 \sin^2(\omega t + \psi) + 2A_0A_1 \sin(\omega t + \psi) \quad (3.18)$$

である。従って比 I_t/I_i を考えると

α が phase の遅れ、 $\frac{t^4}{(1-r^2)^2} \frac{\sqrt{\cos^2 \delta + (\frac{1+r^2}{1-r^2})^2 \sin^2 \delta}}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2 \delta}$ が絶対値の比である。この比を実測してやる事で鏡の透過率、反射率を見積もることが出来る。但し2枚の鏡は全く同じ特性を持っていると仮定しており、さらに cavity の空気によるロスを考慮すると $r^2 = r_1 r_2 t_0^2, t^2 = t_1 t_2 t_0$ を意味する (ここで t_0 は cavity 内の空気層による片道分の振幅透過率)。

3.2.3 cavity の制御系への要求

制御の基本的姿勢

以上で FP cavity によって鏡の反射率を測定する概略を示したが、鏡の反射率を測定する上では cavity を共振状態に硬く保つことが重要である。特に DC 的に cavity がずれていると急激に干渉の打ち消し合いが激しくなり、測定値の意味がなくなってしまう。従って最も注意しなければならないのは DC 的な制御である。その上でできるだけ広く帯域をとり、高周波成分まで制御されていることが望ましい。特に今回使用した鏡は高反射率なので共振幅もせまく (cavity が 30 cm で $r^2 = R = 0.9999$ とすると共振幅は 160kHz 位。)、feed back をきちんとかけることが重要である。feed back 系を使って cavity を共振状態に保つことを”ロックをかける”という。制御で重要な事は

- 1 もともとの振動が小さいこと
- 2 Feed back 系が強く働くこと

であるが、今回の制御としては cavity を振り子で吊り、低周波で強い feed back を返すというスキームをとった。振り子は高周波成分の振動を遮断する効果があり (see Appendix A)、それでまず cavity の振動は主に低周波成分に限られる。そこで低周波成分の振動を抑えるために負の feed back をかける訳である。この振り子で吊るすという手法は重力波検出器でも有力な防振法として考えられているが (重力波検出の場合 free mass 状態を達成する、という目的もあるのだが)、数十 Hz 付近ではすでに cavity の揺れよりもむしろ

レーザーの周波数雑音が dominant であり、それ以上の帯域での feed back はレーザーに、それ以下のものは cavity に返されるのが普通である。しかし今回の実験では noise の起源がどこにあるのかということはあまり問題ではなく、cavity を共振状態に保てばそれでいいので、feed back はすべて cavity に取り付けられた PZT に返されている。(filter に関しては see Appendix B)

Pound-Drever 法

feed back を行なうためには error signal が必要であるが、それは Pound-Drever 法という手法を用いて得ることが出来る [11]。それを以下に示すことにする。Pound-Drever 法というのはレーザーに周波数変調をかけ、それを cavity に入射させた後復調することで error signal を得るものである。具体的に式で示すと、まず周波数変調を受けた光は振幅で

$$A_0 e^{i(\Omega t + m \sin \omega_m t)} \sim A_0 e^{i\Omega t} \left\{ 1 + \frac{m}{2} (e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t}) \right\} \quad (3.19)$$

$$= A_0 \left\{ e^{i\Omega t} + \frac{m}{2} e^{i(\Omega + \omega_m)t} - \frac{m}{2} e^{i(\Omega - \omega_m)t} \right\} \quad (3.20)$$

と表せる。 m を変調度といい、一般に小さい。 ω_m は変調角周波数で今回の実験では 10MHz にとってある (Radio Frequency)。今 carrier の周波数は (レーザーの主 mode を carrier という) cavity に対してほぼ共振しているとする carrier に対する反射係数は、

$$\left\{ r_1 - \frac{t_1^2 r_2 e^{-2i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\delta}} \right\} \sim \left(r_1 - \frac{r_2 T}{1 - R} \right) + 2i \frac{r_2 T}{(1 - R)^2} \delta \quad (3.21)$$

$$\equiv a + ib\delta \quad (3.22)$$

($R = r_1 r_2, T = t_1 t_2, \delta = \frac{\delta(\Omega l)}{c}$)、side band に対する反射係数は 1 と考えられるので (carrier に対して主 mode でないものを side band という) 全体としては

$$A_0 \left\{ (a + ib\delta) e^{i\Omega t} + \frac{m}{2} e^{i(\Omega + \omega_m)t} - \frac{m}{2} e^{i(\Omega - \omega_m)t} \right\} \quad (3.23)$$

と書け、強度の ω_m 成分を計算すれば、

$$\begin{aligned} I(\omega_m) &= \frac{m}{2} I_0 (a + ib\delta l) e^{-i\omega_m t} + \text{C.C} \\ &\quad - \frac{m}{2} I_0 (a + ib\delta l) e^{i\omega_m t} + \text{C.C} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$= 2mb I_0 \delta l \sin \omega_m t \quad (3.25)$$

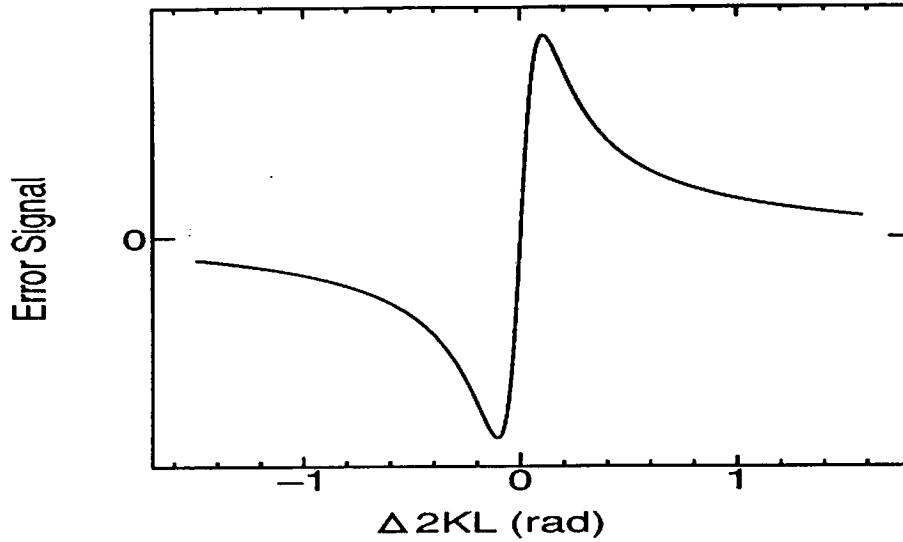


図 3.2: cavity の揺れと Error-Signal

と表せるので ($I_0 = A_0 A_0^*$)、これを復調してやれば error signal が得られる。(この量は $\Omega \delta l, \delta \omega l$ を区別していないことに注意。つまり周波数雑音なのか振動による cavity 長の変化なのか区別していない。) この信号は $\delta l, \delta \omega$ の 1 次の式なので feed back 信号として利用できる。そこでこの信号を適当な filter を通して feed back してやる訳である。よく制御されている場合はこのように線形に制御されているが、揺れの幅が大きいと線形領域だけでは制御しきれない。近似をしないで ω_m の角周波数の成分のものを求めてやると、

$$I_m = 2m I_0 r_2 T \frac{\sin(2\delta)}{1 + R^2 - 2R \cos(2\delta)} \sin \omega_m t \quad (3.26)$$

と計算される。(もちろんこれは $|\delta| \ll 1$ の領域では (3.25) に一致する。) これを図 3.2 に示した。

3.3 測定誤差の原因について

以下では測定される鏡の反射率の有効数字を制限していると思われる factor についての考察を行なう。

3.3.1 空気の loss の影響

伝達関数を測定することから求まる鏡の反射率 (に空気層による透過率をかけたもの) の値 = a 、空気の強度透過率 $t^2 = b$ 、及び透過率測定実験から求まった鏡の強度透過率 = c の値を用いて cavity の DC 成分における反射率、透過率を算出し、実測値と比較する訳であるが、その際空気の loss を考慮した場合とそうでない場合で計算値がどのように変化していくかを考えてみる。

DC 成分における cavity の透過率、反射率の計算

loss を考慮した場合、 $(I_r/I_i)_{DC}$ は

$$\frac{(r_1 - r_2 t^2 (1 - p_1^2))^2}{(1 - r_1 r_2 t^2)^2} \quad (3.27)$$

で与えられる。今手にしているデータは $a = r^2 t^2, b = t^2, c = T$ である。従ってここから

$$r = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (3.28)$$

$$p_1^2 = 1 - \frac{a}{b} - c \quad (3.29)$$

であることが計算される。(但し $r_1 = r_2 = r, t_1 = t_2 = \sqrt{T}$ として計算をしている。) 従って計算値としては、

$$\frac{I_r}{I_i} = A_1 = \frac{a(1 - b + a + bc)^2}{b(1 - a)^2} \quad (3.30)$$

で与えられる。

これに対して loss を無視した場合、

$$\left(\frac{I_r}{I_i}\right)_{DC} = \frac{\{r_1 - r_2(1 - p_1^2)\}^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \quad (3.31)$$

で与えられ、この場合は測定値との対応が $a = r^2, c = T$ に変化する。この時計算値は、

$$\left(\frac{I_r}{I_i}\right)_{DC} = A_2 = \frac{a(a + c)^2}{(1 - a)^2} \quad (3.32)$$

となる。それらの比は $A_2/A_1 = b(a + c)^2/(1 + a - b + bc)^2$ となる。一方透過率の方は loss を考慮した場合は

$$\left(\frac{I_t}{I_i}\right)_{DC} = \left(\frac{t_1 t_2 t}{1 - r_1 r_2 t^2}\right)^2 \quad (3.33)$$

であり、これを測定値を用いて計算すると、

$$B_1 = \frac{bc^2}{(1-a)^2} \quad (3.34)$$

と書け、loss を無視した場合は

$$B_2 = \left(\frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2} \right)^2 = \frac{c^2}{(1-a)^2} \quad (3.35)$$

と求まる。この比は、 $B_2/B_1 = 1/b$ である。ここで透過率、反射率の空気の loss に対する sensitivity を考えてみる。空気による loss は非常に小さいと考えられるので、

$$b = 1 - \epsilon \quad (\epsilon \ll 1) \quad (3.36)$$

と置き、 ϵ について展開する。

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \frac{1 - \epsilon}{\left(1 - \frac{1-c}{a+c}\epsilon\right)^2} \sim (1 - \epsilon)\left(1 + \frac{1-c}{a+c}\epsilon\right)^2 \\ &\sim 1 - \frac{2-a-c}{a+c}\epsilon \end{aligned} \quad (3.37)$$

となる。透過光については

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{1 - \epsilon} \sim 1 + \epsilon \quad (3.38)$$

となる。ここで $a \sim 1, c \sim 0$ より、 $(2-a-c)/(a+c) \sim 1$ となり、係数をみると透過率、反射率のどちらも loss に対する sensitivity はほぼ同じである。空気の loss を評価するにあたって反射光を利用するならば、cavity の mode matching 率を正確に評価しておく必要がある。この事情は透過光の場合でも同じであるが、この mode matching 率の評価や photo detector による DC 成分の測定はオシロスコープを用いるので有効数字としてはあまり良いものは期待できない。したがって、この測定によって空気の loss を見積もるといよりは、他の方法で空気の loss を見積もっておいて、その値が consistent なものかどうかを評価するものとして使われるべきものである。

3.3.2 ロックの硬さの反射率への影響

cavity 内の energy と storage time、finesse の関係

伝達関数から鏡の反射率を求める時、空気の loss と並んで測定誤差の原因となるものに cavity のロックの硬さが挙げられる。それについての説明を以下に示すが、その説明をする時に必要な storage time という量をここで導入しておく。

まず cavity 内に貯められているエネルギーを計算してみる。入射光の強度を 1 として行きと帰りの光についてそれぞれ計算してその和をとると、

$$Q = l \times \left[\frac{t^2}{(1 - r^2 e^{-2i\delta})(1 - r^2 e^{2i\delta})} + \left\{ \frac{(-itre^{-2i\delta} + ir(1 - r^2 e^{-2i\delta})) \{ (itre^{2i\delta} - ir(1 - r^2 e^{2i\delta})) \}}{(1 - r^2 e^{-2i\delta})(1 - r^2 e^{2i\delta})} \right\} \right]$$

$$= \frac{t^2 + r^2 1 + r^4 - 2r^2 \cos(2\delta) + t^2 r^2 + tr^2 - 2 \cos(2\delta) + 2r^2}{1 + r^4 - 2r^2 \cos(2\delta)} \quad (3.3)$$

と書ける。ここで $r_1 = r_2 = r$, $t_1 = t_2 = t$ とし、空気の loss は無視出来るとした。更に cavity が共振状態にあるとすると $\delta = 0$ なので、そのときの値を計算すると $Q \sim l \times \frac{2}{1-r^2} \sim l \times \frac{\pi}{\pi}$ となる。($r \sim 1$ とし、鏡における loss は無視した。) これと cavity の中に photon が存在する平均的な時間 (storage time, τ_s) との関係は

$$Q = \tau_s \times c \times 1 \quad (3.40)$$

である。従って上式より

$$\tau_s = \frac{l}{c} \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi} \right) \quad (3.41)$$

と言える。(一般にはこれを逆に storage time の定義とする。この物理的な意味はレーザーを切った時、cavity の透過光強度が $1/e$ となる時間である。storage time だけの時間が経っても透過光が 0 にならないのは cavity 中にある光の強度が減衰すればそれだけ漏れ出る power も減衰するためである。) これで鏡の反射率と storage time の関係を導くことが出来た。更に cavity が共振状態から若干ずれた時の storage time がどうなるかを見積もってみる。 δ が小さいので、 $\cos \delta \sim 1 - \frac{1}{2}\delta^2$ と近似する。更にここでも鏡の loss を無視して、 Q の主要項と δ による補正項の最低次をとり出すと

$$Q = r^2 l + l \frac{t^2 + t^2 r^2 + tr^2 \{ 2r^2 + 2[\frac{1}{2}\delta^2 - 1] \}}{1 + r^4 + 2r^2[\frac{1}{2}\delta^2 - 1]} \quad (3.42)$$

$$\sim r^2 l + l \frac{(1 - r^2)(1 + r^2) + r^2 \sqrt{1 - r^2}(2r^2 - 2 + \delta^2)}{(1 - r^2)^2 + r^2 \delta^2} \quad (3.43)$$

$$\sim l \frac{\frac{1+r^2}{1-r^2} + \frac{r^2 \delta^2}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}}{1 + \left(\frac{r}{1-r^2} \delta \right)^2} \quad (3.44)$$

$$\sim l \frac{1+r^2}{1-r^2} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{1-r^2} \delta \right)^2 \right\} \quad (3.45)$$

$r \sim 1$ として考えているので、共振から僅かでもずれると storage time は急激に短くなることを示している。その短さはレーザーが (透過でなく) 反射されてしまうことを意味する。

要求されるロックの硬さ

storage time が導入されたので cavity のロックの硬さの反射率測定に対する影響を式にして表してみる。まず、共振状態からのずれがある時、透過率は振幅で

$$a(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{t_1 t_2 e^{-i(\Delta + \Delta_1 + \Delta_2)}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i(\Delta_1 + \Delta_2)}} \quad (3.46)$$

と書ける。ここで

$$\Delta_1 = \frac{\omega l}{c}, \Delta_2 = \frac{\Omega \delta l}{c} \quad (3.47)$$

は共振状態からの DC 的なずれをそれぞれ表しており、 $\omega, \delta l$ が周波数と cavity 長のずれを意味している。 Ω, l は共振状態にあるレーザーの周波数と cavity 長を表す。 $\Delta = \frac{\Omega l}{c}$ であり、共振している時は $e^{-2i\Delta} = +1$ となっている。さて、強度変調を受けた光は振幅で

$$A_0 e^{i\Omega t} + \frac{A_1}{2i} e^{i(\Omega + \omega)} - \frac{A_1}{2i} e^{i(\Omega - \omega)} \quad (3.48)$$

と表される。今、レーザーの周波数はちょうど共振周波数にあるとし、そこからの DC 的なずれが強度変調成分に相当するとする。また cavity は共振長から δl だけずれているとする。この時透過光は

$$a(0, \Delta_2) A_0 e^{-i\Omega t} + a(\Delta_1, \Delta_2) \frac{A_1}{2i} e^{i(\Omega + \omega)} - a(-\Delta_1, \Delta_2) \frac{A_1}{2i} e^{i(\Omega - \omega)} \quad (3.49)$$

と書ける。この時の強度変調成分の伝達関数が δl によってどれだけ影響を受けるかという事を考えなければならない。直観的に考えれば、cavity が共振状態からずれば、storage time は急激に減少し、それは測定の立場からすると鏡の反射率が低くなったように見えることを意味する。何故ならそれらは

$$\tau_s = \frac{2l\mathcal{F}}{\pi C} \quad (3.50)$$

という関係で結ばれているからである。次に伝達関数への影響という見方をしてみる。位相に関しては比較的直観的解釈が簡単である。というのは storage time が短いことはすなわち有効光路長が短くなることを意味し、結果としてあまり位相遅れがなくなってしまうからである。このように位相に関しては簡単な解釈が成立するが絶対値に関しては直観的な解釈は少し難しい。というのは絶対値の cut-off が起こる理由はレーザーが往復するたびに少しずつ透過光を漏れださせるが、その重ね合わせの位相がずれるからである。しかし cavity にもともとずれがあると始めから重ね合わせの位相が合わず、結果として透過光の強度が小さくなる。しかし、伝達関数を測定する場合、その DC 的なずれが透過光の

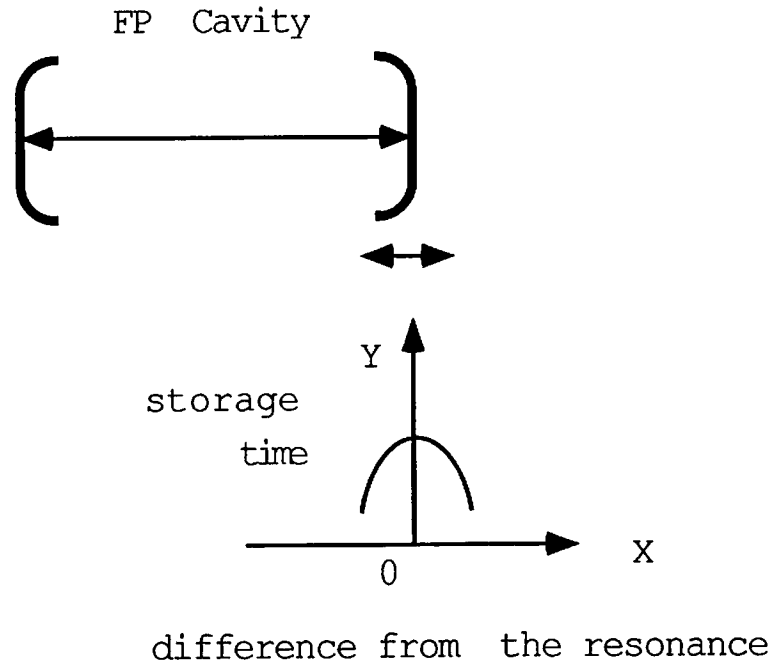


図 3.3: cavity の DC 的なずれと storage time

強度の減少を強度変調の周波数にどう依存するかは予想が立てにくい。もし強度変調の周波数に依存しない効果を持つのであれば、それは特に cavity の cut-off frequency には影響しないし、依存すれば何らかの効果を持つ。これについては以下の式による考察を待たなければならないが結論としてはより低い周波数の伝達関数を測定するときの方が DC 的なずれの効果の影響が大きく、高周波になるにつれてそのずれの効果が小さくなっていくということになる。いずれにせよ、その効果が無視できるような状態に制御をかけなければならないがそのために課される条件は後で見るように位相と絶対値では変わってくる。

定量的に考えると以下の様になる。今 Δ_1, Δ_2 が共に小さいと考え、透過係数をそれらで展開する。(実際には後で分かるが $(\frac{\pi}{\pi}) \times \Delta_1$ or Δ_2 の小ささが要求される。) これは次の場合正当化される。まず、 Δ_1 については ω が強度変調の周波数であり、cut-off frequency では $(\frac{\pi}{\pi}) \times \Delta_1 \sim 1$ である。(これが cut-off frequency のもともとの定義であった。) また Δ_2 については測定結果から $(\frac{\pi}{\pi}) \times \Delta_2 \sim 0.01$ であることが後に示される。従って強度変調の変調成分の伝達関数で、cut-off frequency 以下の部分についてはこの展開が良い補正項を与えると考えられる。しかし、cavity 長の DC 的なずれが finesse の測定において反射率が悪くなったような効果を与えるという定性的な性質は cut-off frequency 以上の伝達関

数についても言えると考えられる。さて、以上を踏まえて展開係数を求めることにする。ここで $r_1 = r_2 = r, t_1 = t_2 = t$ とし、さらに分子部分の exponential 成分は絶対値、位相共にほとんど影響しないので 1 として考える。すると、

$$\begin{aligned}
a(0,0) &= \alpha = \frac{t^2}{1-r^2} \sim t^2 \frac{\mathcal{F}}{\pi} \\
\dot{a}(0,0) &= \frac{-2it^2 r^2}{(1-r^2)^2} \sim -2i\alpha \frac{\mathcal{F}}{\pi} \\
\ddot{a}(0,0) &= \frac{-8t^2}{(1-r^2)^3} \sim -8\alpha \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \\
a^{(3)}(0,0) &= \frac{8ir^2 t^2 (1+4r^2+r^4)}{(1-r^2)^4} \sim 48i\alpha \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^4
\end{aligned} \tag{3.51}$$

となる。微分は Δ_1 or Δ_2 についてとったものである。これらを用いると、

$$a(\Delta_1, \Delta_2) \sim \alpha \left[1 - i\frac{\mathcal{F}}{\pi} 2(\Delta_1 + \Delta_2) - 2\alpha \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \{2(\Delta_1 + \Delta_2)\}^2 + 6i\alpha \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^3 \{2(\Delta_1 + \Delta_2)\}^3 \right] \tag{3.52}$$

と書ける。更に透過光は振幅で、

$$A_t = a(0, \Delta_2) A_0 e^{i\Omega t} - a(\Delta_1, \Delta_2) \frac{A_1}{2} i e^{i(\Omega+\omega)t} + a(-\Delta_1, \Delta_2) \frac{A_1}{2} i e^{i(\Omega-\omega)t} \tag{3.53}$$

と書ける。ここで $2\Delta_1 = \delta_1, 2\Delta_2 = \delta_2$ とおき、透過光強度の強度変調成分を 3 次までの精度で求めると、

$$\begin{aligned}
I_t &= \frac{i}{2} A_0 A_1 e^{-i\omega t} \alpha^2 \left\{ 1 - i\left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right) \delta_2 - \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \delta_2^2 + i\left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^3 \delta_2^3 \right\} \\
&\times \left\{ 1 + i\frac{\mathcal{F}}{\pi} (\delta_1 + \delta_2) - \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 (\delta_1 + \delta_2)^2 - i\left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^3 (\delta_1 + \delta_2)^3 \right\} + C.C \\
&- \frac{i}{2} A_0 A_1 e^{i\omega t} \alpha^2 \left\{ 1 - i\left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right) \delta_2 - \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \delta_2^2 + i\left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^3 \delta_2^3 \right\} \\
&\times \left\{ 1 + i\left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right) (-\delta_1 + \delta_2) - \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 (-\delta_1 + \delta_2)^2 - i\left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^3 (-\delta_1 + \delta_2)^3 \right\} + C.C \tag{3.54}
\end{aligned}$$

$$= 2A_0 A_1 \alpha^2 \sin(\omega t) \left\{ 1 - \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2) \right\} - 2A_0 A_1 \cos(\omega t) \left\{ \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right) \delta_1 + \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^3 (-\delta_1^3 - 2\delta_1 \delta_2^2) \right\} \tag{3.55}$$

となる。従って伝達関数における位相の遅れは

$$\tan \alpha = - \frac{\left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right) \delta_1 + \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^3 (-\delta_1^3 - 2\delta_1 \delta_2^2)}{1 - \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2)} \tag{3.56}$$

$$\sim -\left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right) \delta_1 \left\{1 - \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \delta_2^2\right\} \quad (3.57)$$

と表される。共振状態にあるならば、 $\delta_2 = 0$ なので、それに比べて位相の遅れが $(\frac{\mathcal{F}}{\pi})^2 \delta_2^2$ だけ変化していることが分かる。この項は δl の正負にかかわらず finesse を低く見積もってしまう効果を持つことが分かる。従って $(\frac{\mathcal{F}}{\pi})^2 \delta_2^2 \ll 1$ が要求される。どれ位のオーダーでこのことが要求されるかは何桁まで反射率を求めたいかによるが、今回の実験では有効数字5桁は少なくとも要求されている。また伝達関数における絶対値の比は

$$\sqrt{\alpha^4 \left\{1 - \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2)\right\}^2 + \left\{\left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right) \delta_1 + \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^3 (-\delta_1^3 - 2\delta_1 \delta_2^2)\right\}^2} \quad (3.58)$$

と書ける。ここで α は loss を無視した場合、

$$\alpha = t^2 \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right) \sim \frac{t^2}{1-r^2} \sim 1 \quad (3.59)$$

なので (loss が透過率に対して無視できない場合はこの限りではない。)、上の式を $\alpha = 1$ として展開してやり、最低次までとると

$$\sim 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \delta_1^2 - \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \delta_2^2 \quad (3.60)$$

となる。これから絶対値における外乱に対する制限は第二項 $\gg$ 第三項なので位相に対する制限とは形が違っている。しかし先に述べたように cut-off frequency 付近では $(\frac{\mathcal{F}}{\pi} \Delta_1) \sim 1$ なのでその付近の帯域ではほぼ同様の制限の厳しさだといえる。第三項は透過光を実際にオシロスコープで見ると、あるいは AD コンバータにとりこんでやることにより見積ることが出来るので、第二項の計算値と比較すればこの条件を系が満たしているかどうかを評価することが出来る。以上が制御系に課される条件である。

3.3.3 強度変調成分は周波数変調の error signal にどう影響するのか

上では簡単な場合の Pound-Drever 法の error signal を計算したが、更に実験では強度変調もかけるのでこの分の効果も考えなければならない。入射光は

$$\left[A_0 + \frac{A_1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\right] \left[e^{i\Omega t} + \frac{m}{2}e^{i(\Omega+\omega_m)t} - \frac{m}{2}e^{i(\Omega-\omega_m)t}\right] \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} &= A_0 e^{i\Omega t} + \frac{m}{2} A_0 e^{i(\Omega+\omega_m)t} - \frac{m}{2} A_0 e^{i(\Omega-\omega_m)t} \\ &\quad + \frac{A_1}{2i} e^{i(\Omega+\omega)t} - \frac{A_1}{2i} e^{i(\Omega-\omega)t} + \frac{mA_1}{4i} e^{i(\Omega+\omega_m+\omega)t} \\ &\quad - \frac{mA_1}{4i} e^{i(\Omega-\omega_m+\omega)t} - \frac{mA_1}{4i} e^{i(\Omega+\omega_m-\omega)t} + \frac{mA_1}{4i} e^{i(\Omega-\omega_m-\omega)t} \end{aligned} \quad (3.62)$$

と書ける。ここで ω, ω_m はそれぞれ強度変調、周波数変調の角周波数である。今 cavity が Ω に対して δl だけずれているとすると、反射光は、

$$\begin{aligned} & A_0 \left(a + ib \frac{\Omega}{c} \delta l \right) e^{i\Omega t} + \frac{A_1}{2i} \left\{ a + ib \left(\frac{\Omega}{c} \delta l + \frac{\omega}{c} l \right) \right\} e^{i(\Omega+\omega)t} - \frac{A_1}{2i} \left\{ a + ib \left(\frac{\Omega}{c} \delta l - \frac{\omega}{c} l \right) \right\} e^{i(\Omega-\omega)t} \\ & + \frac{m}{2} A_0 e^{i(\Omega+\omega_m)t} - \frac{m}{2} A_0 e^{i(\Omega-\omega_m)t} + \frac{mA_1}{4i} e^{i(\Omega+\omega_m+\omega)t} \\ & - \frac{mA_1}{4i} e^{i(\Omega+\omega_m-\omega)t} - \frac{mA_1}{4i} e^{i(\Omega-\omega_m+\omega)t} + \frac{mA_1}{4i} e^{i(\Omega-\omega_m-\omega)t} \end{aligned} \quad (3.63)$$

となる。復調した時に問題になるのは $\omega_m, \omega_m \pm \omega$ 成分なので、その成分を計算してみる。
まず ω_m 成分は

$$\begin{aligned} & A_0 \left(a + ib \frac{\Omega}{c} \delta l \right) \frac{m}{2} A_0 (e^{-i\omega_m t} - e^{i\omega_m t}) + \text{C.C} \\ & + \frac{A_1}{2i} \left[a + ib \left(\frac{\Omega}{c} \delta l + \frac{\omega}{c} l \right) \right] \left(-\frac{mA_1}{4i} \right) (e^{-i\omega_m t} - e^{i\omega_m t}) + \text{C.C} \\ & - \frac{A_1}{2i} \left[a + ib \left(\frac{\Omega}{c} \delta l - \frac{\omega}{c} l \right) \right] \left(\frac{mA_1}{4i} \right) (e^{-i\omega_m t} - e^{i\omega_m t}) + \text{C.C} \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$= \left[2mA_0^2 b \frac{\Omega}{c} + mA_1^2 b \frac{\Omega}{c} \right] \delta l \sin \omega_m t \quad (3.65)$$

となる。最後の式の第二項が強度変調による効果である。次に $\omega_m \pm \omega$ 成分を計算すると、

$$\begin{aligned} & A_0 \left(a + ib \frac{\Omega}{c} \delta l \right) \left(-\frac{mA_1}{4i} \right) (e^{-i(\omega+\omega_m)t} + e^{i(\omega+\omega_m)t}) + \text{C.C} \\ & + A_0 \left(a + ib \frac{\Omega}{c} \delta l \right) \left(\frac{mA_1}{4i} \right) (e^{-i(\omega-\omega_m)t} + e^{i(\omega-\omega_m)t}) + \text{C.C} \\ & + \frac{A_1}{2i} \left[a + ib \left(\frac{\Omega}{c} \delta l + \frac{\omega}{c} l \right) \right] \frac{m}{2} A_0 (e^{i(\omega-\omega_m)t} - e^{i(\omega+\omega_m)t}) + \text{C.C} \\ & - \frac{A_1}{2i} \left[a + ib \left(\frac{\Omega}{c} \delta l - \frac{\omega}{c} l \right) \right] \frac{m}{2} A_0 (e^{-i(\omega+\omega_m)t} - e^{-i(\omega-\omega_m)t}) + \text{C.C} \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$= 4mA_0A_1b \frac{\Omega}{c} \delta l \sin \omega t \sin \omega_m t \quad (3.67)$$

となる。これは強度変調に起因する項である。以上の項を復調すると、

$$\left[mA_0^2 b \frac{\Omega}{c} + \frac{1}{2} mA_1^2 b \frac{\Omega}{c} \right] \delta l + 2mA_0A_1b \frac{\Omega}{c} \delta l \sin \omega t \quad (3.68)$$

が得られ、結局角周波数 ω_α 成分に対する error signal は

$$\delta l = \delta l_\alpha \sin \omega_\alpha t \quad (3.69)$$

と考えると、

$$\left[mA_0^2 b \frac{\Omega}{c} + \frac{1}{2} mA_1^2 b \frac{\Omega}{c} \right] \delta l_\alpha \sin \omega_\alpha t + 2mA_0 A_1 b \frac{\Omega}{c} \frac{1}{2} [\delta l_{\alpha+\omega} \cos(\omega_\alpha t + \psi) - \delta l_{\alpha-\omega} \cos(\omega_\alpha t + \phi)] \quad (3.70)$$

と書ける。 ψ, ϕ は位相のずれを表す。一般に角周波数の異なる振動に相関はないので、第二項は noise となる。これは cavity のロックの硬さを弱めることを意味し、先の考察から測定する鏡の finesse を小さく見積もってしまうことになる。従って先に考えたロックの硬さは強度変調をかけているときにちゃんと cavity 長が共振状態に保たれているかどうかを見てやらなければならない。また式から分かるが cavity がぴったり共振状態にあれば強度変調による error signal もゼロになることを注意しておく。これは共振状態にある場合はその入射強度が変わったことを、error signal の立場からいえば cavity の揺れだと判断しないということである。

3.3.4 周波数変調成分は強度変調による伝達関数の測定に影響を及ぼすのか

今度は逆に周波数変調成分の、強度変調成分への影響を考える。考える式は前の小節と同じ式である。その式から分かるように、強度変調をかけても $\delta l = 0$ の時であれば feed back 信号はでないので、影響を及ぼすことはない。また、以下に示すが cavity の制御帯域は 1.5kHz 程度であり、cavity の cut-off frequency は 7kHz 程度なのでその付近の feed back 力はあまり効かない。いずれにせよ、cavity を共振状態に硬く保つことが必要である。

Chapter 4

鏡の透過率、反射率測定実験

4.0.5 実験の意義

既に述べたように重力波観測実験においては鏡に対する要求が非常に厳しい。現在 quality の高い鏡を日本で手にいれようと思うと多くは輸入品に頼っているのが現状である。それでも最近日本航空電子株式会社など日本の会社でも干渉計に使用できるような高品位の鏡を製作しようという動きが出てきた。日本で大きな project を行なう意思がある以上それらの要素を日本で供給出来ることは好ましいし、さらに品位だけでなく価格も安いものが出来るようになればそれだけ project の他の部分に資金を使うことが出来る。鏡の quality の評価については反射率、透過率ともかなりの精度で数字が求められているが、それらはどれも 1 点についての値である。今回の実験では透過率、反射率の測定いずれにしても鏡の spot を変えてそのつど測定を行ない、一様性も評価する。使用する鏡は直径 1 cm 程度であり、これはちょうど km クラスのレーザー干渉計型重力波検出器でのビーム径と同じくらいである。従って反射率の一様性はこの位の scale で一様性を保っていないけれども、それを評価した例はない。しかし重力波検出実験においてこれは必要なステップといえるだろう。

4.1 鏡の透過率の測定

4.1.1 実験の概説

今回測定に用いられた鏡は日本航空電子株式会社製の 99.99%mirror である。従って透過率は 100ppm 以下であることが予想される。レーザーの出力から考えて透過光は非常に弱くなることが予想される。したがって単に透過光を photo detector で受けているのでは外部からの光の入射が S/N 比を悪くしてしまう恐れがある。その影響をなくすために入

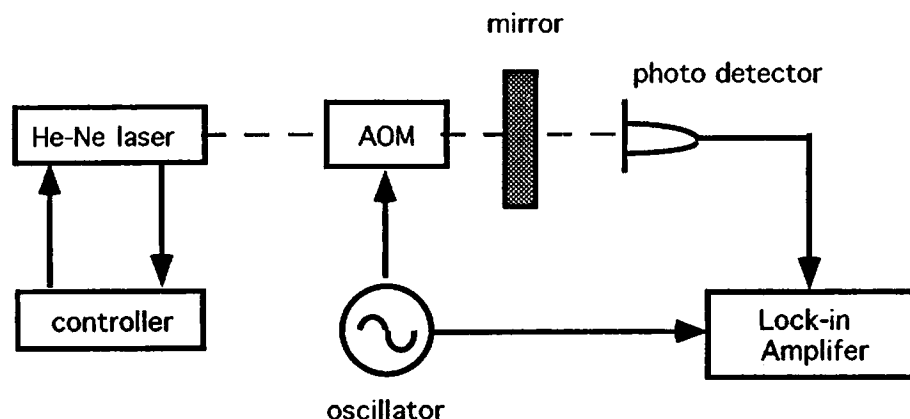


図 4.1: 透過率測定実験の Set up

射光に強度変調をかけ、その周波数成分だけを Lock-in Amplifier で検出することにした。鏡のある時とない時での値の比から透過率を求めた。また鏡の一様性を評価するために spot をいくつか変えて測定した。

4.1.2 実験の Set up

今回光源として用いたのは牛尾 He-Ne Laser で波長 633nm、出力は約 $500\mu\text{W}$ である。レーザーは、その一部をとりだし、それを用いて feed back をかけ、強度安定化が行なわれている。レーザーはまず Acousto-Optic Modulator(AOM) に入射する。AOM とはレーザーに強度変調をかけるための光学素子である。AOM には HOYA 社の 080-AM を使用した。これに Lock-in Amplifier から出される $0.1V_{pp}$ の振幅をもつ 7.0kHz の信号に 0.5 V の offset を加えたものを入力することにより、強度変調を実現する。offset を持たせるのは入力信号と出力信号の周波数を等しくするためである。強度変調を起こしたレーザーは光路がいくつかに分岐するが、今回はその 0 次光を透過率測定に使用した。(強度としてはレーザーの入射角度にもよるが主に 0 次光と 1 次光が強い。しかし 1 次光は強度変調の位相が入力信号に対して 180 度ずれている。位相が 180 度ずれていても検波するのには支障はないのだが特に 1 次光を選択する理由もないので、強度変調をかけてもかけなくても光路が変わることなく存在する 0 次光を使った。) その 0 次光は日本航空電子社製の 99.99% 鏡に入射する。その透過光を photo detector で受けてやり、その変調成分を先の Lock-in Amplifier で検出してやる。これを鏡を除いた状態で同じ実験を行ない、鏡のある場合との比から鏡の透過率を求める。

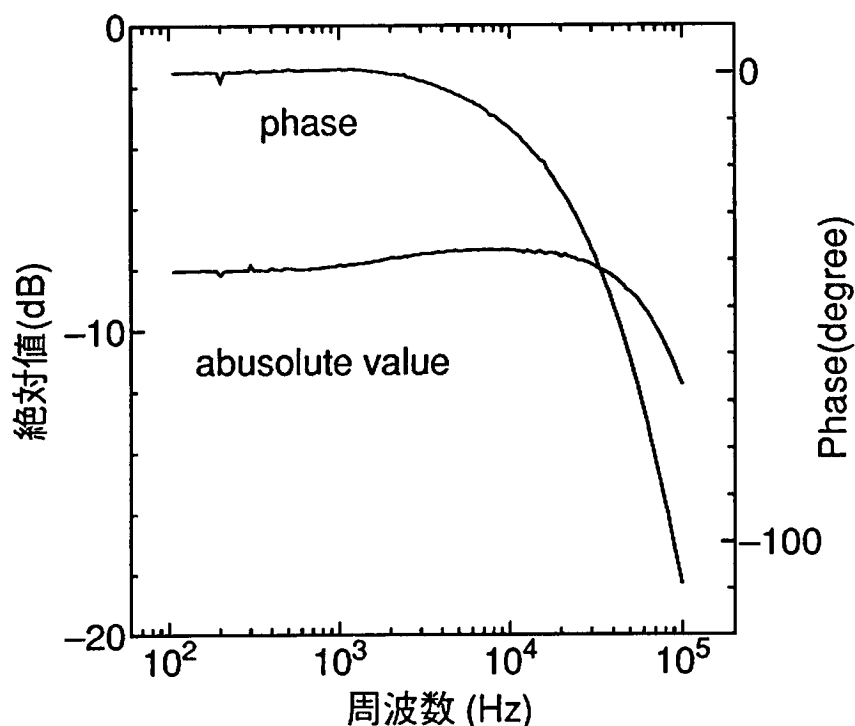


図 4.2: AOM の応答の伝達関数

4.1.3 実験における諸注意

実際には鏡の透過率が非常に低いため同じ gain を持つ photo detector では鏡のある時とない時双方を測ることは出来ない。そこで異なる gain を持った 2 つの photo detector の応答比をまず調べておいてから、それらを用いて測定を行った。その対応は gain 比で $10\text{k}\Omega$ 抵抗による出力: $10\text{M}\Omega$ 抵抗による出力 = 1:945 (at 7kHz) となっている。gain 比についてはレーザーを反射率 90% の鏡に入射させ、その透過光に対する photo detector の読みを測定することで求めた。

AOM は高周波になると応答がおくれてしまう。だが透過率測定では入力に対して応答に位相遅れがあることは望ましいことではない (一応鏡のある時もない時も同じ周波数の入力を AOM に与えるのだから、AOM の位相遅れの効果は cancel されるのだが)。同様に photo detector についても (使用している OP アンプは LF356) 抵抗が $10\text{M}\Omega$ の時は数

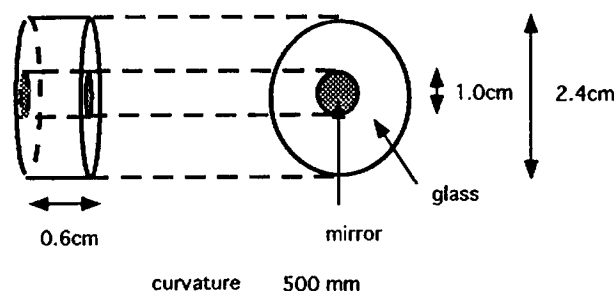


図 4.3: 鏡の寸法

kHz でドライブが追い付かなくなる効果が現れ始める。一方あまり低い周波数を設定すると外部からの影響を受けることがあり、強度変調での測定に意味がなくなる。以上の要請の妥協点として変調周波数を 7.0kHz に選んだ。また入力信号の電圧は AOM の特性から 0V から 1.0V までの間になければならないが、その中でも常に線形的な応答をするわけではなく、あまり出力波形が変形していると検波がうまくいかない恐れがある。線形的な応答のみを考えれば 0.5V の offset を持たせてそのまわりで小さい電圧で振ることが望ましい。しかし今回用いる鏡の透過率から考えてあまり小さい振幅で振っても透過光を検出できない恐れがある。その両面の妥協を考えなければならないのだが、今回は offset 0.515V, 全幅 96mV と設定して測定を行なった。

4.1.4 実験結果

2 枚の鏡についてそれぞれ任意に 10 点を選び透過率の測定を行なった。一様性はほぼ鏡全体 ($\sim 0.8\text{cm}^2$) にわたって取られた (鏡の寸法については上図)。その結果は

測定鏡	平均透過率	偏差
Mirror 1	$4.7 \times 10^{-3}\%$	$4 \times 10^{-4}\%$
Mirror 2	$4.3 \times 10^{-3}\%$	$3 \times 10^{-4}\%$

と測定された。測定は短時間のうちに行なわれたので、時間的な、つまり時間が経つにつれて鏡が汚れることにより値が変わっていくという効果は無視出来ると考えられる。loss が無ければ、反射率は 99.995% 程度となるので、これは好ましい結果と言える。また mirror1 と mirror2 の測定値の有効数字は 2 桁である。これは lock-in amplifier のデジタルの読みがほぼ 1 分間に渡って 2 桁までは変動しなかったからである。以後、反射率、及び loss の評価を行なう際にこれらの値を用いることにする。

4.2 反射率測定実験の概説

4.2.1 実験の Set up

光源としては透過率測定の際に用いた牛尾 He-Ne Laser を使用する。今回の実験でもやはり強度安定化をかけておく。その後レーザーは GSÄNGER 社の EOM に入射する。これはレーザーに周波数変調をかけるためである。変調周波数は 10MHz にとってあり、EOM driver には約 $150V_{pp}$ の電圧がかけられている。EOM を出た後、今度は AOM に入射させ、強度変調をかける。強度変調にかける信号は今回は ADVANTEST 社の Servo Analyzer R9211C によってかけられる。伝達関数の測定は数 10Hz 程度から数 10kHz 程度の帯域で行なわれる。今回も AOM への入力信号には offset が 0.5V かけられている。その後レーザーは Beam Splitter(BS) に入射し、約 50% pick off される。BS は偏光によらず 1:1 に split させる特性を持ったものを使用した。pick off された光は伝達関数を測るためのものとして photo detector に入射する。もう一方の光は Polarized Beam Splitter(PBS) と $\lambda/4$ 板を通過する。レーザーは直線偏光なので入射光をほとんど PBS で反射されないように角度を調整しておく、cavity からの反射光はほとんど PBS ではねらることになり、その反射光を RF 用の photo detector で受けてやり、復調することで feed back 信号として利用する。復調には復調器 (DBM) が用いられるが、そこに RF 用の photo detector で受けた信号と EOM ドライバーに入力させたものと同じ周波数を持つ信号 (但し信号の振幅は $1.3V_{pp}$ 程度で適当に phase shifter により位相が調節されている) を入力すれば error signal が得られる。error signal は適当なアンプと filter を通った後、cavity に取り付けてある PZT に feed back される。PBS の透過光は 2 枚の鏡ではねられた後、cavity に入射する。この 2 枚の鏡はアラインメント調整用の鏡である (鏡は調節ネジで 4 自由度持っており、アラインメント調整に必要な分の自由度と一致する)。制御をかけて cavity をレーザーの TEM₀₀ モードに合わせた状態で cavity の透過光を photo detector で受けてやり、先ほどの BS で pick off したものと合わせて伝達関数を測定する。伝達関数の cut off frequency から鏡の反射率 (空気の loss を考える時は反射率に空気の透過率をかけたもの) を算出する。cavity はステンレスのパイプの両側に mirror holder を取り付けただのものを使用した。このパイプは O リングによって吊されている。cavity は真空槽の中に収められており、真空槽に磁石を置いておくことで damping をおこなっている。これらで随分防振は施されるのだが、更に真空にひいてみることで、空気の loss に対する評価も行なう。真空に引くのにはロータリーポンプを使用する。また真空槽に cavity を収める際フランジでふたをしてあるのだが、near mirror の方はフランジの一部をくり抜き He-Ne レーザー用の AR コートにはりかえている。これはふつうのフランジではレーザーの偏光

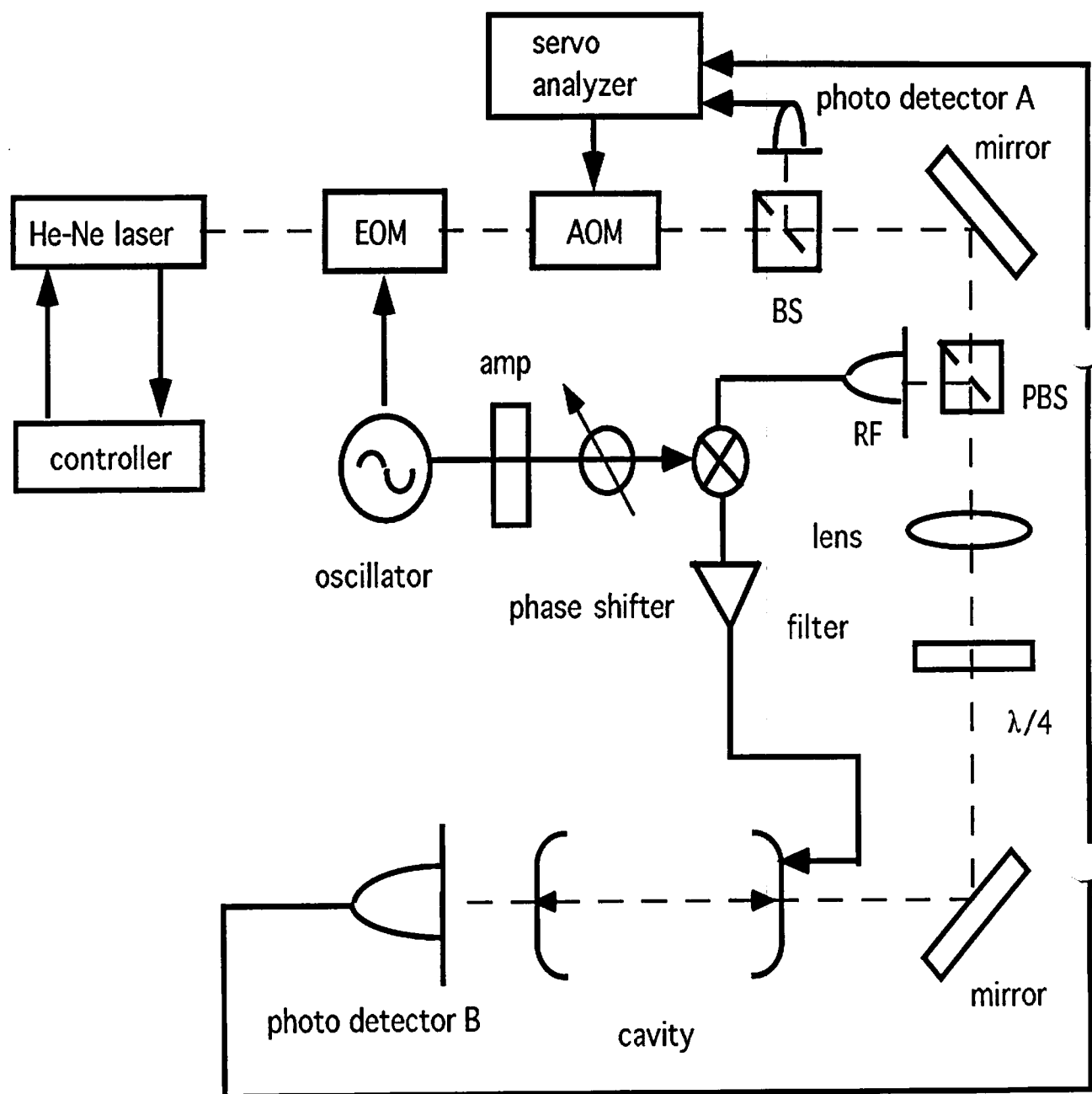


図 4.4: 反射率測定実験の Set up

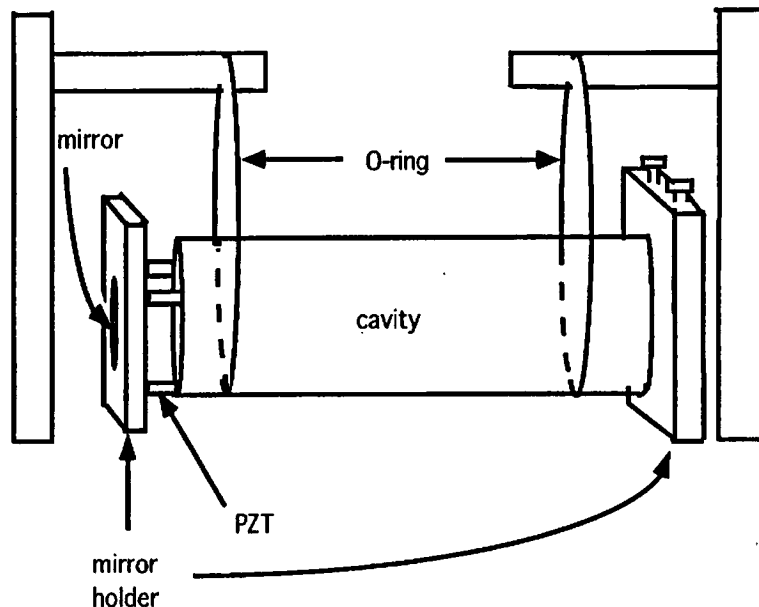


図 4.5: 吊られた cavity

が変わってしまう恐れがあり、PBS によって反射光を跳ねてくることが出来なくなる可能性があるからである。end mirror の方は透過光を photo detector で受けるだけなので（透過光の強度の減衰はおこってしまうものの）、アクリルのフランジをそのまま使用した。また、cavity に取り付けられている mirror holder は一方が可動型になっており、それを動かすことで光軸を変えることが出来る。従っていくつかの spot において反射率を測定することが可能であり、鏡の反射率の一様性を評価することができる。

4.2.2 実験上の注意

2つの photo detector で伝達関数を測定する場合、cavity 以外のものによる位相の遅れ、および強度の減少を起こすものがないかどうか検討する必要がある。例えば透過光測定実験で明らかにしたように AOM driver は 10kHz 付近で位相遅れが始まっている。これに対し、99.99%鏡の cut off frequency の理論値は 7kHz 付近なので充分 AOM の位相遅れがかぶさってくる恐れがある。しかし、AOM にかけている信号と cavity の透過光の間の伝達関数を測っているのではなく、pick off した光と透過光の間の伝達関数を測定するので、AOM による位相遅れの効果は cancel されていると考えられる。また、透過光を受ける前に一度アクリルの蓋を通過するが、その時の光の減衰を考慮しなければならない。また cavity を真空にひくことで空気の loss に対する評価ができることが期待されるが、一

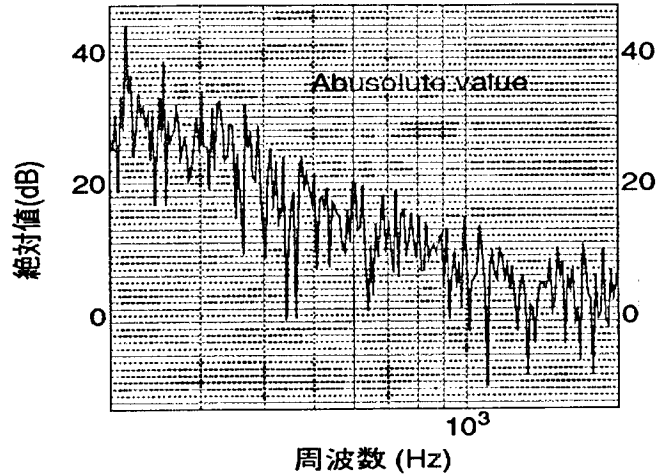


図 4.6: 系の open-loop 伝達関数

方ポンプの油の逆流や、温度の低下による水蒸気の結露によって鏡を汚してしまう恐れがあり、真空にひくときには十分な注意が必要とされる。

4.3 系の状態および実験装置の状態

4.3.1 cavity のロックの硬さの評価

系の安定性の目安として open-loop 伝達関数というものがある (詳しくは see Appendix A)。以下に系の open-loop 伝達関数を示す。unity gain frequency は、1.5kHz 程度であった。

上の制御でロックの硬さが十分かという事を見積もってみる。透過光の時系列のデータを取る事により以下のことが確認された。データの取り込みは AD コンバーターによって行なわれた。

1 強度変調をかけてない時のデータ

先の考察にもあった通り実際には強度変調をかけた時のロックの硬さをみてやらなければならないのだが、オシロスコープで見る限り強度変調をかけた時とそうでない時での透過

光のふらつきにはほとんど差がなかった。従ってまず解析が簡単な強度変調をかけてない場合を考察する。

$$\bar{V} = -2.136[\text{V}] \quad (4.1)$$

$$\sigma = 0.009[\text{V}] \quad (4.2)$$

と測定された。そこで $\bar{V} + \sigma$ を共振状態の透過光強度、ふらつきの振幅を σ として考えることにする。先の考察 (3.9) から

$$\frac{1}{1 + F^2 \left(\frac{\Omega \Delta l}{c} \right)^2} \sim \frac{\bar{V}}{\bar{V} + \sigma} = \frac{2.135}{2.145} \quad (4.3)$$

となり

$$F^2 \left(\frac{\Omega \Delta l}{c} \right)^2 = \alpha = 0.0043 \quad (4.4)$$

と計算される。ここで、

$$R \sim \frac{\frac{F}{\pi} - 1}{\frac{F}{\pi}} \quad (4.5)$$

$$= \frac{\frac{c\tau_s}{2l} - 1}{\frac{c\tau_s}{2l}} \quad (4.6)$$

と書けることと、3章の storage time の考察から

$$c\tau_s = F \left\{ 1 - \left(\frac{F}{2} \delta \right)^2 \right\} l \quad (4.7)$$

$$= F \left(1 - \frac{\alpha}{4} \right) l \quad (4.8)$$

と書けることに注意すると、

$$R_{\text{true}} = 0.99965 \quad (4.9)$$

の時 (後に述べるがこれが大体測定された反射率の値である。)、 R を測定値とすると

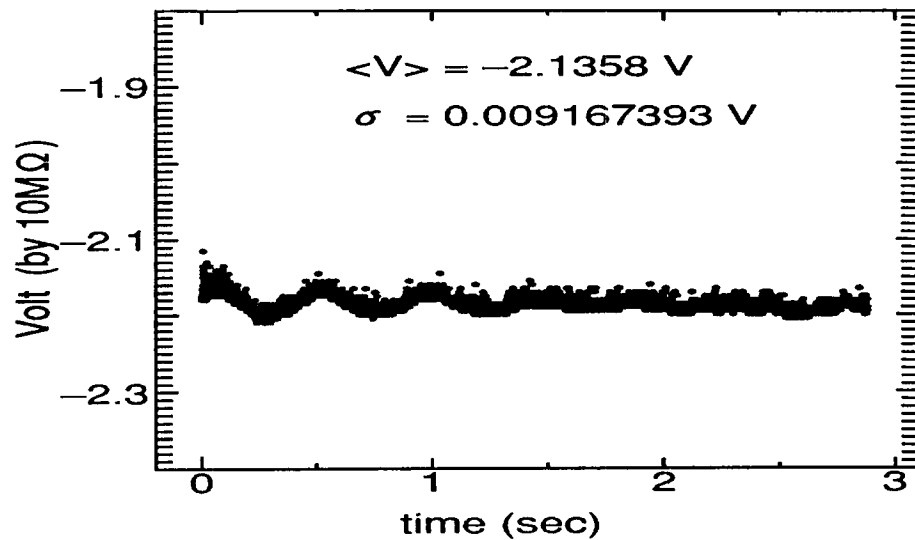


図 4.7: 強度変調をかけていない時の透過光

$$\frac{R_{\text{true}}}{R} = \frac{\frac{\mathcal{F}}{\pi} - 1}{\frac{\mathcal{F}}{\pi}} \frac{\frac{\mathcal{F}}{\pi} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)}{\frac{\mathcal{F}}{\pi} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) - 1} = 1.00000037 \quad (4.10)$$

と計算されるので、

$$(1 - R_{\text{true}}) = 0.00035 \quad (4.11)$$

とすると

$$(1 - R) = 0.0003504 \quad (4.12)$$

となるので小数点以下 6 桁までは測定値に信頼性がある。

2 強度変調をかけた時のロックの硬さ

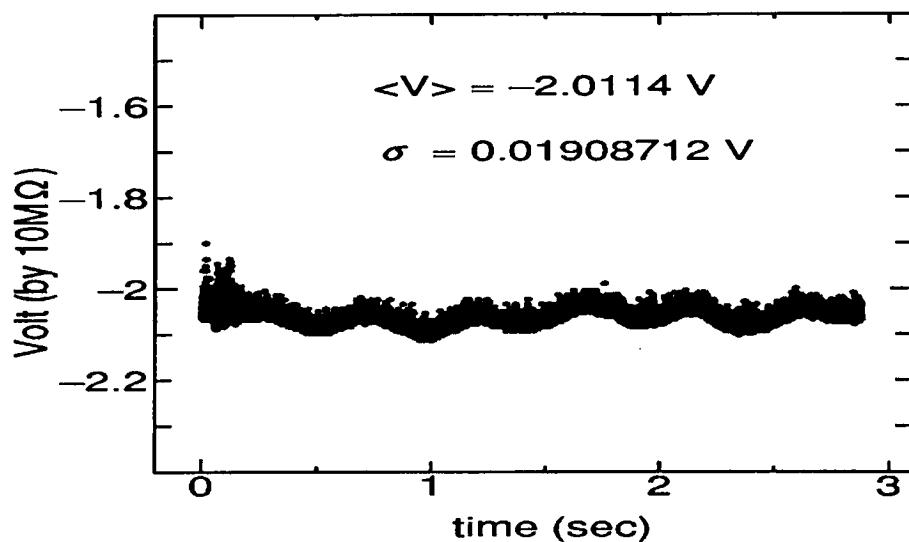


図 4.8: 強度変調をかけた時の透過光

強度変調をかけた場合、もろにその振幅が分散に効いてくる。しかしここではそれもふらつきとして考慮するという大雑把な見積りをしても有効数字としては十分な桁が示す。測定値より

$$\bar{V} = -2.01[\text{V}] \quad (4.13)$$

$$\sigma = 0.02[\text{V}] \quad (4.14)$$

という結果が得られている。これを前と全く同じ方法で評価してみる。

$$\frac{1}{1 + F^2 \left(\frac{\Omega \Delta l}{c} \right)^2} \sim \frac{2.01}{2.03} \quad (4.15)$$

となり、

$$F^2 \left(\frac{\Omega \Delta l}{c} \right)^2 = \alpha = 0.0095 \quad (4.16)$$

と計算される。従って

$$\frac{R_{\text{true}}}{R} = \frac{\frac{f}{\pi} - 1}{\frac{f}{\pi}} \frac{\frac{f}{\pi} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)}{\frac{f}{\pi} \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) - 1} = 1.00000085 \quad (4.17)$$

となるので、

(1-R)=0.0003509 と見積もられ、やはり小数点以下6桁までは影響がないと結論される。

4.3.2 error signal の S/N 比

error signal の S/N 比がどれくらいかということについては、DBM を通ったあとアンプによって約 40 倍に信号が増幅されている。その後 DBM から漏れてくる 10MHz 成分を消すために cut off frequency が 100kHz の low pass filter と接続してある。その出力をオシロスコープで見ると unlock 時に信号は 5mV_{pp} 程度であるのに対して lock 時は max で 400mV_{pp} の信号を出していることが確認された (この時の透過光強度は 220kΩ の photo detector で 2.5V)。室内を静かにさせておけば lock 時の信号はもっと小さくなるものの、S/N 比はかなり良くとれている。

4.3.3 photo detector の特性

また伝達関数の測定においては 2 つの photo detector を使用するが、これらのもともとの phase 遅れ、及び絶対値の比の特性を調べておく必要がある。そのために以下の様な予備実験を行なった。

この結果から 30kHz 以下であれば photo detector の特性の影響はないと考えられる (絶対値 (dB) については理論曲線と fitting する際定数だけ上下しなければならない。しかし cut-off frequency の値については photo detector の影響はない)。また透過光の強度を減衰させるものの原因として真空槽のフランジによる散乱が考えられるが、その透過率を調べたところ以下の様になった。

フランジの組成	入射光強度	反射光強度	透過率
AR コート	10.75 V	10.75 V	100%
ガラス	10.75 V	9.75 V	90.7%

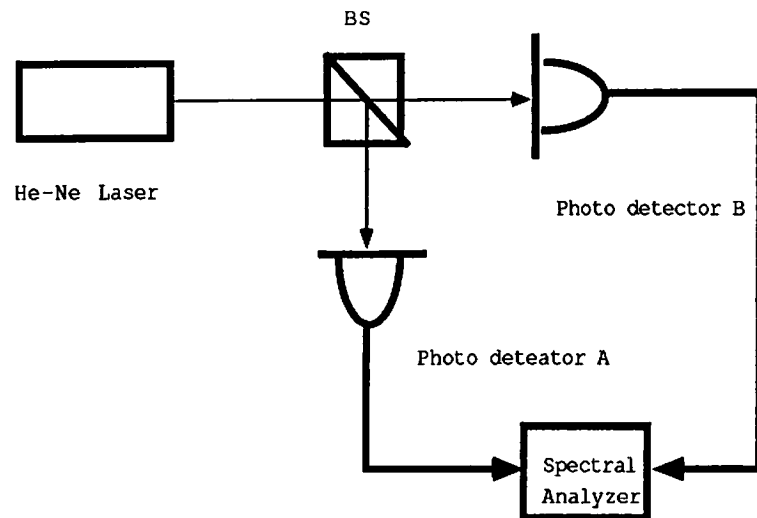


図 4.9: photo detector の伝達関数測定実験の Set up

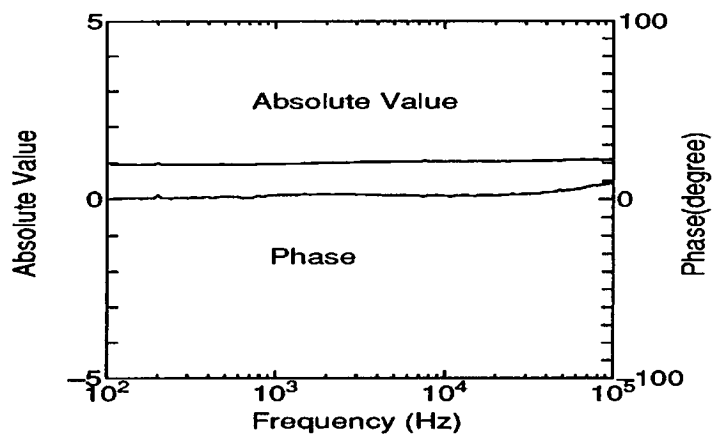


図 4.10: photo detector の伝達関数

測定はオシロスコープを用いてあり、有効数字は2桁である。

4.3.4 変調指数の測定

変調指数の大きさは feed back 信号という点では S/N 比を良くするために、より大きくとる方が好ましいといえる。しかし、透過光を用いて伝達関数を測定するという立場からはサイドバンドを大きくするとその分 TEM₀₀mode の強度が小さくなり、そちらの S/N 比が悪くなる。そういう意味で変調指数の決定は、とりあえず全体がうまく働くようにした上で、さらに各部の S/N 比をみながらその値を最適化させるのが好ましい。本文から分かるように、周波数変調をかけた光は振幅で ($m \ll 1$ の時)

$$A(t) = A_0 e^{i\Omega t} + \frac{m}{2} A_0 e^{i(\Omega+\omega)t} + \frac{m}{2} A_0 e^{i(\Omega-\omega)t-\pi} \quad (4.18)$$

となる訳だが、これを FP cavity に入射させ、cavity 長をゆっくり sweep してやると、各項が順に共振するのが分かる。今回の実験では共振幅が約 160kHz で変調周波数が 10M Ω なので、一つの mode が共振している時は他の mode はほとんど反射されており、干渉はほとんど起こらない。従って、透過光のピークをみてやることで、carrier とサイドバンドの強度比から $(\frac{m}{2})^2$ が求まる。実験結果より

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{40\text{mV}}{3.2\text{V}} = \frac{1}{80} \quad (4.19)$$

従って

$$m = 0.22 \quad (4.20)$$

と求まる。

4.3.5 補助実験・sweep による反射率、変調指数の測定

今回の実験では cavity をロックした状態での測定から反射率を求めた。しかし、それとは別に cavity をロックさせずに鏡に取り付けてある PZT に交流電圧をかけることにより cavity を sweep させることで反射率を求めることも出来る。ただこの方法では sweep の速度により透過光強度がなまってしまい、一般に測定精度はロックさせたものに比べて悪い。が、傍証として sweep させる実験をすることには意味がある。データの取り込みは AD コンバータを用いた。sampling time は 200 μ s である。交流電圧に DCoffset をかけて

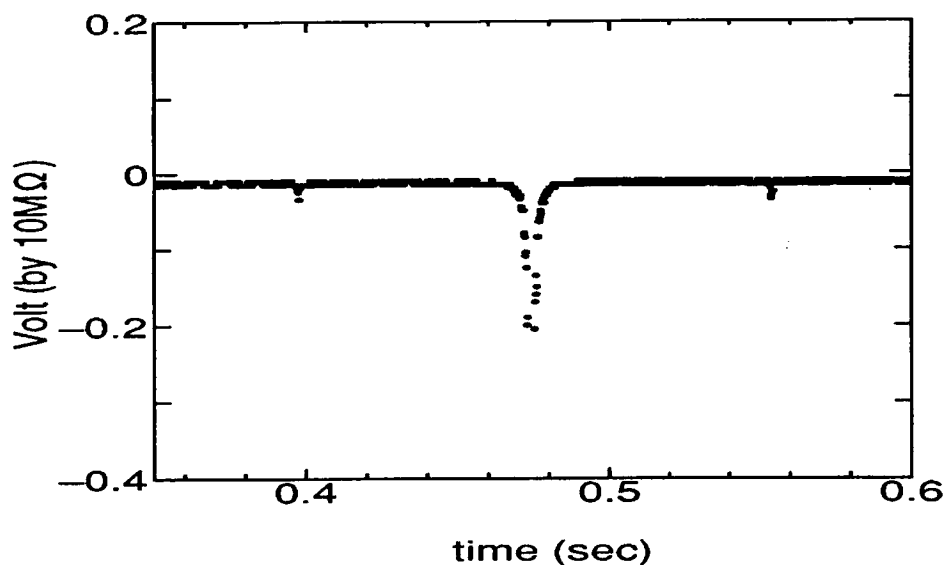


図 4.11: Carrier と Side band

共振状態を探し出し、そのまわりで 5Hz, 3V_{pp} の sin 波で sweep した。結果は以下の通りである。

Mode の種類	強度	データ番号
TEM ₀₀	2.279 V	2371
サイドバンド (1)	0.0342 V	1988
サイドバンド (2)	0.0342 V	2769

データ番号とはデータ列の番号でこれに sampling time 200μs をかければ時間となる。また変調周波数は 10MHz であることが分かっているのでこれを周波数に読み変えることも出来る。side band と carrier との幅が左右で違っているのは sin 波で sweep しているのが時間によって速度がちがうことに起因していると考えられる。これもこの sweep 方式の精度を悪くしている。side band と carrier の間隔はデータ列の番号で 383 と 398 である。半値全幅は周波数で

$$f = \frac{c}{2l\mathcal{F}} \quad (4.21)$$

なので測定値から半値全幅を求めれば finesse が求まり、したがって反射率が求まる。データから読みとることにより、半値全幅はデータ番号で 4.481 と求まる。これを周波数に換算すると

$$f = 4.481 \times \frac{10\text{MHz}}{383 \text{ or } 398} = 116.9 \text{ or } 112.5\text{kHz} \quad (4.22)$$

となる。すると

$$r^2 = 1 - \frac{2lf\pi}{c} = 0.999131 \text{ or } 0.999164 \quad (4.23)$$

と求まる。反射率が低く求まっているのはピークがなまっているということで説明される。またピーク比から変調指数を求めることも出来る。精度については AD コンバータのそれとオシロスコープの読みとで、どちらが正確かということであるがこれはいちがいには言えない。この実験からは

$$\frac{m^2}{4} = \frac{0.034\text{V}}{2.28\text{V}} \quad (4.24)$$

から

$$m = 0.24 \quad (4.25)$$

と求まる。

4.4 実験結果

4.4.1 真空に引かない場合

測定は 10 点について行なった。そのうちの 1 点についての解析を以下に述べることにする (4 点目のデータを使った)。まず cavity に入射する直前のレーザーの強度は 7.5V(220kΩ) であった。他の強度変調をかけている時のデータとしては以下の様であった。

photo detector の位置	DC 的な強度	強度の振幅
BS で pick off した所	10 V(by 220kΩ)	5V _{pp}
透過光	76 mV (by 220kΩ)	40 mV _{pp}

RF の photo detector の出力は

光が入っていない時	Lock 時の強度	Unlock 時の強度
+35 mV	-125 mV	-165 mV

であった。mode matching 率については透過光を 10M Ω の photo detector でみてやることにより、

Mode の種類	強度
TEM ₀₀	3.2V
サイドバンド (2 つ)	40 mV
TEM ₀₁	240 mV

と測定された。従って mode matching 率は 92%である。また伝達関数の測定結果を理論曲線と最小二乗法で fitting させることにより r^2 (空気の loss を考慮する時は $r^2 t^2$) = 0.99965 と求められた(次ページの図参照)。以上のデータをもとに考察を進めてみる。

4.4.2 空気の loss を無視した場合

以前の考察より

$$r^2 = 0.99965, t^2 = 0.00005 \quad (4.26)$$

と解釈するので鏡の loss は

$$p^2 = 0.0003 \quad (4.27)$$

と計算される。この値から $\frac{I_r}{I_{iDC}}$ を算出すると、

$$\frac{I_r}{I_{iDC}} = \frac{r^2 p^4}{(1 - r^2)^2} = \frac{0.99965 \times (0.0003)^2}{(0.00035)^2} = 0.73 \quad (4.28)$$

これに対して 実測値は RF の detector の値から算出すると

$$\frac{I_r}{I_{iDC}} = \frac{125 + 35}{165 + 35} = 0.80 \quad (4.29)$$

となる。次に $\frac{I_t}{I_{iDC}}$ は計算値としては

$$\frac{I_t}{I_{iDC}} = \frac{(0.00005)^2}{(0.00035)^2} = 2.0 \times 10^{-2} \quad (4.30)$$

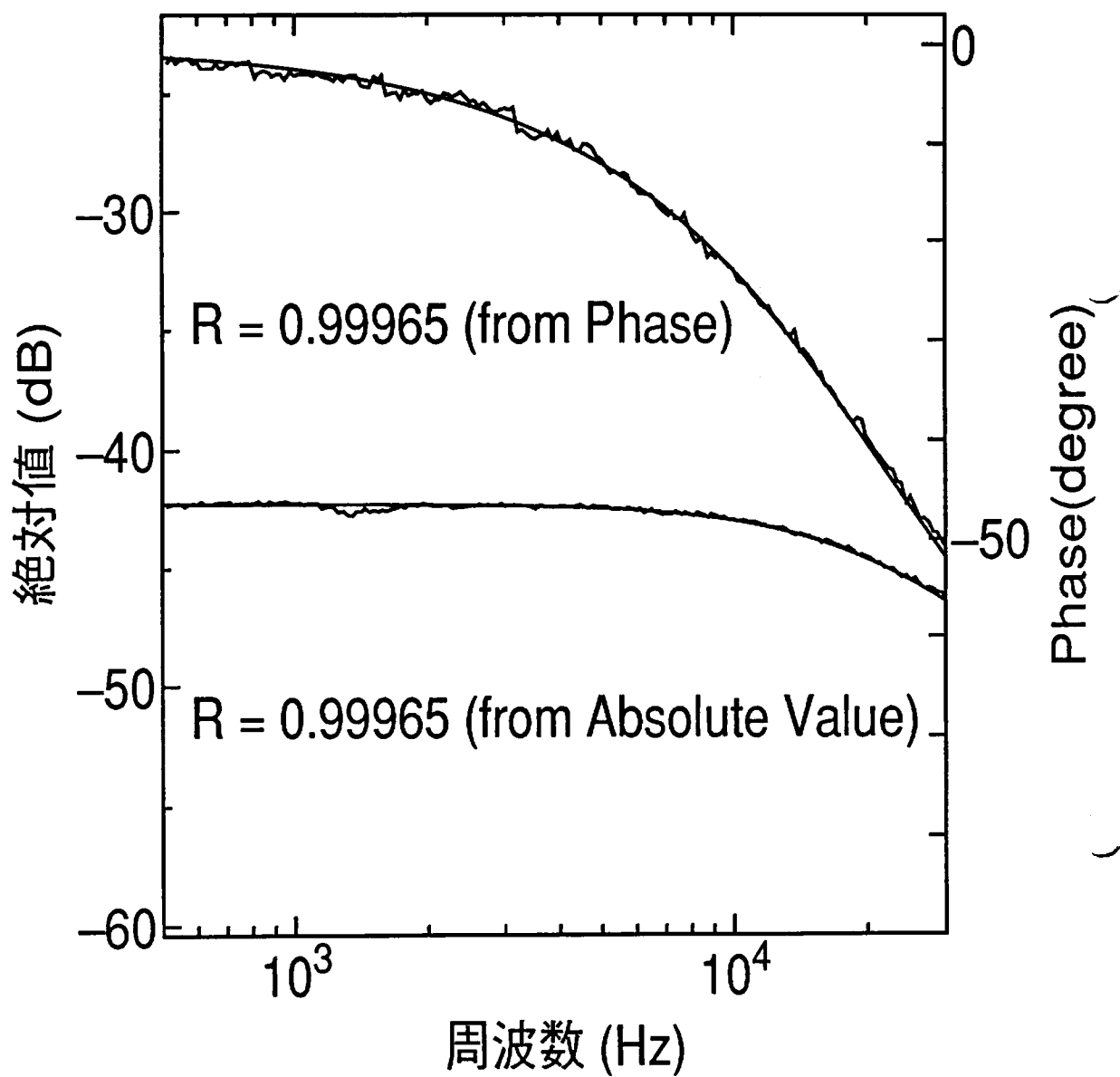


図 4.12: cavity の伝達関数

実測値としては透過光のデータから、

$$\frac{I_t}{I_{iDC}} = \frac{76 \times \frac{1}{0.907}}{1000 \times 7.5 \times 0.92} = 1.2 \times 10^{-2} \quad (4.31)$$

となる。次に空気の loss を考慮した場合の計算を行なってみる。

4.4.3 空気の loss を考慮した場合

実験室の空気の透過係数は坪野研究室助手の河辺氏のデータを使用した。氏のデータによれば研究室の透過係数は $3 \times 10^{-4} [\text{m}^{-1}]$ を平均値として ($0 \sim 1.5 \times 10^{-3}$) という幅をもっており、かなり不定性がある。とりあえずこの平均値を用いて解析を進めることにする。cavity の片道分の透過率は cavity 長が 0.355m なので

$$t^2 = e^{-\mu L} = 0.99989 \quad (4.32)$$

$$(\mu = 3 \times 10^{-4} \quad , \quad L = 0.355) \quad (4.33)$$

と求まる。従って

$$r^2 t^2 = 0.99965 \quad (4.34)$$

より、

$$r^2 = 0.99976 \quad (4.35)$$

となる。鏡の強度透過率と合わせて、鏡による loss は

$$1 - r^2 - T = 1 - 0.99976 - 4.5 \times 10^{-5} = 1.95 \times 10^{-4} \sim 2.0 \times 10^{-4} \quad (4.36)$$

と求められる。これを用いて DC 的な反射率は

$$\frac{I_r}{I_{iDC}} = \frac{(0.999888 - 0.999575)^2}{(0.00035)^2} = 0.80 \quad (4.37)$$

となり、これは実測値 0.80 と等しくなる。また DC 的な透過率は

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{T^2 t^2}{(1 - r^2 t^2)^2} = \frac{(4.5 \times 10^{-5})^2 \times 0.99989}{(0.00035)^2} = 0.017 \quad (4.38)$$

となり、こちらも空気による loss を考慮した方が計算値と実測値の差が小さくなっている。従って cavity 内を真空に引いて測定してやる必要があると思われる。また鏡の反射 spot を変えて 10 点分測定したが、それらの反射率は以下のように求められた。

測定日	10/29	11/29	11/30	12/1	12/1
反射率	99.977%	99.946%	99.950%	99.965%	99.970%
mode matching 率	89%	83 %	70 %	92%	91%
透過光強度	200mV	48mV	37mV	76mV	88mV

測定日	12/1	12/1	12/2	12/2	12/2
反射率	99.970%	99.967%	99.977%	99.966%	99.958%
mode matching 率	91 %	92 %	90 %	83 %	92 %
透過光強度	140mV	88mV	50mV	33mV	29mV

1 点目だけは filter が他の状態と違っている (11 月中に filter の改善を図った)。また平均と偏差は次の様である。一様性はだいたい鏡の中心のまわり ($\sim 0.2\text{cm}^2$) で測られた。

反射率の平均	偏差
$R = r^2 = 99.965\%$	$3 \times 10^{-3}\%$

表 4.13 と 4.14 はそれぞれ測定された反射率とその時の cavity の透過光を $220\text{k}\Omega$ の photo detector で受けた時の値である。透過光の強度が強いほど S/N 比が良くなるし、また feed back もよくかかるはずなので測定値の信頼性が高まる。それを見るために mode matching 率が等しい 4 回目と 10 回目の伝達関数 (の位相部分) を比較してみる (図 4.15)。透過光強度と反射率の高さに相関があると断言は出来ないが、見た感じでは影響がないとは言えない。また何故これだけ透過光の強度に変化が出るのかということに対しては、これも断言する事は出来ないが、鏡の表面での loss の差、及び空気の状態の変化が考えられる。その根拠としては式 (3.11) にあるように透過光強度と鏡の反射率、あるいは透過光強度と空気層の透過率が関係を持っているからである。透過光強度の変化としてどちらが効いているのかはこの実験だけでは分からないが、真空中に引けば空気の効果は取り除くことが出来るはずである。そこでは鏡の loss が透過光強度の変化を与える主な原因と考えることが出来るはずだが、鏡の loss といっても、それは鏡本来の loss と表面の汚れに起因するものがあるので、すぐにこれを鏡の一様性と関係付けることは出来ない。例えば今回の強度変化を鏡のせいだと思えば、spot によってこれだけ伝達関数のとれかたに差がでるのだから、どちらかという鏡そのものの loss の変化より鏡に付着した汚れの方が効いていると考える方が自然であろう。先のロックの硬さの考察では一応伝達関数の測定には 6 桁までは影響が出ないと結論されているものの、伝達関数の揺らぎを見た感じと

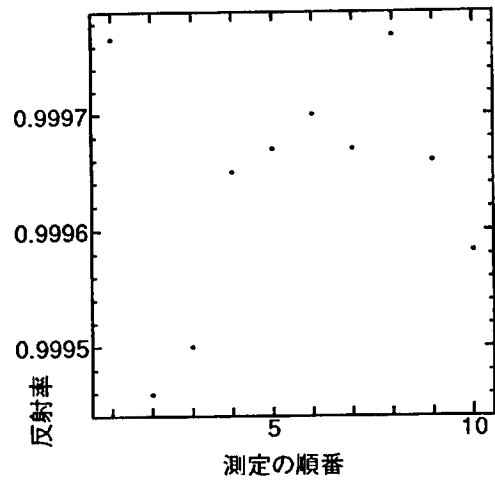


図 4.13: 時系列でみた鏡の反射率の分布

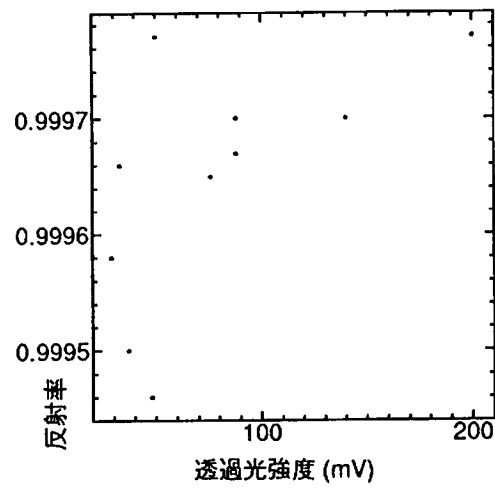


図 4.14: 透過光強度と反射率の相関

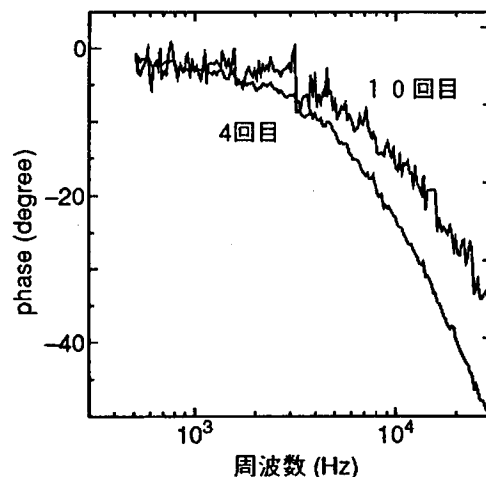


図 4.15: 伝達関数の比較

してはそれ程有効数字が期待出来るかということに対しては疑問であると言わねばならない。少なくとも言えることは、この測定から逆に、全ての測定で共通している小数点以下3桁までは有効数字があるだろうということである。

4.4.4 真空中に引いた測定

以上の考察から鏡の反射率の測定に空気の loss が影響しているということが予想される。そこで今までは防振、防音のために cavity を真空チェンバーの中に入れていたが、さらにそのチェンバーを真空中に引いて測定を行なった。その際気をつけなければいけないことは脱ガスの時に鏡を汚してしまうことである。汚してしまう原因は真空度が良くなって来た時に、ポンプに使っている油が逆流してしまう場合と真空中に引く速度が早い時、温度が急激に下がって水蒸気が結露して鏡に付着してしまう場合である。油の逆流については排気がまだ進んでおれず、粘性流の状態であるうちは逆流の心配はない。従ってロータリーポンプを使用する場合、数 torr に引く程度ならその効果は無視してよいと考えられる。排気速度は使用するポンプによって決まっているのであまりこれといった対策は立てなかった。今回はロータリーポンプで 2torr に引いて実験を行なったがこれは以上の様な理由に加えて、チェンバーが真空を長時間一定に保てる真空度がこの位の値だったからである(当然実験をする際は真空ポンプは止めなければならない)。

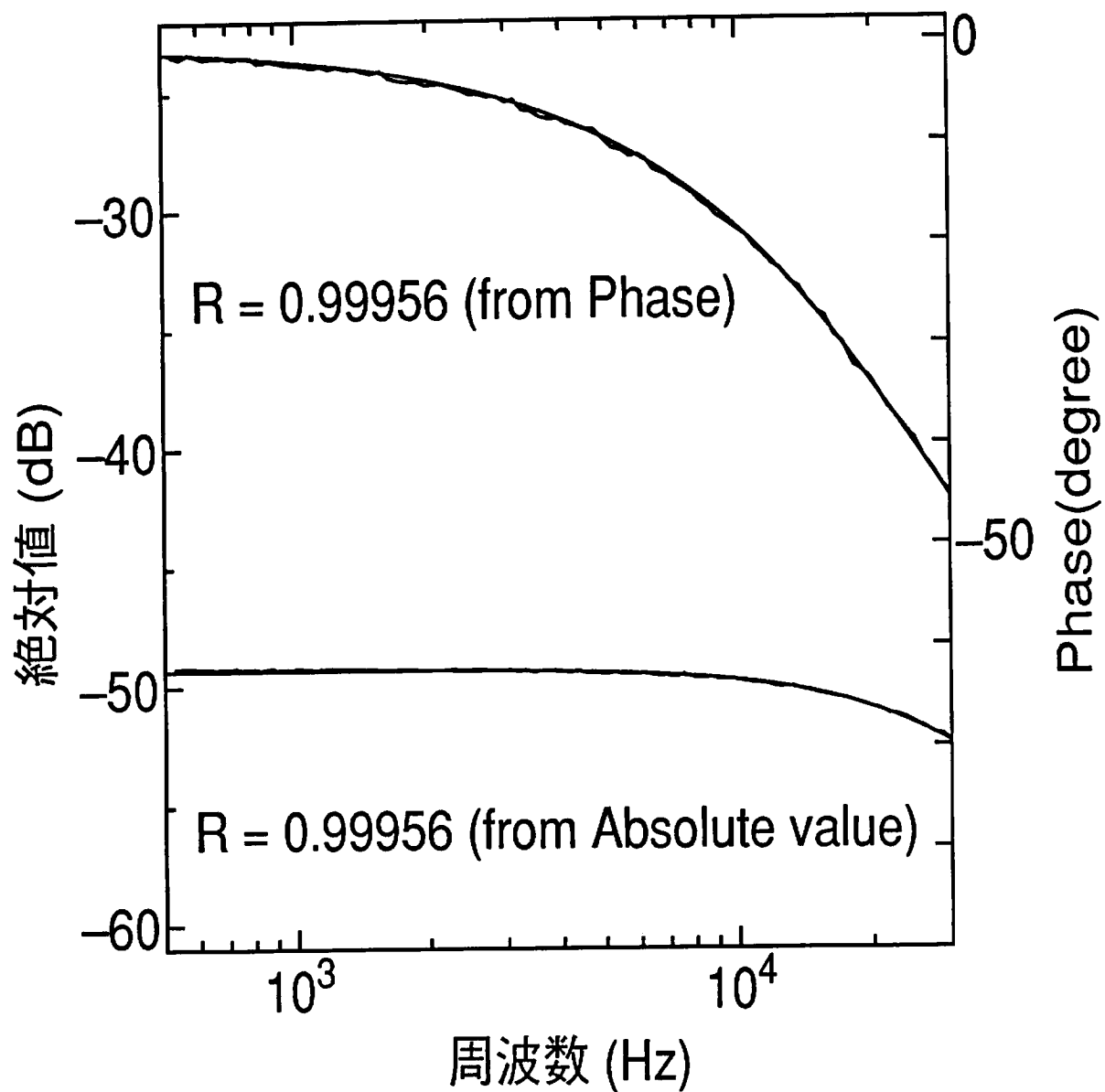


図 4.16: 真空中に引いて測定した鏡の反射率

4.4.5 真空での実験結果

測定は3点について行なった。このデータの少なさは結論からいうと真空に引いた時の方が鏡の反射率が低く測定されてしまい、鏡が汚れてしまっているのだろうと判断したためである。鏡の洗浄は日本航空電子株式会社で行なわれる。当会社でその洗浄を行なってもらい、そのあともう一度測定を行なうのが今後の課題である。cavity への入射光は 7V(220k Ω) である。その他の測定データとしては以下の様である。

photo detector の位置	DC 的な強度
透過光	40 mV (by 220k Ω)

RF の photo detector の出力は

光が入っていない時	Lock 時の強度	Unlock 時の強度
+35 mV	-110 mV	-135 mV

であった。mode matching 率については 10M Ω の photo detector でみると

Mode の種類	強度
TEM_{00}	1.75 V
サイドバンド (2 つ)	20 mV
高次 mode の合計	190 mV

と測定された。従って mode matching 率は 89% である。伝達関数の測定から $r^2 = 0.99956$ と求められた。そこで前と同様の考察を進めてみる。まず、

$$r^2 = 0.99956, t^2 = 0.00005 \quad (4.39)$$

より鏡の loss は

$$p^2 = 0.00039 \quad (4.40)$$

と計算される。従ってこの値から $\frac{I_r}{I_{iDC}}$ を算出すると、

$$\frac{I_r}{I_{iDC}} = \frac{r^2 p^4}{(1 - r^2)^2} = \frac{0.99956 \times (0.00039)^2}{(0.00044)^2} = 0.79 \quad (4.41)$$

これに対して 実測値は RF の detector の値から算出すると

$$\frac{I_r}{I_{iDC}} = \frac{110 + 35}{135 + 35} = 0.85 \quad (4.42)$$

となる。次に $\frac{I_t}{I_{iDC}}$ は計算値としては

$$\frac{I_t}{I_{iDC}} = \frac{(0.00005)^2}{(0.00044)^2} = 1.3 \times 10^{-2} \quad (4.43)$$

実測値としては透過光のデータから、

$$\frac{I_t}{I_{iDC}} = \frac{40 \times \frac{1}{0.907}}{1000 \times 7.0 \times 0.89} = 7.1 \times 10^{-3} \quad (4.44)$$

となり、期待されたような consistent な結果は得られなかった。測定した 3 点の反射率を示すと

測定日	12/28	12/29	12/29
反射率	99.956%	99.933%	99.950%
mode matching 率	88 %	85%	87%
透過光強度	39mV	48mV	64mV

3 点の測定における反射率の平均と偏差は

反射率の平均	偏差
$R = r^2 = 99.946\%$	$6 \times 10^{-3}\%$

以上の結果から、真空に引いた時のほうが逆に反射率が低く測定されてしまったことが分かる。しかし真空に引いたことで状況が悪くなる一方であった訳ではなく、伝達関数のグラフでも分かるようにきれいなデータが取れている。これは真空に引いたことで音による外乱が抑えられたことが大きな要因だと考えられる。真空にひいた場合の測定では透過光強度にあまり大きな変動がなかったので透過光強度と反射率の相関を論じることは困難である。しかし今回の測定では伝達関数がきれいにとれているので、鏡の洗浄を行なった後、透過光強度と反射率がどちらも上がれば、それで透過光強度と鏡の loss の相関を結論付けられることが期待出来、有効数字としても、小数点以下 3 桁よりは高いと結論しても良いだろう。

4.5 まとめ

以上の結果をまとめてみる。透過率については

測定鏡	透過率	偏差
Mirror 1	$4.7 \times 10^{-3}\%$	$4 \times 10^{-4}\%$
Mirror 2	$4.3 \times 10^{-3}\%$	$3 \times 10^{-4}\%$

一様性はほぼ鏡全体 ($\sim 0.8\text{cm}^2$ 程度) に渡って測られた。反射率については

環境	反射率の平均	偏差
真空中に引かない場合	$R = r^2 = 99.965\%$	$3 \times 10^{-3}\%$
真空中に引いた場合	$R = r^2 = 99.946\%$	$6 \times 10^{-3}\%$

一様性は鏡の中心のまわり ($\sim 0.2\text{cm}^2$) で測られた。従って loss の評価は

環境	loss の平均
真空中に引かない場合	$P = 1 - t^2 - r^2 = 3.1 \times 10^{-2}\%$
真空中に引いた場合	$P = 1 - t^2 - r^2 = 5.0 \times 10^{-2}\%$

と評価された。loss の算出には 2 枚の鏡の透過率の平均値を使った。真空中に引いた時の方が loss が大きく見積もられてしまったのは鏡の表面が汚れてしまったためだと考えられる。従ってもう一度日本航空電子株式会社において鏡を洗浄し、同様の実験を行なうことが必要である。その際には真空中に引く時に鏡を汚さないための何かしらの手段が必要であるかもしれない。また有効数字については真空中に引いた場合であれば、少なくとも小数点以下 4 桁まではあると思われる。今後より高反射率の鏡を評価するためには、制御系をさらに強化しなければならないかもしれない。鏡の一様性が重力波検出器にどれくらいの level で求められるかという定量的な評価を与えることは難しいが、今後干渉計の感度が上がってくるにつれ、一様性の問題が上がってくる可能性もある。その時に備えて今後もこのような評価を行なっておくことには意味があるだろう。

Appendix A

補足説明

A.1 測地線偏差の方程式

測地線偏差の式を使って本文と同様の重力波の free mass に与える影響を考えることも出来る。まずまだ重力波が到着していない時（すなわち Minkowski 時空の時）、座標 $(0, 0, 0, 0)$, $(0, \epsilon, 0, 0)$ を結ぶ連結 vector $(0, \epsilon, 0, 0)$ を考える。（ ϵ が十分小さければこれは vector の変換性を持つし、それは重力波が到着しても h が小さければその事情は変わらない。）さて、いま重力波が z 軸方向からやってきたとする。座標系としては等しい時間座標であるときには空間座標がそのまま原点からの固有距離になっているようなものを選ぶ（もちろん重力波が来ていない時はこれは Minkowski 時空に一致する。）。この時連結 vector は測地線偏差の式

$$\frac{D^2}{D\tau^2} X^\alpha = R^\alpha_{\mu\nu\beta} U^\mu U^\nu X^\beta \quad (\text{A.1})$$

に従う。ここで

$$\frac{D}{D\tau} X^\alpha = \frac{\partial}{\partial \tau} X^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\delta} \frac{dx^\beta}{d\tau} X^\delta \quad (\text{A.2})$$

$$= \frac{\partial x^\beta}{\partial \tau} X^\alpha_{;\beta} \quad (\text{A.3})$$

である。また、 X^α は重力波が来た時の連結 vector

$$X^\alpha = (0, \epsilon, 0, 0) + \eta^\alpha \quad (\text{A.4})$$

であり、 η^α は重力波の効果で小さい。この時連結 vector の長さ（固有距離）は h の 1 次までで

$$\delta l = \epsilon + \eta^1 \quad (\text{A.5})$$

である。次に実際に測地線偏差の式を計算してみる。測地線偏差の式は Tensor equation であり、特に vector を表しているの座標変換をした時、それらの量は

$$V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} V^{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} \quad (\text{A.6})$$

によって変換される。今、座標系としては単なる TT-gauge でないものをとっているが、それを TT-gauge に変換するとき h の一次までで考えるならば（右辺の量がもともと h の一次なので）変換則は単なる δ^{α}_{β} である。従って右辺の量を考えるときは一番計算が簡単な TT-gauge で計算すればよい。具体的にはまずこの座標系での最低次で測地線偏差の式を書けば、

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \eta^{\alpha} = R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} U^{\mu} U^{\nu} \epsilon \quad (\text{A.7})$$

となる。次に Rieman Tensor を具体的に計算すると、結局上式は

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \eta^{\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \eta^{\alpha} = \epsilon R^{\alpha}_{00x} = -\epsilon R^{\alpha}_{0x0} \quad (\text{A.8})$$

である。特に η^1 については

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \eta^1 = \frac{1}{2} \epsilon h_{+,00} \quad (\text{A.9})$$

となり、この解は

$$\eta^1 = \frac{1}{2} \epsilon h_{+} \quad (\text{A.10})$$

である。従って固有距離は

$$\delta l = (1 + \frac{1}{2} h_{+}) \epsilon \quad (\text{A.11})$$

となり、前の節と同じ結果を与える。また、測地線偏差の式はどの座標系でも成立するのでべつに TT-gauge で計算を行なってもよい。但しこの場合は $\epsilon = \text{const}, \eta = 0$ となるので、最低次のとり方が変わってくる。（上の場合では左辺が η についての式になっているが、TT-gauge ではそれは 0 になってしまう。右辺についてはこのままでよい。）左辺の最低次を考えると

$$\frac{D^2}{D\tau^2} X^{\alpha} = \frac{D}{D\tau} \left(\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} X^{\delta} \right) \sim \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial \tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} X^{\delta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} \frac{d^2 x^{\beta}}{d\tau^2} X^{\delta} \sim \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{01}}{\partial t} \epsilon \quad (\text{A.12})$$

となる。右辺については

$$R^{\alpha}_{001} \epsilon \sim \epsilon \left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{00}}{\partial x^1} \right) = \epsilon \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{01}}{\partial t} \quad (\text{A.13})$$

となり、左辺=右辺という恒等式が得られることになる。

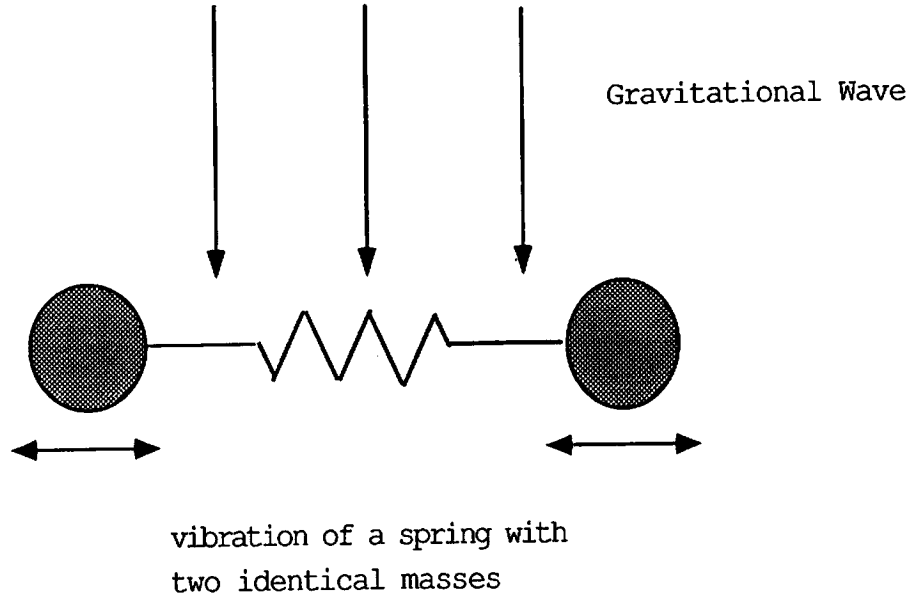


図 A.1: 共鳴型重力波検出器の原理

A.1.1 共振型重力波検出器

重力波による free mass への影響を考えたが、今度は質点がバネで結ばれている場合を考える。これは弾性体の簡単なモデルと考えることが出来、共振型重力波検出器の原理になっている。まず2つの質点と同じ質量 m を持つとする。この質点間の距離は十分短く、近似的に両方の局所慣性系が1つの座標系で表せるとする。その座標系を $x^{\alpha'}$ と書く。この時 newton 力学が成り立つので、

$$m x_{,0'0'}^{j'} = F^{j'} \quad (\text{A.14})$$

と表せる。次にその方程式を TT-gauge で見ることにする。TT-gauge を x^{α} で表すことにする。この時、両座標系は gauge 変換で結ばれるので、変換則を考えた場合座標値の変化は h の1次程度でしかない。従って最低次 (h の0次) で考えると方程式は全く同様に

$$m x_{,00}^j = F^j \quad (\text{A.15})$$

と書ける。このことを踏まえて、後は普通の newton 力学と同様の考察から減衰振動の式

$$\xi_{,00} + 2\gamma\xi_{,0} + \omega_0^2\xi = \frac{1}{2}l_0 h_{xx,00}^{\text{TT}} \quad (\text{A.16})$$

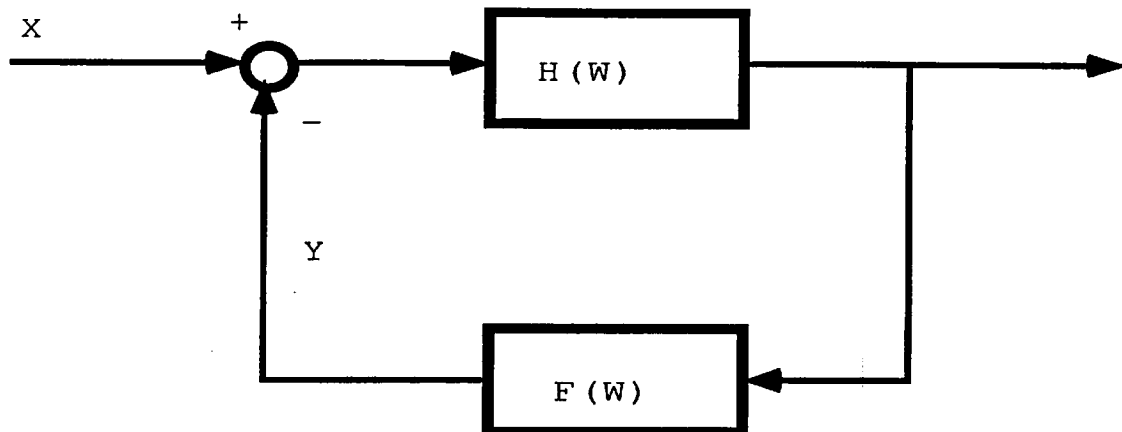


図 A.2: feed back の概念図

が導かれる。但し

$$\xi = x_2 - x_1 - l_0 + \frac{1}{2} h_{xx}^{\text{TT}} (x_2 - x_1) \quad (\text{A.17})$$

である。 x_1, x_2 は質点の座標値、 l_0 はバネの自然長である。第三項が重力波の効果である。このように弾性体に重力波が入射すると、弾性体は振動を行なう。減衰振動といっても重力波から energy をもらい続ければ定常解が存在し、弾性体の共鳴周波数と重力波の周波数が一致するとき最も大きな振動を行なう。その振動を検出することで重力波検出を行なうのが共振型重力波検出器である。

A.2 Feed back について

この実験において cavity 長、及びレーザーの周波数の制御は欠かせない課題である。一般的な feed back 系のしくみについてここで述べておくことにする。今 x という外乱が系にはいつてきたとする。外乱は系の中を巡り、結果として Fx という出力が帰ってきたとする。そこで新たに Feed back 系を作ってやり、 $-HFx$ という負の feed back をしてやることにする。すると外乱は

$$X_F = (x - y) \quad (\text{A.18})$$

に抑えられることになる (x はもとの外乱、 y は feed back 信号)。無矛盾性の要求から

$$HFX_F = HF(x - y) = y \quad (\text{A.19})$$

でなければならない。従って

$$y = \frac{HF}{1+HF}x, X_F = \frac{1}{1+HF}x \quad (\text{A.20})$$

となる。これはあたかも外乱が

$$\frac{1}{1+HF} \quad (\text{A.21})$$

に減ったかのような効果を持つ。このようにして外乱の影響を小さくすることが feed back 系の基本的な考え方である。たとえ H が大きくても F も大きければ、結果として振動は小さく抑えられることに注意する。しかし全帯域に渡って gain をとるということは不可能で、位相遅れの影響から負の feed back であるべきなのに、正の feed back をかけてしまい発振してしまう周波数帯域が生じてしまう。それを防ぐためにはナイキストの安定化の定理を満たすように回路を設計してやることである。これは系の open loop 伝達関数の大きさが 1 のとき (Unity Gain)、位相遅れが 180 度未満であるようにすると安定な系ができるというものである。

A.3 振り子の特性

振り子には free mass 状態の実現と防振という 2 つの意味が課せられていることは既に述べた。ここでは防振についてももう少し詳しく述べることにする。外乱、特に振り子の支点の振動から鏡の振動への伝達関数は

$$H(\omega) = \frac{i\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2}{-\omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \quad (\text{A.22})$$

と表せる。ここで

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (\text{A.23})$$

で Q は Q 値である。

一般的に共振周波数は数 Hz にある。従って低い周波数では大きく揺れており、高い周波数はかなり防振がなされていると考えられる。この性質を利用して重力波検出においての高周波における基準は振り子にとる。因みに低周波の基準はレーザである。次に鏡に直接かかってくる外乱に対する影響を考える。音などにより振動をおこすような場合、力から変位への伝達関数は

$$x(\omega) = H(\omega) \left(-\frac{f}{m} \right) \quad (\text{A.24})$$

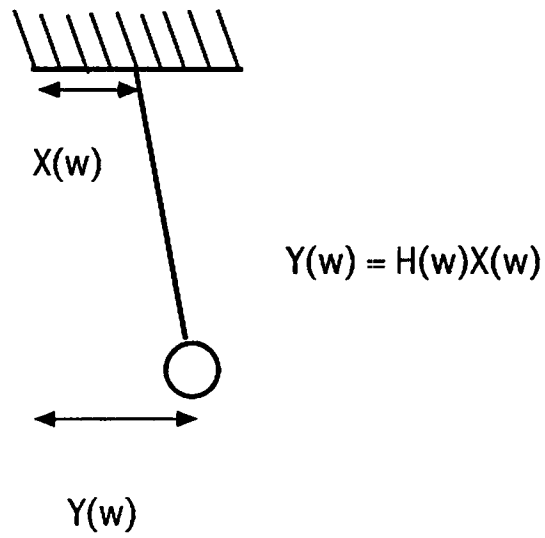


図 A.3: 振り子の振動

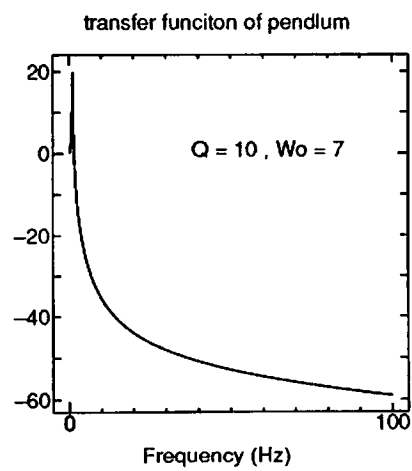


図 A.4: 振り子の伝達関数, $X=Hz$, $Y=dB$, $Q=10$

ここで f は外乱、 $H(\omega)$ は

$$H(\omega) = \frac{-1}{-\omega^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q} + \omega_0^2} \quad (\text{A.25})$$

いずれにせよ低周波の外乱に対して良く揺れてしまうことが分かる。feed back 系はこのような振り子の特性に合わせて、低周波の feed back を重視したものを設計すれば良い。

A.4 Mode matching について

レーザーのビーム径は一定ではなく、焦点のような場所を境にどんどん広がっていつてしまう。FP cavity を組む場合、球面鏡にせよ平面鏡にせよそれらの曲率とビームの曲率を一致させることが望ましく、多くの場合レンズを入れる事で再びビームの焦点を作ることを行なう。この時レンズの焦点距離と鏡の曲率と焦点でのビーム径（ビームウエストという。）によってレンズと鏡を置く位置が決められる [9]。最適化されていない配置では共振するはずの成分が反射されたりして、透過光や error signal の S/N 比を悪くする。従って測定の上で mode matching をとることは重要である。以下にレンズと鏡の位置の決め方を示す。

A.4.1 Gaussian Beam

レーザーは波動方程式

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.26})$$

に従う。今 z 軸方向にレーザーが進んでいるとする。この時

$$\Phi = \psi(x, y, z) e^{i(\omega t - kz)} \quad (\text{A.27})$$

と書ける。さらに z 軸方向の変化がゆるやかであると仮定すれば

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \psi = 0 \quad (\text{A.28})$$

という式に従う。この解は $r^2 = x^2 + y^2$ とすると

$$\psi(x, y, z) = e^{-\frac{r^2}{\omega(z)^2}} e^{-i(P(z) + \frac{k}{2R} r^2)} \quad (\text{A.29})$$

と書ける。ここで

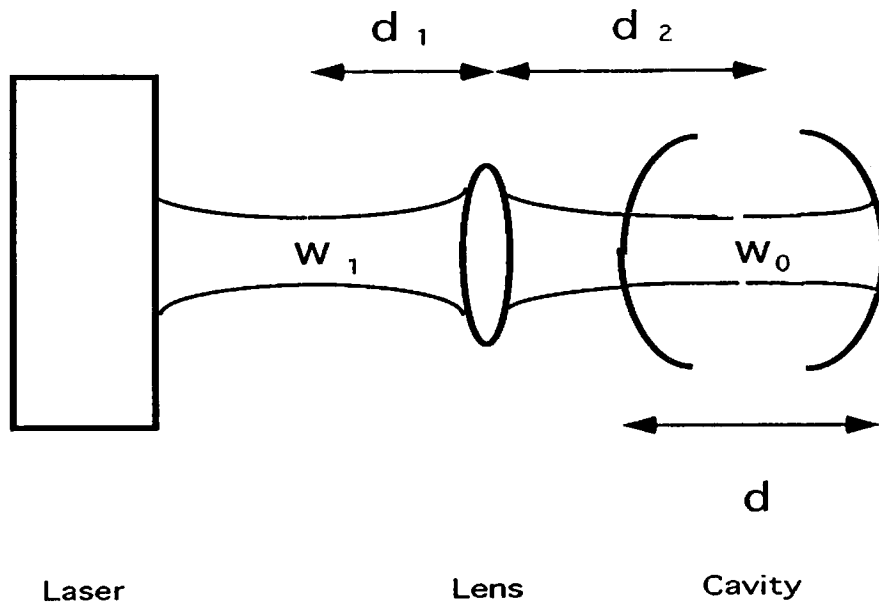


図 A.5: mode Matching のための配置

$$R(z) = z \left\{ 1 + \left(\frac{\pi \omega_1^2}{\lambda z} \right)^2 \right\} \quad (\text{A.30})$$

$$\omega(z)^2 = \omega_1^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_1^2} \right)^2 \right\} \quad (\text{A.31})$$

であり、P は

$$\frac{d}{dz} P = -\frac{i}{q} \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2} \quad (\text{A.33})$$

に従う量である。レーザの強度の減衰の仕方をみると、Gauss 分布に従っていることが分かる。このような強度分布を示すものを Gaussian beam と呼ぶ。 ω_1 はレーザの最も小さいビーム径でありビームウエストと呼ばれる。 R はビームの曲率半径である。mode matching を行なうときはこのレーザの曲率半径と鏡の曲率半径を一致させなければならない。

A.4.2 各 component の位置の決定

今回使用する鏡は球面鏡で、その曲率半径 R は等しい（曲率半径は 500mm）。さらにレンズの焦点距離を f とする。この時、図のように d_1, d_2, d を定めると

$$d_1 = f \pm \frac{w_1}{w_0} \sqrt{f^2 - f_0^2} \quad (\text{A.34})$$

$$d_1 = f \pm \frac{w_0}{w_1} \sqrt{f^2 - f_0^2} \quad (\text{A.35})$$

と定められる。但し w_1 はレーザーのもともとのビームウエスト、 w_0 はレンズによってつくり出された新たなビームウエストで

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{d(2R - d)} \quad (\text{A.36})$$

と表され、これは cavity の中心にくる。また f_0 は

$$f_0 = \frac{\pi w_0 w_1}{\lambda} \quad (\text{A.37})$$

と表される量で、lens の焦点距離 f は $f > f_0$ を満たしていなければならない。mode matching が良くとれている場合、レーザーの入射光と反射光のビーム径は各点で一致する。

Appendix B

実験に使った回路

cavity を制御するために使った回路図を以下に示す。feed back をかえす場所は cavity にとりつけてある PZT である。feed back 系の基本の方針としては共振（一番低いもので 5.15kHz だった。）に起因する発振を回避し（notch filter を使用した。）できるだけ制御帯域を増やししながら、低周波の gain を大きくとるということである。共振を 2 つ 3 つ回避していくことは難しく、一つ目の共振周波数がどこにあるかということで制御帯域がどれくらいになるかということはほとんど決まってしまう（ちなみに今回の制御帯域は約 1.5kHz であった。）。尚、回路の幾つかに対してはその特性を spectral analyzer で測定したものを載せた。ただし位相に関しては 180 度の不定性があるということに注意しておく。完全積分回路や、DC gain を持たせる回路にスイッチがついているのは系をロックさせる時には完全積分回路よりも low pass filter の方が引き込み特性がよいとか、DC gain の方もロックさせる時は flat な特性のほうが引き込みやすい、という理由からである。つまりロックさせてから、コンデンサーの方に切替えてやる訳である。また、スイッチはコンデンサーが電氣的に飽和してしまった時電荷を解放するという役目もある。DC offset を与える回路は PZT にある適当な DC 電圧を与えておくことで cavity 長をほぼ共振状態にするために使われるものである。

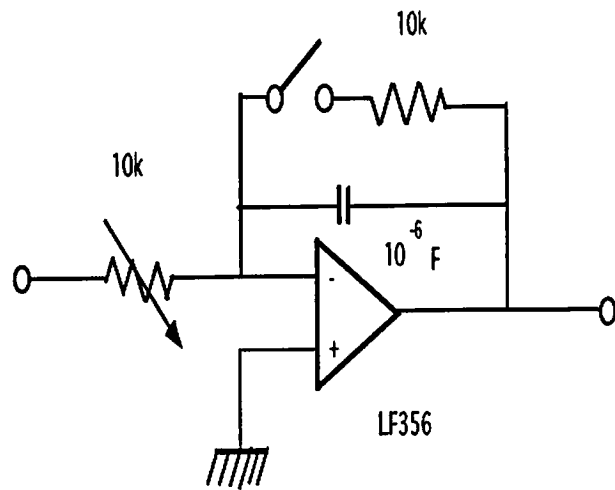


図 B.1: 完全積分回路の回路図

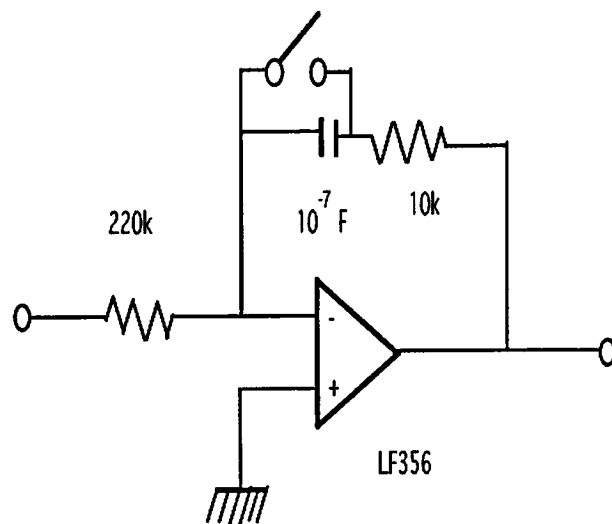


図 B.2: DC Gain をもたせる回路の回路図

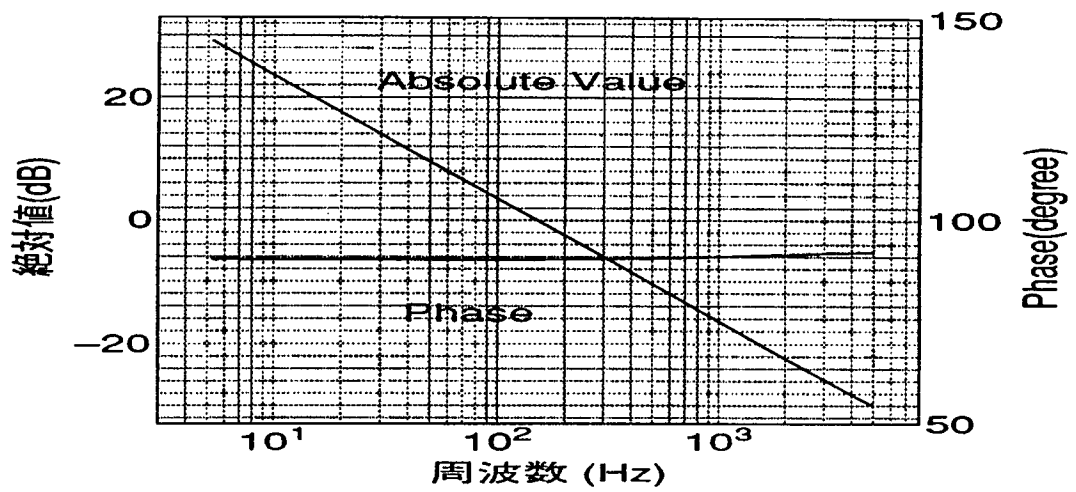


図 B.3: 完全積分回路の特性

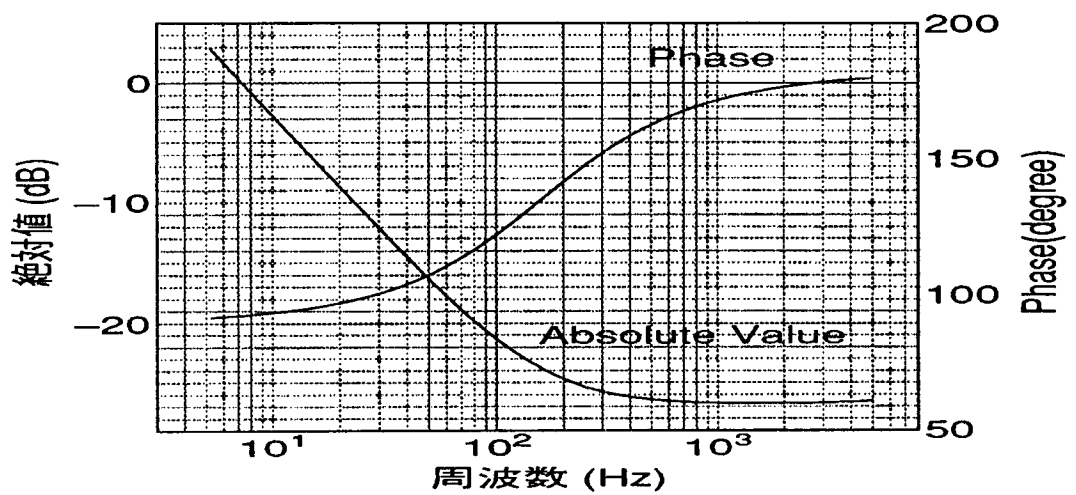


図 B.4: DC Gain を持たせる回路の特性

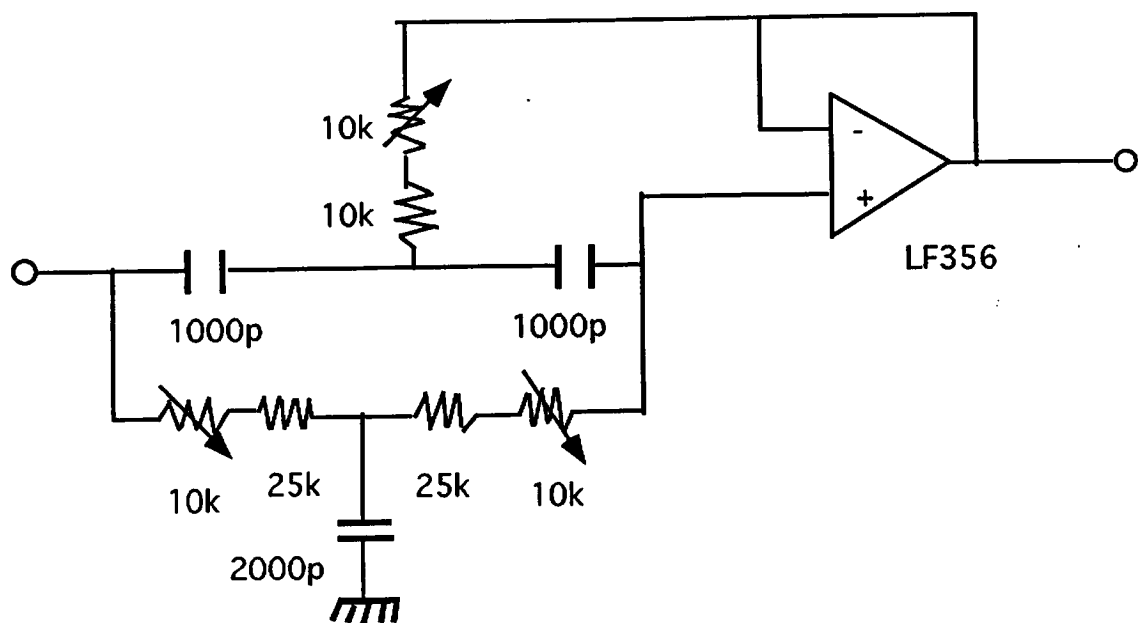


図 B.5: notch filter の回路図

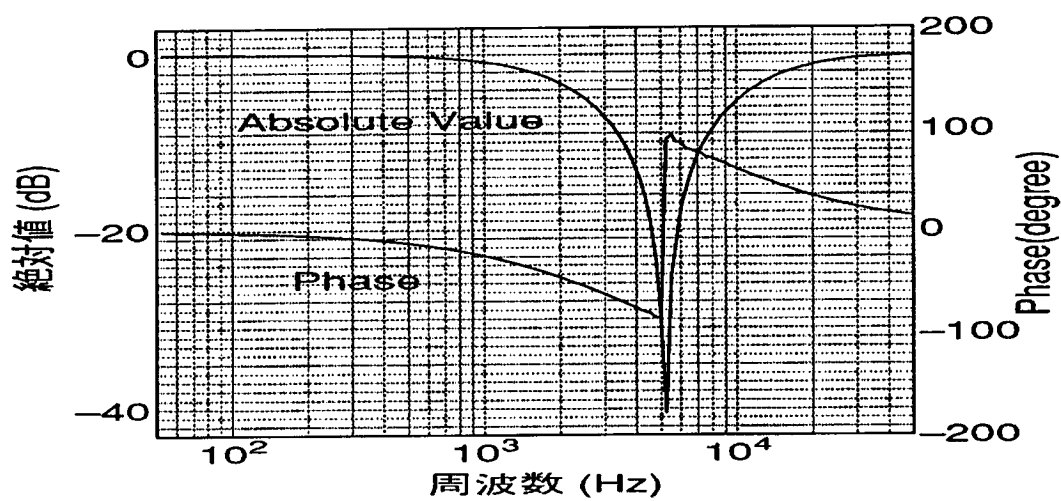


図 B.6: notch filter の特性

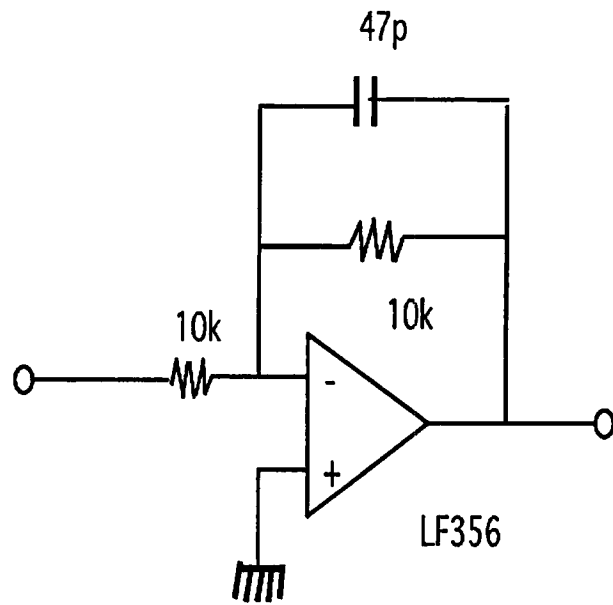


図 B.7: low pass filter の回路図

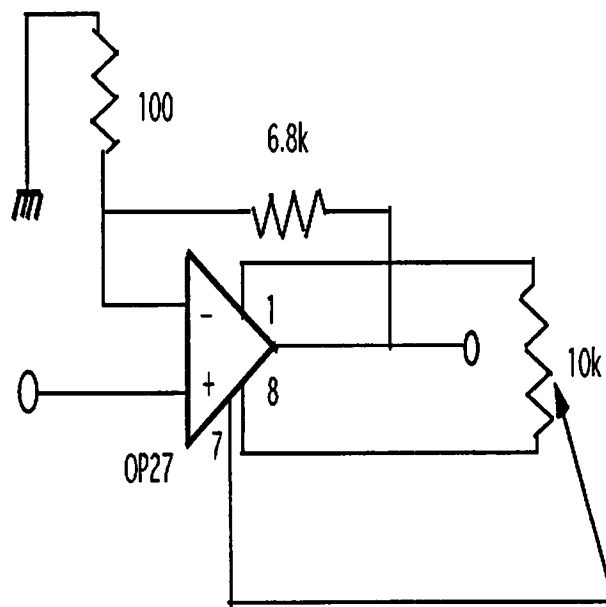


図 B.8: 増幅器の回路図

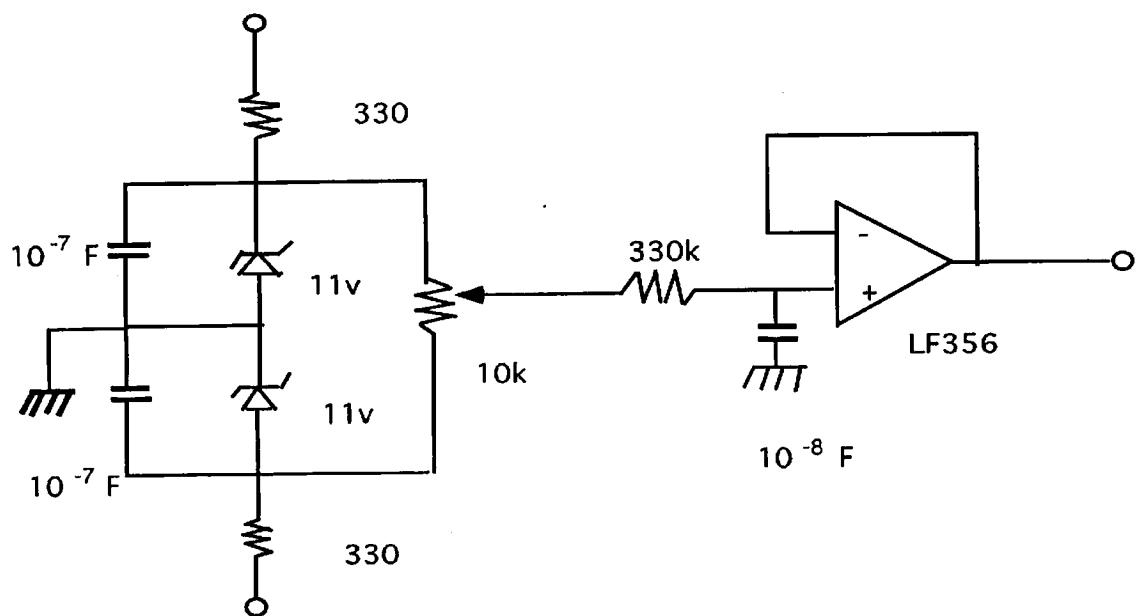


図 B.9: DC-offset を与える回路

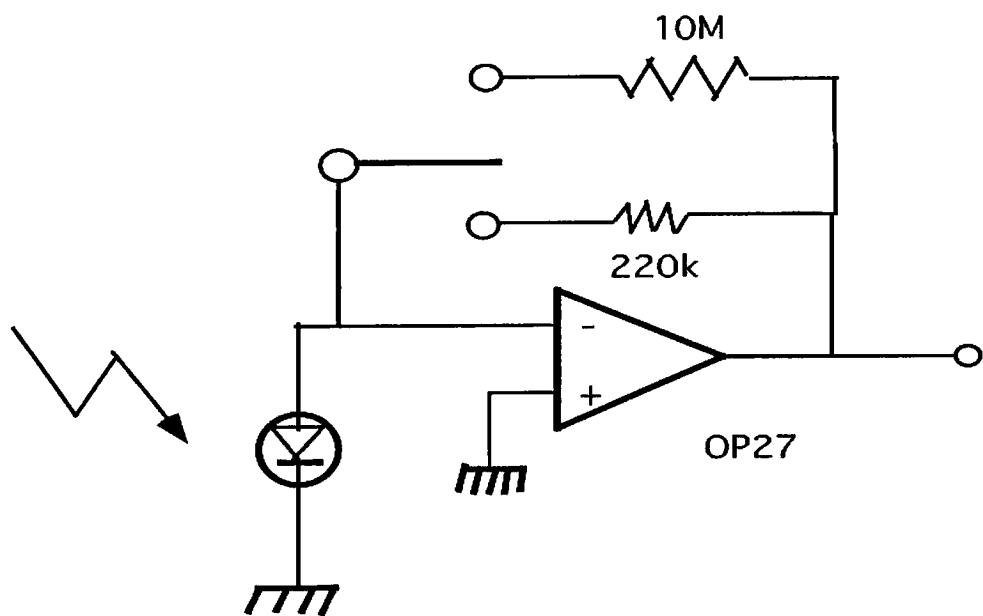
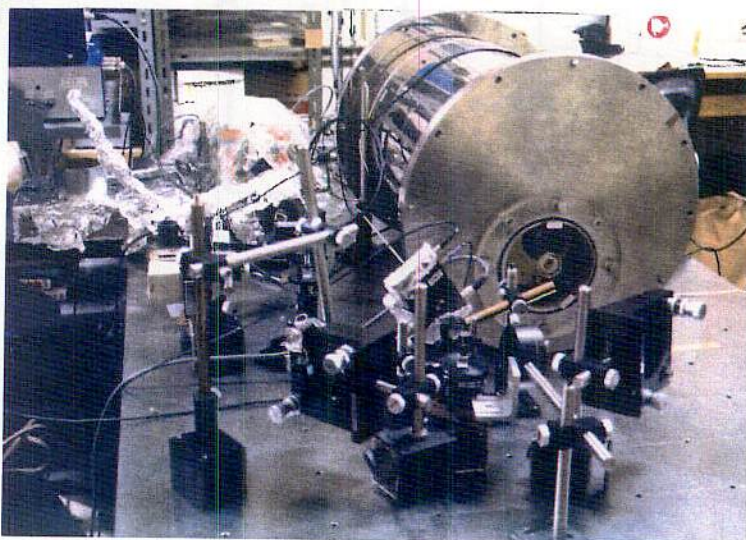


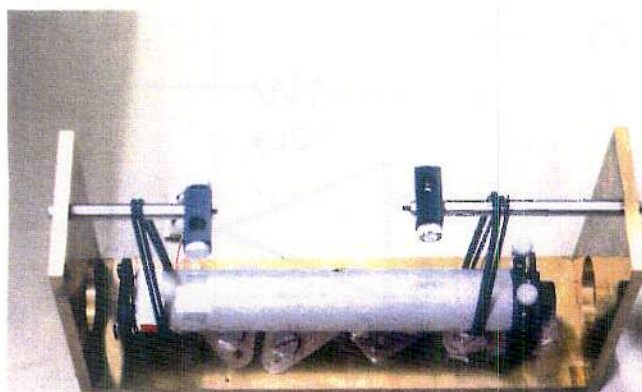
図 B.10: photo detector の回路図

Appendix C

実験装置の写真



上図:実験装置の全景 下図:FP cavity



Bibliography

- [1] J.H.Taylor and J.M.Weinberg,Astrophys.J.345 (1989)
- [2] 平川浩正: 相対論 (第 2 版) 共立出版 (1986)
- [3] 内山龍雄: 一般相対性理論 (第 10 版) 裳華房 (1992)
- [4] W.Misner,S.Rhorne,J.A.Wheeler,*Gravitation*,freeman (1973)
- [5] J.Weber,Phys.Rev.Lett.22(1969)1320
- [6] B.S.Sathyaprakash and S.V.Dhurandhar,Phys.Rev.D44(1991)3819
- [7] B.S.Sathyaprakash and S.V.Dhurandhar,Phys.Rev.D49(1994)1707
- [8] Kip S.Thrne,A Caltech Goldenrod Preprint (1990)
- [9] H.Kogelnik and T.Li,Proc.IEEE 54(1966)1312
- [10] A.Giazotto,Physics Reports 182 (1989)365-424
- [11] R.Drever et al.,Appl.Phys.B32(1983)97
- [12] 早川幸男、坪野公夫:数理科学 11 月号 サイエンス社 (1990)
- [13] 三尾典克、大橋正健編:重力波アンテナ技術検討書 (1992)
- [14] 船曳淳:修士論文 (1995)

謝辞

この実験を行なうにあたって非常に多くの方にお世話になりました。東京大学理学系研究科助教授の坪野公夫氏にはお忙しい中、修士2年間に渡っていろいろな御指導を頂きました。東京大学工学系研究科助教授の三尾典克氏には、実験の指導をして頂くとともにいろいろ相談にのって頂きました。坪野研究室助手の河辺径太氏には実験の理屈から実際の実験に至るまでの全ての面でお世話になりました。三尾研究室助手の森脇成典氏には実験について分からないときいろいろ教えて頂いたり、参考となる文献を紹介して頂いたり、いろいろお世話になりました。坪野研究室 D3 の新谷昌人氏には実験の面では周波数変調による error signal の取り出しを教えて下さり、解析の上で最小二乗法の program を提供していただき、お世話になりました。D1 の近藤尚人氏、東芝の白土昌孝氏にはおりにふれいろいろ励まして頂きました。M1 の栃久保邦治氏、安東正樹氏とはとは実験に関して有益な議論を交わすことが出来ました。これらの方々に深く感謝いたします。

special thanks to Jun Funabiki.