

修士論文

ディスクアンテナの複数モードを用いた
重力波検出法

1987年1月

物理学専門課程

水谷晶彦

目 次

第 1 章	序	1
第 2 章	アンテナ	4
	§ 2-1 重力波の中のアンテナの振動	4
	§ 2-2 アンテナの振動によって放射される重力波	7
	§ 2-3 アンテナの受けるエネルギー	11
	§ 2-4 アンテナの固有振動	12
第 3 章	信号とその処理	17
	§ 3-1 アンテナの熱振動	19
	§ 3-2 トランスデューサー	21
	§ 3-3 PSD	24
	§ 3-4 相関係数	27

第4章	実験	31
§ 4-1	装置	31
a)	真空装置と防振系	31
b)	アンテナ	32
c)	トランスデューサー	35
○ d)	周波数追尾型発振器(F. F. O.)	37
§ 4-2	熱振動の相関	44
§ 4-3	非定常状態での相関	50
a)	パルスによる励起	50
b)	スピーカーによる定常的な励起	53
§ 4-4	電圧性ノイズの相関	56
§ 4-5	同一モードの相関	59
§ 4-6	重力波の観測	62
第5章	考察	67
謝辞		69
参考文献		70

第1章 序

1960年代後半のJ. Weberによる実験¹⁾以来、重力波検出の試みは数多くなされてきている。しかし、これに成功した例は今までに存在しない。これは、重力が極めて弱いため放出される重力波が小さく、また、重力波と検出器との相互作用も弱いという2重の困難による。現在、世界最高の感度を持つStanford大学、Roma大学の共鳴型検出器でさえ、銀河中心程度の距離で起きた超新星爆発からの重力波をやっと捉えられるという程度に過ぎない。また、これらも、開発途上の段階にあり、1987年の超新星爆発の際には、世界中の主な検出器は、すべて稼働していなかった。SN1987aのような肉眼でも確認できる超新星爆発は極めて稀であるので、重力波グループは、非常に惜しい機会を逸したことになる。

一方、最も楽観的な予測では、銀河中心付近では数年に一度くらいの割合で超新星爆発があるという説もあるが、これまでの観測手段は光を中心とした電磁波にほとんど限られており、たとえ爆発があったとしても、星間物質などに遮られて観測されることがなかった。しかし、今回SN1987aによってニュートリノによる検出法が確立されたため²⁾、今後は超新星爆発をニュートリノから知ることができるようになるであろう。これによって、重力波検出の可能性が非常に高まることは明らかである。超新星からの重力波が発見された場合、時空の構造そのものが伝わるので、これまでに得ることのできなかった多くの情報をもたらす、星の崩壊過程の理論にも大きな貢献が期待される。

現在、重力波検出には大別して2つの方式が用いられている。1つは共鳴質量型であり、もう1つは自由質点型である。共鳴質量型は、重力波によって励起される弾性体の振動を検出する方法で、ここに用いる弾性体としては、ふつう、ア

ルミなどでできたアンテナを用いる。また、低周波の重力波を探索するには、地球、月のような天体の共鳴振動を用いることもある。この方式の欠点は、振動体の大きさ、材質、形状によって、周波数が決定されてしまうことであり、また、その周波数帯域も非常に狭いものである。そして、アンテナの熱振動を減少させ、同時に、振動のQ値を高くするために低温に保つ必要がある。このことも実験を困難している要因である。しかし、現在の段階では最も研究が進んでおり、他の方式に比べて高い感度が安定に得られている。自由質点型には、レーザー干渉計を用いる方法と天体や人工衛星の軌道の精密測定をする方法がある。特に、レーザー干渉計は、ワイドバンドの信号を取り出せる点や、常温で動作できる点が優れているが、装置が非常に大型となり、技術的にも未解決の問題が多く残されている。このため、実際に観測に用いられるようになるまでにはかなりの時間を要するであろう。将来的には、バーストのような未知の重力波源に対しては干渉計を、パルサーのような周波数のはっきりしているものに対しては共鳴型アンテナを使うというような役割の分化が進むものと考えられる。東京大学に於いては、低周波の共鳴型アンテナを開発し、主としてパルサーからの重力波探索に用いてきた。しかし、予測される信号に比べ、感度がかなり低く、現存のパルサーからの重力波検出は大きな技術革新がない限りきわめて困難が予想される。

ところで、SN1987aの残骸は、まだ対称性が揃っておらず、強い重力波を放出している可能性がある。そして、その周波数が明確にわかる場合には、現存の検出器の感度でも、重力波を検出できる可能性がある。周期変化が小さい場合には連続波検出の解析法がそのまま使え、振幅が比較的小さくても検出できる。また、周期変化が大きいときには、放射重力波の振幅が大きいと考えられる。この場合には、バースト波的解析を行なうが、検出可能性はやや小さくなるであろう。早ければ、1988年の初頭には、X線や γ 線のデータが揃うため、周波数などがわかる可能性が大きい。このような点から、高感度の重力波検出器を開発し、作

動させることが急務だといえる。これを目指して、現在、坪野研究室では、

1. 5 kHz 以下の帯域をカバーする高周波ねじれアンテナの開発を進め、また、今後のバーストは観測の意味も含めて 1. 6 kHz 以上の帯域用に大型低温ディスクアンテナの建設を検討している。

さて、現存する全ての検出器は、振幅と周波数の情報しか持たない。特に、共鳴型アンテナの場合には単一のモードのみを用いているため、周波数も限定されてしまっている。しかし、重力波に感応する全てのモードを用いれば、実効的に感度が上昇し、周波数領域も広げることができる。それだけでなく、アンテナの形状によっては、特定の周波数帯域での入射重力波の偏極も特定することができる。したがって、これからの共鳴型アンテナに於いては、複数のモードを用いた検出法は、きわめて有望なものとなるであろう。一方、これを可能にするためには、各モードの振動が十分に独立を保ち、信号が完全に分離できるということが実証されていなければならない。低周波のねじれ型アンテナに於いては、これらの事はすでに実証されている。³⁾ しかし、これは周波数も振動のパターンもまったく違い、また、同一の偏極に対して感応するモードについて調べられたものであった。そこで今回は、大型アンテナに向けての予備実験としての意味も含めて、ディスク型アンテナの重力波に対する感度が最も高いふたつの似通ったモードを用いて、これらの振動の間の相関を調べることにした。

以下、第2章ではアンテナに関する一般的な計算を行ない、第3章では信号処理システムとノイズに関する考察をした。第4章は、実際に行なった実験の詳細を記し、第5章でこれらをまとめて実験についての考察を行なった。

第2章 アンテナ

§ 2-1 重力波の中のアンテナの振動^{4),5)}

重力波の場の中に2つの近接した質点が相対位置 X^i 離れて存在する場合を考える。このとき、測地線偏差の方程式より、

$$\frac{D^2 X^h}{D\tau^2} = R^h{}_{iik} \frac{dX^i}{d\tau} \frac{dX^i}{d\tau} X^k \quad (2-1)$$

ここで、

$$\frac{D\bar{X}^i}{D\tau} = 0 \quad (2-2)$$

を満たし、ミンコフスキー空間では $\bar{X}^i = X^i$ となるベクトル $\bar{X}^i$ を導入する。これを用いて

$$X^i = \bar{X}^i + \xi^i$$

とおくと、(2-1), (2-2)より

$$\frac{D^2 \xi^h}{D\tau^2} = R^h{}_{iik} \frac{dX^i}{d\tau} \frac{dX^i}{d\tau} (\bar{X}^k + \xi^k) \quad (2-3)$$

この空間に弱い重力波の場があるとする、最低次の近似で、

$$\frac{d^2 \xi^h}{d\tau^2} = R^h{}_{iik} \frac{dX^i}{d\tau} \frac{dX^i}{d\tau} \bar{X}^k \quad (2-4)$$

質点の速度が光速に比べて十分小さいとすると

$$\frac{dx^i}{d\tau} = (1, 0, 0, 0) \quad (2-5)$$

とおくことができる。このとき(2-4)は

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} = c^2 R^i{}_{00k} \bar{X}^k$$

ここで、 R_{ikl} の対称性から

$$\frac{d^2 \xi^0}{dt^2} = 0 \quad (2-6)$$

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{dt^2} = c^2 R^\alpha{}_{00\beta} \bar{X}^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (2-7)$$

を得る。(2-6)より、 $\xi^0 = a t + b$ であるが、 $t \rightarrow \infty$ で ξ^0 が発散しないためには、 $a = 0$ 。また、 $\bar{X}^i$ は任意であるから $b = 0$ とすることができる。従って、 $\xi^0 = 0$ とする。(2-7)は

$$\ddot{\xi}_\alpha = \frac{c^2}{2} \left(\frac{1}{c^2} \ddot{h}_{\alpha\beta} \bar{X}^\beta + \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 h_{0\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^0} + \frac{\partial^2 h_{\alpha 0}}{\partial x^0 \partial x^\beta} \right)$$

ところで、弱い重力波の場は適当な座標変換によって、

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{11} & h_{12} & 0 \\ 0 & h_{12} & -h_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすることができる。(T.-T.Gauge) この座標系で、

$$\ddot{\xi}_\alpha = \frac{1}{2} \ddot{h}_{\alpha\beta} \bar{X}^\beta \quad (2-8)$$

今度は、2つの質点の代わりに弾性体（アンテナ）のある場合を考える。弾性体の自由振動の運動方程式は、ラメの係数を μ, λ 、密度 ρ 、変位ベクトルを u として

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \text{grad div } u = 0 \quad (2-9)$$

で与えられる。(2-8)より、弾性体が重力波の場の中にあるときには

$$\rho u_{\alpha} - \mu \Delta u_{\alpha} - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} = \frac{1}{2} \rho \ddot{h}_{\alpha\beta} \bar{X}_{\beta} \quad (2-10)$$

ここで、 u をフーリエ展開して周波数 $\omega_n / 2\pi$ の固有振動に分解すると、

$$u(r, t) = \sum \xi_n(t) w_n(r) \quad (2-11)$$

$$\rho \omega_n^2 w_{n\alpha} + \mu \Delta w_{n\alpha} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w_{n\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} = 0 \quad (2-12)$$

一般座標 ξ として、トランスデューサーの感知する変位をとる。このとき運動エネルギーの考察から ξ に対する n 番目のモードの換算質量 μ_n を

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dV = \frac{1}{2} \sum \mu_n \dot{\xi}^2(t) \quad (2-13)$$

によって定義する。(2-11), (2-13)より、

$$\mu_n = \int \rho |w_n|^2 dV \quad (2-14)$$

従って(2-10), (2-12)より、

$$\rho \ddot{\xi} w_{n\alpha} + \rho \omega_n^2 w_{n\alpha} = \frac{1}{2} \rho \ddot{h}_{\alpha\beta} \bar{X}_{\beta}$$

両辺に $w_{n\alpha}$ をかけて積分すると

$$\mu_n \ddot{\xi}_n + \mu_n \omega_n^2 \xi_n = \frac{1}{2} \int \rho \ddot{h}_{\alpha\beta} \bar{X}_{\beta} w_{n\alpha} dV$$

重力波の波長はアンテナの大きさに比べて非常に大きいと考えられるので

$$\text{右辺} \simeq \frac{\ddot{h}_{\alpha\beta}}{2} \int \rho w_{n\alpha} \bar{X}_{\beta} dV$$

としてもよい。従って

$$\mu \ddot{\xi}_n(t) + \mu \omega_n^2 \xi(t) = \frac{1}{4} \hbar_{\alpha\beta} q_{n\alpha\beta} \quad (2-15)$$

ここで

$$q_{n\alpha\beta} = \int \rho (w_{n\alpha} \bar{X}_\beta + w_{n\beta} \bar{X}_\alpha - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} w_{n\gamma} \bar{X}_\gamma) dV \quad (2-16)$$

は、4重極能率の変動成分である。現実のアンテナは、内部摩擦の存在のために減衰振動をする。よって、現象論的にこの項をつけ加えた式

$$\mu \left(\ddot{\xi}_n(t) + \frac{\omega_n}{2Q_n} \dot{\xi}(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) \right) = \frac{1}{4} \hbar_{\alpha\beta} q_{n\alpha\beta} \quad (2-17)$$

が、アンテナの方程式である。

§ 2-2 アンテナの振動によって放射される重力波⁴⁾

アンテナと重力波とのカップリングを知るために、まず、アンテナからの重力波の放射を考える。

アンテナが存在するため、重力場の方程式は

$$\frac{1}{2} \square \psi_i^k = \frac{8\pi k}{c^4} \tau_i^k \quad (2-18)$$

$$\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k h \quad (2-19)$$

となる。ゲージ条件を課して、

$$\partial \psi_i^k / \partial x^k = 0 \quad (2-20)$$

(2-18)、(2-20)より、

$$\partial \tau_i^k / \partial x^k = 0 \quad (2-21)$$

(2-18)を積分して

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4} \int \tau_i^k(t-R/c) \frac{dV}{R} \quad (2-22)$$

アンテナの振動は光速に比べて十分遅いと考えられるので、遠距離の場合は

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4 R_0} \int \tau_i^k(t-R_0/c) dV \quad (2-23)$$

で近似できる。

(2-21)の0成分とその他の部分を分離して、

$$\frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{\alpha 0}}{\partial x^0} = 0 \quad (2-24)$$

$$\frac{\partial \tau_{0\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{00}}{\partial x^0} = 0 \quad (2-25)$$

(2-24)に x^β をかけて全空間で積分する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0} \int \tau_{\alpha 0} x^\beta dV &= \int \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} x^\beta dV \\ &= \int \frac{\partial (\tau_{\alpha\gamma} x^\beta)}{\partial x^\gamma} dV - \int \tau_{\alpha\beta} dV \end{aligned}$$

右辺第一項は、ガウスの定理を用いて表面積分に直すと0になるので

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^0} (\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha) dV$$

次に(2-25)に $x^\alpha x^\beta$ をかけて全空間で積分する。

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int \tau_{00} x^\alpha x^\beta dV = - \int (\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha) dV$$

これら2式を比べて

$$\begin{aligned}\int \tau_{\alpha\beta} dV &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^0} \int \tau_{00} x^\alpha x^\beta dV \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho x^\alpha x^\beta dV\end{aligned}\quad (2-26)$$

(2-26)を(2-23)に代入すると

$$\psi_{\alpha\beta} = -\frac{2k}{c^4 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho x^\alpha x^\beta dV \quad (2-27)$$

重力波の伝播方向を z とし、平面波を考えると $h_{11} = -h_{22}$, $h_{12} = h_{21}$ だけが 0 でない成分である。また、 h_{ij} は $ct - z$ だけの関数であるから、

$$h_{ij}' = -\dot{h}_{ij}/c$$

よって、エネルギーフラックスは

$$c t^{03} = \frac{c^3}{16\pi G} \left[\dot{h}_{12}^2 + \frac{1}{4} (\dot{h}_{11} - \dot{h}_{22})^2 \right] \quad (2-28)$$

ここで、質量4重極モーメント

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} x_r^2 \right) dV$$

を導入すると(2-27)より、

$$h_{12} = -\frac{2k}{c^4 R_0} \ddot{Q}_{12} \quad h_{11} - h_{22} = -\frac{2k}{c^4 R_0} (\ddot{Q}_{11} - \ddot{Q}_{22})$$

$$c t^{03} = \frac{G}{4\pi c^5 R_0^2} \left\{ \left(\frac{\ddot{Q}_{11} - \ddot{Q}_{22}}{2} \right)^2 + \ddot{Q}_{12}^2 \right\}$$

第1項と第2項はそれぞれ独立な偏向の放射に対応している。偏向を示す3次元テンソル e^+ , e^x を導入すると

$$c t^{03} = \frac{G}{8\pi c^5 R_0^2} \left\{ (e^+_{\alpha\beta} \ddot{Q}_{\alpha\beta})^2 + (e^x_{\alpha\beta} \ddot{Q}_{\alpha\beta})^2 \right\} \quad (2-29)$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \times \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これを一般の方向に直すには、3次元空間での回転を e に施せばよい。これにより、立体角 $d\Omega$ に放射された偏向 A の重力波の強度は

$$p d\Omega = \frac{G}{8\pi c^5} \left(e_{\alpha\beta}^A \ddot{Q}_{\alpha\beta} \right) d\Omega$$

である。ところで、

$$\ddot{Q}_{\alpha\beta} = -i\omega^3 q_{\alpha\beta} \xi$$

であるから

$$p d\Omega = \frac{G}{8\pi c^5} \xi^2 \omega^6 \left(e_{\alpha\beta}^A q_{\alpha\beta} \right)^2 d\Omega \quad (2-30)$$

(2-30)の θ , ϕ 依存部分をアンテナの指向性関数とし、

$$\frac{1}{4\pi} \int f(\theta, \phi) d\Omega = 1$$

$$f(\theta, \phi) = f^+(\theta, \phi) + f^*(\theta, \phi)$$

となるように定義すると

$$f^A(\theta, \phi) = \frac{5(q_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^A(n))^2}{4q_{\alpha\beta}^2} \quad (2-31)$$

(2-30)を(2-31)を用いて書き改めると

$$p^A(\theta, \phi) = \frac{G}{10\pi c^5} A_G T M \omega^4 f^A(\theta, \phi) \quad (2-32)$$

ただし、 T はアンテナのエネルギーを表わす。また、 A_G は有効断面積と呼ばれ、

$$A_G = \frac{2q_{\alpha\beta}^2}{\mu M} \quad (2-33)$$

で定義される。 A_G は q , μ 等とは違い、アンテナに固有のパラメーターで、一般

座標の取り方に依存しない。

§ 2-3 アンテナの受けるエネルギー⁶⁾

短いパルス状の重力波が入射した時にアンテナが得るエネルギーを計算する。

この場合には振動の減衰はあまり重要でないので(2-15)より、

$$\xi = \frac{1}{4\mu\omega} \int_{-\infty}^t \sin\omega(t-s) \ddot{h}_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} ds$$

アンテナのエネルギーEは

$$E = \frac{\mu}{2} \omega^2 \xi^2$$

$$= \frac{1}{32\mu} \left(\int_{-\infty}^t \sin\omega(t-s) \ddot{h}_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} ds \right)^2$$

仮定より、 $\ddot{h}_{\alpha\beta} \neq 0$ である時間が非常に短いので、

$$E = \frac{(q_{\alpha\beta} e^A_{\alpha\beta})^2 \omega^2}{4c^3 \omega} F^A(\omega) \quad (2-34)$$

と書くことができる。但し、

$$F^A(\omega) \equiv \frac{c^3 \omega^2}{16\pi G} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^A_{\alpha\beta} \ddot{h}_{\alpha\beta} \exp(-i\omega t) dt \right|^2 \quad (2-35)$$

は、重力波のエネルギーフラックスのスペクトルである。(2-34)より、

$$E = \frac{\pi G}{10c^3} M \omega^2 A_G^2 f^A(\theta, \phi) F^A(\omega) \quad (2-36)$$

次に、周波数の一定した波が連続的にくる場合を考える。このときには減衰が基本的に重要な役割をする。定常状態に於いては、散逸によるエネルギー損失が重力波から受け取るエネルギーと釣り合っているので(2-17)より、

$$\frac{\mu \omega}{2Q} \xi = \frac{1}{4} h_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}$$

$$\frac{\mu \omega^2}{2Q} \xi = \frac{\omega^2}{4} h_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}$$

$$\xi = \frac{Q}{2\mu} h_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}$$

$$E = \frac{\mu}{2} \omega^2 \xi^2 = \frac{Q^2 \omega^2 (h_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta})^2}{8\mu}$$

$$\therefore E = \frac{2\pi G}{5c^3} M Q^2 A_G^2 f^4 S^4 \quad (2-37)$$

ただし、Sは(2-28)で与えられるエネルギーフラックスである。

§ 2-4 アンテナの固有振動^{7),8),9)}

ここでは、ディスク型アンテナの固有振動を調べる。最初に第0近似としてアンテナを薄い円板であるものとする。円板の半径a，厚さh，密度ρ，ポアソン比σ，ヤング率Eとし、面内振動のみを扱う。円板の重心を原点、厚さ方向をzとする円筒座標をとり、板全体にわたって応力 $\sigma_{kz} = 0$ とする。(k=r, θ, z)

$$u_r = U$$

$$u_\theta = V$$

(2-38)

$$U = \sum_n U_n \cos n\theta \cos \omega t$$

$$V = \sum_n V_n \sin n\theta \cos \omega t$$

とすると、微小部分 $r dr d\theta$ の運動エネルギーは、

$$\frac{1}{2} \omega^2 \rho h (U_n^2 + V_n^2) r dr d\theta$$

従って、この部分のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \omega^2 \rho (U^2 + V^2) - \frac{1}{2} \sigma_{ik} u_{ik} \quad (2-39)$$

全ラグランジアンは

$$L = \frac{E h}{2(1-\sigma^2)} \int \left\{ k^2 (U^2 + V^2) - \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{U}{r} \right)^2 \right. \\ \left. + 2(1-\sigma) \frac{\partial U}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{U}{r} \right) - \frac{1-\sigma}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right)^2 \right\} r dr d\theta$$

$$k^2 = \frac{(1-\sigma^2) \omega^2 \rho}{E}$$

モードが安定であるためには、U, Vの微小変化に対してLの変分が0となればよい。上の式で $\delta L = 0$ としたとき、Euler-Lagrange方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_\theta} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_\theta} \right) = 0$$

但し

$$U_r = \frac{\partial U}{\partial r} \quad U_\theta = \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad V_r = \frac{\partial V}{\partial r} \quad V_\theta = \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial r} \left(U_r + \frac{U}{r} + \frac{1}{r} V_\theta \right) + k^2 U + \frac{1-\sigma}{2} \left(\frac{1}{r^2} U_\theta - \frac{1}{r} V_r - \frac{V}{r^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(U_r + \frac{U}{r} + \frac{1}{r} V_\theta \right) + k^2 V$$

$$+ \frac{1-\sigma}{2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) \left(\frac{1}{r} U_\theta + V_r - \frac{V}{r} \right) - \frac{2}{r} U_{r\theta} \right\} = 0$$

これら2式より

$$U_n = A_n \left\{ \frac{n}{k r} J_n(kr) - J_{n+1}(kr) \right\} + \frac{n B_n J_n(k'r)}{k r}$$

$$V_n = - \left\{ \frac{n A_n J_n(kr)}{k r} + B_n \left\{ \frac{n}{k r} J_n(k'r) - \frac{k'}{k} J_{n+1}(k'r) \right\} \right\} \quad (2-40)$$

$$k'^2 = \frac{1-\sigma}{2} k^2$$

境界条件は

$$\sigma^{rr}(r=a) = \sigma^{r\theta}(r=a) = 0$$

で定まる。

$$\sigma^{rr} = \sum \sigma_n^{rr}(r) \cos n\theta$$

$$\sigma^{r\theta} = \sum \sigma_n^{r\theta}(r) \sin n\theta \quad (2-41)$$

と置くと

$$\sigma^{rr} = \frac{E}{1-\sigma^2} \left\{ U_r + \sigma \left(\frac{1}{r} V_\theta + \frac{U}{r} \right) \right\}$$

$$\sigma^{r\theta} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left(V_r - \frac{V}{r} + \frac{1}{r} U_\theta \right)$$

であるから

$$\sigma_n^{rr}(r) = \frac{E}{(1+\sigma)r^2} \left[A_n \left\{ \left\{ n(n-1) - \frac{(k'r)^2}{2} \right\} J_n(kr) + kr J_{n+1}(kr) \right\} \right. \\ \left. + n B_n \left\{ (n-1) J_n(k'r) - k'r J_{n+1}(k'r) \right\} \right] \quad (2-42)$$

$$\sigma_n^{r\theta}(r) = \frac{E}{(1+\sigma)r^2} \left[n A_n \left\{ (n-1) J_n(kr) - k r J_{n+1}(kr) \right\} \right. \\ \left. + B_n \left\{ \left\{ n(n-1) - \frac{(k'r)^2}{2} \right\} J_n(k'r) + k'r J_{n+1}(k'r) \right\} \right] \quad (2-43)$$

$$\sigma^{rr}(ka) = \sigma^{r\theta}(ka) = 0 \text{ より}$$

$$\begin{vmatrix} \{n(n-1) - \frac{(k'a)^2}{2}\} J_n(ka) + ka J_{n+1}(ka) & n\{(n-1)J_n(k'a) - k'a J_{n+1}(k'a)\} \\ n\{(n-1)J_n(ka) - ka J_{n+1}(ka)\} & \{n(n-1) - \frac{(k'a)^2}{2}\} J_n(k'a) + k'a J_{n+1}(k'a) \end{vmatrix} = 0$$

..... (2-44)

(2-44)より ka の値が決まり、周波数を算出することができる。各 n の値に対して、 k の解は複数存在する。 k が定まると(2-40)を用いて、振動モードが決定できる。ところで、(2-38)には、 $\sin n\theta$ 、 $\cos n\theta$ の選び方に関して任意性があるので、 $n \neq 0$ のモードは全て2重に縮退している。そこで、以後はモードを3つの整数の組 (n, m, p) を用いて表わすことにする。但し、 n はベッセル関数の次数、 m は1つの n に対する k の解の順番、 p は2重の縮退のうちのどちらかを表わす。

§ 2-3 までの議論により、質量4重極能率の大きいモードが重力波に対する感度が高いことがわかる。最も $q_{\alpha\beta}$ が大きいのは $n=2$ のモードで、 $(2, 1, 1)$ 及び $(2, 1, 2)$ を実験に用いた。実際に実験に用いるには円板では不便であるので、8角柱にしてモードを分離した。このように円から形を崩しているので、(2-44)は直接用いられない。そのため、固有振動数を摂動によって解く。外周を

$$r(\theta) = r_0 + \delta r(\theta)$$

$$\int_0^{2\pi} \delta r(\theta) d\theta = 0 \quad (2-45)$$

とすると、(2-44)の代わりに、

$$\sigma_{np}^{rr} (r_0 + (-1)^{p+1} \varepsilon_n) = 0$$

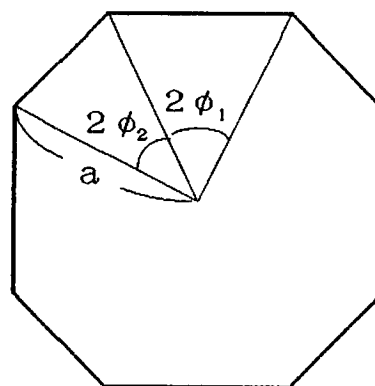
$$\sigma_{np}^{r\theta} (r_0 + (-1)^p \varepsilon_n) = 0 \quad (2-46)$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta r(\theta) \cos 2n\theta d\theta$$

が得られる。これらの式から、(2-44)とまったく同様にして周波数を知ることが

できる。

8角形の形状を右の図のよう
に表わすと外周 ℓ は



$$\ell = 4a \left\{ \cos \phi_1 \log \frac{1+\sin \phi_1}{1-\sin \phi_1} + \cos \phi_2 \log \frac{1+\sin \phi_2}{1-\sin \phi_2} \right\}$$

従って、

$$r_0 = \frac{\ell}{2\pi}$$

$$= \frac{2a}{\pi} \left\{ \cos \phi_1 \log \frac{1+\sin \phi_1}{1-\sin \phi_1} + \cos \phi_2 \log \frac{1+\sin \phi_2}{1-\sin \phi_2} \right\} \quad (2-47)$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(\theta) \cos 2n\theta \, d\theta - \frac{r_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2n\theta \, d\theta$$

$$= \begin{cases} 0 & n=0; \text{奇数} \\ \frac{4a}{\pi} \left\{ \cos \phi_1 \int_0^{\phi_1} \sec \theta \cos 2n\theta \, d\theta \right. \\ \quad \left. \pm \cos \phi_2 \int_0^{\phi_2} \sec \theta \cos 2n\theta \, d\theta \right\} & + : n=4i \\ & - : n=4i+2 \end{cases}$$

$$(i=0,1,2,\dots) \quad (2-48)$$

とくに

$$\varepsilon_2 = \frac{4a}{\pi} \left\{ \cos \phi_1 \left(\frac{2}{3} \sin 3\phi_1 - 2\sin \phi_1 + \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin \phi_1}{1-\sin \phi_1} \right) \right.$$

$$\left. - \cos \phi_2 \left(\frac{2}{3} \sin 3\phi_2 - 2\sin \phi_2 + \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin \phi_2}{1-\sin \phi_2} \right) \right\} \quad (2-49)$$

第3章 信号とその処理

アンテナの振動は、図3-1のような経路を通して最終的にコンピュータに記録される。この章では、各部分でどのような信号が出力され、また処理されるかを考える。図中にF.F.O.とあるのは、PSDの参照信号用の周波数追尾型発振器である。(§4-1 d)

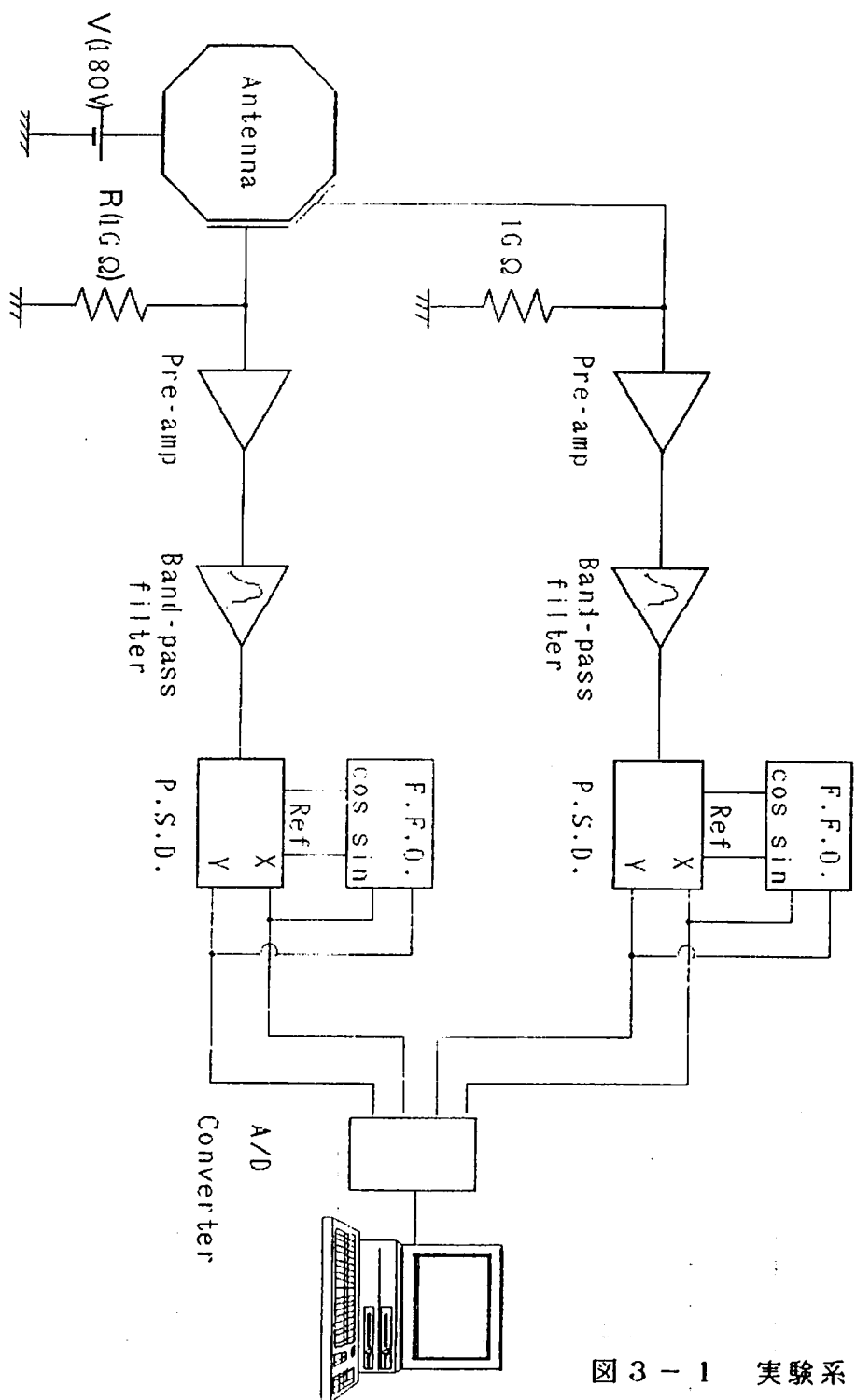


图 3 - 1 实验系

§ 3-1 アンテナの熱振動

アンテナは、外力が加わらない場合でも、熱振動をする。重力波を観測するときには、これがトランスデューサーの雑音とともにアンテナの感度を決定してしまう。今回は、この熱振動を利用し、モード間の相関を調べるための信号とした。以下では、Q値は1に比べて非常に大きく、減衰項による周波数変化は無視できるものとした。また、トランスデューサーによる力学系への影響も無視した。

外力Fの加わるとき、アンテナの運動方程式は

$$\mu \left(\ddot{x} + \frac{\omega}{Q} \dot{x} + \omega^2 x \right) = F(t)$$

これよりモードの周波数応答は

$$x(\omega) = A(\omega) F(\omega)$$

$$A(\omega) \equiv \frac{1}{\mu \omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega_0 \omega}{Q}}$$

従ってアンテナのグリーン関数は

$$\begin{aligned} G(t-t') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega \\ &= \frac{1}{\mu \omega} \exp\left(-\frac{t-t'}{2\tau_A}\right) \sin\omega(t-t') \theta(t-t') \end{aligned} \quad (3-1)$$

$$\tau_A = \frac{Q}{\omega}$$

ここで、 τ_A は、振動の減衰を示す時定数で、(エネルギー)緩和時間と呼ばれる。熱振動は、ランダムな運動であるので、その性質はすべてアンサンブル平均によって特徴づけられる。Fが熱振動のみであるとき

$$\begin{aligned}\langle F(t) \rangle &= 0 \\ \langle F(t) F^*(t') \rangle &= \frac{1}{2} \langle |F(\omega)|^2 \rangle \delta(t-t')\end{aligned}\quad (3-2)$$

である。ここで、 $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を示すものとする。定常状態にあつては、熱によるエネルギーの流入と、振動の減衰によるエネルギーの散逸とが釣りあっているはずである。時間 $d t$ 内に振動の減衰によって失われるエネルギーは

$$\begin{aligned}d E &= - \left(-\frac{\mu}{\tau_a} x \right) d x \\ &= \frac{\mu}{\tau_a} \dot{x}^2 d t \\ \therefore \langle \frac{d E}{d t} \rangle &= \frac{\mu}{\tau_a} \langle \dot{x}^2 \rangle\end{aligned}\quad (3-3)$$

アンテナが温度 T の熱平衡状態にあれば、各モードは $k T / 2$ のエネルギーを持つ。従つて、

$$\frac{1}{2} k T = \frac{\mu}{2} \langle \dot{x}^2 \rangle \quad (3-4)$$

(3-3), (3-4) より、

$$\langle \frac{d E}{d t} \rangle = \frac{k T}{\tau_a} \quad (3-5)$$

一方、単位時間当りに、熱雑音力のする仕事は、

$$\begin{aligned}\langle \frac{d W}{d t} \rangle &= \langle F(t) \dot{x} \rangle \\ &= \langle F(t) \frac{d}{d t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) F(s) ds \right\} \rangle \\ &= \frac{1}{4 \mu} \langle |F(\omega)|^2 \rangle\end{aligned}\quad (3-6)$$

(3-5), (3-6) は等しくなければならないので

$$\langle |F(\omega)|^2 \rangle = 4 \mu k T / r_a \quad (3-7)$$

となる。

§ 3-2 トランスデューサー¹⁰⁾

アンテナの振動はトランスデューサーによって電気信号に変換される。ここで用いたトランスデューサーは、静電型と呼ばれるもので、機械的振動を容量変化としてとらえ、電圧に変換する。

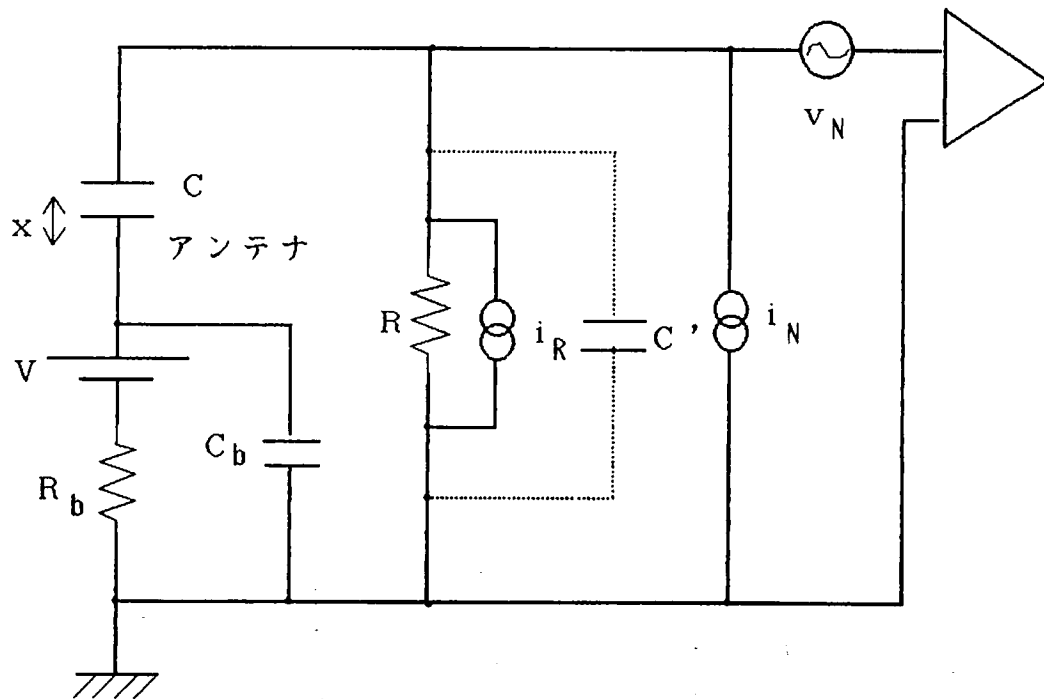


図 3-2 トランスデューサー回路

アンテナの平面部分に平行に極板を取り付け、バイアス電圧 V を与える。このとき、極板とアンテナの間の静電容量 C は、極板の面積を S 、アンテナと極板の平均の距離を d 、アンテナの微小振動による変位を x として

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d+x} \quad (3-8)$$

で与えられる。また、極板間に蓄えられた電荷を Q とすると、

$$V = \frac{Q}{C} + R (i_R + i_N + \dot{Q}) \quad (3-9)$$

但し、 i_R は抵抗の熱雑音電流、 i_N はアンプの電流性雑音である。

ここで、 $x=0$ のときの Q の値を Q_0 、 $Q(t) = Q_0 + q(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q_0 + q}{C} + R (\dot{q} + i_R + i_N) \\ &= \frac{(Q_0 + q)(d+x)}{\varepsilon_0 S} + R (\dot{q} + i_R + i_N) \end{aligned}$$

x 、 q の 1 次までの近似で、

$$\frac{q}{C_0} + \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S} x + R (\dot{q} + i_R + i_N) = 0 \quad (3-10)$$

従って、アンテナの角振動数 ω_0 、機械振動の Q 値 Q_M として、以下の方程式が成り立つ。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{q(t)}{C_0} + R \dot{q}(t) + R (i_R + i_N) &= -E x \\ \mu \left(\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q_M} \dot{x} + \omega_0^2 x \right) &= -E q + F \end{aligned} \right. \quad (3-11)$$

$$\quad (3-12)$$

$$\left(\text{但し、} E = \frac{V}{d}, C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \right)$$

(3-11)より、

$$q(t) = \frac{-C_0}{1+j\omega C_0 R} \{ E x + R (i_N + i_R) \} \quad (3-13)$$

(j は、虚数単位)

出力電圧 v は(3-13)より

$$v = \dot{q} R$$

$$= \frac{-j\omega C_0 R}{1+j\omega C_0 R} \{E x + R (i_N + i_R)\} + v_N \quad (3-14)$$

ここで、 v_N はアンプの電圧性雑音である。

次に、力学系への影響を見る。(3-13)を(3-12)に代入して、

$$\mu \left(\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q_n} \dot{x} + \omega_0^2 x \right) = \frac{C_0 E^2}{1+j\omega C_0 R} x + \frac{C_0 E R (i_R + i_N)}{1+j\omega C_0 R} + F \quad (3-15)$$

(ここで、 F は系に加わる外力とする。)

右辺第1項、第2項は、トランスデューサーからアンテナへの反作用である。第1項は共振周波数及び Q 値のの変化をもたらす。第2項はノイズとなって現われ、信号の上では外力と同様に温度上昇の形で表れる。これらの影響を調べるため、(3-15)を変形すると

$$\mu \left(\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q_n} \dot{x} + \omega_0^2 x \right) = \frac{C_0 E^2}{1+(\omega C_0 R)^2} (1-j\omega C_0 R) x + F' \quad (3-16)$$

$$F' = F + \frac{C_0 E R (i_R + i_N)}{1+j\omega C_0 R} \quad (3-17)$$

$$\therefore \mu \left\{ \ddot{x} + \left\{ \frac{\omega_0}{Q_n} + \frac{1}{\mu} \frac{C_0^2 E^2 R}{1+(\omega C_0 R)^2} \right\} \dot{x} + \left\{ \omega_0^2 - \frac{1}{\mu} \frac{C_0 E^2}{1+(\omega C_0 R)^2} \right\} x \right\} = F'$$

従って、トランスデューサーを取り付けた状態での Q 値、周波数は、

$$Q_{\text{eff}} = \frac{1}{\frac{1}{Q_n} + \frac{C_0^2 E^2 R}{\mu \omega (1+(\omega C_0 R)^2)}} \quad (3-18)$$

$$\omega_{\text{eff}} = \left(\omega_0^2 - \frac{1}{\mu} \frac{C_0 E^2}{1+(\omega C_0 R)^2} \right)^{1/2} \quad (3-19)$$

ここで、 $\omega = \omega_0$ と近似を行なった。

実際の回路では、ケーブルなどの浮遊容量が無視できない。これは、入力インピーダンスに並列に加わる形となる。従って、浮遊容量を C' とするとき、以上の議論の中の全ての R を

$$R' = \frac{R}{1 + j\omega C_0 R} \quad (3-20)$$

で置き換えればよい。

§ 3-3 PSD¹¹⁾

トランスデューサーからの信号は広帯域のノイズを多く含み、通常のフィルターでは信号を分離することができない。一方、実験上重要なのは、アンテナの変位そのものではなく、固有振動の振幅と位相である。このため、信号は PSD によりロックイン検波し、各モード毎に $\sin$ と $\cos$ の 2 成分の準 DC 信号として取り扱う。以下では、この PSD 出力が、アンテナに加わる力に対してどのような応答をするかを計算する。但し、電気系のアンプ、フィルターの存在は無視し、増幅率を 1 とする。(フィルターの Q 値は 10 程度と、アンテナの Q 値に比べて非常に小さいので、Transfer function は平坦であると考えても差し支えない。) また、すべての電圧、電流は、アンテナの力に換算する。

(3-1)よりアンテナの振動は

$$x(t) = \frac{1}{\mu \omega} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{2\tau_R}\right) \sin\omega(t-s) F(s) ds \quad (3-21)$$

入力信号 $v(t)$ のときの、 $\sin \cdot \cos$ 成分の PSD (積分時間 τ_p) 出力を X , Y とすると、

$$\begin{aligned}
 X(t) &= \frac{\sqrt{2}}{\tau_p} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \cos \omega s v(s) ds \\
 Y(t) &= \frac{\sqrt{2}}{\tau_p} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \sin \omega s v(s) ds
 \end{aligned}
 \tag{3-22}$$

これらをまとめて

$$Z(t) = X(t) + iY(t)$$

と表すことにする。このとき、

$$Z(t) = \frac{\sqrt{2}}{\tau_p} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \exp(i\omega s) v(s) ds \tag{3-22}'$$

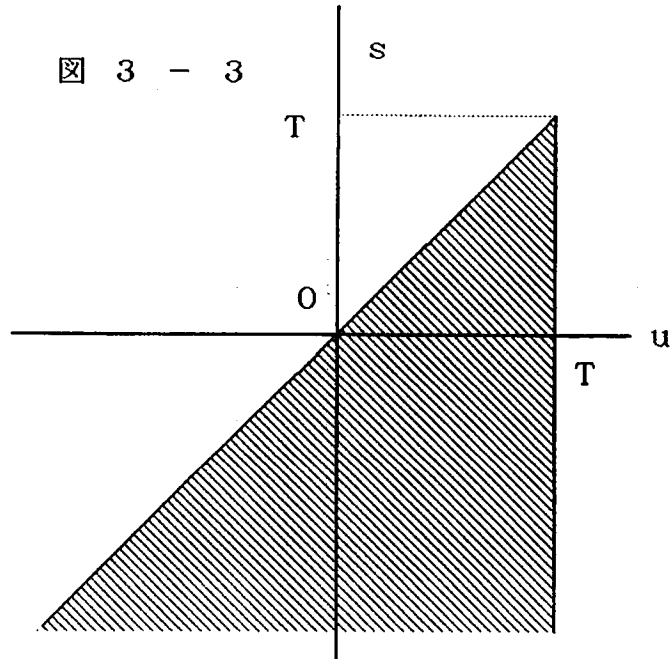
アンプの広帯域雑音（電圧性雑音を含む）を χ_n とすると、(3-21), (3-22)' より、

$$\begin{aligned}
 Z(t) &= \frac{\sqrt{2}}{\tau_p} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \exp(i\omega s) \{\chi(s) + \chi_n(s)\} ds \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{\mu \omega \tau_p} \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^s du \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \exp(i\omega s) \exp\left(-\frac{s-u}{2\tau_A}\right) \\
 &\quad \times \sin \omega(s-u) F(u) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{\tau_p} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \exp(i\omega s) \chi_n(s) ds
 \end{aligned}$$

右図を用いて積分順序を

変える。

図 3 - 3



$$\begin{aligned}
\text{初項} &= \frac{-\sqrt{2}i}{2\mu\omega\tau_p} \int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^s du \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \exp(i\omega s) \exp\left(-\frac{s-u}{2\tau_A}\right) \\
&\quad \times \{e^{i\omega(s-u)} - e^{-i\omega(s-u)}\} F(u) \\
&\approx \frac{\sqrt{2}i}{2\mu\omega\tau_p} \int_{-\infty}^t du \int_u^t ds \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \exp(i\omega u) \exp\left(\frac{u}{2\tau_A}\right) F(u) \\
&\quad \left(\begin{array}{l} \because \omega \gg \frac{1}{2\tau_A}, \frac{1}{\tau_p} \text{ より、} \\ \frac{1}{\tau_p} \int_u^t \exp\left(-\frac{t-s}{2\tau_A}\right) \exp(2i\omega s) \exp\left(-\frac{s}{2\tau_A}\right) ds \simeq 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{初項} &= \frac{\sqrt{2}i}{2\mu\omega\tau_p} \left(\frac{1}{1 - (\tau_p/2\tau_A)} \right) \\
&\quad \times \int_{-\infty}^t \left(\exp\left(-\frac{t-s}{2\tau_A}\right) - \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \right) \exp(i\omega u) F(u) du \\
\therefore Z(t) &\simeq \frac{\sqrt{2}i}{2\mu\omega\tau_p} \left(\frac{1}{1 - (\tau_p/2\tau_A)} \right) \\
&\quad \times \int_{-\infty}^t \left(\exp\left(-\frac{t-s}{2\tau_A}\right) - \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \right) \exp(i\omega s) F(s) ds \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{\tau_p} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \exp(i\omega s) \chi_n(s) ds \quad (3-23)
\end{aligned}$$

$\tau_p = 2\tau_A$ の時には、(3-23)で $\tau_p \rightarrow \tau_A$ の極限をとって

$$\begin{aligned}
Z(t) &\simeq \frac{i}{\sqrt{2}\mu\omega^2} \int_{-\infty}^t \frac{t-s}{2\tau_A} \exp\left(-\frac{t-s}{2\tau_A}\right) \exp(i\omega s) F(s) ds \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{\tau_p} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \exp(i\omega s) \chi_n(s) ds
\end{aligned}$$

F が、熱運動のみの場合、§3-1より、

$$\langle F(t)F(s) \rangle = \langle |F(\omega)|^2 \rangle \delta(t-s)/2 \quad (3-2)$$

$$\langle |F(\omega)|^2 \rangle = 4\mu kT / \tau_A \quad (3-7)$$

Auto-correlation functionは上の2式より、

$$\langle Z(t)Z^*(t+\tau) \rangle$$

$$= \frac{kT}{\mu \omega^2} \frac{1}{1-(\tau_p/2\tau_A)^2} \left(\exp\left(-\frac{|\tau|}{2\tau_A}\right) - \frac{\tau_p}{2\tau_A} \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_p}\right) \right) + \frac{1}{2\tau_p} \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_p}\right) \langle x_n^2(\omega) \rangle \quad (3-24)$$

$$\langle |Z(t)|^2 \rangle = \frac{kT}{\mu \omega^2} \frac{2\tau_A}{2\tau_A + \tau_p} + \frac{1}{2\tau_p} \langle x_n^2(\omega) \rangle \quad (3-25)$$

$\zeta(t) \equiv Z(t) - Z(t-\Delta t)$ の表現では、

$$\begin{aligned} & \langle \zeta(t)\zeta^*(t+\tau) \rangle \\ &= \frac{kT}{\mu \omega^2} \frac{1}{1-(\tau_p/2\tau_A)^2} \left(2\exp\left(-\frac{|\tau|}{2\tau_s}\right) - \exp\left(-\frac{|\tau-\Delta t|}{2\tau_s}\right) - \exp\left(-\frac{|\tau+\Delta t|}{2\tau_s}\right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\tau_p}{2\tau_A} \left\{ 2\exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_p}\right) - \exp\left(-\frac{|\tau-\Delta t|}{\tau_p}\right) - \exp\left(-\frac{|\tau+\Delta t|}{\tau_p}\right) \right\} \right) \\ & \quad + \frac{\langle x_n^2 \rangle}{2\tau_p} \left\{ 2\exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_p}\right) - \exp\left(-\frac{|\tau-\Delta t|}{\tau_p}\right) - \exp\left(-\frac{|\tau+\Delta t|}{\tau_p}\right) \right\} \quad (3-26) \end{aligned}$$

$$\langle |\zeta(t)|^2 \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \frac{kT}{\mu \omega^2} \frac{1}{1-(\tau_p/2\tau_A)^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_A}\right) - \frac{\tau_p}{2\tau_A} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_p}\right) \right\} \right) \\ & \quad + \frac{\langle x_n^2 \rangle}{2\tau_p} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_p}\right) \right\} \quad (3-27) \end{aligned}$$

§ 3-4 相関係数¹²⁾

モード間の相関を定量的に表わすために、一般的な方法に倣い、相互相関係数を用いる。まず、 $|Z|^2$ に対する規格化されたCross-correlation functionを

$$R_z(\tau) = \frac{C_{12}(\tau)}{\sqrt{C_{11}(0)C_{22}(0)}} \quad (3-28)$$

$$C_{ij}(\tau) = \int_0^{T_{\text{obs}}} |Z_i(t)|^2 |Z_j(t+\tau)|^2 dt / T_{\text{obs}} \\ - \int_0^{T_{\text{obs}}} |Z_i(t)|^2 dt \int_0^{T_{\text{obs}}} |Z_j(t)|^2 dt / T_{\text{obs}}^2$$

と定義する。

このとき、 Z_1 、 Z_2 が無相関ならば、

$$\begin{aligned} \langle C_{11}(0) \rangle &= 2 \langle |Z_1(t)|^2 \rangle^2 \\ \langle C_{22}(0) \rangle &= 2 \langle |Z_2(t)|^2 \rangle^2 \\ \langle C_{12}(\tau) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3-29)$$

となるはずである。しかし、 C_{12} は、ふたつのモードに相関が全くなくても観測時間 T_{obs} が有限であるため、0を中心にして有限の幅で揺らぐ。このゆらぎの大きさは

$$\begin{aligned} &\langle (C_{12}(\tau))^2 \rangle \\ &= \frac{1}{T_{\text{obs}}^2} \int_0^{T_{\text{obs}}} dt \int_0^{T_{\text{obs}}} ds \langle |Z_1(t)|^2 |Z_1(s)|^2 \rangle \langle |Z_2(t+\tau)|^2 |Z_2(s+\tau)|^2 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{T_{\text{obs}}^2} \int_0^{T_{\text{obs}}} dt \int_0^{T_{\text{obs}}} ds \int_0^{T_{\text{obs}}} du \int_0^{T_{\text{obs}}} dv \langle |Z_1(t)|^2 |Z_1(s)|^2 \rangle \langle |Z_2(u)|^2 |Z_2(v)|^2 \rangle \\ &\quad - \frac{2}{T_{\text{obs}}^3} \int_0^{T_{\text{obs}}} dt \int_0^{T_{\text{obs}}} ds \int_0^{T_{\text{obs}}} du \langle |Z_1(t)|^2 |Z_1(s)|^2 \rangle \langle |Z_2(t+\tau)|^2 |Z_2(u)|^2 \rangle \\ &\quad - \frac{1}{T^2} \int_0^T dt \int_0^T ds \exp\left(-\frac{|t-s|}{a}\right) \approx \frac{2a}{T} + O(T^{-2}) \\ &\langle (C_{12}(\tau))^2 \rangle \approx \frac{4}{T_{\text{obs}}^2} \int_0^{T_{\text{obs}}} dt \int_0^{T_{\text{obs}}} ds \langle Z_1(t) Z_1^*(s) \rangle^2 \langle Z_2(t) Z_2^*(s) \rangle^2 \end{aligned}$$

従って、

$$\langle (R_z)^2 \rangle \simeq \frac{\int_0^{T_{\text{obs}}} dt \int_0^{T_{\text{obs}}} ds \langle Z_1(t) Z_1^*(s) \rangle^2 \langle Z_2(t) Z_2^*(s) \rangle^2}{T_{\text{obs}}^2 \langle |Z_1(t)|^2 \rangle^2 \langle |Z_2(t)|^2 \rangle^2} \quad (3-30)$$

となる。

ξ についてもまったく同様にして

$$\langle (R_\xi)^2 \rangle \simeq \frac{\int_0^{T_{\text{obs}}} dt \int_0^{T_{\text{obs}}} ds \langle \xi_1(t) \xi_1^*(s) \rangle^2 \langle \xi_2(t) \xi_2^*(s) \rangle^2}{T_{\text{obs}}^2 \langle |\xi_1(t)|^2 \rangle^2 \langle |\xi_2(t)|^2 \rangle^2} \quad (3-31)$$

ところで、アンテナの熱振動の振幅が線形のカップリングを持っていたとしてもトランスデューサーにノイズがあるためにcorrelation functionが1になることはない。

この場合のCross-correlation functionの平均値は

$$\langle R_z(0) \rangle_{\text{linear}} = \frac{\langle Z_1(t) Z_2^*(t) \rangle_{\text{linear}}^2}{\langle |Z_1(t)|^2 \rangle \langle |Z_2(t)|^2 \rangle} \quad (3-32)$$

$$\langle R_\xi(0) \rangle_{\text{linear}} = \frac{\langle \xi_1(t) \xi_2^*(t) \rangle_{\text{linear}}^2}{\langle |\xi_1(t)|^2 \rangle \langle |\xi_2(t)|^2 \rangle} \quad (3-33)$$

である。従って、アンテナの振動だけの実質相関係数を

$$R_{Z_{\text{eff}}}(\tau) = \frac{R_z(\tau)}{\langle R_z(0) \rangle_{\text{linear}}} \quad (3-34)$$

$$R_{\xi_{\text{eff}}}(\tau) = \frac{R_\xi(\tau)}{\langle R_\xi(0) \rangle_{\text{linear}}} \quad (3-35)$$

と定義する。(3-30)~(3-35)より、そのゆらぎの大きさは、

$$\langle (R_{Z_{\text{eff}}})^2 \rangle \simeq \frac{\int_0^{T_{\text{obs}}} dt \int_0^{T_{\text{obs}}} ds \langle Z_1(t) Z_1^*(s) \rangle^2 \langle Z_2(t) Z_2^*(s) \rangle^2}{T_{\text{obs}}^2 \langle Z_1(t) Z_2(t) \rangle_{\text{linear}}^4} \quad (3-36)$$

$$\langle (R_{\zeta_{\text{eff}}})^2 \rangle \simeq \frac{\int_0^{T_{\text{obs}}} dt \int_0^{T_{\text{obs}}} ds \langle \zeta_1(t) \zeta_1^*(s) \rangle^2 \langle \zeta_2(t) \zeta_2^*(s) \rangle^2}{T_{\text{obs}}^2 \langle \zeta_1(t) \zeta_2^*(t) \rangle^4_{\text{linear}}} \quad (3-37)$$

これらの値は、 T_{obs} に反比例する。

第4章 実験

ここでは実験装置を概観し、行なった実験の概略とその結果を示す。

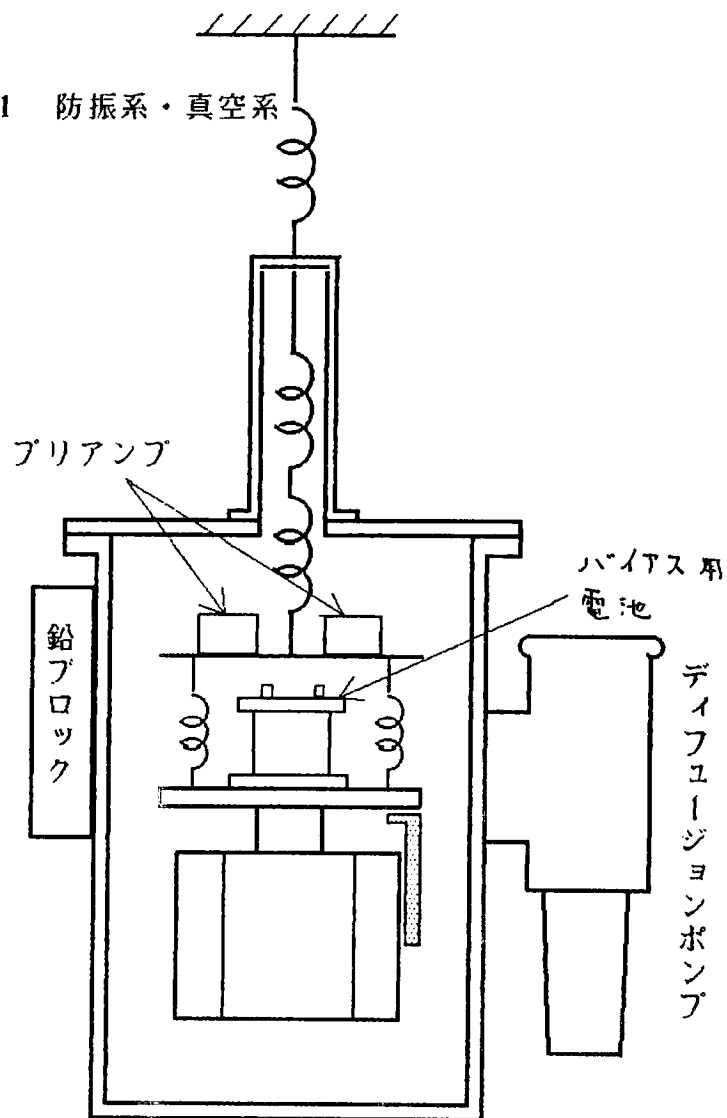
§ 4-1 装置

a) 真空装置と防振系

アンテナは、空気中に置く場合、その粘性抵抗を受けるので、Q値が非常に低下する。また、音の振動によって励起されてしまうこともある。これを防止するため、真空タンク内に収めた。真空ポンプは、粗排気にロータリーポンプ、メインポンプには油拡散ポンプを用いた。実験中、タンク内は常に 5.0×10^{-6} torr程度に保たれている。タンク内に置くことによって、アンテナは熱的にも外部との接触を小さくされ、温度変化による周波数の変化も、測定に影響のない大きさになった。更に、タンクは、電磁シールドの役割も果たし、電磁的な外来雑音のレベルも、この実験の目的に対しては十分小さくできた。

実験は、きわめて小さな振動を対象とするので、外部の振動にも非常に敏感である。そこで、アンテナを外的振動から遮断することが必須である。このため、アンテナをバネとおもりによって釣り下げ、防振系を組み立てた。防振系の減衰比に対しては、はっきりとした指針は持たなかったもので、試行錯誤を繰り返して信号が計算された熱振動の大きさにほぼ一致するまで防振を強化していった。最終的には、図4-1のような3段のバネとおもりを組み合わせたものとした。また、各段の継目部分には、ゴムのダンパーをいれて、きしみやこすれによる振動を防止した。

図4-1 防振系・真空系

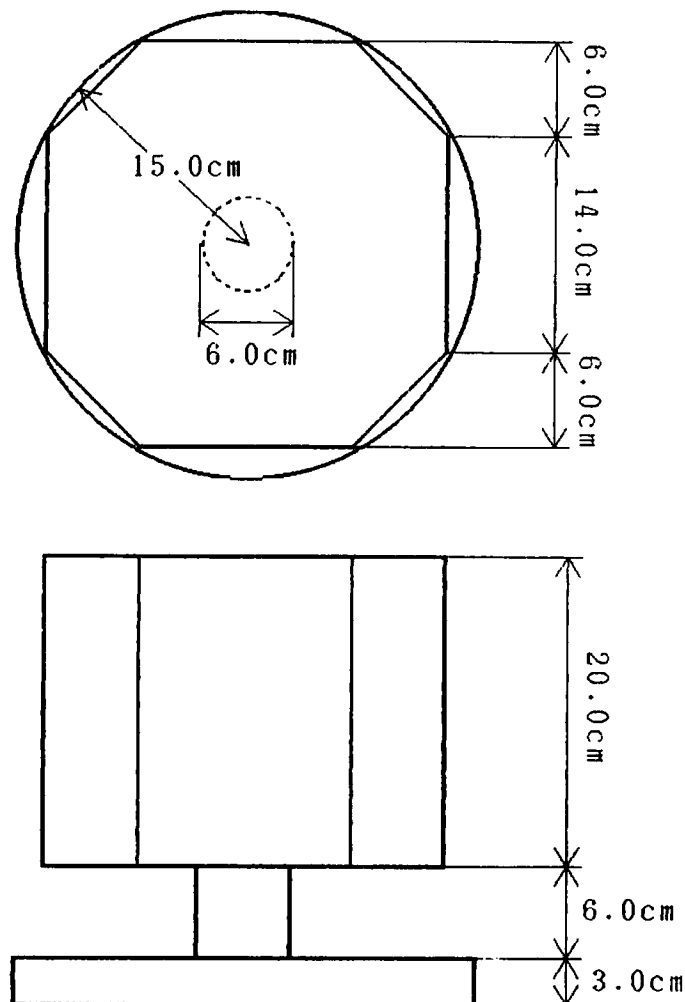


b) アンテナ

アンテナの形状は、前述の通り、8角柱とした（図4-2）。換算質量を増すために、8角柱の大きさに対して、厚さが無視できなくなっている。しかし、面内振動に関しては、厚さの影響はほとんどないことがすでに実証されているので、

§ 2-4 の議論はここでも有効である。8角柱の下には、円筒と円板が取り付けられている。円筒は、アンテナの支持のためであり、また、円板は、トランスデューサー取り付けのためである。円筒を取り付けてある8角柱の中心付近は、振動の節に当たり、不動点と考えられるので、バーアンテナ等にみられるような支持によるQ値の低下は非常に小さくなっている。これらは、アルミ合金5056から、すべて一体で削り出してつくってある。

図 4-2 アンテナ



アンテナの外径より、§ 2-4 の諸パラメーターを求めると

$$a = 14.8 \text{ cm}$$

$$\phi_1 = 28.3^\circ \quad \phi_2 = 16.7^\circ$$

また、(2-47),(2-48)より、

$$r_0 = 13.9 \text{ cm}$$

$$\varepsilon_2 = -0.358 \text{ cm}$$

有効断面積と換算質量は

$$A_{G_1} = 3.22 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$A_{G_2} = 3.57 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$\mu_1 = 15.7 \text{ kg}$$

$$\mu_2 = 17.5 \text{ kg}$$

これらと(2-44),(2-46)より、(2,1,1)モードと(2,1,2)モードの周波数の計算値は

$$\omega_1 / 2\pi = 8.57 \text{ kHz}$$

$$\omega_2 / 2\pi = 8.31 \text{ kHz}$$

実測値の方は

$$\omega_1 / 2\pi = 8.68 \text{ kHz}$$

$$\omega_2 / 2\pi = 8.32 \text{ kHz}$$

(20°C)

で、数%の誤差で一致している。

周波数は、温度によってかなりの変動を示す。空気中でピエゾ素子を用いて簡単な測定を行なったところ、約2 kHz/Kの変動率であった。

次に、アンテナの振動モードとQ値の測定を行なった。Q値は、振動の減衰のカーブをマイクロコンピュータによってフィットして求めた。以下にその結果を示す。

モード	周波数 (k H z)		Q 値
	計算値	実測値	
—	—	6.21	2.1×10^5
—	—	6.97	1.6×10^5
(2,1,1)	8.57	8.68	2.1×10^5
(2,1,2)	8.31	8.32	2.0×10^5
(1,1,1)	9.90	9.86	—
—	—	10.94	2.5×10^5
(3,1,1)	12.94	12.80	1.9×10^5
(2,2,1)	14.96	14.58	2.5×10^3
(2,2,2)	15.82	15.69	2.5×10^3

表4-1 アンテナのモード，周波数，Q 値

*モードの覧に「—」のあるものは面内振動ではない。

* (1,1,1)のQ 値は減衰が速すぎて測定できなかった。

c) トランスデューサー

トランスデューサーは、(2,1,1)用と(2,1,2)用に2つ取り付けた。以下では、簡単のため、(2,1,1)をモード1、(2,1,2)をモード2と記す。極板の形は、それぞれ、 $10.0\text{ cm} \times 10.0\text{ cm}$ ， $5.66\text{ cm} \times 10.0\text{ cm}$ の長方形である。アンテナに取り付けたときの容量は、

$$C_1 = 2.13 \times 10^{-9} \text{ (F)}$$

$$C_2 = 6.69 \times 10^{-10} \text{ (F)}$$

また、これから、極板間隔を計算すると、

$$d_1 = 41.6 \mu\text{m}$$

$$d_2 = 74.9 \mu\text{m}$$

アンテナには、バイアス電圧

$$V = 184 \text{ V}$$

を与えた。プリアンプはまったく同じ回路を2つ製作して用いた。入力インピーダンスは $1 \text{ G}\Omega$ ，初段に FET 2SK147 を4個並列につなぎ、OPアンプを後段に用いた。設計増幅度は1000倍である。

S/Nの向上のためには、もっと電流性ノイズを大きく、電圧性ノイズを小さくした方がよい。最適化するには、電圧換算した電流性ノイズの大きさを電圧性ノイズの大きさと等しくすればよい。しかし、そのためには、FETを数10個並列につながねばならない。電源や、アンプの操作性などの点から、これは現実的ではなく、この程度にとどめることにした。

	モード 1	モード 2
容量 (pF)	2134	669
R (GΩ)	1.0	1.0
増幅率	1.00×10^3	9.94×10^3
電圧性ノイズ (nV/√Hz)	0.43	0.44
電流性ノイズ (A)	1.6×10^{-14}	1.6×10^{-14}
ケーブル容量 (pF)	81.2	72.0

表4-2 トランスデューサーの諸定数

表4-2の値から求めた入力換算のノイズは、トータルで

$$\text{モード 1} \quad 0.45 \text{ nV} / \sqrt{\text{Hz}}$$

モード 2 $0.58 \text{ nV} / \sqrt{\text{Hz}}$

となる。アンテナの 300 K の熱振動の振幅は、電圧に換算して、

モード 1 1.24 nV

モード 2 0.85 nV

であるので、PSDの積分時間が1秒程度なら、ノイズと同じくらいの信号の大きさとなる。

また、トランスデューサーの反作用及びプリアンプ以降（フィルター等）のノイズは完全に無視できる。

d) 周波数追尾型発振器 (F. F. O.)¹³⁾

常温で行なうこのような実験では、温度変化によって周波数が一定しない。一方、PSDの中心周波数を外れると、信号が急激に減少してしまう。このため、PSDの参照信号はアンテナの共振周波数に正確に一致させることが重要である。そこで、周波数調整を自動的に行なう発振器を設計、製作した。

周波数調整の原理は、以下のようなものである。PSDの出力は、信号周波数と参照信号周波数がずれている場合には、 $X-Y$ 平面内で一定の方向に回る。信号周波数の方が、参照信号周波数よりも高い場合には、右のような方向に回り、低い場合にはその逆となる。この方向を信号が X 軸、 Y 軸を通過するときに検出して周波数を調整する。

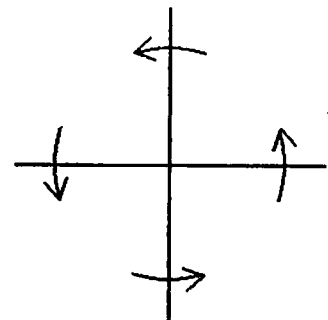


図4-3

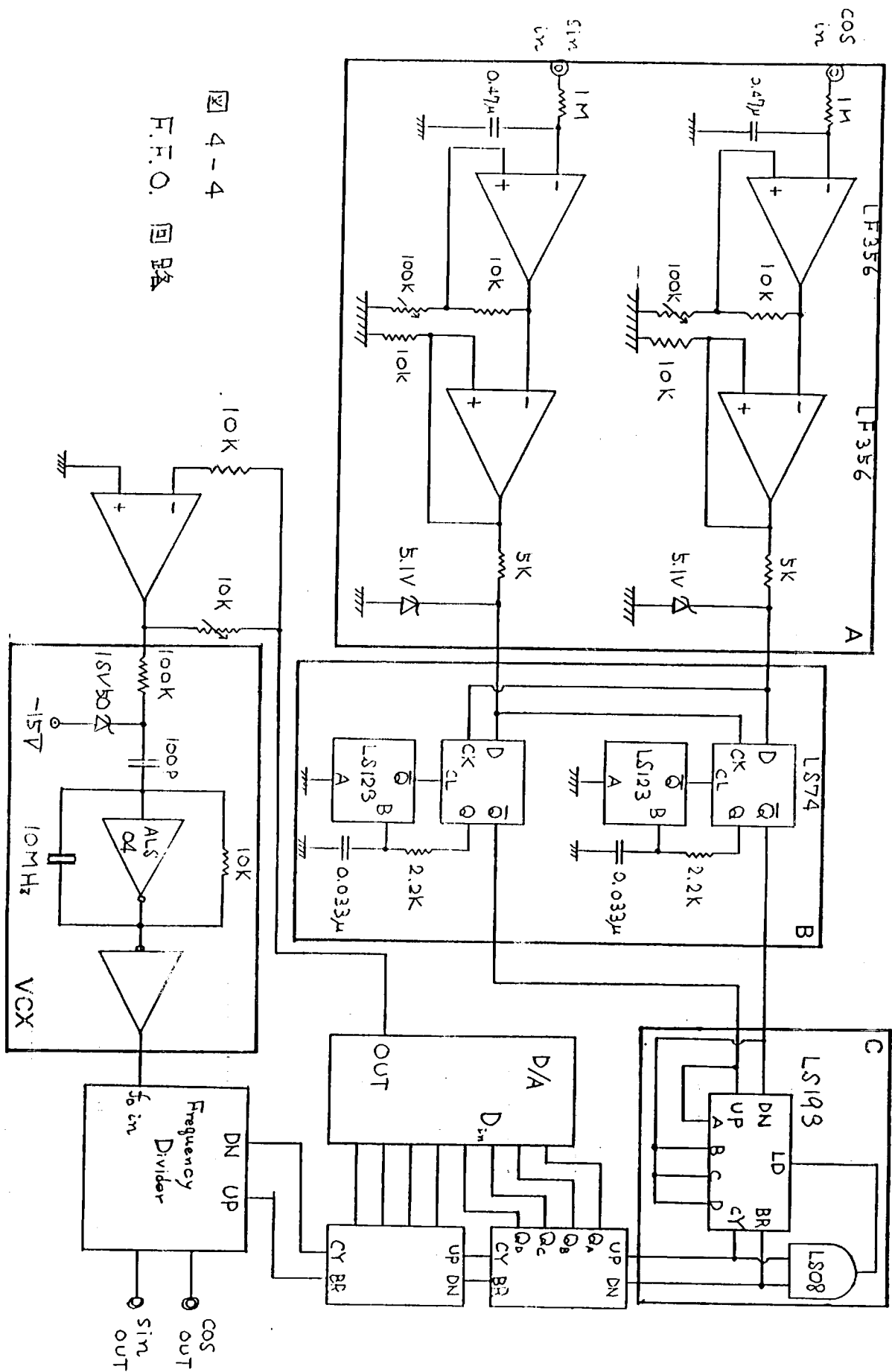


图 4-4
F.H.O. 回路

具体的な回路図を図4-4に示す。発振器部分にははコルピッツ型可変水晶発振器（VCX）を用いた。これは、制御電圧0～30Vの間で、10.001MHzから10.007MHzまでの変化をする。出力される参照信号はこれを周波数分割し、波形整形して得る。一方、入力されるPSD出力X，Yは軸を通過した回数と方向をカウンタで数えられる。この回数をD/A変換してVCXの制御電圧とした。また、周波数変化がVCXの可変範囲を越える場合には、周波数分割器の分割数を変化させて調節する。

図4-4の各部分について、その働きを述べる。Aの部分は、X，Yを積分し、thresholdを設定する。これは、周波数制御回路が熱振動の揺らぎの影響をあまり受けないようにするためである。更に、X，Yが正か負かを判定してそれぞれ、0V，5Vの2値の信号に変換する。BではD-フリップフロップによって、Aの信号の状態が変化した瞬間に信号を送る。X，Yが一定の方向に回っているときだけ、周波数を変化させたいので、Cにおいて、履歴をもたせる。例えば、周波数を上昇させる信号をずっと出していた場合には、次にくる信号が、下降の命令であったとしても初めの15回はこれを無視する。16回目からカウンタの数を変化させ始める。逆も同様である。従って、位相が1方向だけに回り続けるときには、 $\pi/2$ ごとに1回ずつ周波数を変更され、単にランダムな変動をしているだけの時には、周波数は、まったく変化しない。

1回で変化する周波数の幅を $\Delta\nu$ とする。 $\Delta\nu$ は、アンテナのバンド幅に比べて小さくなければならない。そうでないと、周波数変化の際に生ずる位相変化によって、データに異常が生ずるからである。逆に、 $\Delta\nu$ が小さすぎると、アンテナの周波数変化に追いついて行けず、最終的には、完全にロックがはずれてしまう。

アンテナの周波数の初期値を ν_0 ，変化率を一定値 ν_1 とすると、時刻 t に於けるアンテナの周波数 ν_a は、

$$\nu_A = \nu_0 + \nu_1 t$$

となる。一方、F. F. O. の周波数 ν は、 $t=0$ で ν_0 であったとすると、

$$\nu = \nu_0 + n \Delta \nu$$

但し、 n は $t=0$ から $t=t$ までの間に、周波数の変更を受けた回数である。参照信号と入力信号の位相のずれを ϕ とすると

$$\frac{1}{2\pi} \phi = \int_0^t (\nu_A - \nu) dt$$

$t=0$ から初めて変更を受けるまでの時間を Δt とすれば、

$$\frac{1}{4} = \int_0^{\Delta t} (\nu_A - \nu) dt$$

$$= \nu_1 \Delta t^2 / 2$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1}{2\nu_1}}$$

1度だけ周波数を変化させて完全に修正を行なうためには

$$\Delta \nu > \nu_1 \Delta t = \sqrt{\frac{\nu_1}{2}} \text{ Hz}$$

でなければならない。 ν_1 を最大で2 Hz/hourと考えると、

$$\Delta \nu > 17 \text{ mHz}$$

となる。アンテナのバンド幅が40 mHz程度であるので、これは望ましい値ではない。そこで、1回だけでは修正できないが、 $t \rightarrow \infty$ に於いてもロックがはずれないように $\Delta \nu$ を定めることとした。 n 回目の変更を受ける時刻を t_n とすると、

$$1/4 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\nu_1 t - n \Delta \nu) dt$$

$$= (t_{n+1}^2 - t_n^2) \nu_1 - n(t_{n+1} - t_n) \Delta \nu$$

$$\therefore (t_{n+1}^2 - t_n^2) \nu_1 - 2n(t_{n+1} - t_n) \Delta \nu = 1/2$$

この式によって決まる t_n が、 $n \rightarrow \infty$ の時に

$$\nu_a - \nu = \nu_1 t_n - n \Delta \nu$$

を発散させないように $\Delta \nu$ を選べばよい。

図4-5は、 $\nu_1 = 0.6 \text{ Hz/hour}$ の時の ν の値を時間を追って測定したグラフである。(a)では、 $\Delta \nu = 0.5 \text{ mHz}$ 、(b)では $\Delta \nu = 8 \text{ mHz}$ とした。(a)は周波数のずれが大きくなり、ロックがはずれてしまう寸前であることがわかる。(b)は、完全にロックしている。(b)の場合には、最大で $\nu_1 = 4 \text{ Hz/hour}$ までロックがはずれない。 $\nu_1 = 2 \text{ Hz/hour}$ の時には、 $\nu_a - \nu$ の最大値は、 18 mHz であり、これは計算値とほぼ一致している。

実験中、アンテナの周波数変化は、最大で 0.3 Hz/hour になった。従って、(b)の設定を選ぶこととした。

図4-5 $\nu_1 = 0.6 \text{ Hz/hour}$ のときの ν

ν
(Hz)

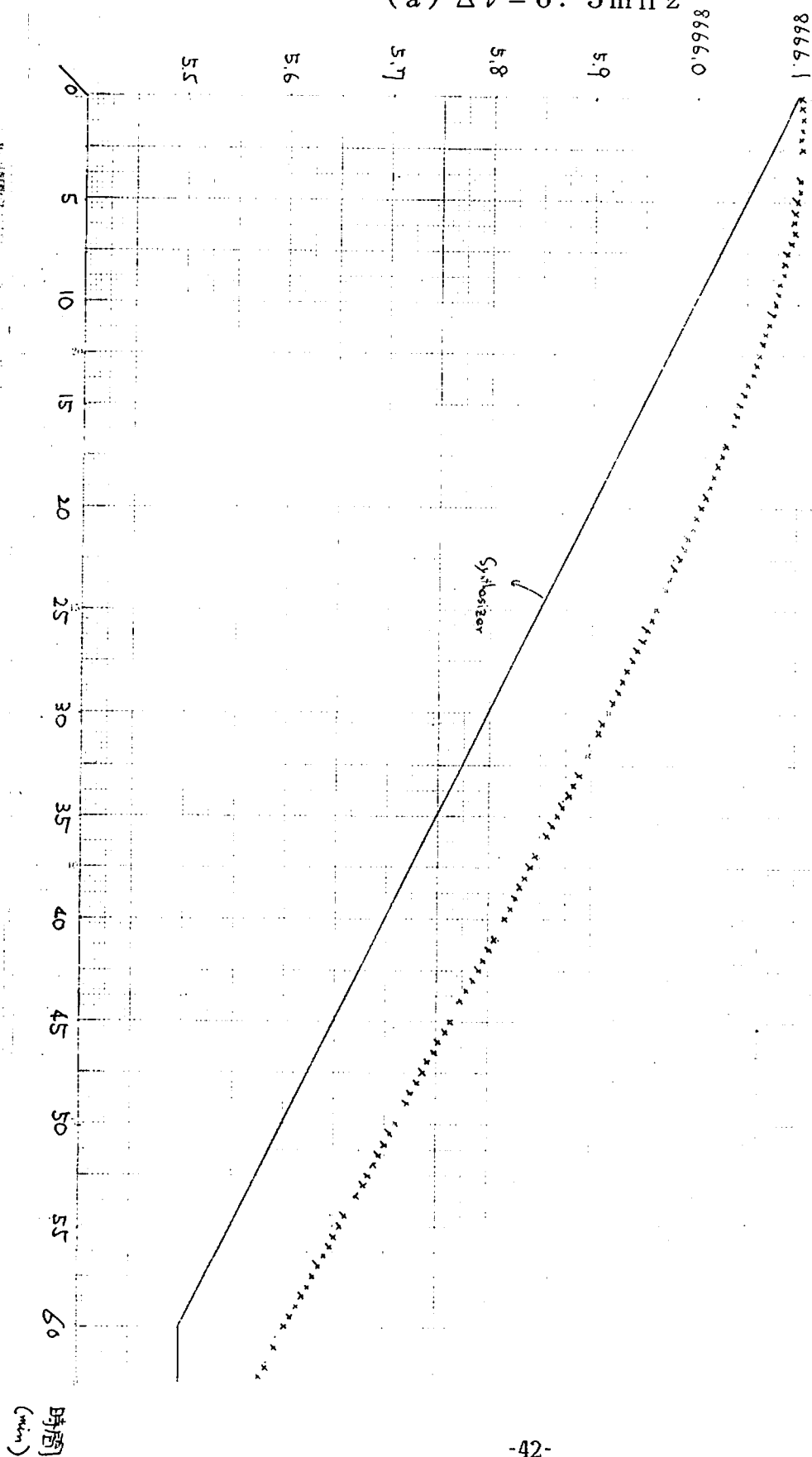
F.F. No. 2 特性

120°

$\Delta\nu \approx 0.5 \text{ mHz}$

8/27

(a) $\Delta\nu = 0.5 \text{ mHz}$



ν (Hz)

H.F.

No. 2

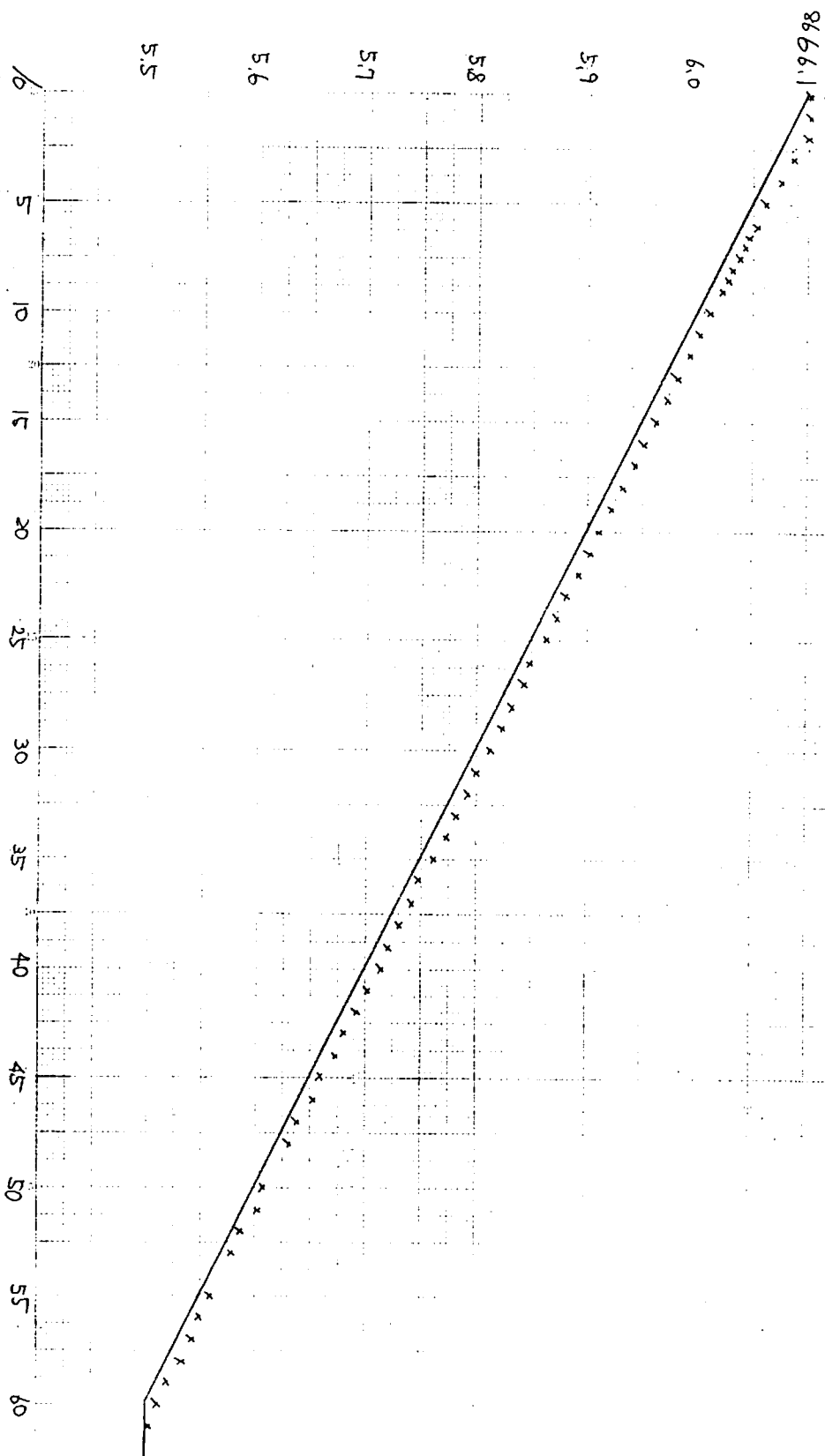
計測

SC-1

$\Delta \nu \approx 8 \text{ MHz}$

(b) $\Delta \nu = 8 \text{ MHz}$

JIS A 100-2000



§ 4-2 熱振動の相関

2つの振動モードの間で相互作用があるかどうかを調べるために、熱振動のエネルギーの相関をとった。相互作用が存在すれば、1つのモードから、他のモードへとエネルギーの流れが起こり、相関係数は0ではなくなる。特に、タイムラグ $-\tau_a < \tau < \tau_a$ 程度の範囲では、何らかの構造を持つ可能性が大きい。この構造を見るためには、 τ_a / τ_p は最低でも3から4程度の大きさとしなければならない。また、 $|z|$ と $|z|^2$ の相関ではなく、 $|z|$ と $|z|^2$ の相関をとる必要がある。そこで、S/Nの点では最良とはいえないが、 $\tau_p = 1 \text{ sec}$ としてデータを採取した。一方、バースト的な重力波の観測に実際に用いるのは、 $|z|$ と $|z|^2$ であるから、この点からいえば、 $|z|$ と $|z|^2$ の相関係数も必要となる。これについては、実質相関係数のゆらぎを最小にするように後から計算機内でデータ加工することとした。データ採取間隔 Δt は、データ数を考えると小さい方がよいが、 Δt を τ_p よりも小さくしても独立なデータ数は変わらない。従って、 $\Delta t = \tau_p$ とした。

以下にデータ採取時の出力を温度換算で示す。(単位 K)

	モード 1	モード 2
1. 出力信号	4 4 7	4 5 9
2. トランスデューサーノイズ	6 1	1 4 2
3. アンテナの振動エネルギー (1-2)	3 8 6	3 1 7

表 4-3 アンテナの雑音温度

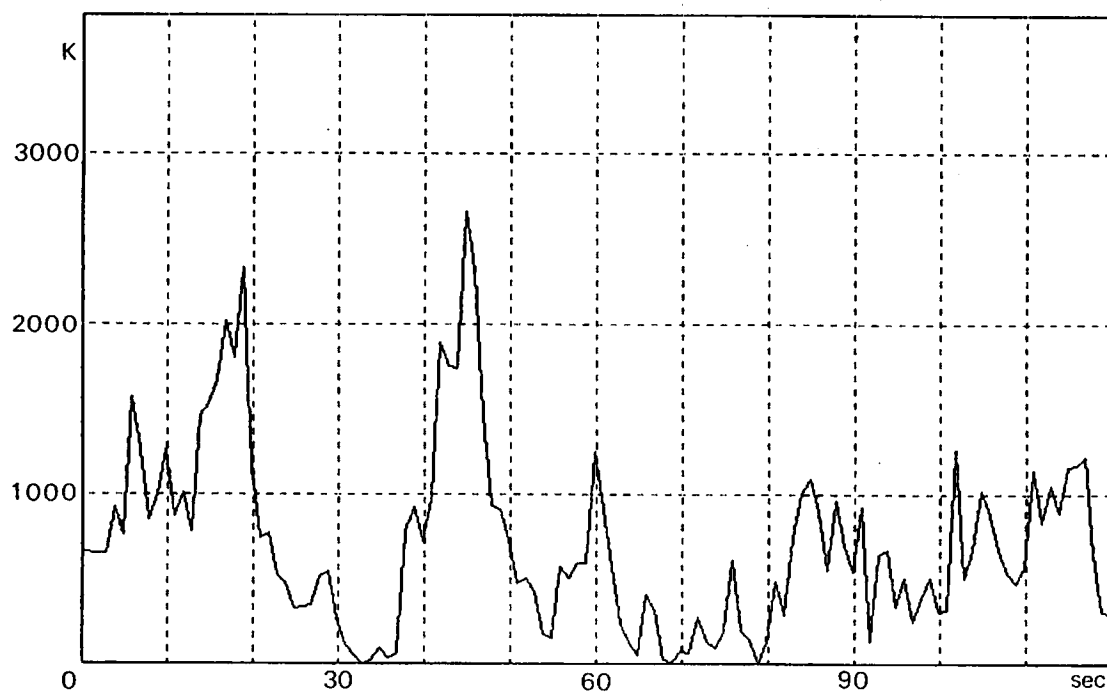
図 4-6 には、 $|z|$ と $|z|^2$ の時間変化を示す。

また、図 4-7、図 4-8 は、 $|z|$ と $|z|^2$ ($\tau_p = 1 \text{ sec}$) の度数分布である。

図4-6 熱振動

From 10/ 5 17: 7:59

Mode 1



From 10/ 5 17: 7:59

Mode 2

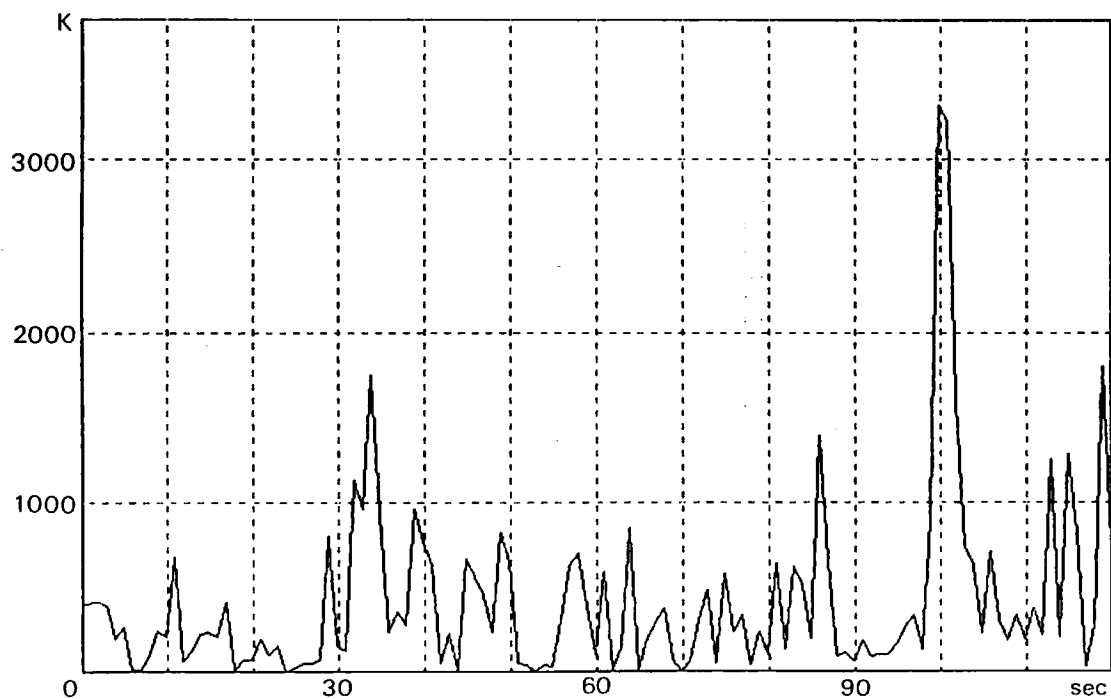


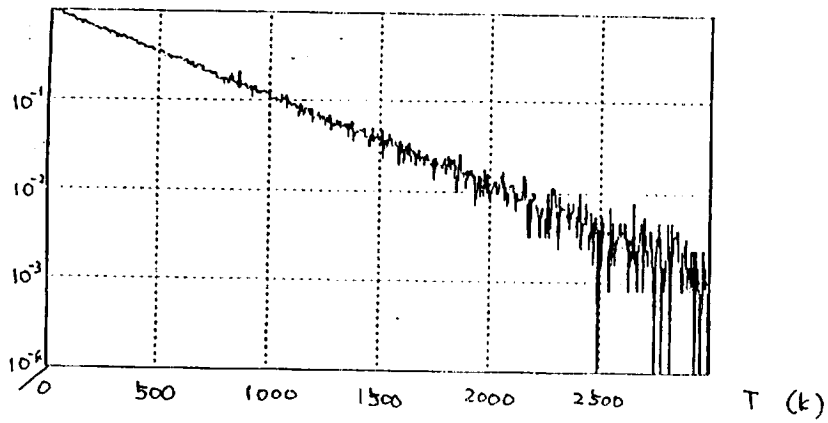
図4-7 $|Z|^2$ の度数分布

From 10/ 8 16:15: 0

To 10/10 1:32:54

Mode 1

Max= 1301



Mode 2

Max= 350

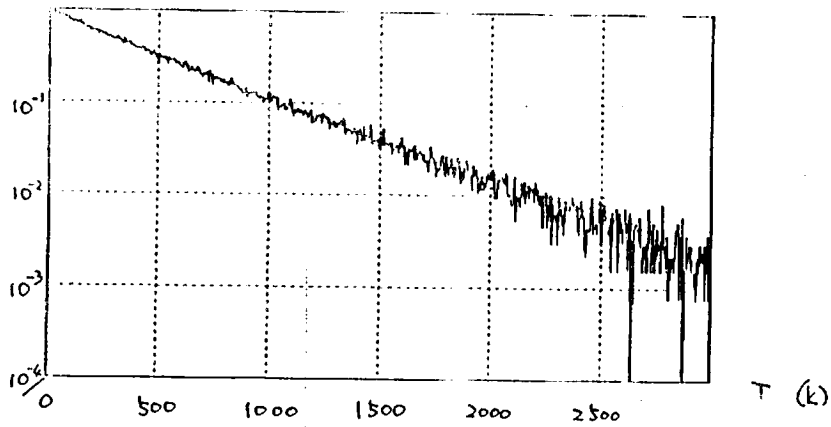


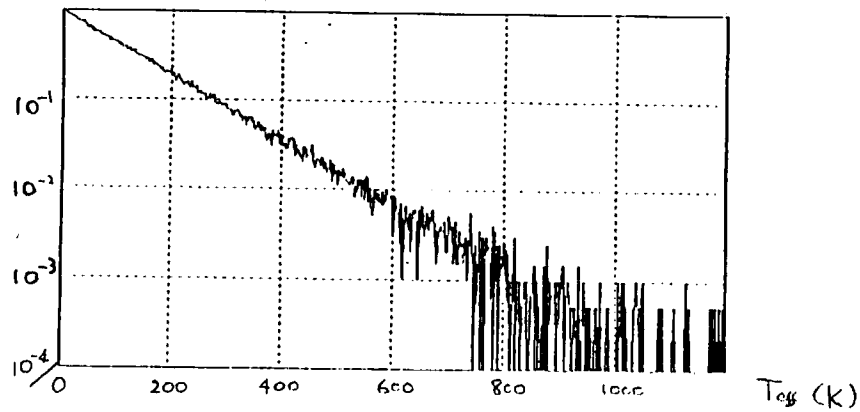
図4-8 $|\xi|^2$ の度数分布

From 10/ 8 16:15: 0

To 10/10 1:32:54

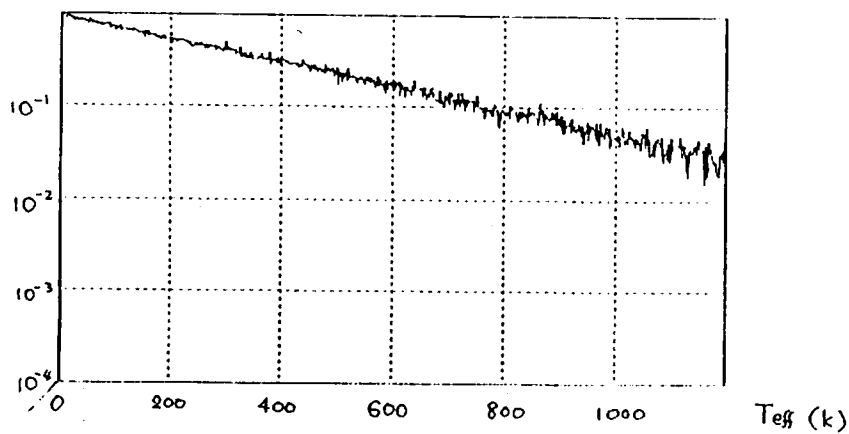
Mode 1

Max= 2011



Mode 2

Max= 740



200時間の観測の結果、タイムラグ ($-20 \text{ sec} < \tau < 20 \text{ sec}$) で $|Z|^2$ の実質相関係数は図4-9のようになった。(3-36)に、表4-1, 4-2の値を代入して求めた実質相関係数の標準偏差は、

$$\sigma_{R_{Z_{\text{eff}}}} = \sqrt{\frac{5.27}{T_{\text{obs}}}} \quad (T_{\text{obs}} : \text{秒})$$

であるから、 $T_{\text{obs}} = 200 \text{ hour}$ とすると

$$\sigma_{R_{Z_{\text{eff}}}} = 2.71 \times 10^{-3}$$

この結果から、熱平衡状態の2つの振動モードの間には、有意な相関はないといえる。

$\tau_p = \Delta t = 5.0 \text{ sec}$ としたときの $| \zeta |^2$ の実質相関係数は、

$$R_{\zeta_{\text{eff}}}(-5.0) = -8.82 \times 10^{-3}$$

$$R_{\zeta_{\text{eff}}}(0.0) = 4.35 \times 10^{-3}$$

$$R_{\zeta_{\text{eff}}}(5.0) = 9.41 \times 10^{-4}$$

(3-37)によって求めた標準偏差は

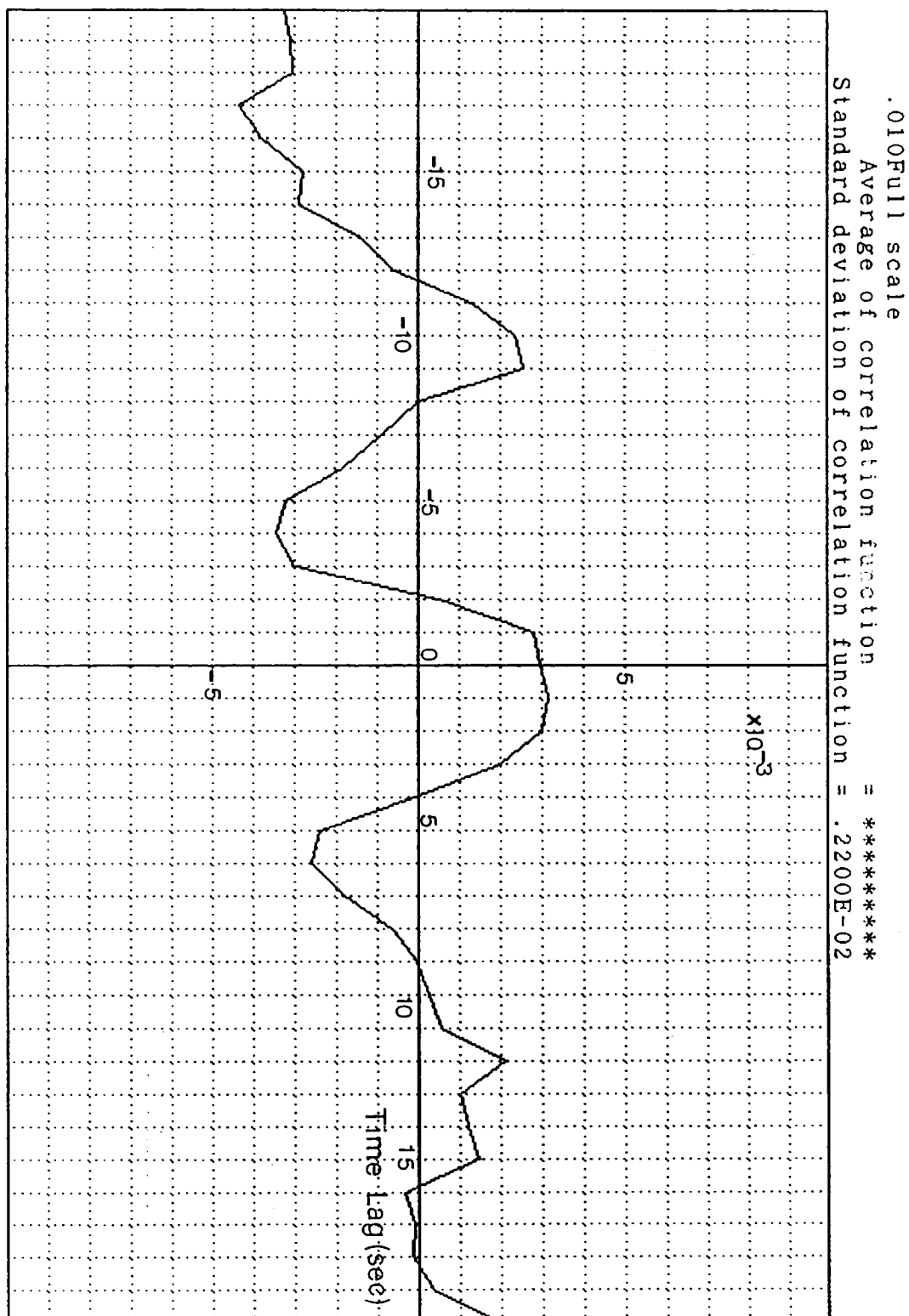
$$\sigma_{R_{\zeta_{\text{eff}}}} = \sqrt{\frac{13.8}{T_{\text{obs}}}} \quad (T_{\text{obs}} : \text{秒})$$

$T_{\text{obs}} = 200 \text{ hour}$ では

$$\sigma_{R_{\zeta_{\text{eff}}}} = 4.38 \times 10^{-3}$$

従って、 $| \zeta |^2$ についても有意な相関はないといえる。

図4-9 熱平衡時の $|Z|^2$ の実質相関係数 ($T_{obs} = 200 \text{ hour}$)



§ 4-3 非平衡状態での相関

§ 4-2では、熱平衡状態で有意な相関が無いことを示したが、重力波の入射時は熱的には非平衡状態である。このため熱平衡に達していないときの様子を

- ①一方のモードに電氣的なパルスを与える。
 - ②一方のモードをスピーカーによって定常的に励起する。
- という2つの方法によって調べた。

a) パルスによる励起

パルスの重力波によってアンテナが励起される場合のシミュレーションとして、モード2をパルス電圧によって励起し、モード1の変化を観測した。この際、1個のパルスだけでは、変化の様子がわからないので、20秒おきに100分間パルスを加え続け、モード1を観測した。(図4-10)

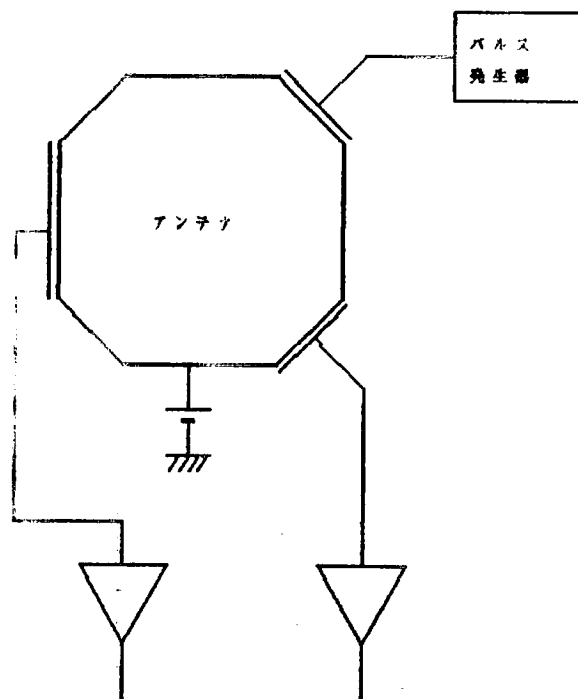
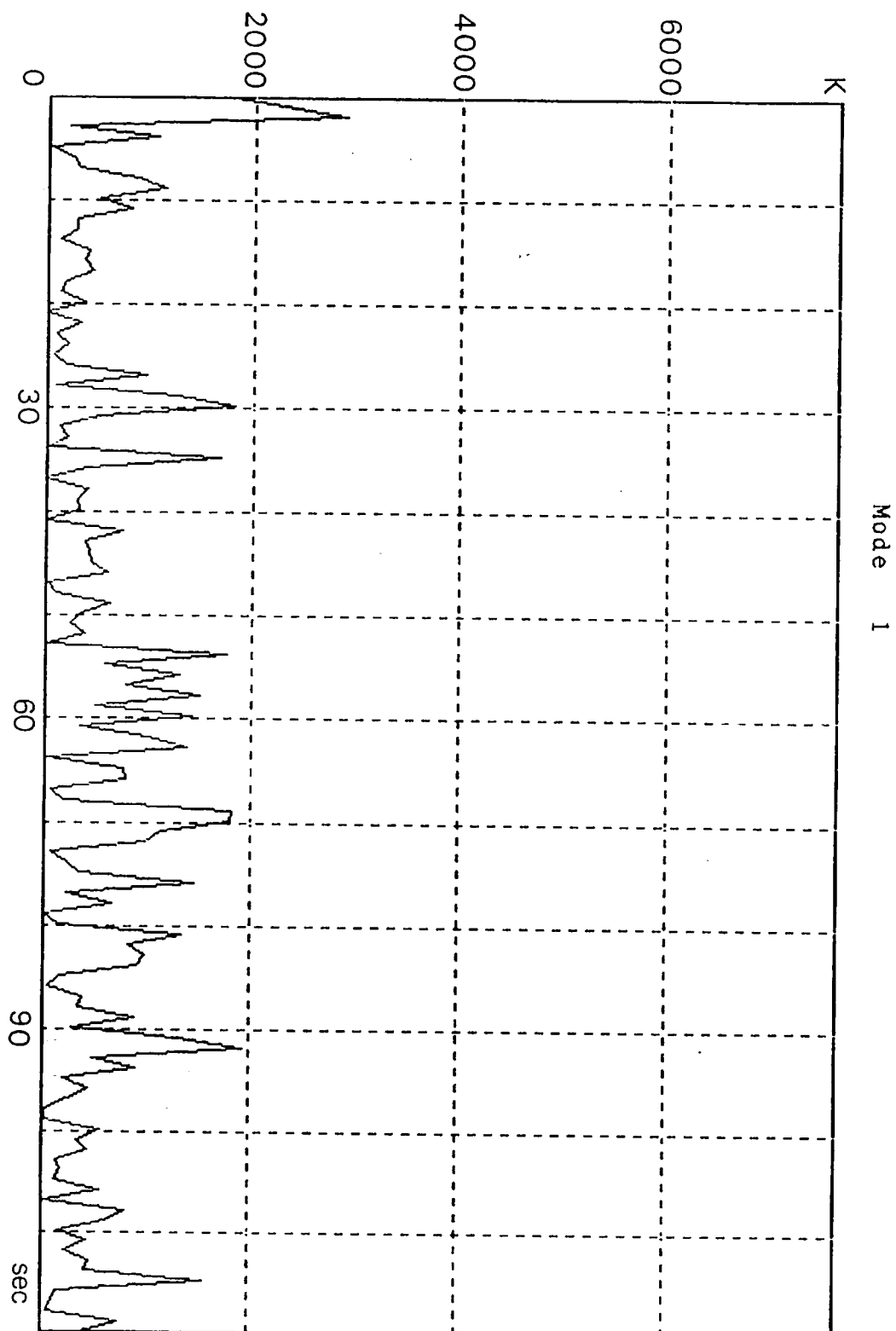


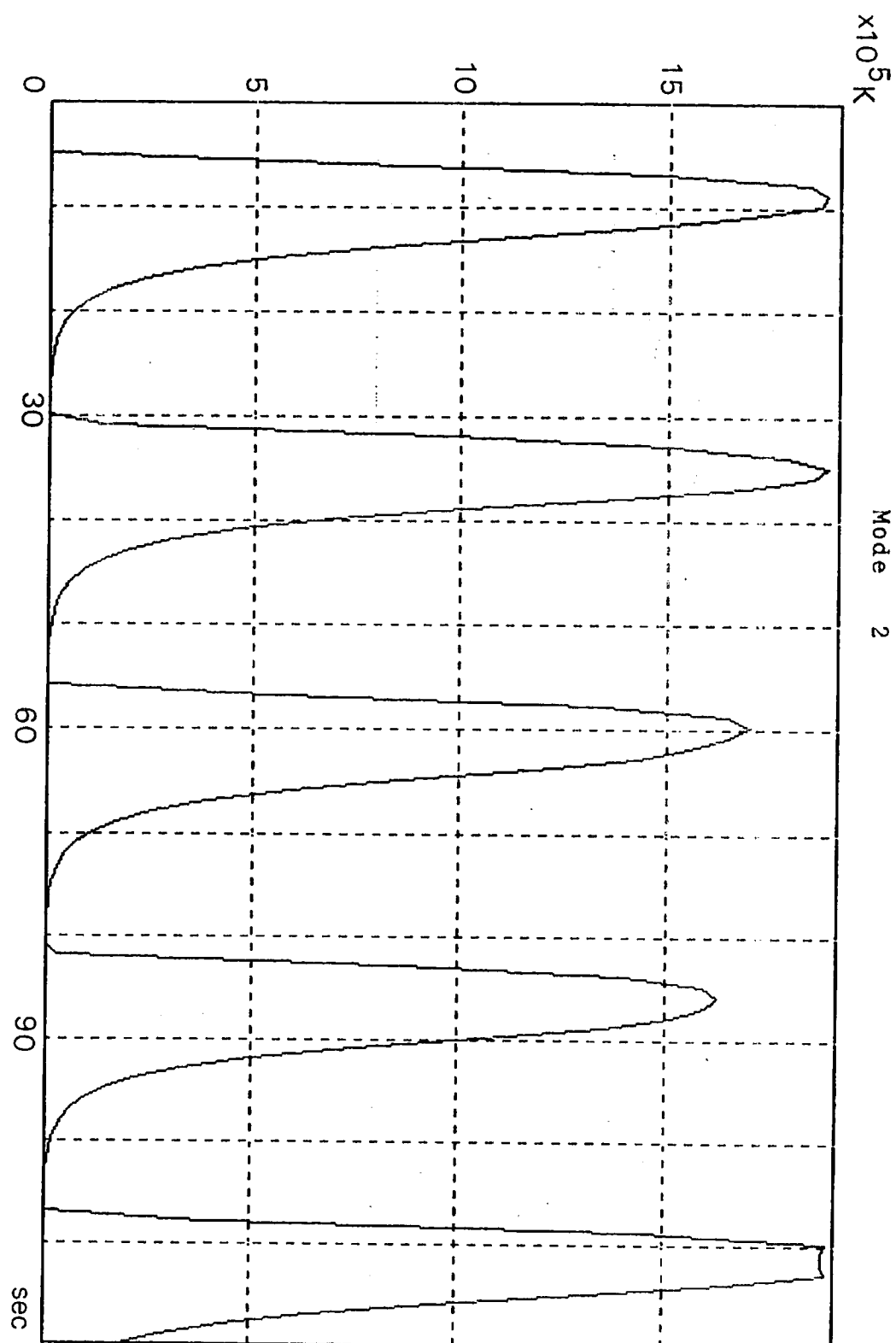
図4-10 パルスによる励起

モード2は463 Kから平均で10⁵ K以上に励起したが、その間にモード1は423 Kから521 Kに上昇しただけであった。このときの $|Z|^2$ の様子を図4-11に示す。これを見ても、モード1はほとんどパルスの影響を受けていないことがわかる。

図4-11(a) モード2をパルスで励起中の $|Z_1|^2$



(b) パルスで励起された $|Z_2|^2$



b) スピーカーによる定常的な励起

a) では、重力波のシミュレーションを主眼として電氣的なパルスを与えたが、この方法では励起用の信号が他のモードにも直接に影響を与えるので、一方のモードだけを完全に分離して励起することができなかった。これを実現するため、周波数をモード周波数に一致させた電場、磁場などを用いていろいろな方法で励起を試みたが、ノイズのためにどうしても他のモードも励起してしまった。最終的に、スピーカーを用いると1つのモードだけを選択的に励起できたのでこの方法を用いた。但し、この場合には信号がどのような経路を通過してアンテナに伝わっているのかは全くわからない。

実験は、基本的には図3-1の構成をそのまま使い、励起信号はF.F.O.の出力をフィルター、パワーアンプを介してスピーカーに輸入した。スピーカーは、真空タンクから約2mはなして設置し、その間に円筒をおいて音波が分散するのを防いだ。

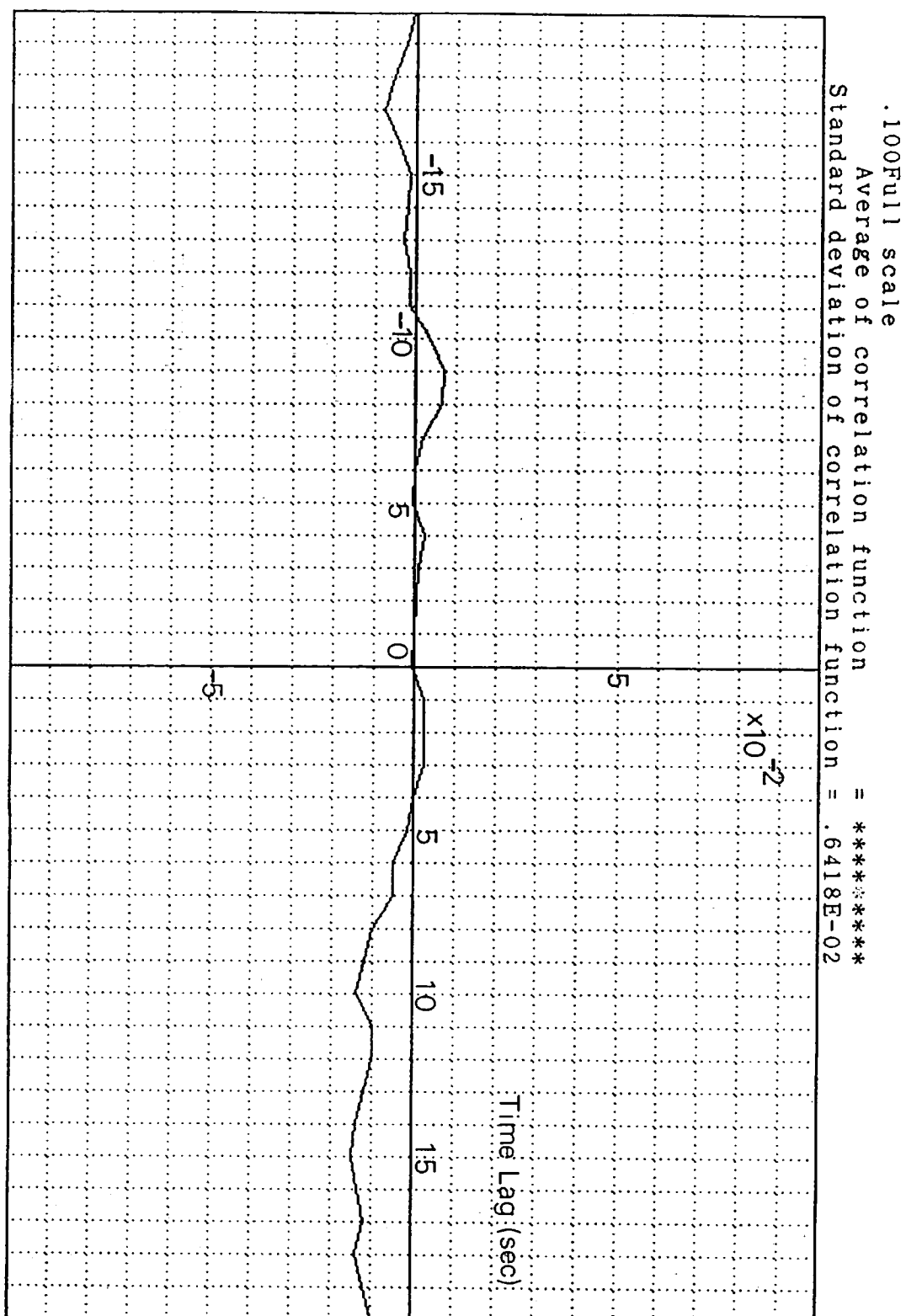
この結果、モード1、モード2のどちらかを励起しても、他のモードは全く変化を示さなかった。図4-12にモード1を励起したときの相関係数を描いてある。このデータは $\tau_p = \Delta t = 1 \text{ sec}$ で140分間、励起信号の大きさを変化させながら測定したが、モード1の平均温度は、 $8.7 \times 10^5 \text{ K}$ であった。(a)は $|Z|^2$ の相互相関、(b)は $|\xi|^2$ の相関係数である。

$$\sigma_{R_Z} = 1.53 \times 10^{-2}$$

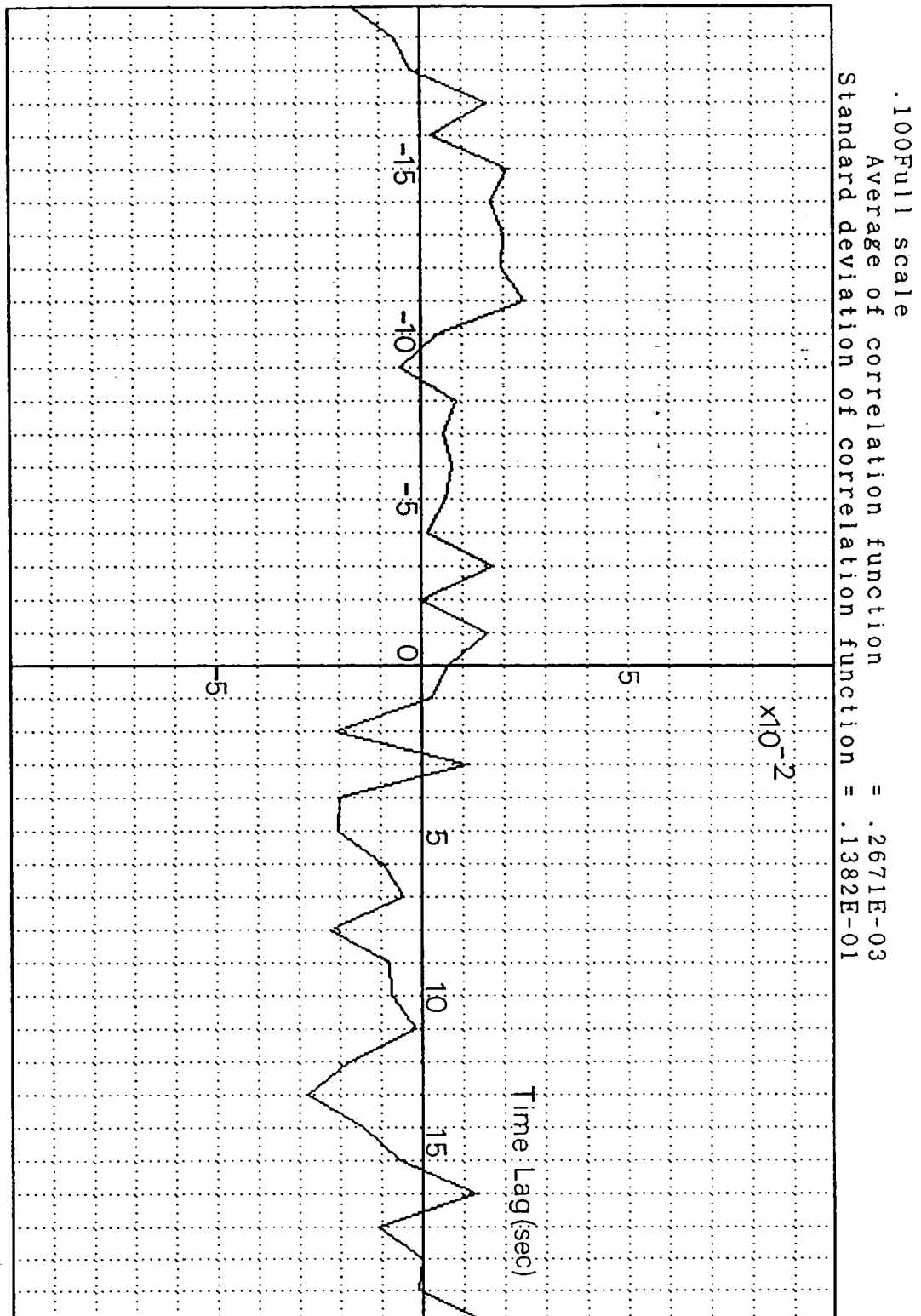
$$\sigma_{R_\xi} = 1.16 \times 10^{-2}$$

が計算値であるから、有意な相関は表れていない。

図4-12 (a) 連続的励起を加えたときの $|Z|^2$ の相関係数



(b) 連続的励起を加えたときの 1 と 1^2 の相関係数



§ 4-4 電圧性ノイズの相関

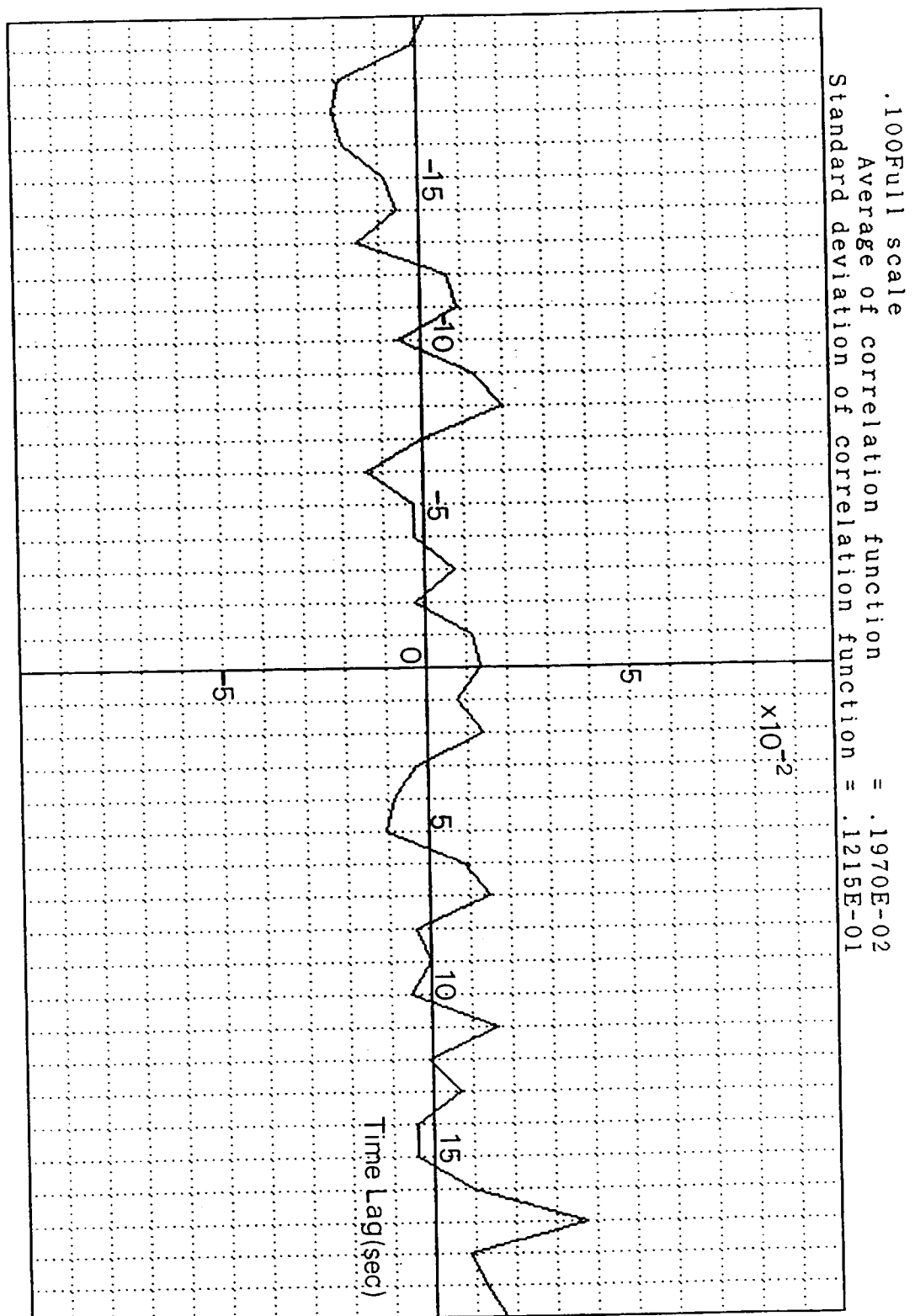
アンプやフィルターなどは各モードについて別の回路を用いているから、第3章以降の議論では電氣的ノイズは各トランスデューサーについて無相関であるとしてきた。しかし、電源には、同じバッテリーを用いており、また、電氣系どうしの間にカップリングが無いという保証もない。そこで、これを確認するために、ブリアンプの入力をショートし、電圧性ノイズだけで相関をとった。

観測は $\tau_p = \Delta t = 1 \text{ sec}$ で2時間行い、 $|Z|^2$ と $|\xi|^2$ について相関係数を求めた。その結果を図4-13に示す。標準偏差は、計算値

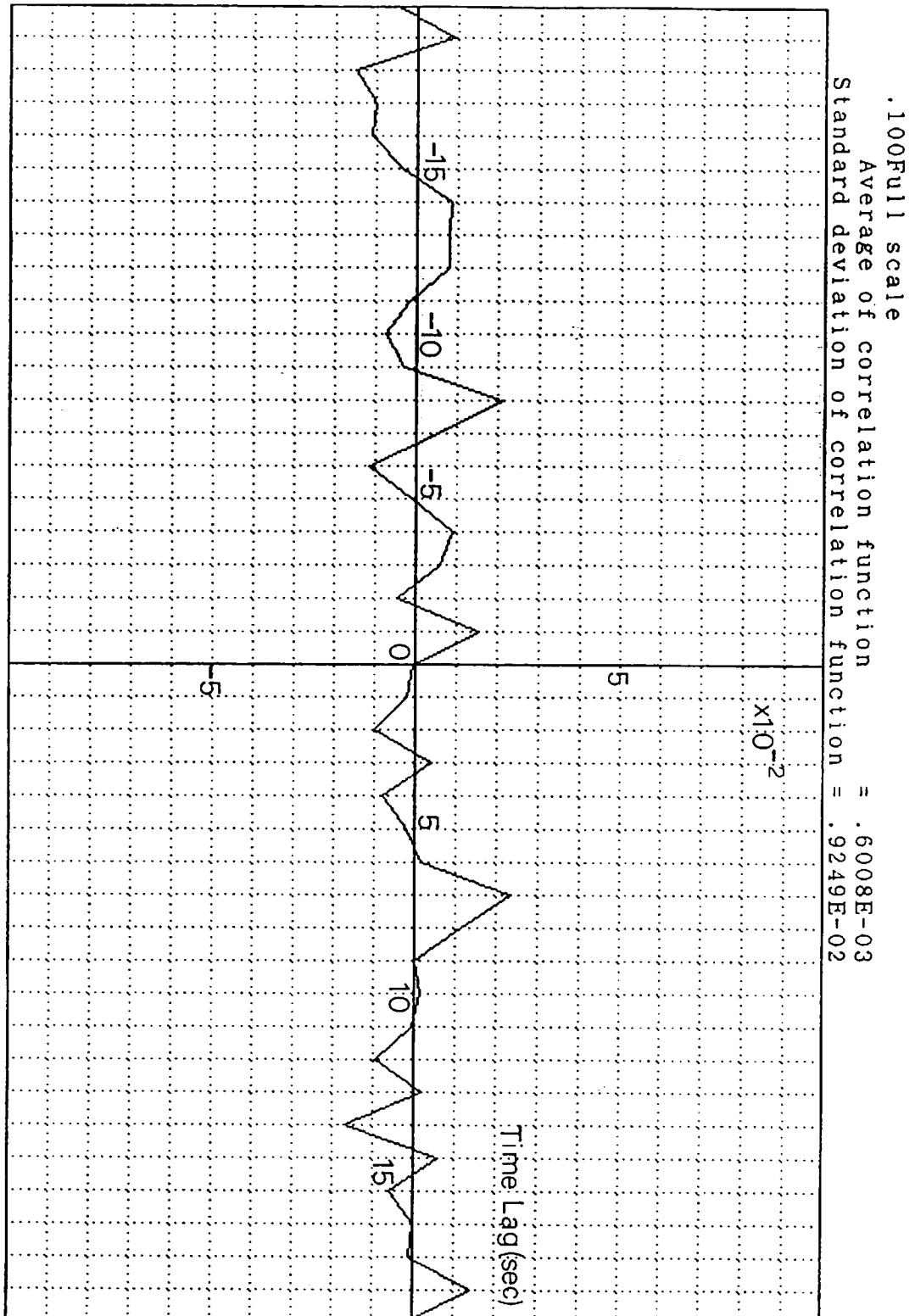
$$\sigma_{R_Z} = \sigma_{R_\xi} = 9.1 \times 10^{-3}$$

とほぼ一致し、電氣系にはカップリングが無いと考えてもよいことがわかった。

図4-13(a) 電圧性ノイズの相関 ($|Z|^2$)



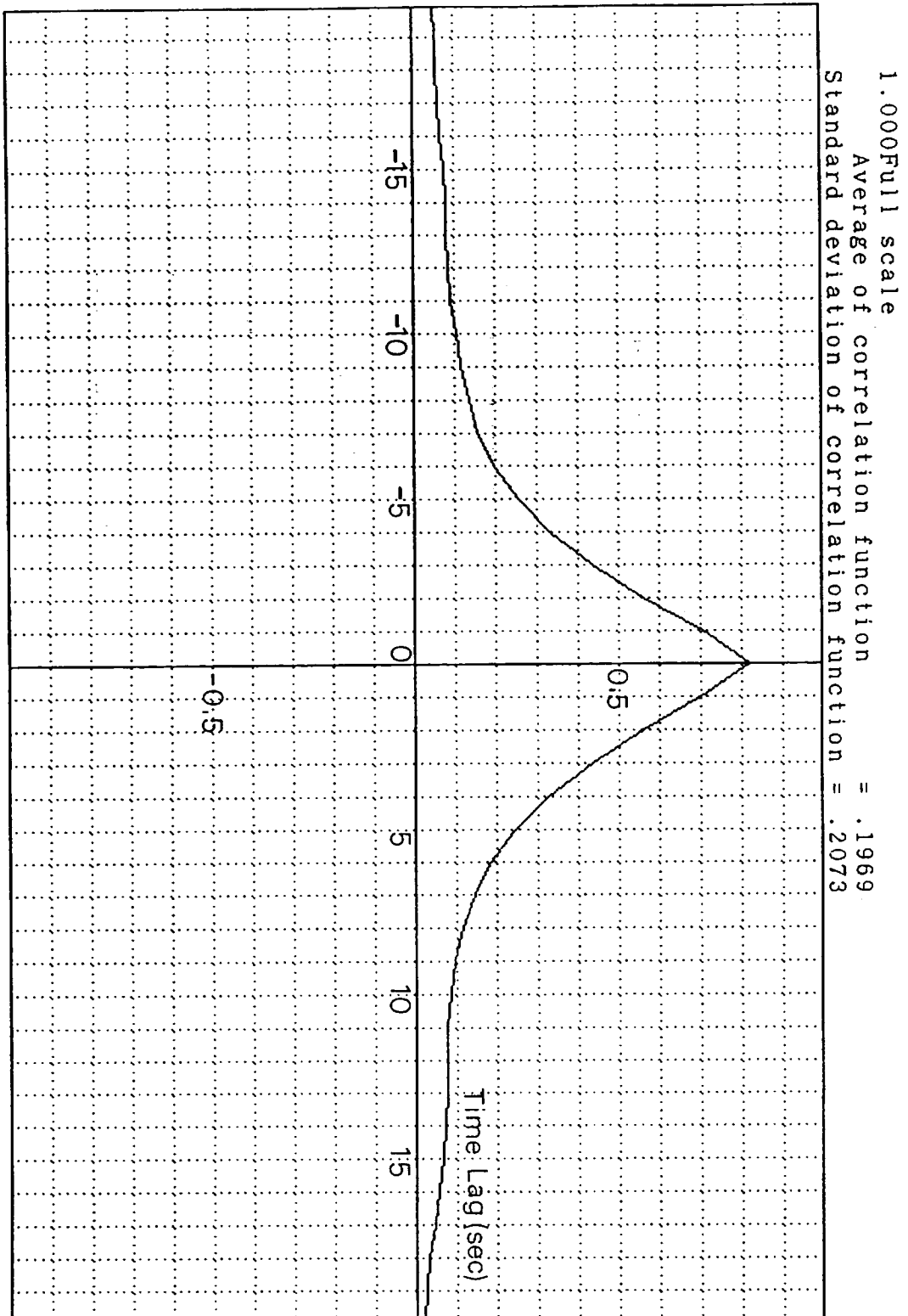
(b) 電圧性ノイズの相関 ($|z|^2$)



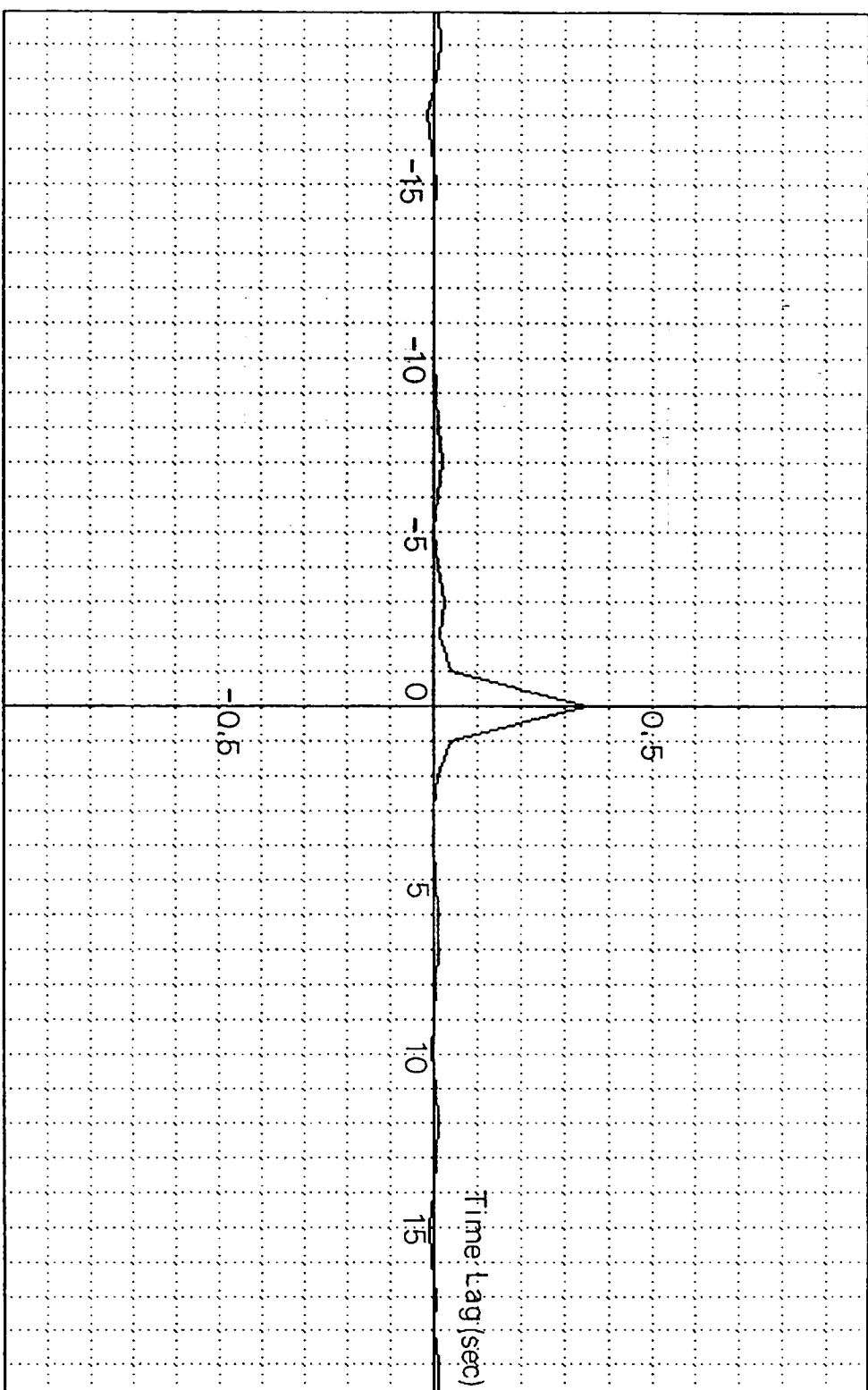
§ 4-5 同一モードの相関

§ 3-4 で熱振動に関する実質相関係数を定義したが、その際に、 $R_{Z_{linear}}$ 及び $R_{\xi_{linear}}$ は、全く実測によらず、計算による予測値を用いた。この値の妥当性を調べるために、2つのアンプを同一の極板につなぎ、その出力の相関をとった。結果を図4-14に示す。これは、(3-32), (3-33)の予測値と完全に一致し、この計算法及び、実質相関係数の定義が妥当であることを実証するものである。

图 4-14 (a) $R_{Z_{linear}}$



1.000Full scale
 Average of correlation function = .1653E-01
 Standard deviation of correlation function = .5447E-01



(b) $R_{\zeta_{linear}}$

§ 4-6 重力波の観測

§ 4-2 で得た 200 時間の観測データから、この期間に到達した重力波の大きさに上限を与えることができる。この際には、熱振動とトランスデューサーの広帯域雑音がノイズの主因となる。ノイズを減少させるには、 τ_p を大きくすれば良いが τ_p をあまり大きくすると、信号も減衰してしまう。そこで S/N をなるべく高くするように τ_p を定める。一般的な条件を考えると複雑になるので、モデルとしてアンテナが時刻 t_1 ($t - \Delta t < t_1 < t$) に撃力 $P \delta(t_1)$ を受ける場合を考えた。

このとき、

$$x(t) = \frac{P}{\mu \omega} \exp\left(-\frac{t-t_1}{2\tau_A}\right) \sin \omega(t-t_1) \theta(t-t_1)$$

これより、

$$\begin{aligned} |z(t)|^2 &= |Z(t)|^2 \\ &= \frac{P^2}{2\mu^2 \omega^2} \left(\frac{2\tau_A}{\tau_A - \tau_p} \right)^2 \left(\exp\left(-\frac{t-t_1}{2\tau_A}\right) - \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_p}\right) \right)^2 \end{aligned}$$

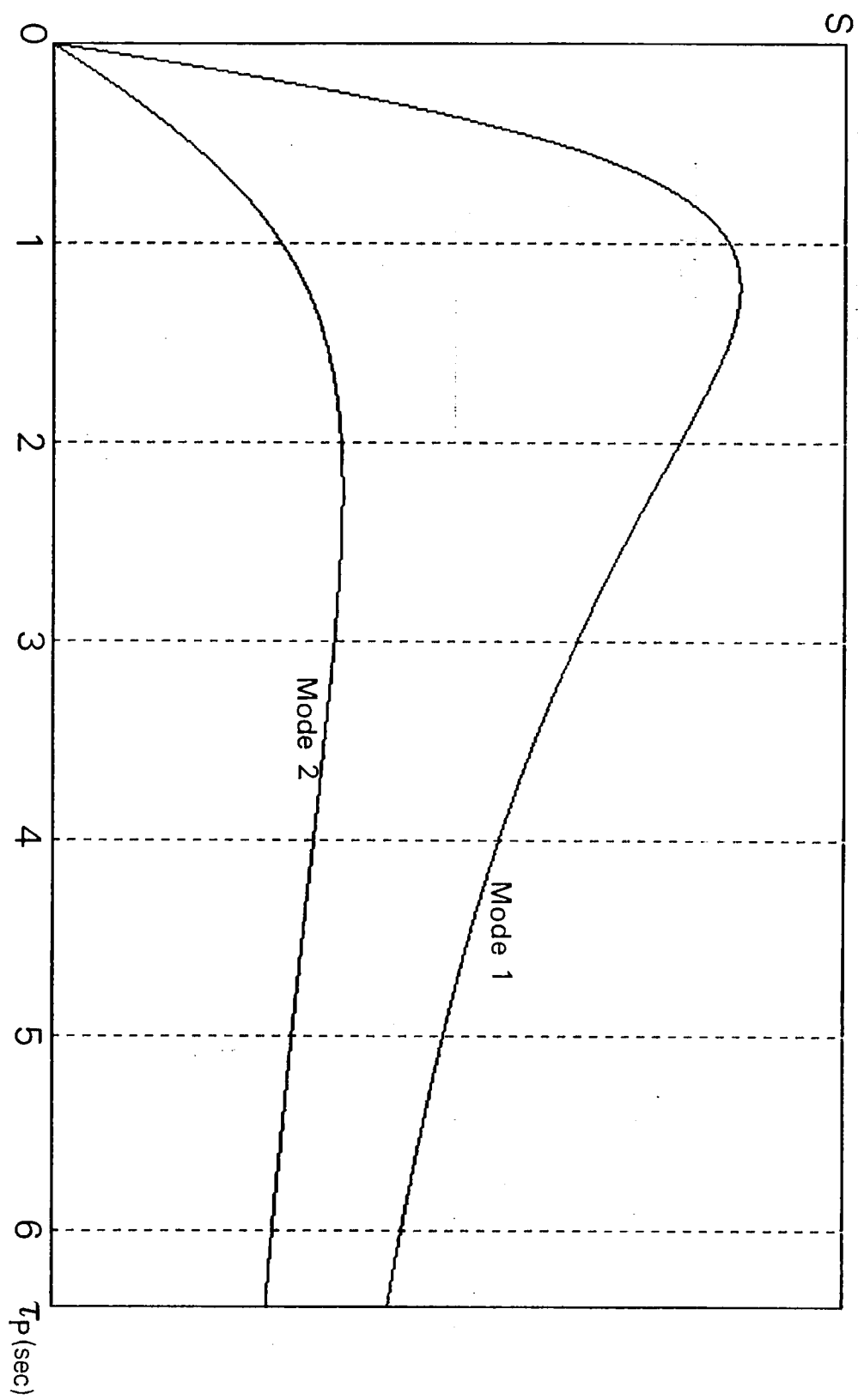
但し、ここでは P がアンテナに統計誤差を越えた振動を生じさせる場合を考えているので、ノイズは無視している。

平常時の $|z|^2$ の平均値、標準偏差は (3-27) で与えられているので τ_p の関数としての感度は

$$S = \frac{\frac{P^2}{2\mu^2 \omega^2} \left(\frac{2\tau_A}{\tau_A - \tau_p} \right)^2 \left(\exp\left(-\frac{t-t_1}{2\tau_A}\right) - \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_p}\right) \right)^2}{\frac{1}{1-(\tau_p/2\tau_A)^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_A}\right) - \frac{\tau_p}{2\tau_A} (1-e^{-1}) \right) + \frac{\langle X_n^2 \rangle}{2\tau_p} (1-e^{-1})}$$

となる。但し、定数は無視し、 $\Delta t = \tau_p$ とした。 $t_1 = t - \Delta t / 2$ のときの S は図 4-15 のようになる。

図4-15 τ_p と感度



Sはモード1では、 $\tau_p = 1.2(\text{sec})$ 、モード2では $\tau_p = 2.3(\text{sec})$ で最大になる。

モード1、モード2について別々に τ_p を選ぶとデータ解析が複雑になるので、結局、

$$\Delta t = \tau_p = 1.0 \text{sec}$$

のままで解析を行なうことにした。測定中の実効温度は

$$T = 120.9 \text{ K}$$

$$\text{eff}_1$$

$$T = 334.4 \text{ K}$$

$$\text{eff}_2$$

であった。

以下にモード1、モード2及び両方のモードがともに 3σ をこえたデータの数
を $|z|$ と $|z|^2$ の大きさごとに記す。

$ z $ と $ z ^2$ (単位 σ)	モード1		モード2		モード1 + モード2	
	計算値	実測値	計算値	実測値	計算値	実測値
3	35846.4	35856	35846.4	35766	1784.7	1788
4	13187.2	13042	13187.2	13217	241.5	239
5	4851.3	4763	4851.3	4883	32.7	20
6	1784.7	1826	1784.7	1826	4.4	1

表4-4 3σ を越えたデータ数と計算値

なお、モード1、2が同時に 7σ を越えたデータは存在しなかった。

表4-4から明かにモード1、モード2は独立な統計にしている事がわかる。

これらを独立なアンテナと考えるとき、それぞれについて、エネルギーフラッ

クスの上限を求めることができる。エネルギーフラックス

$$F^*(\omega) = F^*(\omega) = F(\omega)$$

を持つ重力波によってアンテナの得るエネルギーは、偏向、入射方向について平均すると(2-36)より、

$$E = \frac{\pi G}{5 c^3} M \omega^2 A_G^2 F(\omega)$$

一方、測定中のそれぞれのモードの最大のエネルギーは

$$E_{\max 1} = 1.08 \times 10^{-20} \text{ (J)}$$

$$E_{\max 2} = 2.88 \times 10^{-20} \text{ (J)}$$

これから、エネルギーフラックス $F(\omega)$ を求めると、

$$F(\omega_1) < 2.29 \times 10^6 \text{ (J m}^{-2} \text{ Hz}^{-1})$$

$$F(\omega_2) < 6.00 \times 10^6 \text{ (J m}^{-2} \text{ Hz}^{-1})$$

目安としての h を求めるために、各モード周波数に一致した波が半周期だけくる

場合を考える。⁹⁾すなわち、

$$h(t) = \begin{cases} \sqrt{2} h_{\text{rms}} \cos \omega_n t & |t| \leq \pi / \omega_n \\ 0 & |t| > \pi / \omega_n \end{cases}$$

とすると

$$F(\omega_n) = \frac{\pi c^3}{4 G} h_{\text{rms}}^2$$

これより、

$$h_{\text{rms} 1} < 2.68 \times 10^{-15}$$

$$h_{\text{rms} 2} < 4.34 \times 10^{-15}$$

の上限を得る。

ところで、入射重力波の偏向がアンテナのモードパターンにぴったり一致する

ということはまずありえない。したがって、重力波が励起の原因になっている場合には、両方のモードが同じ程度に励起されると考えるのが自然である。このような考えに基づいて、モード 1, 2 が同程度のエネルギーで励起されている場合以外は無視することにとすると、上の制限はもっと厳しくすることができる。このとき、

$$E_{\max 1} = 6.09 \times 10^{-21} \text{ (J)}$$

$$E_{\max 2} = 6.25 \times 10^{-21} \text{ (J)}$$

$$h_{\text{rms}1} < 2.01 \times 10^{-15}$$

$$h_{\text{rms}2} < 2.02 \times 10^{-15}$$

第5章 考察

§4-2より、熱平衡状態では、0.3%の精度で、モード間にエネルギー遷移が起こらないことが実証された。ところが、図4-9のグラフにはタイムラグ0を中心とした周期的構造があるようにも見える。この周期的変動は、標準偏差とほぼ等しい振幅を持つので、この実験よりも1桁程度精度をあげた実験を行えば、有意な相関が表れる可能性もある。しかし、たとえ、精度をあげた実験を行ない、その結果、振動の相関が検出されたとしても、そのようなレベルでは重力波アンテナとしての性能には何ら問題はない。

一方、§4-3からは、熱平衡が実現されていないときにも一方のモードの振動は他方に影響を及ぼさないことが判明した。(a)では、モード2の得たエネルギーに比べてモード1のエネルギー増加は無視できる大きさであり、この増加も電圧パルスが直接にモード1の振動を励起したためと考えられる。従って、1つのモードの振動パターンに完全に一致した重力波が入射した場合には、他のモードは全く励起されない。これは2つのモードの振幅の比をとることにより、入射重力波の偏極も決定できることを意味する。(b)は、非平衡状態にあっても、1つのモードの振動のエネルギーが他のモードに伝わらないことを示している。更に、どのような条件の下にあっても、2つのモードの信号は、完全に分離して測定することができた。

§4-6の結果から、2つの振動モードは、それぞれ独立なアンテナとして振舞っていることが実証された。また、モード間のcoincidenceをとることによって、実効的に感度を上昇することができた。今回の実験ではモード2のトランスデューサーのノイズが大きいため、あまり感度をあげることができなかったが、全く同じ性能のトランスデューサーをつけた場合には、1つのモードだけを観測する

のに比べて、約 $\sqrt{2}$ 倍に感度が上昇する。

ディスクの(2,1,1)モードと(2,1,2)モードは非常に性質がよくにている。これらの間で相関がない以上、他のモードでは更にエネルギー分配が起こりにくいと考えられる。従って、重力波にたいして敏感なモードはすべて独立なアンテナとして用いることができる。これは、実効的な感度を上昇させることと、観測できる周波数の窓を増やす事の両面に役立つ。

今回の実験では、わざわざアンテナの対称性を崩して2つのモードの周波数をずらした。しかし、周波数の一致したモードを用いれば、振幅だけでなく、位相の相関もとることができ、これも感度の上昇に役立つであろう。同一周波数での偏極を測定できるメリットもある。また、背景輻射重力波の検出^{14),15)}に応用できる。しかし、縮退が解かれていない場合には、信号が分離して取り出せるかどうかもわからず、また、この実験の結果がそのまま成り立つ保証もない。このような意味から、正八角形のアンテナを作り、これについても同様の実験を行なう準備を進めている。

謝 辞

実験を進めるに当たり、多くの方のご指導とご協力を頂いた事にここに感謝します。とくに故平川浩正先生は、御病床にありながら、常に見守っていて下さった事を思い、深く感謝の意を表わします。

坪野公夫助教授には、実験の構想から、詳細にいたるまで、全般にご指導をいただきました。この実験をどうにか進めることができたのは、すべて坪野先生のおかげでした。

大和壮一氏、大橋正健氏には実験の大局的な点でいろいろな示唆をいただきました。また、計算や防振などで行き詰まったときにも、多くの助けを受けました。

計量研究所の三尾典克氏は、実験の初期において、回路の指導など、多くの御助力をして下さいました。

長嶋泰之氏には、実験技術の初歩や、実験を行なう心構えなどを学ばせて頂きました。

赤坂展昌氏は、回路の設計や、コンピュータのプログラムなどについて、しつこく追い回して質問したにも関わらず、いやな顔一つせずに親切に教えて下さった事を心から感謝します。

吉川博介氏には、工作など様々なところで実験のお手伝いをして頂きました。

参考文献

- 1) J. Weber, Phys. Rev. Lett. 18, 498(1967)
- 2) K. Hirata et. al., Phys. Rev. Lett. 58, 1490(1987)
- 3) K. Iso et. al., Phys. Lett. 103A, 262(1984)
- 4) 場の古典論 (第6版) ランダウ・リフシッツ
伊藤敏彦、広重徹訳 東京図書(1978)
- 5) 相対論 (第2版) 平川浩正 共立出版(1986)
- 6) H. Hirakawa et. al., J. Phys. Soc. Jpn. 41, 1093(1976)
- 7) 弾性理論 ランダウ・リフシッツ
佐藤常三訳 東京図書(1972)
- 8) A TREATISE ON THE MATHEMATICAL THEORY OF ELASTICITY(4th ed.)
E. H. Love, Dover(1927)
- 9) かにバルサーに同調した低温重力波アンテナの開発 大和壮一
東京大学修士論文(1987)
- 10) 高感度重力波検出器の開発 坪野公夫
東京大学博士論文(1985)
- 11) K. Narihara and H. Hirakawa, Jpn. J. Appl. Phys. 15, 833(1976)
- 12) スペクトル解析 日野幹夫 朝倉書店(1977)
- 13) B. L. Brown, Rev. Sci. Instrum. 50, 629(1979)
- 14) K. Iso et. al., J. Phys. Soc. Jpn. 54, 1967(1985)
- 15) H. Hirakawa et. al., J. Phys. Soc. Jpn. 54, 1270(1985)