修士論文

重力波検出器の感度向上に向けたスクイーズド光の生成実験

松本　伸之
東京大学理学系研究科物理学専攻坪野研究室

2011年1月11日

目 次

Chapter 1
イントロダクション

この論文では重力波検出器の量子雑音の低減のためのスクイーズド真空場の生成実験に関して述べる。

重力波とは光速で伝搬する時空の歪みである。これは一般相対性理論における Einstein 方程式の波動解であり, A.Einstein 自身によって 1916 年に導き出された [1]。その予言から 62 年, 1978 年に J. H. Taylor と R. A. Hulse は連星パルサー PSR 1913+16 の観測から, 間接的に重力波の存在を証明した [2]。彼らはこの功績によって, 1993 年のノーベル物理学賞を受賞している。重力波は強い透過力を持つため, これを用いた宇宙の観測は電磁波によるものとは相補的な情報をもたらすと考えられている。しかしながら重力波は非常に小さな信号であるため, 未だ直接検出にすら成功していない。そこで重力波に対する十分な感度を持つ検出器を作り上げ,「重力波天文学」を可能にするための活発な研究が世界各地で進められている。

現在主流の重力波検出器であるレーザー干渉計型重力波検出器においては, 日本の LCGT やアメリカの advLIGO などの第 2 世代重力波検出器が標準量子限界感度を目指している。これらの検出器は数年以内に完成し, その測定により重力波が検出されると確信されているが, その検出範囲は 200Mpc 程度の距離までであり, この領域での検出頻度は年に数イベントであると予想されている。重力波を真に天文学として利用するためには, 年に数 10 個以上のイベントを検出することが必須である。そのためには干渉計の感度を高め標準量子限界を超える必要があるため, 量子雑音の低減は重力波検出器に関する研究の大きな課題である。

この量子限界を打開する具体的な手法を, 1980 年に Caves が提案した [4]。それまでは原理的な測定限界として量子限界があるので, それ以上に感度を上げることは不可能だと思われていた。しかし, Caves は干渉計のダークポートにスクイーズド真空場と呼ばれる真空場の揺らぎを圧搾した状態を入射することにより 量子雑音が下がり感度が向上することを示した。当時は感度もそれほど高くなく, 量子論的効果を確かめるには及ばなかったが, 現在はレーザー干渉計の技術は飛躍的に向上し, 量子限界が議論できる程度まで進歩している。一方, スクイーズド真空場の研究も盛んになり, 特に最近は応用レベルに達するほど飛躍的に発展している。こうしてレーザー干渉計とスクイーズド光に関する技術の各々が発展することにより, それらを結合して標準量子限界を超えたレーザー干渉計型重力波検出器を設計することが可能となった。

1.1 論文の概要と構成

我々はレーザー干渉計型重力波検出器の量子雑音低減を目指してスクイーズド光の生成を目指した実験を行っている。本論文ではその現状について報告する。

2010年に文部科学省の最先端研究基盤事業の一つに大型低温重力波望遠鏡（Large Cryogenic Gravitational Telescope:LCGT）プロジェクトが選定された事により, 日本における重力波の直接検出は近い将来に確約されたようなものであり, さらに言えば重力波天文学の成立も現実味を帯びてきた。その際障害となるのが量子雑音であるが, 本研究で目指している方法を用いれば標準量子限界をも超えた感度で重力波検出に臨める可能性を秘めている。

近年, 各国の重力波の研究グループでは近い将来に備えてスクイージングに関する研究を精力的に行い様々な成功を収めてきた [6, 7, 8]。しかし, これまでの間日本のグループではスクイーズド光を用いた重力波のための研究は行われる事はなかったため, 現段階では大きな遅れをとっている。このような研究状況の下, 本研究はスクイーズド光の生成実験に関する知見を深め, 未だなされていないスクイーズド光を用いた重力波検出器への応用を果たすための第一歩となった。

次に論文の構成について説明する。この章では重力波及びその検出に関して説明をする。第 2 章ではスクイージング実験の理解には欠かせない理論の説明を行う。そして第 3 章では重力波検出器への応用を紹介し, 最後に第 4 章で行った実験に関して報告する。

1.2　重力波の基本的性質

Einstein 方程式は, 重力場が弱い場合には線形化することができる。重力波とは, この線形化された Einstein 方程式の波動解である。本節では Einstein 方程式を線型化, 波動解を求める。また, そこから重力波の基本的な性質を求める。

Einstein 方程式

一般相対論では, 時空の幾何学的性質は無限小だけ離れた 2 点間の距離 (線素) ds によって記述される。ds は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ によって決まる量で,2 点間の座標の差 dx^μ を用いて以下のように表される[1]。

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1.1}$$

重力場のない平坦な時空（Minkowski 時空）では計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

となる。

[1] 本論文中では, ギリシャ文字の添字は $\{0,1,2,3\}$ を, ローマ文字の添字は $\{1,2,3\}$ をとるものとする。また, 座標は $x^0 = ct$,$x^1 = x$,$x^2 = y$,$x^3 = z$ とする。

重力場のある時空では, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は Einstein 方程式に従う。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{1.3}$$

ここで $R_{\mu\nu}$ はリッチテンソル (Ricci tensor), R はリッチスカラー (Ricci scalar) である。

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} \tag{1.4}$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{1.5}$$

但し,$A_{,\mu} = \frac{\partial A}{\partial x^{\mu}}$ である。また,c は光速,G は重力定数,$T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである。リッチテンソルにあらわれる $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ はクリストフェルト記号 (Christoffel symbol) と呼ばれる値で, 以下のようにして計量テンソル $g_{\mu\nu}$ によって構成される。

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \tag{1.6}$$

Einstein 方程式の線形近似

真空 ($T_{\mu\nu} = 0$) かつ平坦な時空 ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$) に微小な摂動 $h_{\mu\nu}$ が加わった場合を考える。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{1.7}$$

このときクリストッフェルト記号, リッチテンソル, リッチスカラーはそれぞれ $h_{\mu\nu}$ の 1 次の項まで考えて以下のように記述できる。

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}) \tag{1.8}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h^{\sigma}_{\mu,\nu\sigma} + h^{\sigma}_{\nu,\mu\sigma} - h^{\ ,\sigma}_{\mu\nu,\sigma} - h^{\sigma}_{\sigma,\mu\nu}) \tag{1.9}$$

$$R = h^{\mu\nu}_{\ \ ,\mu\nu} - h^{\mu,\nu}_{\mu,\nu} \tag{1.10}$$

式 (1.7),(1.9),(1.10) を Einstein 方程式 (1.3) に代入する。

$$h^{\sigma}_{\mu,\nu\sigma} + h^{\sigma}_{\nu,\mu\sigma} - h^{\ ,\sigma}_{\mu\nu,\sigma} - h^{\sigma}_{\sigma,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h^{\alpha\beta}_{\ \ ,\alpha\beta} - h^{\alpha,\beta}_{\alpha,\beta}) = 0 \tag{1.11}$$

これが線形化された Einstein 方程式である。

ここで,$\bar{h}_{\mu\nu}$ を次のように定義する。

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{1.12}$$

但し,$h = h^{\alpha}_{\alpha}$ である。さらに, 時間座標と空間座標の取り方として次の調和条件を課す。

$$\bar{h}^{\nu}_{\mu,\nu} = 0 \tag{1.13}$$

結果, 線形化された Einstein 方程式 (1.11) は,

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.14}$$

となる。この式は波動方程式そのものであり, 時空の微小な摂動 $\bar{h}_{\mu\nu}$ が波として伝播することを意味する。これが重力波である。

単色平面波解

波動方程式 (1.14) の解として次のような単色平面波を考える。

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(\mathrm{i}k_\alpha x^\alpha) \tag{1.15}$$

この単色平面波 (1.15) が調和条件 (1.13) と波動方程式 (1.14) を満たすためには,

$$A_{\mu\nu}k^\mu = 0 \tag{1.16}$$
$$k_\mu k^\mu = 0 \tag{1.17}$$

でなければならない。この条件はそれぞれ重力波が横波であることと, 重力波が光速で伝播することを示している。

この時点で重力波にはまだ座標変換の自由度が残っているので, TT (Transverse-Traceless) Gauge を課す。

$$A^\alpha_\alpha = 0 \tag{1.18}$$
$$A_{\mu\nu}k^\nu = 0 \tag{1.19}$$

ここで z 方向へ伝播する重力波を考えると,

$$k^1 = k^2 = 0 \tag{1.20}$$
$$k^0 = k^3 = k > 0 \tag{1.21}$$

より

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp\{\mathrm{i}k(ct - z)\} \tag{1.22}$$
$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

と記述できる。但し,$h_+ = A_{11}$ かつ $h_\times = A_{12}$ である。$A_{\mu\nu}$ は一般に複素数なので, 重力波の自由度が 4 であることがわかる。また, 重力波の角周波数 ω は $\omega = ck$ である。最後に重力波の表示を $\bar{h}_{\mu\nu}$ から $h_{\mu\nu}$ に戻す。

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp\{\mathrm{i}k(ct - z)\} \tag{1.24}$$

自由質点に対する重力波の影響と重力波の偏光

重力波の本質は潮汐力である。その潮汐力が自由粒子（重力以外の力を受けない粒子）に及ぼす効果を重力波の偏光という概念で表す。

TT 条件の座標軸上を,z 方向に伝播する h_+ 成分のみの単色平面波を考える。このとき線素は

$$ds^2 = -c^2dt^2 + \{1 + h_+\cos(\omega t - kz)\}dx^2 + \{1 - h_+\cos(\omega t - kz)\}dy^2 + dz^2 \tag{1.25}$$

となる。まず, この時空での初期条件 x^i=一定の自由粒子の振る舞いを考える。
粒子は測地線方程式

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{1.26}$$

に従う。ここで τ は粒子の固有時間である。測地線方程式を解くことにより,

$$\frac{dx^i}{d\tau} = 0 \tag{1.27}$$

$$\frac{dx^0}{d\tau} = 0 \tag{1.28}$$

を得る。これは自由粒子は TTGauge の座標軸上を静止することを意味している。

次に 2 つの自由粒子間の固有距離の変化を考える。自由粒子 A を原点に自由粒子 B を $(R_0\cos\theta, R_0\sin\theta, 0)$ におく。このとき 2 粒子間の固有距離 R は,

$$R = \int_A^B (ds^2)^{1/2} = \int_0^{R_0}\{1 + h_+(\cos 2\theta\cos\omega t)\}^{1/2}dr \tag{1.29}$$

$$\simeq R_0\left(1 + \frac{h_+}{2}\cos 2\theta\cos\omega t\right) \tag{1.30}$$

となる。同様の条件で $h_\times$ 成分のみの場合に関して計算する。

$$R \simeq R_0\left(1 + \frac{h_+}{2}\sin 2\theta\cos\omega t\right) \tag{1.31}$$

それぞれの場合で, 円周上に配置した自由粒子の固有距離変化を図示すると, 図 1.1 のようになる。この図から重力波の潮汐作用がよくわかる。また 2 つのモードは互いに 45 度ずれた形になっている。一般に重力波は h_+ と $h_\times$ の両方の成分を持ち, それぞれを重力波の偏光（モード）という。

1.3　重力波源

この節では, 重力波の放出に関してまとめたあと, 代表的な重力波源に関して見ていく。

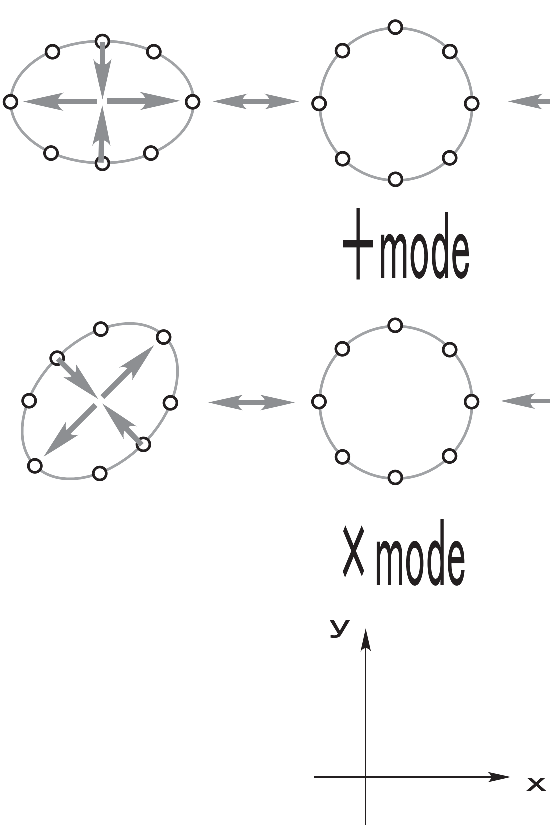


図 1.1: 重力波が紙面に垂直な方向から入射したときの自由質点群の変位。

重力波の放出

重力場中での線形化された Einstein 方程式は

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.32}$$

である。この解は電磁波における遅延ポテンシャルの式と同様にして,

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(x^0 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \tag{1.33}$$

と求めることができる。重力波源が放出される重力波の波長と比べて十分に小さい場合は,

$$\bar{h}_{ij} = \frac{2G}{c^4 r} \int \rho(t') x'_i x'_j d^3 x' \tag{1.34}$$

と近似できる。但し,$r = |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$,$t' = t - r/c$ である。

一方,4 重極モーメント $Q_{ij}(t)$ は,

$$Q_{ij}(t) = \int \rho(t,x)(x_i x_j - \frac{1}{3}\delta_{ij} x^i x^j) d^3 x \tag{1.35}$$

であるので,

$$h \sim \frac{2G}{c^4 r}\frac{d^2 Q_{ij}(t')}{dt'^2} \tag{1.36}$$

と書くことができる。また, 重力波源の放出するエネルギーは

$$P = \frac{G}{5c^5}\left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt'^3}\right)^2 \tag{1.37}$$

となる [11]。

重力波の生成には 4 重極モーメントの時間変化が必要であることがわかった。また, 重力波振幅は重力波源までの距離に反比例することもわかった。重力波のエネルギーは極めて弱く, 検出可能なエネルギーを持つ重力波は, その源を激しい天体現象に求めなくてはいけない。次の節から, 超新星爆発, パルサー, 連星中性子星, 宇宙背景放射という重力波源について見ていく。

超新星爆発

恒星進化の標準的な説によれば, 太陽質量の 10 倍以上の質量を持つ星は進化の最終段階で中心に鉄のコアができ, その鉄のコアが重力崩壊を起こし, 重力収縮が進む。収縮により高密度となったコアは中性子化し, 核力による反発力で重力収縮が止まり, 外層に向かって衝撃が生じる。これが超新星爆発である [12]。中心に取り残された核は中性子星になる。質量が中性子星の上限値以上ならブラックホールとなる。

この重力崩壊の中性子星形成過程から重力波が放出されると考えられている。しかし, このとき放出される重力波の波形を正確に予言することは難しい。なぜなら, 中性子星形成は強い重力場中で起こりポストニュートニアン近似が成り立たない。さらに, 磁場やニュートリノも考慮する必要があり, このような極限状態の状態方程式も未知である。ただ, いくつかの数値シュミレーションの結果から, 超新星爆発の重力波は継続時間の短いスパイク状になっていることがわかっている [13]。このような形状の重力波をバースト重力波という。

パルサー

超新星爆発により形成された中性子星は, 典型的に質量が太陽質量程度, 半径が約 10km, 内部密度が 10^{14}g/cc, といった超高密度な星である。中性子星に強力な磁場が付随している場合は, 磁場の極方向から電磁波が放出される。中性子星の自転軸と磁極軸は必ずしも一致しておらず, ある瞬間にのみ地球方向に電波を放出するという状況がありえる。このような規則正しい周期で信号を放出する天体をパルサーと呼ぶ [12]。基本的に, パルサーは軸対称と考えられるが, わずかな非対称性を仮定すると無視できない重力波を放出する。

パルサーは電磁波や重力波の放出で回転エネルギーを失うので, 厳密にはその回転周期は一定でないが, 短い時間では一定と考えられる。それはすなわち一定の周波数をもつ重力波を放出することを意味する。このような重力波は連続波と呼ばれている。

連星中性子星

連星中性子星は, 一般相対論的効果により, 角運動量を重力波として放出し, 軌道周期が徐々に減少する。この軌道周期の減少を Hulse と Taylor が PSR1913+16 という連星中性子星の観測から明らかにし, 間接的に重力波の存在を証明した。連星中性子星から放出される重力波は, 合体の直前を除いて, ポストニュートニアン近似から理論的に波形を求めることができる。特に, 合体までの約 3 分間に, 周波数が 20Hz 程度から 1kHz 程度に徐々に増加する。このような波形の重力波をチャープ波といい, 最も有望な重力波源である。

宇宙背景重力波

宇宙背景重力波には２つの種類がある。１つは初期宇宙に起源を持つ宇宙論的な背景重力波, 例えばインフレーションや QCD 相転移に起源を持つ背景重力波, である。これらは電磁波やニュートリノでは直接見えない初期宇宙の情報を含んでおり, 現在の宇宙論を直接検証できる可能性がある。もう１つは, 天文学的に雑多な重力波の重ね合わせが作る背景重力波であり, 例えば低周波では連星ブラックホールの重力波が背景重力波となっていると考えられている。

1.4　重力波検出器

重力波を検出する方法は大きく２つに分類される。１つは, 弾性体に入射した重力波により生じる潮汐力を, 励起する振動モードを読み取ることで重力波の到来を検出する共振型重力波検出器である。これは 1960 年代に世界で最初に重力波検出が試みられた際に用いられた方法である。もう１つは, 自由質点間の固有距離の変化を測定する方法であり, 固有距離間の変化はレーザー干渉計, ドップラートラッキングやパルサータイミングなどを使い測定される。現在の主流はレーザー干渉計を使った重力波検出であり, その基本原理は離れた場所にある 2 つの自由質点間の距離を干渉計を用いて測るというものである。干渉計を構成する鏡は振り子で懸架され, 振り子の共振周波数よりも十分高い周波数では自由質点と見なせる。レーザー干渉計による重力波検出器に関しては第 3 章で詳しく説明する。また, 干渉計を宇宙空間に建設する計画も進んでおり, これは超低周波の重力波をターゲットとしている。

1.5　重力波検出器の雑音

最後にレーザー干渉計型重力波検出器の雑音源のうち大きな寄与を及ぼすものを概説する。

量子雑音

　検出器の感度を制限する最終的な限界がハイゼンベルクの不確定性原理に由来する量子雑音である。量子雑音には散射雑音と輻射圧雑音があり, 散射雑音とは光のパワーを測定する際検出器に届く光子の数が不確定性原理によって揺らぎを伴うことで生じる雑音である。また, 輻射圧雑音とは, 光子が運動量を持ちかつ鏡に当たる光子数が揺らぎを伴うために, 干渉計のミラーを無相関に揺らし距離の差動成分を生じ発生する雑音である。これらの雑音は干渉計のダークポートに入射する真空場が起源となっているため, その真空場をスクイーズド真空場に置き換える事で量子雑音を低減できる事を第 3 章で説明する。

地面振動

　低周波領域 (約 40Hz 以下) において問題となる雑音であり, 地面振動が干渉計のテストマスの位置に変動を生じさせるために雑音となる。このカップリングはテストマスを振り子に設置したり, フィードバック制御による防振を行う事で対処されている。振り子の共振周波数より十分大きな領域では振り子の伝達関数は周波数の 2 乗に反比例しているため地面振動を減衰させる事が可能であり, 振り子の共振周波数より低い周波数帯では能動防振装置が用いられる。

熱雑音

　100Hz 程度の周波数領域において問題となる雑音であり, テストマスに接する熱浴によって引き起こされる振動が検出器の感度を制限する。熱振動の大きさは揺動散逸定理を用いることで系の散逸から求めることができ, 熱浴の温度を下げたりテストマスの Q 値を上げる事で熱雑音の低減が可能な事が分かる。

CHAPTER 2
理論

この章ではスクイーズド真空場生成器（スクイーザー）の理解には欠かせない理論について述べる。まず, 電磁場の量子化に関して簡単に記し, そこから得られる様々な状態について述べる。次に, 2 次の非線形光学効果の説明を行い光パラメトリック発振器 (Optical Parametric Oscilator:OPO) によるスクイーザーの解析に関して述べる。最後に実験において必要な制御法について説明する。

2.1 電磁場の量子化

自由場のマクスウェル方程式は

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{2.4}$$

であり, 真空場においては

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{2.6}$$

の関係がある。ここで ϵ_0 は真空の誘電率であり, μ_0 は真空の透磁率である。これらの式から

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{2.7}$$

か得られる。

定在波の量子化

まず, 長さ A, 体積 $V = LA$ の共振器内の定在波について考える。電場振幅は x 偏向であるとすると, それは次のように展開される。

$$E_x(z,t) = \sum_j A_j q_j(t) \sin(k_j z) \tag{2.8}$$

ここで, q_j は長さの次元を持つ振幅であり, $k_j = j\pi/L,\ \ j = 1, 2, 3, \ldots$ は波数であり, A_j は

$$A_j = \sqrt{\frac{2\omega_j^2 m_j}{V\epsilon_0}} \tag{2.9}$$

である。ここで, $\omega_j = j\pi c/L$ はモード j の角周波数であり, m_j は調和振動子との類似のための定数であり質量の次元を持つ。このとき, 磁場は

$$H_y = \sum_j A_j \left(\frac{\dot{q}_j \epsilon_0}{k_j}\right) \cos(k_j z) \tag{2.10}$$

であり, ハミルトニアンは

$$\begin{aligned}\hat{\mathscr{H}} &= \frac{1}{2}\int \left(\epsilon_0 \hat{\boldsymbol{E}}^2 + \mu_0 \hat{\boldsymbol{H}}^2\right) dr \\ &= \frac{1}{2}\int_V \left(\epsilon_0 \hat{E}_x^2 + \mu_0 \hat{H}_y^2\right) dr \\ &= \frac{1}{2}\sum_j \left(m_j \omega_j^2 q_j^2 + \frac{p_j^2}{m_j}\right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

となる。ここで $p_j = m_j \dot{q}_j$ は j モードの運動量であり, (2.11) は調和振動子の場合と同じ形式である。

p, q を次のようなボソンの交換関係を満たす演算子に置き換える事で量子化を行う。

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{i,j} \tag{2.12}$$

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_i] = [\hat{p}_i, \hat{p}_i] = 0 \tag{2.13}$$

また, 調和振動子の場合との類推から, 生成消滅演算子 $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ を, ハミルトニアンが

$$\mathscr{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{2.14}$$

となるように, 次のように定義する。

$$\hat{a}_j \equiv \frac{e^{\mathrm{i}\omega_j t}}{\sqrt{2m_j\hbar\omega_j}}(m_j\omega_j\hat{q}_j + \mathrm{i}\hat{p}_j) \tag{2.15}$$

$$\hat{a}_j^\dagger \equiv \frac{e^{-\mathrm{i}\omega_j t}}{\sqrt{2m_j\hbar\omega_j}}(m_j\omega_j\hat{q}_j - \mathrm{i}\hat{p}_j) \tag{2.16}$$

生成消滅演算子は次の交換関係を満たす。

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{i,j} \tag{2.17}$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_i] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i^\dagger] = 0 \tag{2.18}$$

このとき, 量子化された電磁場は

$$E_x(z,t) = \sum_j \mathscr{E}_j \left(\hat{a}_j e^{-\mathrm{i}\omega_j t} + \hat{a}_j^\dagger e^{\mathrm{i}\omega_j t} \right) \sin k_j z \tag{2.19}$$

$$H_y(z,t) = -\mathrm{i}\epsilon_0 c \sum_j \mathscr{E}_j \left(\hat{a}_j e^{-\mathrm{i}\omega_j t} - \hat{a}_j^\dagger e^{\mathrm{i}\omega_j t} \right) \cos k_j z \tag{2.20}$$

となり, ここで $\mathscr{E}_j = \sqrt{\hbar\omega_j/(\epsilon_0 V)}$ は電場の次元を持つ振幅である。

進行波の量子化

次に周期境界条件の離散的な進行波を平面波として扱う場合を考える。これはリング共振器内の光やレーザー共振器からの光などを表す。周期 L の周期境界条件に対する古典解を平面波で展開すると

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{l,\sigma} \hat{\epsilon}_{l,\sigma} \mathscr{E}_{l,\sigma} \alpha_{l,\sigma} e^{-\mathrm{i}\omega_l t + \mathrm{i}\boldsymbol{k}_l \cdot \boldsymbol{r}} + \text{c.c.} \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{l,\sigma} \frac{\boldsymbol{k}_l \times \hat{\epsilon}_{l,\sigma}}{\omega_l} \mathscr{E}_{l,\sigma} \alpha_{l,\sigma} e^{-\mathrm{i}\omega_l t + \mathrm{i}\boldsymbol{k}_l \cdot \boldsymbol{r}} + \text{c.c.} \tag{2.22}$$

であり, ここで c.c. は複素共役な項を表し, σ は偏向を表すインデックスであり, $\mathscr{E}_l$ は電場の次元を持つ

$$\mathscr{E}_l = \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 V}} \tag{2.23}$$

であり, $\alpha_{l,\sigma}$ は無次元の振幅を表す。$\hat{\epsilon}_{l,\sigma}$ は偏向ベクトルである。周期境界条件から

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L} \tag{2.24}$$

となる。ここで n_x, n_y, n_z は $(0, \pm1, \pm2, \ldots)$ である。また, (2.4) から

$$\boldsymbol{k}_l \cdot \hat{\epsilon}_{l,\sigma} = 0 \tag{2.25}$$

なため, 場は横波である。

この場合のハミルトニアンも (2.11) と同様となるために, 量子化の過程も同じになる。その結果生成消滅演算子を用いて次のようなハミルトニアンが得られる。

$$\mathscr{H} = \sum_{l,\sigma} \hbar\omega_l \left(\hat{a}_{l,\sigma}^\dagger \hat{a}_{l,\sigma} + \frac{1}{2} \right) \tag{2.26}$$

また, 電磁場は

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{l,\sigma} \mathrm{i}\mathscr{E}_l \hat{\epsilon}_{l,\sigma} \hat{a}_{l,\sigma} e^{-\mathrm{i}\omega_l t + \mathrm{i}\boldsymbol{k}_l \cdot \boldsymbol{r}} + \text{H.C.} \tag{2.27}$$

$$\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{l,\sigma} \mathrm{i}\mathscr{E}_l \frac{\boldsymbol{k}_l \times \hat{\epsilon}_{l,\sigma}}{\omega_l} \hat{a}_{l,\sigma} e^{-\mathrm{i}\omega_l t + \mathrm{i}\boldsymbol{k}_l \cdot \boldsymbol{r}} + \text{H.C.} \tag{2.28}$$

と表される。ここで, H.C. はエルミート共役な成分を表す。

離散モードから連続モードへの移行は 1 次元に限って行う。細いレーザー光において進行方向 z に対してだけ量子化を行い, 進行方向と垂直な方向には有効断面積 A を持つとすることで行う。 これは, 光源で生成された光が検出器に向かいそこで吸収されるような周期的でない連続モードの進行波を扱う事になる。また, 簡単のために 1 つの偏向モードに限ると $(\sum_\sigma \to 1)$ この変換は

$$\sum_l \to \frac{1}{\triangle\omega}\int d\omega \tag{2.29}$$

$$\hat{a}_l \to \sqrt{\triangle\omega}\,\hat{a}(\omega) \tag{2.30}$$

で表されるので, このとき電磁場は

$$\hat{\boldsymbol{E}}(z,t) = \int d\omega \acute{\mathscr{E}}\hat{\epsilon}(\omega)\hat{a}(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega(t-z/c)} + \mathrm{H.C.} \tag{2.31}$$

$$\hat{\boldsymbol{H}}(z,t) = \frac{1}{\mu_0}\int d\omega \acute{\mathscr{E}}\frac{z\times\hat{\epsilon}(\omega)}{\omega}\hat{a}(\omega)e^{-\mathrm{i}\omega(t-z/c)} + \mathrm{H.C.} \tag{2.32}$$

となり,

$$\acute{\mathscr{E}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0 cA}} \tag{2.33}$$

である。

2.1.1　数状態

ハミルトニアン (2.11) の固有状態は数状態あるいはフォック状態として知られており, $|n_k\rangle$ で表される。それらは, 数演算子 $\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k$ を用いて以下のように書ける。

$$\hat{n}_k|n_k\rangle = n_k|n_k\rangle \tag{2.34}$$

量子化された場の基底状態（つまり真空場）は次のように定義できる。

$$\hat{a}_k|0\rangle = 0 \tag{2.35}$$

基底状態のエネルギーは次のように計算できる。

$$\langle 0|\hat{\mathscr{H}}|0\rangle = \frac{1}{2}\sum_k \hbar\omega_k \tag{2.36}$$

ここで, 　ω_k には上限値が無いため基底状態のエネルギーは無限である。しかし, 測定には有限の時間を要し, さらに有限の大きさの空間的広がりを要するので, それらの逆数程度の周

波数帯や波数幅に制限され, 発散は回避される。演算子 $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ を数状態に作用させると, そのモードからフォトンをひとつ増減するため, それぞれ消滅, 生成演算子と呼ばれる。

$$\hat{a}_k|n_k\rangle = \sqrt{n_k}|n_k - 1\rangle \tag{2.37}$$
$$\hat{a}_k^\dagger|n_k\rangle = \sqrt{n_k + 1}|n_k + 1\rangle \tag{2.38}$$

数学的には, 数状態は直交で完全系である。すなわち

$$\langle n_k|m_k\rangle = \delta_{mn}, \qquad \sum_{n_k=0}^{\infty} |n_k\rangle\langle n_k| = 1 \tag{2.39}$$

である。

2.1.2　コヒーレント状態

　発振閾値より十分大きなパワーで動作しているレーザーを, キャビティの線幅よりも十分離れた周波数帯で検出される状態は, $|\alpha\rangle$ で表されるコヒーレント状態として知られている。この状態は, 数状態とは異なり光の位相と振幅の両方の情報を精度よく測定できる最小不確定状態である。数学的には以下のように, 変位演算子 $\hat{D}$ を用いて生成される。

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle \tag{2.40}$$

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}) \tag{2.41}$$

ここで, α は複素数である。また, コヒーレント状態は消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態である。

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{2.42}$$
$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\alpha^* \tag{2.43}$$

コヒーレント状態を数状態で展開すると,

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{C_n}|n\rangle \tag{2.44}$$

となり, (2.42) は

$$\begin{aligned}\hat{a}|\alpha\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{C}_n\sqrt{n}|n\rangle \\ &= \alpha\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_n|n\rangle\end{aligned} \tag{2.45}$$

となる。展開係数 C_n は

$$\mathrm{C}_n\sqrt{n} = \alpha\mathrm{C}_{n-1} \tag{2.46}$$

であるので

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n &= \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\mathrm{C}_{n-1}\\ &= \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{C}_0\end{aligned} \tag{2.47}$$

となる。従って, 規格化条件 $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ から (2.44) は

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{2.48}$$

となる。

　コヒーレント状態の平均光子数は

$$n = \langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = |\alpha|^2 \tag{2.49}$$

であり, その揺らぎは次のようになる。

$$\triangle^2 n = \langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2 = n \tag{2.50}$$

また, その確率分布は次のようにポアソン分布となる。

$$\begin{aligned}P_n &= |\langle n|\alpha\rangle|^2\\ &= e^{-n}\frac{\bar{n}^n}{n!}\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\frac{\triangle n}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{2.52}$$

2.1.3　直交位相演算子と最小不確定状態

　電気信号の測定と光の信号の測定とは同様な測定である。そこで, 電気信号で広く用いられる概念を導入する。そのためにまず以下のような信号について考える。

$$\mathrm{V} = \mathrm{A}\sin(\omega t + \phi) \tag{2.53}$$

これは次のように展開できる。

$$\mathrm{V} = \mathrm{A}\sin(\omega t)\cos(\phi) + \mathrm{A}\cos(\omega t)\sin(\phi) \tag{2.54}$$

この信号に対し, 局部発振器 (Local Oscillator:LO) から得られる参照信号 $V_0 = \sin(\omega t)$ を用いるとその位相情報を得ることができる。このとき, (2.54) の第一項を in-phase 成分といい, LO と位相が $\pi/2$ ずれている第二項を quadrature-phase 成分という。実際に V を測定する際には, 信号は LO の周波数と等しい成分が直流となり検出されるので, (2.54) を回転座標系で表示すれば

$$\mathrm{V} = \mathrm{A}\cos(\phi) + \mathrm{A}\sin(\phi) = X_1 + X_2 \tag{2.55}$$

となり, X_1, X_2 が測定される。

次に, 電磁場の直交位相成分に対応する演算子を導入する。(一般的にこれらは amplitude, phase quadrature と呼ばれる。)

$$\hat{X}_1 \equiv \hat{a} + \hat{a}^\dagger \qquad \text{Amplitude Quadrature} \tag{2.56}$$

$$\hat{X}_2 \equiv -\mathrm{i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \qquad \text{Phase Quadrature} \tag{2.57}$$

これらの演算子はエルミートであり, 無次元の直交位相振幅 $\langle \hat{X}_1 \rangle, \langle \hat{X}_2 \rangle$ はそれぞれ電磁場の in-phase, quadrature-phase 成分を表す。

例えば, コヒーレント状態に対しては直交位相振幅はそれぞれ電磁場の実数, 虚数成分を与える。

$$\langle|\hat{X}_1|\rangle = \langle\alpha|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)|\alpha\rangle = 2\mathrm{Re}(\alpha) \tag{2.58}$$

$$\langle|\hat{X}_2|\rangle = -\mathrm{i}\langle\alpha|(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)|\alpha\rangle = 2\mathrm{Im}(\alpha) \tag{2.59}$$

上式より

$$2\alpha = \langle|\hat{X}_1|\rangle + \mathrm{i}\langle|\hat{X}_2|\rangle \tag{2.60}$$

である。従って, コヒーレント状態の振幅 $|\alpha|$ は $1/\sqrt{\langle \hat{X}_1 \rangle^2 + \langle \hat{X}_2 \rangle^2}$ で与えられ, 位相 ϕ は $\langle \hat{X}_2 \rangle / \langle \hat{X}_1 \rangle$ で与えられる。

非可換なエルミート演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ から得られる物理量 A, B を同時に測定する際ハイゼンベルグの不確定性原理により以下のような不可避の揺らぎが伴う。

$$\triangle\hat{A}\triangle\hat{B} \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle| \tag{2.61}$$

直交位相演算子はエルミート演算子であり, その交換関係は

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = 2\mathrm{i} \tag{2.62}$$

であるので, その不確定性関係は

$$\triangle\hat{X}_1\triangle\hat{X}_2 \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{X}_1, \hat{X}_2]\rangle| = 1 \tag{2.63}$$

となる。

The Ball-on-Stick Picture

以上のように量子的な場合はその揺らぎ成分は不可避なものであるので, 古典的な位相図に雑音成分を加味した ball-on-stick と呼ばれる図で状態を図示する。ball の部分で分散の大きさ（ガウシアンの場合）を示し, stick 部分で古典的で定常的な振幅を示す。雑音を表す ball 部分は光学ホモダイントモグラフィーによって測定されるウィグナー関数と呼ばれる準確率密度関数（負の値も取りうる）の周囲の高さに相当しており, 非ガウシアンな場合も測定できる [25]。

コヒーレント状態の直交位相振幅揺らぎ

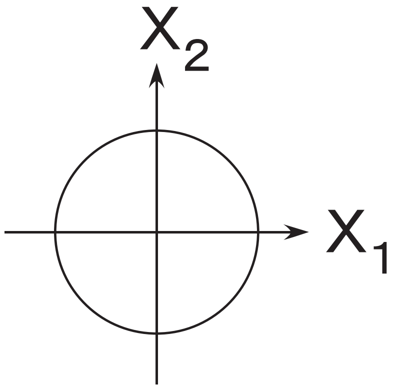


図 2.1: 数状態

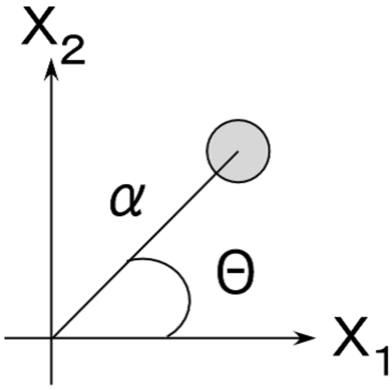


図 2.2: コヒーレント状態

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{coh}}(\hat{X}_1) &= \langle\alpha|\triangle\hat{X}_1|\alpha\rangle^2 \\
F &= \langle\alpha|(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)|\alpha\rangle^2 \\
&= \langle\alpha|\hat{a}^2|\alpha\rangle + \alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle + \alpha|(1+\hat{a}^\dagger\hat{a})|\alpha + \rangle\alpha|\hat{a}^{\dagger 2}|\alpha\rangle + (\alpha+\alpha^*)^2 \\
&= 1
\end{aligned} \tag{2.64}
$$

同様に

$$V_{\mathrm{coh}}(\hat{X}_2) = 1 \tag{2.65}$$

である。このようにハイゼンベルグの不確定性原理における最小値をとる状態を最小不確定状態と呼ぶ。コヒーレント状態は共役な物理量がそれぞれ等しい揺らぎを伴った最小不確定状態である。

真空場の直交位相振幅揺らぎ

$$
\begin{aligned}
V_{\text{vacuum}}(\hat{X}_1) &= \langle 0|\triangle\hat{X}_1|0\rangle^2 \\
&= \langle 0|(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle - \langle 0|(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)|0\rangle^2 \\
&= \langle 0|(\hat{a}\hat{a}^\dagger)|0\rangle \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

同様に

$$
V_{\text{vacuum}}(\hat{X}_2) = 1 \tag{2.67}
$$

である。真空場とはコヒーレントな振幅（期待値）が 0 なコヒーレント状態であり ($|\alpha=0\rangle = |n=0\rangle$), 最小不確定状態である。

2.1.4　スクイーズド状態

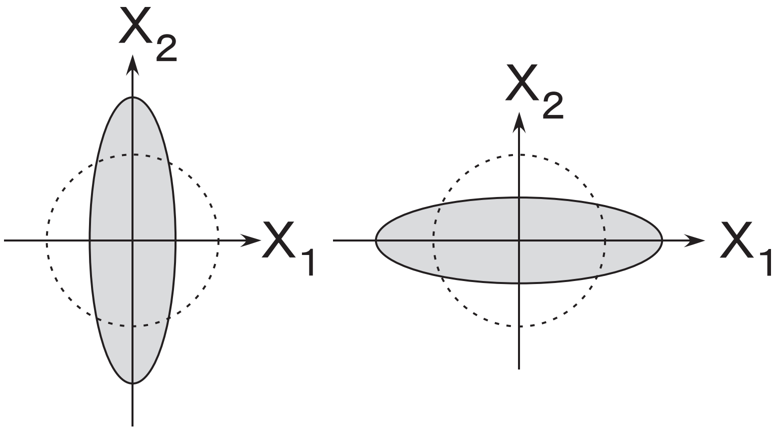


図 2.3: スクイーズド真空場。左図は amplitude quadrature のスクイーズド状態。右図は phase quadrature のスクイーズド状態。

　スクイーズド状態とは最小不確定状態であり, 共役な物理量の一方が真空場雑音よりも小さい状態である。 本論文では以下のような直交位相スクイーズド状態に関して述べる。

$$
\triangle\hat{X}_1 < 1 \quad \text{or} \quad \triangle\hat{X}_2 < 1 \tag{2.68}
$$

コヒーレントな振幅を伴ったスクイーズド状態はスクイーズドコヒーレント状態と呼ばれ, その基底状態はスクイーズド真空場と呼ばれる。このような状態はスクイーズ演算子 $\hat{S}$ を用いて以下のように記述できる。

$$
|0,\epsilon\rangle = \hat{S}(\epsilon)|0\rangle \tag{2.69}
$$

$$|\alpha,\epsilon\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\epsilon)|0\rangle \tag{2.70}$$

$$\hat{S}(\epsilon) \equiv \exp\left(\frac{1}{2}\epsilon^*\hat{a}^2 - \frac{1}{2}\epsilon\hat{a}^{\dagger 2}\right) \tag{2.71}$$

$$\epsilon = re^{2\mathrm{i}\psi} \tag{2.72}$$

ここで, r はスクイーズファクターと呼ばれ, ϕ はスクイーズアングルと呼ばれる。また, スクイーズ演算子は以下の関係式を満たし

$$\hat{S}^\dagger(\epsilon) = \hat{S}^{-1}(\epsilon) = \hat{S}(-\epsilon) \tag{2.73}$$

これとベーカーハウスドルフの公式から次式が得られる。

$$\hat{S}^\dagger(\epsilon)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\epsilon) = \hat{a}\mathrm{cosh}r - \hat{a}^\dagger e^{2\mathrm{i}\phi}\mathrm{sinh}r \tag{2.74}$$

$$\hat{S}^\dagger(\epsilon)\hat{a}^\dagger\hat{S}^\dagger(\epsilon) = \hat{a}^\dagger\mathrm{cosh}r - \hat{a}e^{-2\mathrm{i}\phi}\mathrm{sinh}r \tag{2.75}$$

　これから, スクイーズド真空場における直交位相振幅の分散は

$$\begin{aligned}\triangle^2\hat{X}_1 &= \langle 0,\epsilon|\hat{X}_1{}^2|0,\epsilon\rangle - \langle 0,\epsilon|\hat{X}_1|0,\epsilon\rangle^2 \\ &= \cosh^2(r) + \sinh^2(r) - 2\sinh(r)\cosh(r)\cos 2(\phi)\end{aligned} \tag{2.76}$$

$$\triangle^2\hat{X}_2 = \cosh^2(r) + \sinh^2(r) + 2\sinh(r)\cosh(r)\cos(2\phi) \tag{2.77}$$

となり, $\phi = 0$ の場合は

$$\triangle^2\hat{X}_1 = e^{-2r} \tag{2.78}$$

$$\triangle^2\hat{X}_2 = e^{2r} \tag{2.79}$$

のように, amplitude quadrature がスクイーズされた振幅スクイーズド状態が得られる。また, $\phi = \frac{\pi}{2}$ のときは phase quadrature がスクイーズされた位相スクイーズド状態が得られる。ϕ が他の値をとる場合は, 回転座標系を考えると便利である。即ち, 以下の様な新たな複素振幅を定義すると

$$\begin{aligned}\beta &\equiv \alpha e^{-\mathrm{i}\phi} \\ &= \frac{1}{2}(\langle\hat{X}_1\rangle + \langle\mathrm{i}\hat{X}_2\rangle)e^{-\mathrm{i}}\phi \\ &= \frac{1}{2}(\langle\hat{Y}_1\rangle + \langle\mathrm{i}\hat{Y}_2\rangle)\end{aligned} \tag{2.80}$$

その分散をスクイーズドコヒーレント状態において計算すると

$$\begin{aligned}
\triangle^2\hat{Y}_1 &= \langle\alpha,\epsilon|\hat{Y}_1^2|\alpha,\epsilon\rangle - \langle\alpha,\epsilon|\hat{Y}_1|\alpha,\epsilon\rangle^2 \\
&= \langle\alpha,\epsilon|(\hat{a}e^{-\mathrm{i}\phi}+\hat{a}^\dagger e^{\mathrm{i}\phi})^2|\alpha,\epsilon\rangle - \langle\alpha,\epsilon|(\hat{a}e^{-\mathrm{i}\phi}+\hat{a}^\dagger e^{\mathrm{i}\phi})|\alpha,\epsilon\rangle^2 \\
&= \langle\alpha,\epsilon|(\hat{a}^2e^{-2\mathrm{i}\phi}+\hat{a}^{\dagger 2}e^{2\mathrm{i}\phi}+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a})|\alpha,\epsilon\rangle - \langle\alpha,\epsilon|(\hat{a}e^{-\mathrm{i}\phi}+\hat{a}^\dagger e^{\mathrm{i}\phi})|\alpha,\epsilon\rangle^2 \\
&= e^{-2r} \qquad (2.81)
\end{aligned}$$

$$\triangle^2\hat{Y}_2 = e^{2r} \qquad (2.82)$$

となる。即ち, コヒーレントな振幅 α はスクイーズド状態の雑音には影響を与えない事が分かる。スクイーズドコヒーレント状態の平均光子数は

$$\langle\alpha,\epsilon|\hat{n}|\alpha,\epsilon\rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2(r) \qquad (2.83)$$

となり, $\alpha = 0$ のスクイーズド真空場は光子数 0 の状態では無い事が分かる。

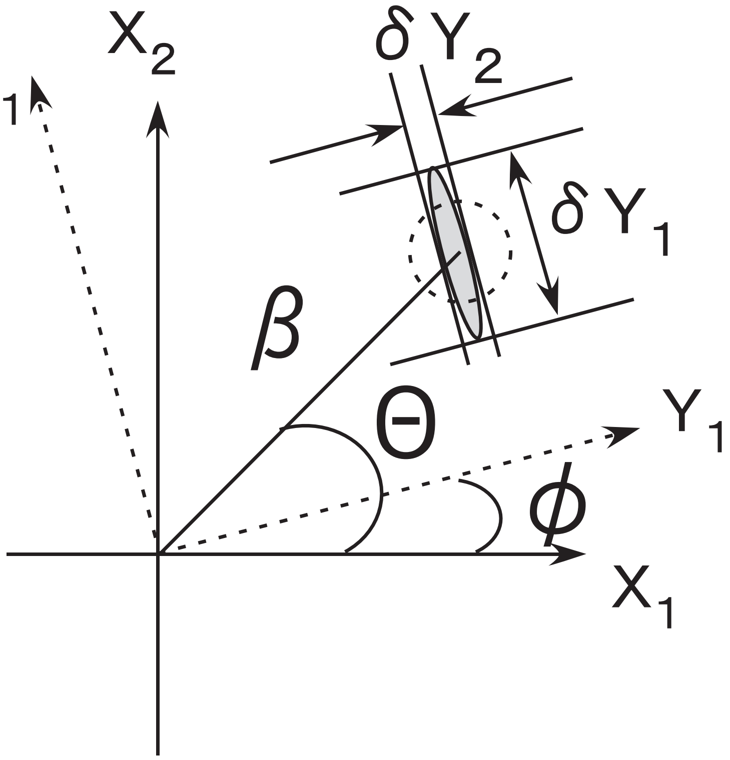


図 2.4: スクイーズドコヒーレント状態

2.1.5 2 モードスクイーズド状態

スクイーズド状態を生成する様々な方法の中でも, 光パラメトリック発振器 (OPO) は最も一般的な装置のひとつである。OPO ではキャリア周波数を中心として上下のサイドバンド成分 (それぞれ signal, idler と呼ばれる。本論文では’+’,’-’ の添え字で記述する。) が対となっ

て生成することでスクイーズド状態の生成を行う。従って, 生成される状態は 2 モードスクイーズド状態である。

　フーリエ変換を

$$\tilde{Q}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Q}(t) e^{\mathrm{i}\Omega t} dt \tag{2.84}$$

で定義し, フーリエ成分にはチルダをつけて表すとすると, 2 モードによる電場の複素表示は

$$\begin{aligned} E(t) &= \int d\Omega \left[\tilde{E}(\omega+\Omega) e^{\mathrm{i}\omega t} + \tilde{E}(\omega-\Omega) e^{-\mathrm{i}\omega t} \right] e^{-\mathrm{i\ t\ y}\omega t} \\ &\quad + \int d\Omega \left[\tilde{E}^{\dagger}(\omega+\Omega) e^{-\mathrm{i}\omega t} + \tilde{E}^{\dagger}(\omega-\Omega) e^{\mathrm{i}\omega t} \right] e^{\mathrm{i}\omega t} \end{aligned} \tag{2.85}$$

であり, (2.85) のフーリエ成分は

$$\tilde{E}(\omega+\Omega) = \sqrt{2}\acute{\mathscr{E}} \sqrt{\frac{\omega+\Omega}{2\omega}} \tilde{a}_{+}(\omega+\Omega) \tag{2.86}$$

$$\tilde{E}(\omega-\Omega) = \sqrt{2}\acute{\mathscr{E}} \sqrt{\frac{\omega-\Omega}{2\omega}} \tilde{a}_{-}(\omega-\Omega) \tag{2.87}$$

で表される。ここで $\acute{\mathscr{E}}$ は (2.33) で表される電場の次元を持つ振幅であり, 係数 $\sqrt{(\omega\pm\Omega)/2)}$ はエネルギー固有値 $\hbar(\omega+\Omega)$ を得るために掛けている。また, 生成消滅演算子のフーリエ成分は次の交換関係を満たす。

$$[\tilde{a}_{+}, \tilde{a}_{\acute{+}}^{\dagger}] \simeq 2\pi\delta(\Omega - \acute{\Omega}) \tag{2.88}$$

$$[\tilde{a}_{-}, \tilde{a}_{\acute{-}}^{\dagger}] \simeq 2\pi\delta(\Omega - \acute{\Omega}) \tag{2.89}$$

　この電場を直交位相振幅 $E_1(t), E_2(t)$ で表すと

$$\begin{aligned} E(t) &= E_1(t)\cos\omega t + E_2(t)\sin\omega t \\ &= \int d\Omega \left[\tilde{E}_1(\Omega) e^{\mathrm{i}\omega t} + \tilde{E}_1^{\dagger}(\Omega) e^{-\mathrm{i}\omega t} \right] \cos\omega t \\ &\quad + \int d\Omega \left[\tilde{E}_2(\Omega) e^{\mathrm{i}\omega t} + \tilde{E}_2^{\dagger}(\Omega) e^{-\mathrm{i}\omega t} \right] \sin\omega t \end{aligned} \tag{2.90}$$

となり, ここで直交位相振幅のフーリエ成分は

$$\tilde{E}_1(\Omega) \equiv \tilde{E}(\omega+\Omega) + \tilde{E}^{\dagger}(\omega-\Omega) = \acute{\mathscr{E}} \tilde{X}_1'(\Omega) \tag{2.91}$$

$$\tilde{E}_2(\Omega) \equiv -\mathrm{i}\left[\tilde{E}(\omega+\Omega) - \tilde{E}^{\dagger}(\omega-\Omega) \right] = \acute{\mathscr{E}} \tilde{X}_2'(\Omega) \tag{2.92}$$

である。上式では直交位相振幅の演算子を

$$\tilde{X}_1' \equiv \sqrt{\frac{\omega+\Omega}{\omega}} \tilde{a}_{+}(\omega+\Omega) + \sqrt{\frac{\omega-\Omega}{\omega}} \tilde{a}_{-}^{\dagger}(\omega-\Omega) \rightarrow_{\Omega\to 0} \tilde{a} + \tilde{a}^{\dagger} = \tilde{X}_1 \tag{2.93}$$

$$\tilde{X}_2' \equiv -\mathrm{i}\left[\sqrt{\frac{\omega+\Omega}{\omega}} \tilde{a}_{+}(\omega+\Omega) - \sqrt{\frac{\omega-\Omega}{\omega}} \tilde{a}_{-}^{\dagger}(\omega-\Omega) \right] \rightarrow_{\Omega\to 0} -\mathrm{i}(\tilde{a} - \tilde{a}^{\dagger}) = \tilde{X}_2 \tag{2.94}$$

と定義した。このとき電場は

$$E(t) = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{2}} \int d\Omega (\tilde{X}_1' \cos \omega t + \tilde{X}_2' \sin \omega t) e^{i\omega t} + \mathrm{H.C.} \tag{2.95}$$

$$= \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{2}} \left[\left(\int \tilde{X}_1' e^{i\omega t} d\Omega \right) \cos \omega t + \left(\int \tilde{X}_2' e^{i\omega t} d\Omega \right) \sin \omega t \right] + \mathrm{H.C.} \tag{2.96}$$

と表される。

この $\hat{a}_+, \hat{a}_-$ を用いて定義した 2 光子スクイーズ演算子 $\hat{S}(G)$ と, サイドバンド周波数 $\Omega_\pm$ 成分の変位演算子 $\hat{D}_\pm$ を用いて, 2 モードスクイーズド状態は次のように定義される。

$$|\alpha_+, \alpha_-\rangle = \hat{D}_+(\alpha_+)\hat{D}_-(\alpha_-)\hat{S}(G)|0\rangle \tag{2.97}$$

$$\hat{D}_\pm = \exp(\alpha \hat{a}_\pm^\dagger - \alpha^* \hat{a}_\pm) \tag{2.98}$$

$$\hat{S}(G) = \exp(G^* \hat{a}_+ \hat{a}_- - G \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-^\dagger) \tag{2.99}$$

$$G = re^{2i\phi} \tag{2.100}$$

ここで r はスクイーズファクターであり, ϕ はスクイーズアングルである。$\hat{S}(G)$ は消滅演算子を次のように変換する。

$$\hat{S}^\dagger(G)\hat{a}_\pm \hat{S}(G) = \hat{a}_\pm \cosh r - \hat{a}_\mp^\dagger e^{2i\phi} \sinh r \tag{2.101}$$

これを用いると, 直交位相振幅の分散は

$$V_1 \equiv \triangle^2 \hat{X}_1 = \left\langle |\hat{X}_1 - \langle \hat{X}_1 \rangle|^2 \right\rangle = \cosh 2r - \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \sinh 2r \cos 4\phi \tag{2.102}$$

$$V_2 \equiv \triangle^2 \hat{X}_2 = \left\langle |\hat{X}_2 - \langle \hat{X}_2 \rangle|^2 \right\rangle = \cosh 2r + \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \sinh 2r \cos 4\phi \tag{2.103}$$

実際には, キャリア周波数は $\omega/(2\pi) = c/\lambda \simeq 300[\mathrm{THz}]$ 程度であり, サイドバンド周波数は $\Omega/(2\pi) \leq 10[\mathrm{MHz}]$ なため, $\Omega/\omega \ll 1$ を満たす。この場合 (2.102),(2.103) は

$$V_1(r, 0) = V_2(r, \pi/4) \simeq e^{-2r} \tag{2.104}$$

$$V_2(r, 0) = V_1(r, \pi/4) \simeq e^{2r} \tag{2.105}$$

となり, シングルモードの場合と同じ結果が得られる。また, 複素平面上における揺らぎの楕円の長半径と短半径の差とその主軸方向は [16]

$$\frac{1}{2} \left[\langle |\triangle \hat{X}_1|^2 \rangle - \langle |\triangle \hat{X}_2|^2 \rangle \right] = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2} \mathrm{Re}(\langle \triangle \alpha_+ \triangle \alpha_- \rangle) \tag{2.106}$$

$$\tan \theta = \frac{\mathrm{Re}(\langle \triangle \hat{X}_1 \triangle \hat{X}_2^* \rangle_{\mathrm{sys}})}{\frac{1}{2}(\langle |\triangle \hat{X}_1|^2 \rangle - \langle |\triangle \hat{X}_2|^2 \rangle)} = \frac{\mathrm{Im}(\langle \triangle \alpha_+ \triangle \alpha_- \rangle)}{\mathrm{Re}(\langle \triangle \alpha_+ \triangle \alpha_- \rangle)} \tag{2.107}$$

となり, 上下のシグナルとアイドラーの揺らぎの間の相関がスクイージングを生成している事が分かる。

2.2　2 次の非線形光学効果

電磁波が誘電体を通過すると, 媒質中の原子や分子が乱される事で巨視的な分極が誘発される。レーザー光のように強い光を非線形結晶に入射すると電場振幅に比例した分極に加えて, 高次の項も引き起こされる。

$$P = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \dots\right) \tag{2.108}$$

ここで, ϵ_0 は真空の誘電率で, E は電場の振幅であり, $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \chi^{(3)}$ はそれぞれ 1 次, 2 次, 3 次の電気感受率である。このように, 媒質内では双極子モーメントが誘起され, 双極子輻射によって誘起双極子と同じ振動数の光を放射する。本論文では, $\chi^{(2)}$ によってもたらされる 2 次の非線形光学効果について考える。

2 次の非線形光学効果によって生じる現象としてアップコンバージョンとダウンコンバージョンに着目する。アップコンバージョンでは 2 光子の入力に対し 1 光子の出力が得られるもので, この出力光子は入力光子の周波数の和の周波数となるので”アップ”コンバージョンと呼ばれる。ダウンコンバージョンでは 1 光子の入力に対して 2 光子の出力が得られ, 出力光子の周波数の和は入力光子の周波数と等しくなるため”ダウン”コンバージョンと呼ばれる。前者の過程において, 入力に同じ周波数の光を用いる事を第二次高調波生成 (Second harmonic Generation:SHG) と呼ぶ。また, 後者の過程で出力光の周波数が縮退している場合を縮退光パラメトリック発振 (Degenerate Optical Parametric Oscillation:DOPO) と呼び, 縮退していない場合を非縮退光パラメトリック発振 (Nondegenerate Optical Parametric Oscillation:NDOPO) と呼ぶ。節 2.4.1 で示すように SHG を用いることで amplitude quadrature のスクイーズド状態を生成できる。また, OPO を用いることで任意の直交位相振幅成分のスクイーズド状態を生成できる。

媒質への入出力の間ではエネルギー保存則と運動量保存則が成り立っている。

$$\sum_i \hbar\omega_i = \sum_j \hbar\omega_j \tag{2.109}$$

$$\sum_i \hbar\boldsymbol{k}_i = \sum_j \hbar\boldsymbol{k}_j \tag{2.110}$$

入力光の周波数が ω （本論文では近赤外レーザーの場合を考えるので $\omega \simeq 100$ THz である。）の SHG の場合, 平面波近似の下でこれらの保存則は

$$\hbar\omega + \hbar\omega = \hbar 2\omega \tag{2.111}$$

$$\frac{\hbar n_\omega \omega}{c} + \frac{\hbar n_\omega \omega}{c} = \frac{\hbar n_{2\omega} 2\omega}{c} \tag{2.112}$$

となる。運動量保存則は $n_\omega = n_{2\omega}$ のとき成り立つが, これを位相整合条件と呼ぶ。また, NDOPO の場合には保存則は

$$\hbar 2\omega = \hbar(\omega + \Omega) + \hbar(\omega - \Omega) \tag{2.113}$$

$$\frac{\hbar n_{2\omega} 2\omega}{c} = \frac{\hbar n_{\omega+\Omega}(\omega + \Omega)}{c} + \frac{\hbar n_{\omega-\Omega}(\omega - \Omega)}{c} \tag{2.114}$$

となる。ここで, Ω はサイドバンド周波数であり, 一般に OPO キャビティの線幅は 100MHz ～10GHz 程度なため, $\Omega \ll \omega$ を満たす。つまり, $n_{\omega+\Omega} \simeq n_{\omega-\Omega}$ であり, 位相整合条件は SHG の場合と同じである。

2.2.1　位相整合

複素振幅 A_1, A_2, A_3 で表される 3 つの光が非線形結晶を通過する場合を考える。振幅は結晶内の相互作用により空間発展する。微小振幅変動近似 (Slow varying envelop approximation:SVEA) の下では [17]

$$\frac{dA_1}{dz} = -\mathrm{i}\Gamma A_3 A_2^* f'^*(\triangle kz) \tag{2.115}$$

$$\frac{dA_2}{dz} = -\mathrm{i}\Gamma A_3 A_1^* f'^*(\triangle kz) \tag{2.116}$$

$$\frac{dA_3}{dz} = -\mathrm{i}\Gamma A_1 A_2 f'(\triangle kz) \tag{2.117}$$

となる。ここで Γ は非線形結合定数であり, 位相不整合関数 f' は

$$f'^*(\triangle kz) = \frac{e^{\mathrm{i}kz}}{1+\mathrm{i}\frac{z}{z_R}} \tag{2.118}$$

である。これは, 平面波近似 $z_R \to \infty$ の下で

$$f(\triangle kz) = e^{\mathrm{i}\triangle kz} \tag{2.119}$$

となる。また,

$$\triangle k = k_3 - k_2 - k_1 \tag{2.120}$$

は位相不整合パラメータと呼ばれる。結晶長 L に渡る相互作用を, $\omega_1 = \omega_2$ の縮退した場合について考えると, 振幅は次のようになる。

$$A_1(L) = A_1(0) - \mathrm{i}L\Gamma g(\triangle kL) A_3(0) A_1^*(0) \tag{2.121}$$

$$A_3(L) = A_3(0) + \mathrm{i}L\Gamma g^*(\triangle kL) A_1^2(0) \tag{2.122}$$

ここで $g(\triangle kz)$ は

$$\begin{aligned} g(\triangle kz) &= \frac{1}{L}\int_0^L f(\triangle kz)dz \\ &= \frac{e^{\mathrm{i}\frac{\triangle kz}{2}} - 1}{\mathrm{i}\triangle kz} \\ &= \mathrm{sinc}\left(\frac{\triangle kz}{2}\right) e^{\mathrm{i}\frac{\triangle kz}{2}} \end{aligned} \tag{2.123}$$

であり, 位相整合関数と呼ばれる。振幅の空間発展はその初期条件と相対位相によって決まり, 非線形相互作用では位相整合関数が決定的な役割を果たす。場の間の相互作用は相対位相に依存しているため, 位相整合が満たされていない場合 ($\triangle k \neq 0$) 相互作用の大きさは距離の関数となる。つまり, 基本波光と発生した波長変換光の間で位相速度に差があるため, 基本波が結晶内を伝播するにつれて次々と発生する波長変換光は少しずつ位相がずれて発生する。例えば SHG の場合, 発生した第二次高調波は, 各々が加算されて徐々に強度が増すが, 以下で定義されるコヒーレント長 l_c を境に互いに打ち消し合うようになり逆に強度が減衰する。

$$l_c = \frac{\pi}{k_3 - 2k_1} \tag{2.124}$$

波長変換光の強度は図 2.6 で示すように周期的に強弱を繰り返すようになる。

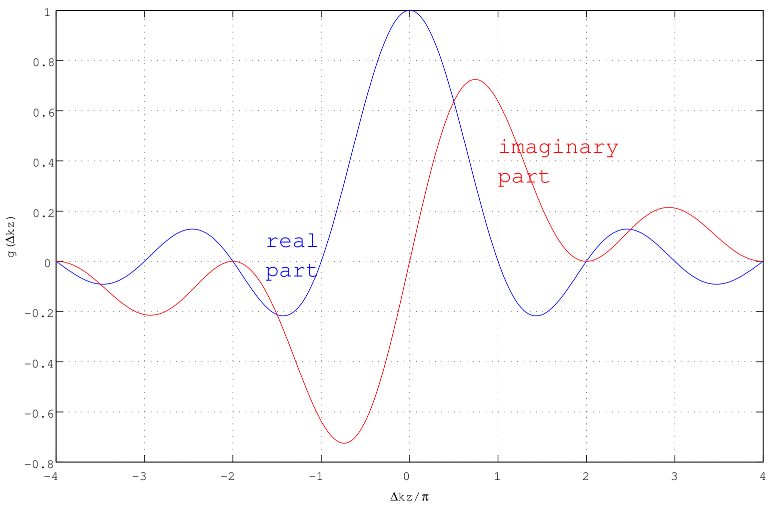


図 2.5: 位相整合

通常の結晶では屈折率分散のため, 基本波光と波長変換光の波長に対応する屈折率が異なり, 各々の光の位相速度に差が生じ, 位相整合条件が満たされない。そのため, 複屈折性を有した結晶を使用する複屈折位相整合法 (Birefringence Phase Matching:BPM) や周期分極反転構造を結晶内に形成した結晶を使用する擬似位相整合法 (Quasi Phase Matching:QPM) と呼ばれる方法で位相整合条件を満たす。

BPM では, 結晶における複屈折を利用する。複屈折性を有する結晶は, 結晶の方位により異なる屈折率分散を持っている (dn/dT 効果)。基本波光と発生した波長変換光の偏光方向をそれぞれ異なる結晶方位に伝播するように結晶軸を取ると, 各々の波長は異なる屈折率分散の影響を受けるようになる。従って, 結晶の角度や温度を調整することで, 双方の光に対応する屈折率を等しくすることができて, 基本波光と波長変換光の位相速度が一致し, 位相整合をさせることができる。しかし, BPM では結晶の複屈折性特性に大きく依存するため, 波長変換に利用できるレーザの波長と活用できる非線形定数が限定され, 2 光波混合において最も大きな非線形定数である d_{33} を利用できない。さらに, 複屈折性結晶の異方性により, 結晶内

を伝播するにつれて, 基本波光と波長変換光の進行方向にずれが生じる“ ウォークオフ ”と呼ばれる現象が発生し, ビームが楕円化するため作用長が制限される場合がある。

QPM では, 結晶に分極反転構造を形成する事で位相整合条件を擬似的に満たす。図 2.6 のように 位相整合が満たされていない場合, ある位相において互いに打ち. 消し合ってしまう。そこで, 結晶の分極を反転させてこの位相で発生する波長変換光の位相を反転させることで位相整合を満たし, 図 2.6 で示すように強度を常に増加させることができる。さらに, 周期分極反転 (Periodically Poled:PP) 結晶は分極反転構造を形成する方位を選ぶことで, 複屈折位相整合では実現できなかった d_{33} を利用でき, より大きな非線形特性を得ることができる。次の節で示すように, QPM では非線形光学定数が $2/\pi$ 小さくなってしまうが, BPM で利用できる非対角成分 d_{24}, d_{31} よりは数倍大きい（$d_{24} = 3.64, d_{31} = 2.54, d_{33} = 16.9$）。さらに. QPM ではウォークオフも回避できるため, 本研究では QPM により位相整合条件を満たしている。以下では, もう少し詳しく QPM について説明する。

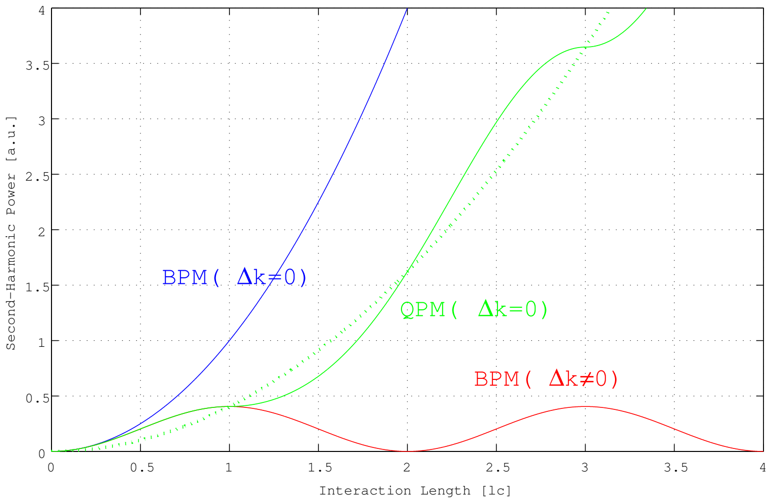


図 2.6: 非線形光学結晶中における第二次高調波の発展の様子を表している。

2.2.2　周期分極反転結晶による擬似位相整合

振幅 A で角周波数 ω_1 の基本波と振幅 B 角周波数 ω_2 の第二次高調波が非線形結晶を通り, そこで相互作用を起こす場合を考える。SHG, DOPO の場合 [17]

$$\frac{dA}{dz} = -\frac{\sigma_1 \mu_0 c}{2n_1} A - \frac{\mathrm{i}\omega_1 \mu_0 c}{2n_1} d_{\mathrm{eff}} B A^* \exp(-\mathrm{i}(k_2 - 2k_1)z) \tag{2.125}$$

$$\frac{dB}{dz} = -\frac{\sigma_2 \mu_0 c}{2n_2} B - \frac{\mathrm{i}\omega_2 \mu_0 c}{2n_2} d_{\mathrm{eff}} A^2 \exp(\mathrm{i}(k_2 - 2k_1)z) \tag{2.126}$$

となり, ここで z は相互作用長, c は真空の光速, μ_0 は真空の透磁率, d_{eff} は有効非線形結合定数, σ_1, σ_2 は結晶の基本波と第二次高調波に対する導電率, n_1, n_2 は結晶の基本波と第二次高

調波に対する屈折率である。QPM の場合には d_{eff} は

$$d(z) = d_{\mathrm{bulk}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{\mathrm{i}m\frac{2\pi}{\Lambda}z} \tag{2.127}$$

のようにフーリエ展開できる。Λ は波長を表すので周期分極反転結晶の格子間隔を表す。ここで a_m は

$$a_m = \frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} \frac{d(z)}{d_{\mathrm{bulk}}} e^{-\mathrm{i}m\frac{2\pi}{\Lambda}z} dz \tag{2.128}$$

であり, (2.127) を (2.125), (2.126) に代入すると

$$\frac{dA}{dz} = -\frac{\sigma_1\mu_0 c}{2n_1}A - \frac{\mathrm{i}\omega_1\mu_0 c}{2n_1} d_{\mathrm{bulk}} B A^* \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{\mathrm{i}\triangle kz} \tag{2.129}$$

$$\frac{dB}{dz} = -\frac{\sigma_2\mu_0 c}{2n_2}B - \frac{\mathrm{i}\omega_2\mu_0 c}{2n_2} d_{\mathrm{bulk}} A^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{-\mathrm{i}\triangle kz} \tag{2.130}$$

となり, 位相不整合パラメータ $\triangle k$ が 0 の場合に位相整合が満たされる。

$$\triangle k = m\frac{2\pi}{\Lambda} - (k_2 - 2k_1) = 0 \quad \text{for some integer } m \tag{2.131}$$

QPM に使われる結晶では $\Lambda/2$ ごとに分極が反転するので

$$a_m = -\mathrm{i}\left(\frac{1-\cos m\pi}{m\pi}\right) \quad \text{for } m \neq 0 \tag{2.132}$$

である。一般的に $m=1$ が選択され, その場合

$$d_{\mathrm{eff}} = a_m d_{\mathrm{bulk}} = \frac{2}{\pi} d_{\mathrm{bulk}} \tag{2.133}$$

となる。SHG において, 結晶長 L で $B=0$ の場合を考えると

$$B(L) = -\frac{\omega_2\mu_0 c}{2n_2} d_{\mathrm{bulk}} A^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos m\pi}{m\pi} \int_0^L e^{-\mathrm{i}\triangle kz} dz \tag{2.134}$$

$$= -\frac{\omega_2\mu_0 c}{2n_2} d_{\mathrm{bulk}} A^2 L \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1-\cos m\pi}{m\pi} e^{-\mathrm{i}\frac{\triangle kz}{2}} \mathrm{sinc}(\frac{\triangle kz}{2}) dz \tag{2.135}$$

となる。

格子間隔はコヒーレント長 l_c から

$$\Lambda = 2l_c m = \frac{2\pi m}{k_2 - 2k_1} = \frac{m\lambda_1}{2(n_2 - n_1)} \tag{2.136}$$

となり, 一般には $m=1$ である。ここで, n_1, n_2 はセルマイヤー方程式で与えられ [18]

$$n^2 = A + \frac{B}{1 - C\lambda^{-2}} - D\lambda^2 \tag{2.137}$$

となり, λ は光の波長で単位は μm であり, A, B, C, D は定数であり [18], KTiOPO4(KTP) の場合だと $\Lambda \simeq 9\mu m$ である。

QPM には 2 種類あり, それぞれ type I, type II と呼ばれる。x 方向に進行しているビームを考えると type I では, 結晶に入射する光は両者共に偏光方向が極軸に平行（z 方向）な場合に相互作用を起こし, 生成される第二次高調波の偏光方向もそれに平行である。type II では両者の偏光方向は直交していなければならなく, 生成される第二次高調波の偏光方向は極軸に直交する（y 方向）。

type I の QPM の場合, その格子間隔は

$$\Lambda_I = \frac{m\lambda_1}{2(n_2^z - n_1^z)} \tag{2.138}$$

で与えられる。ここで n_1^z, n_2^z は結晶の基本波, 第二次高調波に対する z 方向の屈折率である。

type II の QPM の場合, その格子間隔は

$$\Lambda_{II} = \frac{m\lambda_1}{2n_2^y - n_1^z - n_1^y} \tag{2.139}$$

となる。

次に, 格子間隔と位相整合不整合パラメータの間の関係は (2.131) から

$$\triangle k(T) = \frac{2\pi}{\Lambda(T)} - \frac{2\pi}{\Lambda_0} \tag{2.140}$$

であり, ここで Λ_0 は位相整合を満たす場合の格子間隔である。これから

$$\Lambda(T) = \Lambda_0 + \alpha L(T - T_0) \tag{2.141}$$

結晶の温度 T に対する格子間隔の関数が得られる。ここで α は熱膨張係数であり, T_0 は位相整合条件を満たす温度である。

2.3　スクイーズド状態の生成

2.3.1　線形化

この節では, 線形化と呼ばれる非常に便利な近似に関して述べる。この近似では演算子を定常的な平均値 (c 数) と時間依存のある揺らぎの成分 (q 数) の二つに分ける。

$$\hat{Q} \simeq \bar{Q} + \delta\hat{Q}(t) \tag{2.142}$$

ここで $\bar{Q} = \langle Q \rangle$ である。線形化は次のような条件下で成り立つ。

$$\langle \delta\hat{Q} \rangle = 0 \tag{2.143}$$

$$|\bar{Q}| \gg |\delta\hat{Q}| \tag{2.144}$$

この近似を用いると, 直交位相演算子の揺らぎ成分を表す演算子は

$$\delta\hat{X}_1 = (\delta\hat{a} + \delta\hat{a}^\dagger) \tag{2.145}$$

$$\delta\hat{X}_2 = -\mathrm{i}(\delta\hat{a} - \delta\hat{a}^\dagger) \tag{2.146}$$

となり, 数演算子は,

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a} \simeq \alpha^2 + \alpha\delta\hat{X}_1 \tag{2.147}$$

となる。ここで, 揺らぎの高次成分を 0 とした。ここで, コヒーレント状態における平均光子数は

$$\langle \hat{n} \rangle_{\bar{a}} = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_\alpha \simeq \bar{a}^2 + \alpha \langle \delta\hat{X}_1 \rangle_a = \alpha^2 \tag{2.148}$$

となり, (2.49) と等しくなる。

2.3.2　サイドバンド描像

量子光学におけるサイドバンド描像に関して述べる前にまず周波数 ω で振動している古典的な電場について考える。それは位相図において図 2.7 のように表される。以降これをキャリアとして考えると, 周波数 Ω で振幅変調をかけた振幅 a_0 の光は

$$\begin{aligned} a_{\mathrm{am}} e^{\mathrm{i}\omega t} &= a_0 \left(1 + m\cos(\Omega t)\right) e^{\mathrm{i}\omega t} \\ &= a_0 \left(e^{\mathrm{i}\omega t} + \frac{m}{2} e^{\mathrm{i}(\omega+\Omega)t} + \frac{m}{2} e^{\mathrm{i}(\omega-\Omega)t} \right) \end{aligned} \tag{2.149}$$

となり, 変調深さ m に応じた大きさの二つの小さなサイドバンド成分が生じる。位相図において, この 3 つの成分はそれぞれ同じ方向を向く。実験的には, この二つのサイドバンドとキャリアとの間のうなりを測定する事ができる。同様に, 位相変調をかけた場合は

$$\begin{aligned} a_{\mathrm{pm}} e^{\mathrm{i}\omega t} &= a_0 e^{\mathrm{i}(\omega t + m\cos(\Omega t))} \\ &= a_0 e^{\mathrm{i}\omega t} \left(\mathrm{J}_0(m) + \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{i}^l \mathrm{J}_l(m) (e^{\mathrm{i}l\Omega t} + e^{-\mathrm{i}l\Omega t}) \right) \\ &= a_0 e^{\mathrm{i}\omega t} \left(\mathrm{J}_0(m) + \mathrm{i}\mathrm{J}_1(m)(e^{\mathrm{i}\Omega t} + e^{-\mathrm{i}\Omega t}) + \mathscr{O}(l \geq 2) \right) \\ &\simeq \left(e^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{i}\frac{m}{2} e^{\mathrm{i}(\omega+\Omega)t} + \mathrm{i}\frac{m}{2} e^{\mathrm{i}(\omega-\Omega)t} \right) \end{aligned} \tag{2.150}$$

となり, 無数のサイドバンド成分が生じる。位相図において, キャリアとサイドバンドは直交し, サイドバンド成分の大きさはベッセル関数により与えられる。変調深さが小さい場合は高次のサイドバンド成分は十分小さいため無視できる。古典的な信号や変調はサイドバンドの成分で説明ができ, 変調のかかっていない周波数帯では信号は検出されない。しかし, 実際の光は古典的な光ではなく, あらゆる周波数帯で雑音がある。コヒーレント状態ではその雑音は振幅と位相揺らぎが等しい最小不確定状態であった。このような量子雑音は真空場のサイドバンドが原因であり, それとキャリアとの間でうなりを生成していると考えられる。数学的には, 線形化した演算子のフーリエ成分

$$\delta\hat{a}(t) \to \delta\tilde{a}(\Omega) \tag{2.151}$$
$$\delta\hat{a}^\dagger(t) \to \delta\tilde{a}^\dagger(\Omega) \tag{2.152}$$

が全ての周波数帯に渡って無相関に揺らいでおり, 平均的には全ての直交位相成分に同程度の影響を及ぼしており, 白色雑音となると考えられる。

スクイーズド状態は振幅変調や位相変調のかかったような状態である。例えば, サイドバンド周波数 Ω の真空場の揺らぎが非線形結晶でダウンコンバージョンされる場合, 生成された $-\Omega$ の揺らぎと入射した揺らぎの間には相関がある。位相図では, これらの揺らぎはコヒーレントなシグナル光やアイドラー光と同じようにキャリアの周りを回る。もしこれらの揺らぎの初期相対位相が 0 ならば振幅変調の場合と同様であり, π の場合は位相変調と同様になる。実際には, 非線形結晶の中での相互作用は全ての周波数に渡っては起こらず, 上下のサイドバンド間の相関は完全ではないためスクイーズファクター $r \neq \infty$ なスクイーズド状態が生成される。

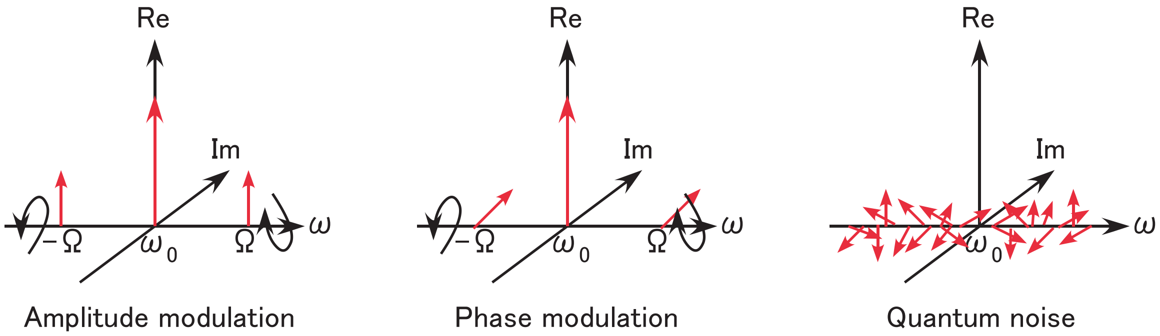


図 2.7: サイドバンド描像の下での振幅変調, 位相変調, 真空場雑音。キャリアは実数としている。

2.3.3　運動方程式

まず, 古典的な調和振動子に対する運動方程式を考える。それは

$$\dot{x} = \mathrm{i}\omega x \tag{2.153}$$

となり, この場合はロスが無いので外部との相互作用の項は無い。ロスを考慮に入れるために, 外部との相互作用を記述するための減衰項を加えて

$$\dot{x} = (\mathrm{i}\omega - \gamma)x \tag{2.154}$$

となる。ここで γ は減衰率を表す。

次に, 量子的な場合は, 演算子の運動方程式は次のようになる。

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\hat{a}} = [\hat{a}, \mathscr{H}] \tag{2.155}$$

古典的な場合と同様に調和振動子のハミルトニアンに対しては

$$\dot{\hat{a}} = -\mathrm{i}\omega\hat{a} \tag{2.156}$$

となり, これは古典的な調和振動子の運動方程式と類似している。古典的な場合と同様に (2.156) に減衰項を加えると

$$\dot{\hat{a}} = (-\mathrm{i}\omega - \gamma)\hat{a} \tag{2.157}$$

となるが, これは正しくない。量子的な場合には, 不可避な真空場雑音の影響を考慮に入れる必要があり, 更なる外場との相互作用を加えなければならない。そのために, 無数の電場モードからなる熱浴としての外場を次のハミルトニアンで導入する。

$$\mathscr{H}_{\mathrm{B}} = \hbar\int_{-\infty}^{\infty} \omega\tilde{b}^{\dagger}(\omega)\tilde{b}(\omega)d\omega \tag{2.158}$$

ここで $\tilde{b}, \tilde{b}^{\dagger}$ はそれぞれボソンの消滅, 生成演算子である。この熱浴は任意のシステム演算子 $\hat{c}$ と相互作用を生じ, それは次のような相互作用ハミルトニアンで表される [19]。

$$\mathscr{H}_{\mathrm{int}} = \mathrm{i}\hbar\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\gamma}(\hat{b}^{\dagger}(\omega)\hat{c} - \hat{b}(\omega)\hat{c}^{\dagger})d\omega \tag{2.159}$$

このとき運動方程式は

$$\dot{\hat{a}} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{a}, \mathscr{H}_{\mathrm{sys}}] - \left\{[\hat{a}, \hat{c}^{\dagger}](\gamma\hat{c} + \sqrt{2\gamma}\delta\hat{B}(t)) - (\gamma\hat{c}^{\dagger} + \sqrt{2\gamma}\delta\hat{b}^{\dagger}(t))[\hat{a}, \hat{c}]\right\} \tag{2.160}$$

となる。ここで, $\mathscr{H}_{\mathrm{sys}}$ は閉じた系の全ての内部モードのハミルトニアンを表す。系として調和振動子を考えると, 次のようになる。

$$\dot{\hat{a}} = (-\mathrm{i}\omega - \gamma)\hat{a} + \sqrt{2\gamma}\delta\hat{b} \tag{2.161}$$

つまり外場 $\hat{Q}$ による雑音は古典的な運動方程式に $\sqrt{2\gamma}\delta\hat{Q}$ を加えれば良い。これはカップリングの数だけ運動方程式に加えれば良く, さらに光学系においては回転座標系での運動を記述することが多いので, (2.161) の第一項は省略できる。(あるいは detuning を考える)

2.3.4　光学キャビティの減衰率

この節では, 前節で導入した減衰率をもう少し具体的に説明する。キャビティの内部モードは連続的に変化しているとすると（平均場近似）, 振幅の時間依存性は次のように書ける。

$$A(t) = r^{t/r} = R^{t/(2\tau)} \tag{2.162}$$

ここで, $\tau = nL/c$ はキャビティのラウンドトリップタイムであり, n は屈折率で c は真空中における光速, L はキャビティの周回長である。r はミラーの振幅反射率, $R = r^2$ はミラーの反射率である。

このとき, 減衰率は次のように定義される。

$$A(t) = e^{-\gamma t} \tag{2.163}$$

これは

$$\gamma_l = -\frac{1}{\tau}\ln r = \frac{1}{2\tau}\ln R \tag{2.164}$$

のように変形できる。一般に $r \simeq 1$ なので, これをテイラー展開すると

$$\ln(1+x) \to x, \text{ for small } x \tag{2.165}$$

$$\text{for } x = r-1, \quad \gamma_m = \frac{1}{\tau}(1-r) = \frac{1}{\tau}(1-\sqrt{R}) \tag{2.166}$$

$$\text{for } x = R-1, \quad \gamma_n = \frac{1}{2\tau}(1-R) \tag{2.167}$$

となる。これらの 3 つの減衰率の内どれが最も良い近似を与えるかをみるために, 平均場近似の対極となる階段状の関数とともに図示したのが図 2.8 である。ここで, 階段状の関数は光がキャビティを一周したのちミラーでの反射率に応じたパワーの変動を被る状況を表している。図 2.8 から, $R = 0.99$ では何れの解も正しく, $R = 0.8, R = 0.2$ では γ_l が最も階段状の関数と一致しており, $R \to 0$ では γ_m が良い近似となっている。

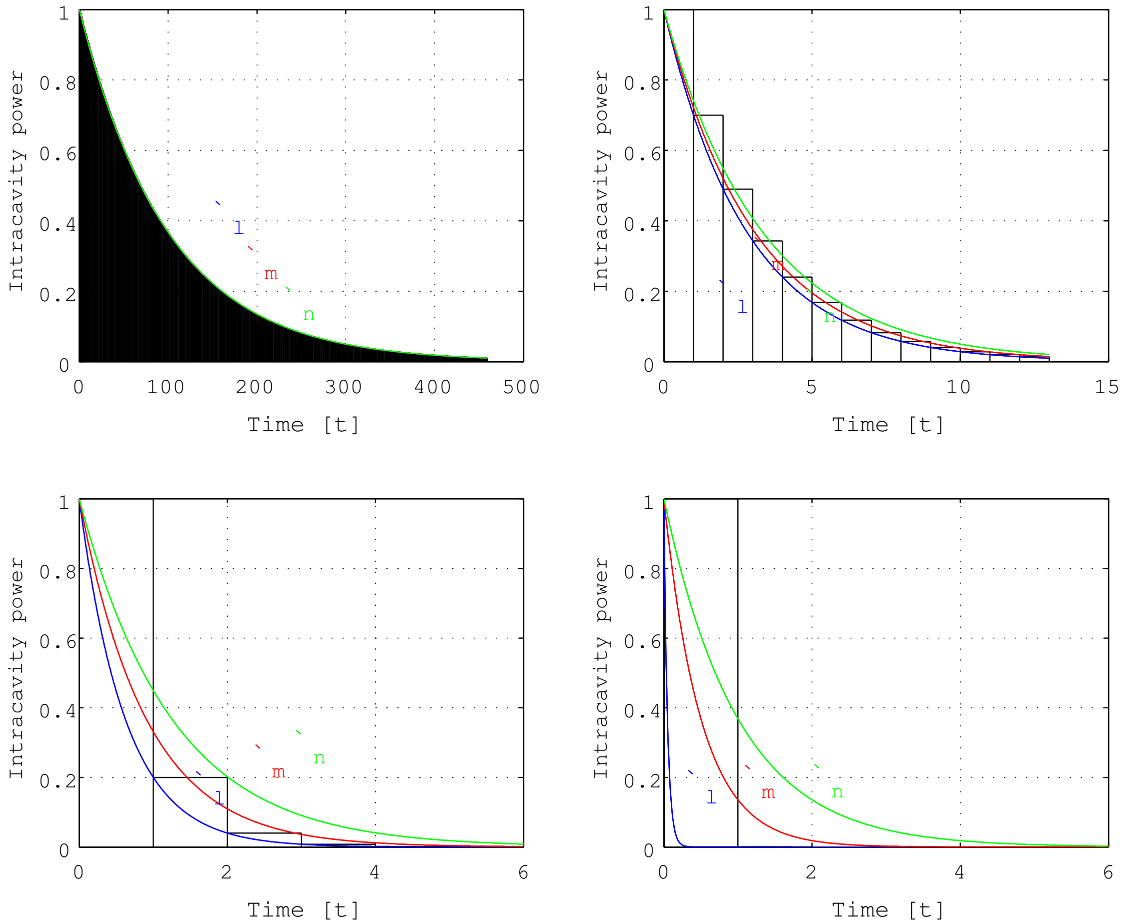


図 2.8: decay

2.3.5　ファブリーペロー共振器

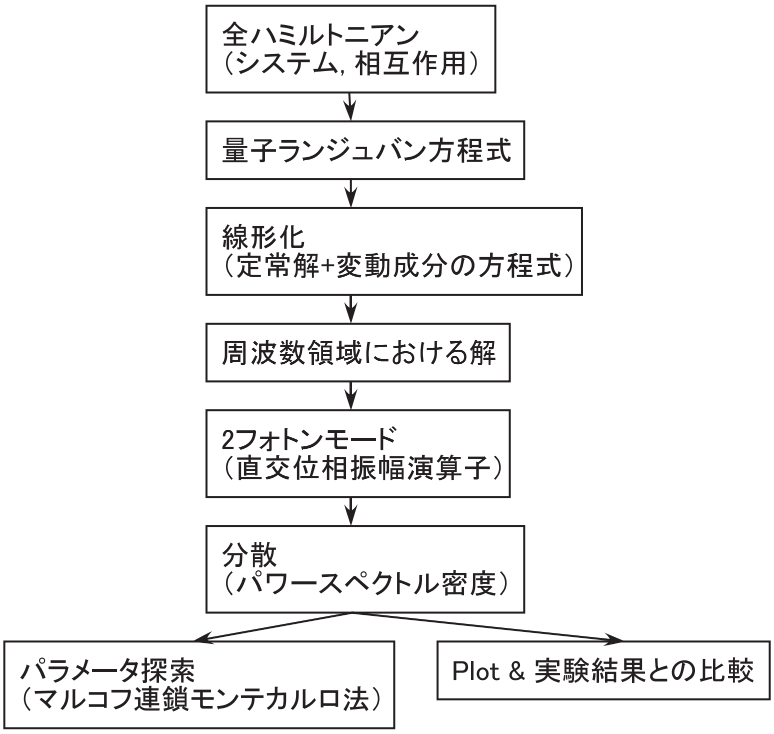


図 2.9: フローチャート

図 2.9 のフローチャートのように解析を行う。OPO の解析の前にまず簡単でかつ重要な例としてファブリーペロー共振器に関して考え, 分散を求める。

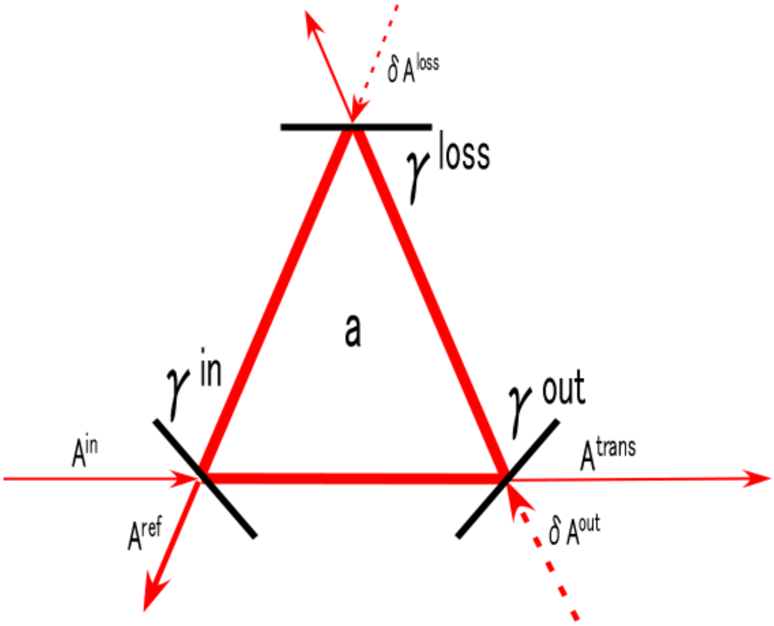


図 2.10: ファブリーペロー共振器

ファブリーペロー共振器とは二枚の鏡を向かい合わせたキャビティであり, それにより電磁場を共振させる事ができる。図 2.10 のようなモデルを考えると, 運動方程式は

$$\dot{\hat{a}} = -(\mathrm{i}\omega_\mathrm{c} + \gamma_\mathrm{tot})\hat{a} + \sqrt{2\gamma_\mathrm{in}}\hat{A}_\mathrm{in}e^{-\mathrm{i}\omega_A t} + \sqrt{2\gamma_\mathrm{out}}\hat{A}_\mathrm{out} + \sqrt{2\gamma_\mathrm{loss}}\hat{A}_\mathrm{loss} \tag{2.168}$$

である。これは次のような回転座標系

$$\hat{a} \to \hat{a}e^{-\mathrm{i}\omega_A t} \tag{2.169}$$

$$\hat{A}_\mathrm{in} \to \hat{A}_\mathrm{in}e^{-\mathrm{i}\omega_A t} \tag{2.170}$$

の下では, 運動方程式は

$$\dot{\hat{a}} = (\mathrm{i}\triangle - \gamma_\mathrm{tot})\hat{a} + \sqrt{2\gamma_\mathrm{in}}\hat{A}_\mathrm{in} + \sqrt{2\gamma_\mathrm{out}}\hat{A}_\mathrm{out} + \sqrt{2\gamma_\mathrm{loss}}\hat{A}_\mathrm{loss} \tag{2.171}$$

となる。ここで, $\hat{a}$ はキャビティ内のモード, $\hat{A}_j,\ \mathrm{j} = \mathrm{in}, \mathrm{out}, \mathrm{loss}$ は各ポートへの入力で（キャビティ内のモードは離散モードであり単位が $\sqrt{\mathrm{photon}}$ であるが入出力モードは連続モードの進行波なので $\sqrt{\mathrm{photon/s}}$ に注意, また実際には out, loss の項は真空場の入力による雑音を表すので $\bar{A}_\mathrm{j} = 0,\ \mathrm{j} = \mathrm{out}, \mathrm{loss}$ である。）, 外場との相互作用による雑音は減衰率 $\gamma_\mathrm{j},\ \mathrm{j} = \mathrm{in}, \mathrm{out}, \mathrm{loss}$ により運動方程式に結合し, $\gamma_\mathrm{tot} = \sum_j \gamma_\mathrm{j},\ \mathrm{j} = \mathrm{in}, \mathrm{out}, \mathrm{loss}$ である。$\triangle = \omega_A - \omega_\mathrm{c}$ はキャビティの共振周波数 ω_c からのずれを表す。線形化を行うと

$$\dot{\bar{a}} = (\mathrm{i}\triangle - \gamma_\mathrm{tot})\bar{a} + \sqrt{2\gamma_\mathrm{in}}\bar{A}_\mathrm{in} \tag{2.172}$$

$$\delta\dot{\hat{a}} = (\mathrm{i}\triangle - \gamma_\mathrm{tot})\delta\hat{a} + \sqrt{2\gamma_\mathrm{in}}\delta\hat{A}_\mathrm{in} + \sqrt{2\gamma_\mathrm{in}}\delta\hat{A}_\mathrm{out} + \sqrt{2\gamma_\mathrm{loss}}\delta\hat{A}_\mathrm{loss} \tag{2.173}$$

が得られ, その定常解は

$$\bar{a} = \frac{\sqrt{2\gamma_{\mathrm{in}}}}{\gamma_{\mathrm{tot}} - \mathrm{i}\triangle}\bar{A}_{\mathrm{in}} \tag{2.174}$$

となり, これは周波数領域では

$$\mathrm{i}\Omega\delta\hat{a} = (\mathrm{i}\triangle - \gamma_{\mathrm{tot}})\delta\hat{a} + \sqrt{2\gamma_{\mathrm{in}}}\delta\hat{A}_{\mathrm{in}} + \sqrt{2\gamma_{\mathrm{in}}}\delta\hat{A}_{\mathrm{out}} + \sqrt{2\gamma_{\mathrm{loss}}}\delta\hat{A}_{\mathrm{loss}} \tag{2.175}$$

となる。ここで, Ω はサイドバンド周波数である。行列形式で簡単にまとめると

$$\mathrm{i}\Omega\tilde{\boldsymbol{a}} = \mathbf{M}_a\tilde{\boldsymbol{a}} + \mathbf{M}_{\mathrm{in}}\tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{in}} + \mathbf{M}_{\mathrm{out}}\tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{out}} + \mathbf{M}_{\mathrm{loss}}\tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{loss}} \tag{2.176}$$

となる。ここで

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{a}^\dagger \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{in}} = \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{A}_{\mathrm{in}}^\dagger \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{out}} = \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{A}_{\mathrm{out}}^\dagger \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{loss}} = \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{A}_{\mathrm{loss}}^\dagger \end{bmatrix} \tag{2.177}$$

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} \mathrm{i}\triangle - \gamma_{\mathrm{tot}} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\triangle - \gamma_{\mathrm{tot}} \end{bmatrix} \tag{2.178}$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{in}} = \sqrt{2\gamma_{\mathrm{in}}}\mathbf{I}, \quad \mathbf{M}_{\mathrm{out}} = \sqrt{2\gamma_{\mathrm{out}}}\mathbf{I}, \quad \mathbf{M}_{\mathrm{loss}} = \sqrt{2\gamma_{\mathrm{loss}}}\mathbf{I} \tag{2.179}$$

である。キャビティ内のモードは

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = (\mathrm{i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_a)^{-1}\mathbf{M}_a\tilde{\boldsymbol{a}} + \mathbf{M}_{\mathrm{in}}\tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{in}} + \mathbf{M}_{\mathrm{out}}\tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{out}} + \mathbf{M}_{\mathrm{loss}}\tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{loss}} \tag{2.180}$$

となる。境界条件は [20]

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{trans}} &= \sqrt{2\gamma_{\mathrm{out}}}a - A_{\mathrm{out}} \\ A_{\mathrm{ref}} &= \sqrt{2\gamma_{\mathrm{in}}}a - A_{\mathrm{in}} \end{aligned} \tag{2.181}$$

であるので, 透過光及び反射光は

$$\bar{A}_{\mathrm{trans}} = \frac{2\sqrt{\gamma_{\mathrm{in}}\gamma_{\mathrm{out}}}}{\gamma_{\mathrm{tot}} - \mathrm{i}\triangle}\bar{A}_{\mathrm{in}} \tag{2.182}$$

$$\bar{A}_{\mathrm{ref}} = \frac{2\gamma_{\mathrm{in}} - \gamma_{\mathrm{tot}} + \mathrm{i}\triangle}{\gamma_{\mathrm{tot}} - \mathrm{i}\triangle}\bar{A}_{\mathrm{in}} \tag{2.183}$$

となる。これから振幅反射率, 振幅透過率は

$$t(\triangle) = \frac{\bar{A}_{\mathrm{trans}}}{\bar{A}_{\mathrm{in}}} = \frac{2\sqrt{\gamma_{\mathrm{in}}\gamma_{\mathrm{out}}}}{\gamma_{\mathrm{tot}} - \mathrm{i}\triangle} \tag{2.184}$$

$$r(\triangle) = \frac{\bar{A}_{\mathrm{ref}}}{\bar{A}_{\mathrm{in}}} = \frac{2\gamma_{\mathrm{in}} - \gamma_{\mathrm{tot}} + \mathrm{i}\triangle}{\gamma_{\mathrm{tot}} - \mathrm{i}\triangle} \tag{2.185}$$

となる。

$\triangle = 0$ の場合は

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{ref}} = \frac{[2\gamma_{\mathrm{in}} - \gamma_{\mathrm{tot}} - \mathrm{i}\Omega]\tilde{A}_{\mathrm{in}} + 2\sqrt{\gamma_{\mathrm{in}}\gamma_{\mathrm{out}}}\tilde{A}_{\mathrm{out}} + 2\sqrt{\gamma_{\mathrm{in}}\gamma_{\mathrm{loss}}}\tilde{A}_{\mathrm{loss}}}{\gamma_{\mathrm{tot}} + \mathrm{i}\Omega} \tag{2.186}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{trans}} = \frac{2\sqrt{\gamma_{\mathrm{out}}\gamma_{\mathrm{in}}}\tilde{A}_{\mathrm{in}} + [2\gamma_{\mathrm{out}} - \gamma_{\mathrm{tot}} + \mathrm{i}\Omega]\tilde{A}_{\mathrm{out}} + 2\sqrt{\gamma_{\mathrm{out}}\gamma_{\mathrm{loss}}}\tilde{A}_{\mathrm{loss}}}{\gamma_{\mathrm{tot}} + \mathrm{i}\Omega} \tag{2.187}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{l}} = \frac{2\sqrt{\gamma_{\mathrm{loss}}\gamma_{\mathrm{in}}}\tilde{A}_{\mathrm{in}} + 2\sqrt{\gamma_{\mathrm{loss}}\gamma_{\mathrm{out}}}\tilde{A}_{\mathrm{out}} + [2\gamma_{\mathrm{loss}} - \gamma_{\mathrm{tot}} - \mathrm{i}\Omega]\tilde{A}_{\mathrm{loss}}}{\gamma_{\mathrm{tot}} + \mathrm{i}\Omega} \tag{2.188}$$

となる。

直交位相振幅揺らぎ

ファブリーペローキャビティの透過光及び反射光の直交位相振幅揺らぎ成分は

$$\delta\tilde{X}_{1,2}^{(\mathrm{trans})} = \frac{2\sqrt{\gamma_{\mathrm{in}}\gamma_{\mathrm{out}}}\delta\tilde{X}_{1,2}^{(\mathrm{in})} + (2\gamma_{\mathrm{out}} - \mathrm{i}\Omega - \gamma_{\mathrm{tot}})\delta\tilde{X}_{1,2}^{(\mathrm{out})} + 2\sqrt{\gamma_{\mathrm{loss}}\gamma_{\mathrm{out}}}\delta\tilde{X}_{1,2}^{(\mathrm{loss})}}{\gamma_{\mathrm{tot}} + \mathrm{i}\Omega} \tag{2.189}$$

$$\delta\tilde{X}_{1,2}^{(\mathrm{ref})} = \frac{(2\gamma_{\mathrm{in}} - \gamma_{\mathrm{tot}} - \mathrm{i}\Omega)\delta\tilde{X}_{1,2}^{(\mathrm{in})} + 2\sqrt{\gamma_{\mathrm{out}}\gamma_{\mathrm{in}}}\delta\tilde{X}_{1,2}^{(\mathrm{out})} + 2\sqrt{\gamma_{\mathrm{loss}}\gamma_{\mathrm{in}}}\delta\tilde{X}_{1,2}^{(\mathrm{loss})}}{\gamma_{\mathrm{tot}} + \mathrm{i}\Omega} \tag{2.190}$$

であるので, その分散を

$$\tilde{V}_{1,2}^{(\mathrm{j})} = \langle|\delta\tilde{X}_{1,2}^{(\mathrm{j})}|^2\rangle, \qquad \mathrm{j} = \mathrm{in},\ \mathrm{ref},\ \mathrm{trans} \tag{2.191}$$

から得ると

$$\tilde{V}_{1,2}^{(\mathrm{trans})} = \frac{4\gamma_{\mathrm{in}}\gamma_{\mathrm{out}}\tilde{V}_{1,2}^{(\mathrm{in})} + ((2\gamma_{\mathrm{out}} - \gamma_{\mathrm{tot}})^2 + \Omega^2) + 4\gamma_{\mathrm{loss}}\gamma_{\mathrm{out}}}{(\gamma^{\mathrm{tot}})^2 + \Omega^2} \tag{2.192}$$

$$\tilde{V}_{1,2}^{(\mathrm{ref})} = \frac{((2\gamma_{\mathrm{in}} - \gamma_{\mathrm{tot}})^2 + \Omega^2)\,\tilde{V}_{1,2}^{(\mathrm{in})} + 4\gamma_{\mathrm{in}}\gamma_{\mathrm{out}} + 4\gamma_{\mathrm{loss}}\gamma_{\mathrm{in}}}{(\gamma^{\mathrm{tot}})^2 + \Omega^2} \tag{2.193}$$

となる。

2.3.6　OPO を用いたスクイーズド状態の生成

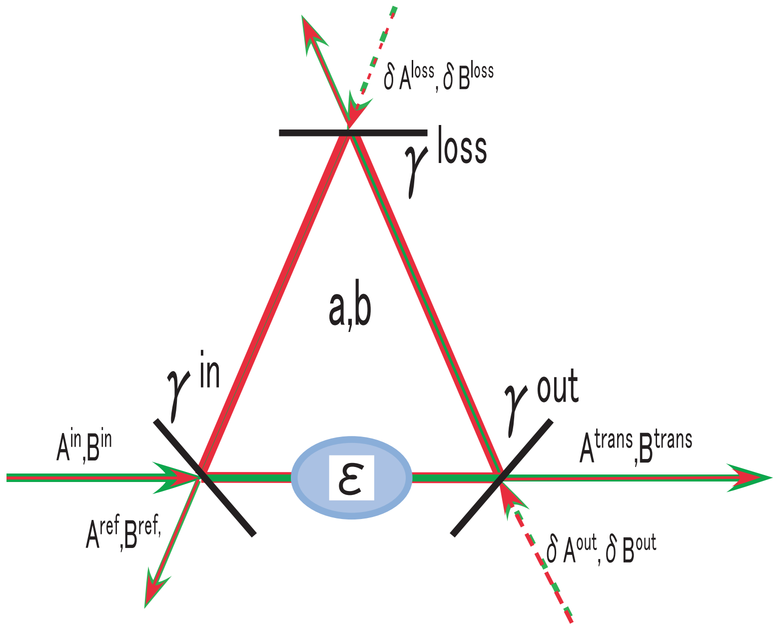


図 2.11: OPO の略図

図 2.11 のようなモデルを考える。まず, 各変数の説明をする。$\hat{a}_+, \hat{a}_-, \hat{b}$ はそれぞれキャビティ内の signal, idler, pump 光 (第二次高調波) の消滅演算子であり, $\hat{A}_+^{(\mathrm{j})}, \hat{A}_-^{(\mathrm{j})}, \hat{B}^{(\mathrm{j})}, \mathrm{j} = \mathrm{in}, \mathrm{out}, \mathrm{loss}$ は各ポートへの入力であり, $\hat{A}_+^{(\mathrm{j})}, \hat{A}_-^{(\mathrm{j})}, \hat{B}^{(\mathrm{j})}, \mathrm{j} = \mathrm{trans}$ はキャビティからの出力である。$\gamma_j,\ \mathrm{j} = \mathrm{tot}, \mathrm{in}, \mathrm{out}, \mathrm{loss}$ は減衰率, $\triangle$ は共振周波数からのずれである。非線形結合定数は ϵ で与えられ, これについては参照節でもう少し詳しく述べる。このとき, ハミルトニアンは

$$\mathscr{H}_{\mathrm{sys}} = \hbar(\omega + \Omega)\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ + \hbar(\omega - \Omega)\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- + \hbar 2\omega \hat{b}^\dagger \hat{b} \tag{2.194}$$

$$\mathscr{H}_{\mathrm{int}} = \frac{\mathrm{i}\hbar\epsilon}{2}(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+^\dagger \hat{b} - \hat{a}_+ \hat{a}_- \hat{b}^\dagger) \tag{2.195}$$

となり, 運動方程式は

$$\dot{\hat{a}}_+ = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{a}_+, \mathscr{H}_{\mathrm{sys}} + \mathscr{H}_{\mathrm{int}}] - \gamma_+^{(\mathrm{tot})}\hat{a}_+ \tag{2.196}$$

$$+ \sqrt{2\gamma_+^{(\mathrm{in})}}\hat{A}_+^{(\mathrm{in})} e^{\mathrm{i}(\omega+\Omega)t} + \sqrt{2\gamma_+^{(\mathrm{out})}}\hat{A}_+^{(\mathrm{out})} + \sqrt{2\gamma_+^{(\mathrm{loss})}}\hat{A}_+^{(\mathrm{loss})} \tag{2.197}$$

$$\dot{\hat{a}}_- = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{a}_-, \mathscr{H}_{\mathrm{sys}} + \mathscr{H}_{\mathrm{int}}] - \gamma_-^{(\mathrm{tot})}\hat{a}_- \tag{2.198}$$

$$+ \sqrt{2\gamma_-^{(\mathrm{in})}}\hat{A}_-^{(\mathrm{in})} e^{\mathrm{i}(\omega-\Omega)t} + \sqrt{2\gamma_-^{(\mathrm{out})}}\hat{A}_-^{(\mathrm{out})} + \sqrt{2\gamma_-^{(\mathrm{loss})}}\hat{A}_-^{(\mathrm{loss})} \tag{2.199}$$

$$\dot{\hat{b}} = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{b}, \mathscr{H}_{\mathrm{sys}} + \mathscr{H}_{\mathrm{int}}] - \gamma_b^{(\mathrm{tot})}\hat{b} \tag{2.200}$$

$$+ \sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{in})}}\hat{B}^{(\mathrm{in})}e^{\mathrm{i}(2\omega)t} + \sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{out})}}\hat{B}^{(\mathrm{out})} + \sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{loss})}}\hat{B}^{(\mathrm{loss})} \tag{2.201}$$

である。キャビティは基本波だけ共振している状況を考え, $\gamma_\pm^{(\mathrm{j})} = T_\pm^{(\mathrm{j})}/(2\tau)$ であり, $\gamma_b^{(\mathrm{j})} = 1/\tau,\ \ \mathrm{j} = \mathrm{in}, \mathrm{out}, \mathrm{loss}$ である。これらは, 回転座標系では

$$\dot{\hat{a}}_+ = \mathrm{i}(\triangle_+^{(d)} - \gamma_+^{(\mathrm{tot})})\hat{a}_+ + \frac{1}{2}\epsilon\hat{a}_-^\dagger\hat{b} \tag{2.202}$$

$$+ \sqrt{2\gamma_+^{(\mathrm{in})}}\hat{A}_+^{(\mathrm{in})} + \sqrt{2\gamma_+^{(\mathrm{out})}}\hat{A}_+^{(\mathrm{out})} + \sqrt{2\gamma_+^{(\mathrm{loss})}}\hat{A}_+^{(\mathrm{loss})} \tag{2.203}$$

$$\dot{\hat{a}}_- = \mathrm{i}(\triangle_-^{(d)} - \gamma_-^{(\mathrm{tot})})\hat{a}_- + \frac{1}{2}\epsilon\hat{a}_+^\dagger\hat{b} \tag{2.204}$$

$$+ \sqrt{2\gamma_-^{(\mathrm{in})}}\hat{A}_-^{(\mathrm{in})} + \sqrt{2\gamma_-^{(\mathrm{out})}}\hat{A}_-^{(\mathrm{out})} + \sqrt{2\gamma_-^{(\mathrm{loss})}}\hat{A}_-^{(\mathrm{loss})} \tag{2.205}$$

$$\dot{\hat{b}} = \mathrm{i}(\triangle_b^{(d)} - \gamma_b^{(\mathrm{tot})})\hat{b} - \frac{1}{2}\epsilon^*\hat{a}_+\hat{a}_- \tag{2.206}$$

$$+ \sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{in})}}\hat{B}^{(\mathrm{in})} + \sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{out})}}\hat{B}^{(\mathrm{out})} + \sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{loss})}}\hat{B}^{(\mathrm{loss})} \tag{2.207}$$

となる。運動方程式を線形化し, 平均値成分と変動成分を分ける。まず, 平均値成分の運動方程式は

$$\frac{d\bar{a}_+}{dt} = (\mathrm{i}\bar{\triangle}_+^{(d)} - \gamma_+^{(\mathrm{tot})})\bar{a}_+ + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\bar{a}_-^*\bar{b} + \sqrt{2\gamma_+^{(\mathrm{in})}}\bar{A}_+^{(\mathrm{in})} \tag{2.208}$$

$$\frac{d\bar{a}_-}{dt} = (\mathrm{i}\bar{\triangle}_-^{(d)} - \gamma_-^{(\mathrm{tot})})\bar{a}_- + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\bar{a}_+^*\bar{b} + \sqrt{2\gamma_-^{(\mathrm{in})}}\bar{A}_-^{(\mathrm{in})} \tag{2.209}$$

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = (\mathrm{i}\bar{\triangle}_b^{(d)} - \gamma_b^{(\mathrm{tot})})\bar{b} - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^*\bar{a}_+\bar{a}_- + \sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{in})}}\bar{B}^{(\mathrm{in})} \tag{2.210}$$

となり, その定常解は

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_+ \\ \bar{a}_-^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_+^{(\mathrm{tot})} - \mathrm{i}\bar{\triangle}_+^{(d)} & -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\bar{b} \\ -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\bar{b}^* & \gamma_-^{(\mathrm{tot})} - \mathrm{i}\bar{\triangle}_-^{(d)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{2\gamma_+^{(\mathrm{in})}}\bar{A}_+^{(\mathrm{in})} \\ \sqrt{2\gamma_-^{(\mathrm{in})}}\bar{A}_-^{(\mathrm{in})*} \end{bmatrix} \tag{2.211}$$

$$\bar{b} = \frac{\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{in})}}\bar{B}^{(\mathrm{in})}}{\gamma_b^{(\mathrm{tot})} - \bar{\triangle}_b^{(d)}} \tag{2.212}$$

となる。実験では, OPO は発振させないで動作させるため, ダウンコンバージョンによる第二次高調波から基本波へのエネルギー遷移が小さいので $\bar{\epsilon}\bar{a}^2/2 \ll$the other terms とした。次に, 変動成分の運動方程式は

$$\delta\dot{\hat{a}}_+ = \mathrm{i}(\bar{\triangle}_+^{(d)} - \gamma_+^{(\mathrm{tot})})\delta\hat{a}_+ + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\bar{a}_-^*\delta\hat{b} + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\bar{b}\delta\hat{a}_-^\dagger + \sqrt{2\gamma_+^{(\mathrm{in})}}\delta\hat{A}_+^{(\mathrm{in})} + \sqrt{2\gamma_+^{(\mathrm{out})}}\delta\hat{A}_+^{(\mathrm{out})}$$

$$+ \sqrt{2\gamma_+^{(\mathrm{loss})}}\delta\hat{A}_+^{(\mathrm{loss})} + \mathrm{i}\bar{a}_+\delta\triangle_+^{(d)} + \frac{1}{2}\bar{a}_-^*\bar{b}\delta\epsilon \tag{2.213}$$

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\hat{a}}_{-} =& \mathrm{i}(\bar{\triangle}_{-}^{(d)} - \gamma_{-}^{(\mathrm{tot})})\delta\hat{a}_{-} + \frac{1}{2}\epsilon\bar{a}_{+}^{*}\delta\hat{b} + \frac{1}{2}\epsilon\bar{b}\delta\hat{a}_{+}^{\dagger} + \sqrt{2\gamma_{-}^{(\mathrm{in})}}\delta\hat{A}_{-}^{(\mathrm{in})} + \sqrt{2\gamma_{-}^{(\mathrm{out})}}\delta\hat{A}_{-}^{(\mathrm{out})} \\
&+ \sqrt{2\gamma_{-}^{(\mathrm{loss})}}\delta\hat{A}_{-}^{(\mathrm{loss})} + \mathrm{i}\bar{a}_{-}\delta\triangle_{-}^{(d)} + \frac{1}{2}\bar{a}_{+}^{*}\bar{b}\delta\epsilon
\end{aligned}
\tag{2.214}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\hat{b}} =& \mathrm{i}(\bar{\triangle}_{b}^{(d)} - \gamma_{b}^{(\mathrm{tot})})\delta\hat{b} - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^{*}\bar{a}_{+}\delta\hat{a}_{-} - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^{*}\bar{a}_{-}\delta\hat{a}_{+} + \sqrt{2\gamma_{b}^{(\mathrm{in})}}\delta\hat{B}^{(\mathrm{in})} + \sqrt{2\gamma_{b}^{(\mathrm{out})}}\delta\hat{B}^{(\mathrm{out})} \\
&+ \sqrt{2\gamma_{b}^{(\mathrm{loss})}}\delta\hat{B}^{(\mathrm{loss})} + \mathrm{i}\bar{b}\delta\triangle_{b}^{(d)} - \frac{1}{2}\bar{a}_{+}\bar{a}_{-}\delta\epsilon^{*}
\end{aligned}
\tag{2.215}
$$

となり, これは周波数領域では, 次のような単純な行列形式で記述できる。

$$
\mathrm{i}\Omega\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{c}} = \mathbf{M}_{\mathrm{c}}\tilde{\mathbf{y}}_{c} + \mathbf{M}_{\mathrm{in}}\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{in}} + \mathbf{M}_{\mathrm{out}}\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{out}} + \mathbf{M}_{\mathrm{loss}}\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{loss}} + \tilde{\mathbf{y}}_{\triangle} + \tilde{\mathbf{y}}_{\epsilon}
\tag{2.216}
$$

ここで, 各ベクトルは

$$
\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{c}} \equiv \begin{bmatrix} \delta\tilde{a}_{+} \\ \delta\tilde{a}_{+}^{\dagger} \\ \delta\tilde{a}_{-} \\ \delta\tilde{a}_{-}^{\dagger} \\ \delta\tilde{b} \\ \delta\tilde{b}^{\dagger} \end{bmatrix},\
\tilde{\mathbf{y}}_{(\mathrm{in})} \equiv \begin{bmatrix} \delta\tilde{A}_{+}^{(\mathrm{in})} \\ \delta\tilde{A}_{+}^{(\mathrm{in})\dagger} \\ \delta\tilde{A}_{-}^{(\mathrm{in})} \\ \delta\tilde{A}_{-}^{(\mathrm{in})\dagger} \\ \delta\tilde{B}^{(\mathrm{in})} \\ \delta\tilde{B}^{(\mathrm{in})\dagger} \end{bmatrix},\
\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{out}} \equiv \begin{bmatrix} \delta\tilde{A}_{+}^{(\mathrm{out})} \\ \delta\tilde{A}_{+}^{(\mathrm{out})\dagger} \\ \delta\tilde{A}_{-}^{(\mathrm{out})} \\ \delta\tilde{A}_{-}^{(\mathrm{out})\dagger} \\ \delta\tilde{B}^{(\mathrm{out})} \\ \delta\tilde{B}^{(\mathrm{out})\dagger} \end{bmatrix},\
\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{loss}} \equiv \begin{bmatrix} \delta\tilde{A}_{+}^{(\mathrm{loss})} \\ \delta\tilde{A}_{+}^{(\mathrm{loss})\dagger} \\ \delta\tilde{A}_{-}^{(\mathrm{loss})} \\ \delta\tilde{A}_{-}^{(\mathrm{loss})\dagger} \\ \delta\tilde{B}^{(\mathrm{loss})} \\ \delta\tilde{B}^{(\mathrm{loss})\dagger} \end{bmatrix}
$$

$$
\tilde{\mathbf{y}}_{\triangle} \equiv \begin{bmatrix} \mathrm{i}\bar{a}_{+}\delta\triangle_{+}^{(d)} \\ -\mathrm{i}\bar{a}_{+}^{*}\delta\triangle_{+}^{(d)} \\ \mathrm{i}\bar{a}_{-}\delta\triangle_{+}^{(d)} \\ -\mathrm{i}\bar{a}_{-}^{*}\delta\triangle_{+}^{(d)} \\ \mathrm{i}\bar{b}\delta\triangle_{b}^{(d)} \\ -\mathrm{i}\bar{b}^{*}\delta\triangle_{b}^{(d)} \end{bmatrix}\
\tilde{\mathbf{y}}_{\epsilon} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\bar{a}_{-}^{*}\bar{b}\delta\epsilon \\ \frac{1}{2}\bar{a}_{-}\bar{b}^{*}\delta\epsilon^{*} \\ \frac{1}{2}\bar{a}_{+}^{*}\bar{b}\delta\epsilon \\ \frac{1}{2}\bar{a}_{+}\bar{b}^{*}\delta\epsilon^{*} \\ -\frac{1}{2}\bar{a}_{+}\bar{a}_{-}\delta\epsilon^{*} \\ -\frac{1}{2}\bar{a}_{+}^{*}\bar{a}_{-}^{*}\delta\epsilon \end{bmatrix}
\tag{2.217}
$$

であり, 各行列は

$$
\mathbf{M}_{\mathrm{c}} \equiv \begin{bmatrix}
(-_{+}, +_{+}) & 0 & 0 & \frac{1}{2}\epsilon\bar{b} & \frac{1}{2}\epsilon\bar{a}_{-}^{*} & 0 \\
0 & (-_{+}, -_{+}) & \frac{1}{2}\epsilon\bar{b}^{*} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\epsilon\bar{a}_{-} \\
0 & \frac{1}{2}\epsilon\bar{b} & (-_{-}, +_{-}) & 0 & \frac{1}{2}\epsilon\bar{a}_{+}^{*} & 0 \\
\frac{1}{2}\epsilon\bar{b}^{*} & 0 & 0 & (-_{-}, -_{-}) & 0 & \frac{1}{2}\epsilon\bar{a}_{+} \\
-\frac{1}{2}\bar{\epsilon}^{*}\bar{a}_{-} & 0 & -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}^{*}\bar{a}_{+} & 0 & (-_{b}, +_{b}) & 0 \\
0 & -\frac{1}{2}\epsilon\bar{a}_{-}^{*} & 0 & -\frac{1}{2}\epsilon\bar{a}_{+}^{*} & 0 & (-_{b}, -_{b})
\end{bmatrix}
\tag{2.218}
$$

$$
(\pm_{+,-,b}, \pm_{+,-,b}) \equiv \pm\gamma_{+,-,b}^{(\mathrm{tot})} \pm \mathrm{i}\bar{\triangle}_{+,-,b}^{(d)}
\tag{2.219}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{M}_\mathrm{j} \equiv \mathrm{diag}\left[\sqrt{2\gamma_+^{(\mathrm{j})}}, \sqrt{2\gamma_+^{(\mathrm{j})}}, \sqrt{2\gamma_-^{(\mathrm{j})}}, \sqrt{2\gamma_-^{(\mathrm{j})}}, \sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{j})}}, \sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{j})}},\right] \\
&\text{for} \quad \mathrm{j} = \mathrm{in},\ \mathrm{out},\ \mathrm{loss}
\end{aligned} \tag{2.220}
$$

であるキャビティ内のモードは

$$
\tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{c} = (\mathrm{i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_\mathrm{c})^{-1}(\mathbf{M}_\mathrm{in}\tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{in} + \mathbf{M}_\mathrm{out}\tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{out} + \mathbf{M}_\mathrm{loss}\tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{loss} + \tilde{\mathbf{y}}_\triangle + \tilde{\mathbf{y}}_\epsilon) \tag{2.221}
$$

と求まる。出力場ベクトルを

$$
\tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{trans} \equiv \begin{bmatrix} \delta\tilde{A}_+^{(\mathrm{trans})} \\ \delta\tilde{A}_+^{(\mathrm{trans})\dagger} \\ \delta\tilde{A}_-^{(\mathrm{trans})} \\ \delta\tilde{A}_-^{(\mathrm{trans})\dagger} \\ \delta\tilde{B}^{(\mathrm{trans})} \\ \delta\tilde{B}^{(\mathrm{trans})\dagger} \end{bmatrix} \tag{2.222}
$$

と定義すると, その境界条件 (2.181) から

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{trans} &= \mathbf{M}_\mathrm{out}\tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{c} - \tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{out} \\
&= \mathbf{M}_\mathrm{out}(\mathrm{i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_\mathrm{c})^{-1}\mathbf{M}_\mathrm{in}\tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{in} + \left[\mathbf{M}_\mathrm{out}(\mathrm{i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_\mathrm{c})^{-1}\mathbf{M}_\mathrm{out} - \mathbf{I}\right]\tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{out} \\
&\quad + \mathbf{M}_\mathrm{out}(\mathrm{i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_\mathrm{c})^{-1}\mathbf{M}_\mathrm{loss}\tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{loss} + \mathbf{M}_\mathrm{out}(\mathrm{i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_\mathrm{c})^{-1}(\tilde{\mathbf{y}}_\triangle + \tilde{\mathbf{y}}_\epsilon)
\end{aligned} \tag{2.223}
$$

と求まる。このとき, 直交位相振幅を次のベクトルで記述すると

$$
\tilde{\mathbf{X}}_\mathrm{j} \equiv \begin{bmatrix} \delta X_{1,+}^{(A,\,\mathrm{j})} \\ \delta X_{2,+}^{(A,\,\mathrm{j})} \\ \delta X_{1,-}^{(A,\,\mathrm{j})} \\ \delta X_{2,-}^{(A,\,\mathrm{j})} \\ \delta X_{1}^{(B,\,\mathrm{j})} \\ \delta X_{2}^{(B,\,\mathrm{j})} \end{bmatrix}, \qquad \text{for } \ \mathrm{j} = \mathrm{in},\ \mathrm{out},\ \mathrm{loss},\ \mathrm{trans} \tag{2.224}
$$

これは, 次の変換で求まる。

$$
\tilde{\mathbf{X}}_\mathrm{j} = \mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{j} \tag{2.225}
$$

$$
\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix}
\sqrt{\frac{\omega\ \ +\Omega}{\omega}} & \sqrt{\frac{\omega-\Omega}{\omega}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega+\Omega}{\omega}} & \mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega-\Omega}{\omega}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{\frac{\omega\ \ +\Omega}{\omega}} & \sqrt{\frac{\omega-\Omega}{\omega}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega+\Omega}{\omega}} & \mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega-\Omega}{\omega}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\omega\ \ +\Omega}{\omega}} & \sqrt{\frac{\omega-\Omega}{\omega}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega+\Omega}{\omega}} & \mathrm{i}\sqrt{\frac{\omega-\Omega}{\omega}}
\end{bmatrix} \tag{2.226}
$$

(2.223), (2.225) から

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\rm trans} = \mathbf{\Theta}_{\rm in}\tilde{\mathbf{X}}_{\rm in} + \mathbf{\Theta}_{\rm out}\tilde{\mathbf{X}}_{\rm out} + \mathbf{\Theta}_{\rm loss}\tilde{\mathbf{X}}_{\rm loss} + \mathbf{\Theta}_{\triangle} + \mathbf{\Theta}_{\epsilon} \tag{2.227}$$

と求まる。このとき

$$\mathbf{\Theta}_{\rm in} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{M}_{\rm out}({\rm i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_{\rm c})^{-1}\mathbf{M}_{\rm in}\mathbf{\Lambda}^{-1} \tag{2.228}$$

$$\mathbf{\Theta}_{\rm out} = \mathbf{\Lambda}\left[\mathbf{M}_{\rm out}({\rm i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_{\rm c})^{-1}\mathbf{M}_{\rm out} - \mathbf{I}\right]\mathbf{\Lambda}^{-1} \tag{2.229}$$

$$\mathbf{\Theta}_{\rm loss} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{M}_{\rm out}({\rm i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_{\rm c})^{-1}\mathbf{M}_{\rm loss}\mathbf{\Lambda}^{-1} \tag{2.230}$$

$$\mathbf{\Theta}_{\triangle} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{M}_{\rm out}({\rm i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_{\rm c})^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{\triangle} \tag{2.231}$$

$$\mathbf{\Theta}_{\epsilon} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{M}_{\rm out}({\rm i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_{\rm c})^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{\epsilon} \tag{2.232}$$

であり, (2.227) から OPO の出力光の分散が次のように求まる。

$$\tilde{V}_1 = \langle|\tilde{X}_1|^2\rangle \tag{2.233}$$

ここでは, 全ての揺らぎ成分は独立として, その

$$\tilde{\mathbf{V}}^{\rm trans} = |\Theta_{\rm in}|^2\tilde{\mathbf{V}}_{\rm in} + |\Theta_{\rm out}|^2 + |\Theta_{\rm loss}|^2 + |\Theta_{\triangle}|^2 + |\Theta_{\epsilon}|^2 \tag{2.234}$$

$$\tilde{\mathbf{V}}_{\rm trans} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{V}_{1,+}^{A,{\rm trans}} \\ \tilde{V}_{1,-}^{A,{\rm trans}} \\ \tilde{V}_{2,+}^{A,{\rm trans}} \\ \tilde{V}_{2,-}^{A,{\rm trans}} \\ \tilde{V}_{1}^{B,{\rm trans}} \\ \tilde{V}_{2}^{B,{\rm trans}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{V}}_{\rm in} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{V}_{1,+}^{A,({\rm in})} \\ \tilde{V}_{1,-}^{A,({\rm in})} \\ \tilde{V}_{2,+}^{A,({\rm in})} \\ \tilde{V}_{2,-}^{A,({\rm in})} \\ \tilde{V}_{1}^{B,({\rm in})} \\ \tilde{V}_{2}^{B,({\rm in})} \end{bmatrix} \tag{2.235}$$

A simplified case

$\boxed{\frac{\Omega}{\omega} \to 0 \text{ の場合}}$

つまり縮退光パラメトリック発振器の場合は

$$\hat{a} \equiv \hat{a}_+ = \hat{a}_- \tag{2.236}$$

であり, その発振条件は

$$|\bar{b}| \geq \frac{\gamma_+^{({\rm tot})}}{2|\epsilon|} \simeq \frac{\gamma_+^{({\rm tot})}}{2|\epsilon|} \to |\bar{b}| \geq \frac{\gamma_a^{({\rm tot})}}{|\epsilon|} \tag{2.237}$$

となる。これは, ハミルトニアン (2.195) が

$$\mathscr{H}_{\mathrm{int}} = \frac{\mathrm{i}\hbar\epsilon}{2}(\hat{a}^{\dagger 2}\hat{b} - \hat{a}^2\hat{b}) \tag{2.238}$$

となる事に対応している。これらの事に注意して

$$\triangle_a \equiv \triangle_+ \simeq \triangle_- \tag{2.239}$$

$$\gamma_a \equiv \gamma_+ \simeq \gamma_- \tag{2.240}$$

とすると, (2.216) 〜(2.232) は次のようになる。

$$\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{c}} \equiv \begin{bmatrix} \delta\tilde{a} \\ \delta\tilde{a}^\dagger \\ \delta\tilde{b} \\ \delta\tilde{b}^\dagger \end{bmatrix},\ \tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{in}} \equiv \begin{bmatrix} \delta\tilde{A}^{(\mathrm{in})} \\ \delta\tilde{A}^{(\mathrm{in})\dagger} \\ \delta\tilde{B}^{(\mathrm{in})} \\ \delta\tilde{B}^{(\mathrm{in})\dagger} \end{bmatrix},\ \tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{out}} \equiv \begin{bmatrix} \delta\tilde{A}^{(\mathrm{out})} \\ \delta\tilde{A}^{(\mathrm{out})\dagger} \\ \delta\tilde{B}^{(\mathrm{out})} \\ \delta\tilde{B}^{(\mathrm{out})\dagger} \end{bmatrix},\ \tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{loss}} \equiv \begin{bmatrix} \delta\tilde{A}^{(\mathrm{loss})} \\ \delta\tilde{A}^{(\mathrm{loss})\dagger} \\ \delta\tilde{B}^{(\mathrm{loss})} \\ \delta\tilde{B}^{(\mathrm{loss})\dagger} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_{\triangle} \equiv \begin{bmatrix} \mathrm{i}\bar{a}\delta\triangle_+^{(d)} \\ -\mathrm{i}\bar{a}^*\delta\triangle_+^{(d)} \\ \mathrm{i}\bar{b}\delta\triangle_b^{(d)} \\ -\mathrm{i}\bar{b}^*\delta\triangle_b^{(d)} \end{bmatrix}\ \tilde{\mathbf{y}}_{\epsilon} \equiv \begin{bmatrix} \bar{a}^*\bar{b}\delta\epsilon \\ \bar{a}\bar{b}^*\delta\epsilon^* \\ -\frac{1}{2}\bar{a}^2\delta\epsilon^* \\ -\frac{1}{2}\bar{a}^{*2}\delta\epsilon \end{bmatrix} \tag{2.241}$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{c}} \equiv \begin{bmatrix} -\gamma_a^{(\mathrm{tot})} + \mathrm{i}\bar{\triangle}_a^{(d)} & \bar{\epsilon}\bar{b} & \bar{\epsilon}\bar{a}^* & 0 \\ \bar{\epsilon}^*\bar{b}^* & -\gamma_a^{(\mathrm{tot})} - \mathrm{i}\bar{\triangle}_a^{(d)} & 0 & \bar{\epsilon}^*\bar{a} \\ \bar{\epsilon}^*\bar{a} & 0 & -\gamma_b^{(\mathrm{tot})} + \mathrm{i}\bar{\triangle}_b^{(d)} & 0 \\ 0 & -\bar{\epsilon}\bar{a}^* & 0 & -\gamma_b^{(\mathrm{tot})} - \mathrm{i}\bar{\triangle}_b^{(d)} \end{bmatrix} \tag{2.242}$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{j}} \equiv \mathrm{diag}\left[\sqrt{2\gamma_a^{\mathrm{j}}}, \sqrt{2\gamma_a^{\mathrm{j}}}, \sqrt{2\gamma_b^{\mathrm{j}}}, \sqrt{2\gamma_b^{\mathrm{j}}},\right] \tag{2.243}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{c}} \equiv (\mathrm{i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_{\mathrm{c}})^{-1}(\mathbf{M}_{\mathrm{in}}\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{in}} + \mathbf{M}_{\mathrm{out}}\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{out}} + \mathbf{M}_{\mathrm{loss}}\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{loss}} + \tilde{\mathbf{y}}_{\triangle} + \tilde{\mathbf{y}}_{\epsilon}) \tag{2.244}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{trans}} \equiv \begin{bmatrix} \delta\tilde{A}^{\mathrm{trans}} \\ \delta\tilde{A}^{\mathrm{trans}\dagger} \\ \delta\tilde{B}^{\mathrm{trans}} \\ \delta\tilde{B}^{\mathrm{trans}\dagger} \end{bmatrix} \tag{2.245}$$

$$\mathbf{\Lambda} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \tag{2.246}$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{j}} = \mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{y}}_{\mathrm{j}} \tag{2.247}$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{trans}} = \mathbf{\Theta}_{\mathrm{in}}\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{in}} + \mathbf{\Theta}_{\mathrm{out}}\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{out}} + \mathbf{\Theta}_{\mathrm{loss}}\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{loss}} + \mathbf{\Theta}_{\triangle} + \mathbf{\Theta}_{\epsilon} \tag{2.248}$$

このとき, 直交位相振幅の分散は

$$\begin{aligned}\tilde{V}_i^{(\mathrm{A,trans})} =& |\Theta_{\mathrm{in}}^{(i1)}|^2\tilde{V}_1^{(\mathrm{A,in})} + |\Theta_{\mathrm{in}}^{(i2)}|^2\tilde{V}_2^{(\mathrm{A,in})} + |\Theta_{\mathrm{in}}^{(i3)}|^2\tilde{V}_1^{(\mathrm{B,in})}| + \Theta_{\mathrm{in}}^{(i4)}|^2\tilde{V}_2^{(\mathrm{B,in})} \\ &+ \sum_{m=1}^{4}\left[|\Theta_{\mathrm{loss}}^{(\mathrm{im})}|^2 + |\Theta_{\mathrm{out}}^{(im)}|^2\right] + |\Theta_{\triangle}^{(i)}|^2 + |\Theta_{\epsilon}^{(i)}|^2\end{aligned} \tag{2.249}$$

であり, 次に更なる仮定の下で分散がどうなるか見る。

$\boxed{\bar{\triangle}_a^{(\mathrm{d})} = \bar{\triangle}_b^{(\mathrm{d})} = 0, \quad \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^*, \quad \bar{a} = \bar{a}^*, \quad \bar{b} = \bar{b}^*, \quad \Omega \ll \gamma_a^{(\mathrm{tot})} \text{ の場合}}$

これらは, 位相整合が完全に一致し, シード光を増幅もしくは減衰するように相対位相を制御し, さらにキャビティの線幅よりも十分小さな周波数帯に対して成り立つ。ここでは $\hat{a}, \hat{b}$ を実数, $\bar{B}^{(\mathrm{in})} = -|\bar{B}^{(\mathrm{in})}|$ （つまりシード光は減衰）とする。 このとき, amplitude quadrature の Θ_{j} は

$$\Theta_{\mathrm{in}}^{(11)} = \frac{2\sqrt{\gamma_a^{(\mathrm{out})}\gamma_a^{(\mathrm{in})}}}{\gamma_a^{(\mathrm{tot})} - \bar{\epsilon}\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\mathrm{tot})}}}, \quad \Theta_{\mathrm{in}}^{(13)} = \frac{2\bar{\epsilon}\bar{a}\sqrt{\gamma_a^{(\mathrm{out})}\gamma_b^{(\mathrm{in})}}}{\gamma_b^{(\mathrm{tot})}\left(\gamma_a^{(\mathrm{tot})} - \bar{\epsilon}\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\mathrm{tot})}}\right)} \tag{2.250}$$

$$\Theta_{\mathrm{out}}^{(11)} = \frac{2\gamma_a^{(\mathrm{out})} - \gamma_a^{(\mathrm{tot})} + \bar{\epsilon}\bar{b} - \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\mathrm{tot})}}}{\gamma_a^{(\mathrm{tot})} - \bar{\epsilon}\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\mathrm{tot})}}}, \quad \Theta_{\mathrm{out}}^{(13)} = \frac{2\bar{\epsilon}\bar{a}\sqrt{\gamma_a^{(\mathrm{out})}\gamma_b^{(\mathrm{out})}}}{\gamma_b^{(\mathrm{tot})}\left(\gamma_a^{(\mathrm{tot})} - \bar{\epsilon}\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\mathrm{tot})}}\right)} \tag{2.251}$$

$$\Theta_{\mathrm{loss}}^{(11)} = \frac{2\sqrt{\gamma_a^{(\mathrm{out})}\gamma_a^{(\mathrm{loss})}}}{\gamma_a^{(\mathrm{tot})} - \bar{\epsilon}\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\mathrm{tot})}}}, \quad \Theta_{\mathrm{loss}}^{(13)} = \frac{2\bar{\epsilon}\bar{a}\sqrt{\gamma_a^{(\mathrm{out})}\gamma_b^{(\mathrm{loss})}}}{\gamma_b^{(\mathrm{tot})}\left(\gamma_a^{(\mathrm{tot})} - \bar{\epsilon}\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\mathrm{tot})}}\right)} \tag{2.252}$$

$$\mathrm{the\ \ others} = 0 \tag{2.253}$$

$$\Theta_{\triangle}^{(1)} = 0, \quad \Theta_{\epsilon}^{(1)} = \frac{\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{out})}}\bar{a}\left(2\bar{b} - \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\mathrm{tot})}}\right)\mathrm{Re}(\delta\tilde{\epsilon})}{\gamma_a^{(\mathrm{tot})} - \bar{\epsilon}\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\mathrm{tot})}}} \simeq 0 \tag{2.254}$$

となり, phase quadrature の $\Theta_{\rm j}$ は

$$\Theta_{\rm in}^{(22)} = \frac{2\sqrt{\gamma_a^{(\rm out)}\gamma_a^{(\rm in)}}}{\gamma_a^{(\rm tot)} + \bar{\epsilon}\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\rm tot)}}}, \quad \Theta_{\rm in}^{(24)} = \frac{2\bar{\epsilon}\bar{a}\sqrt{\gamma_a^{(\rm out)}\gamma_b^{(\rm in)}}}{\gamma_b^{(\rm tot)}\left(\gamma_a^{(\rm tot)} + \bar{\epsilon}\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\rm tot)}}\right)} \tag{2.255}$$

$$\Theta_{\rm out}^{(22)} = \frac{2\gamma_a^{(\rm out)} - \gamma_a^{(\rm tot)} - \bar{\epsilon}\bar{b} - \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\rm tot)}}}{\gamma_a^{(\rm tot)} + \bar{\epsilon}\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\rm tot)}}}, \quad \Theta_{\rm out}^{(24)} = \frac{2\bar{\epsilon}\bar{a}\sqrt{\gamma_a^{(\rm out)}\gamma_b^{(\rm out)}}}{\gamma_b^{(\rm tot)}\left(\gamma_a^{(\rm tot)} + \bar{\epsilon}\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\rm tot)}}\right)} \tag{2.256}$$

$$\Theta_{\rm loss}^{(22)} = \frac{2\sqrt{\gamma_a^{(\rm out)}\gamma_a^{(\rm loss)}}}{\gamma_a^{(\rm tot)} + \bar{\epsilon}\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\rm tot)}}}, \quad \Theta_{\rm loss}^{(24)} = \frac{2\bar{\epsilon}\bar{a}\sqrt{\gamma_a^{(\rm out)}\gamma_b^{(\rm loss)}}}{\gamma_b^{(\rm tot)}\left(\gamma_a^{(\rm tot)} + \bar{\epsilon}\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\rm tot)}}\right)} \tag{2.257}$$

$$\text{the others} = 0 \tag{2.258}$$

$$\Theta_{\triangle}^{(2)} = \frac{2\bar{a}\left(\delta\triangle_a^{(\rm d)} + \frac{\bar{\epsilon}\bar{b}}{\gamma_b^{(\rm tot)}}\delta\triangle_b^{(\rm tot)}\right)\sqrt{2\gamma_a^{(\rm out)}}}{\gamma_a^{(\rm tot)} - \bar{\epsilon}\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\rm tot)}}}, \quad \Theta_{\epsilon}^{(2)} = \frac{\sqrt{2\gamma_a^{(\rm out)}}\bar{a}\left(2\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\rm tot)}}\right){\rm Im}(\delta\tilde{\epsilon})}{\gamma_a^{(\rm tot)} + \bar{\epsilon}\bar{b} + \frac{\bar{\epsilon}^2\bar{a}^2}{\gamma_b^{(\rm tot)}}} \tag{2.259}$$

となる。

　$\triangle_{a,b}^{(c)} = 0, \triangle k = 0$ の場合, 参照図からも分かるようにそれぞれの揺らぎは amplitude quadrature には影響を与えないが phase quadrature は大きくする。また, ポンプ光の雑音は $\hat{a}^2$ と結合しているため, 真空場の入力に対しては無視でき, さらにその場合はシード光自体の雑音も真空場雑音となるので古典雑音に制限される事が無くなる。

　入力基本波が真空場のとき, 全ての周波数帯に渡り $\tilde{V}_1^{(\rm A,in)} = \tilde{V}_2^{(\rm A,in)} = 1$ となり, これから

$$\tilde{V}_{\pm}^{(\rm A,trans)} = 1 \pm 4\eta_{\rm escape}\frac{x}{(1 \mp x)^2} \tag{2.260}$$

が得られる。ここで, $\eta_{\rm escape} = \gamma_a^{(\rm out)}/\gamma_a^{(\rm tot)} = T_{\rm out}/(T_{\rm out} + Loss)$ でありエスケープ効率と呼ばれる。$T_{\rm out}$ はアウトプットミラーの透過率, L はキャビティ内のロス, $x = \sqrt{P/P_{\rm threshold}}$ は OPO の発振閾値で規格化したパワー, $V_{\pm}^{(\rm A,trans)}$ はスクイーズ, アンチスクイーズ状態の直交位相振幅の分散である。

A complicated case

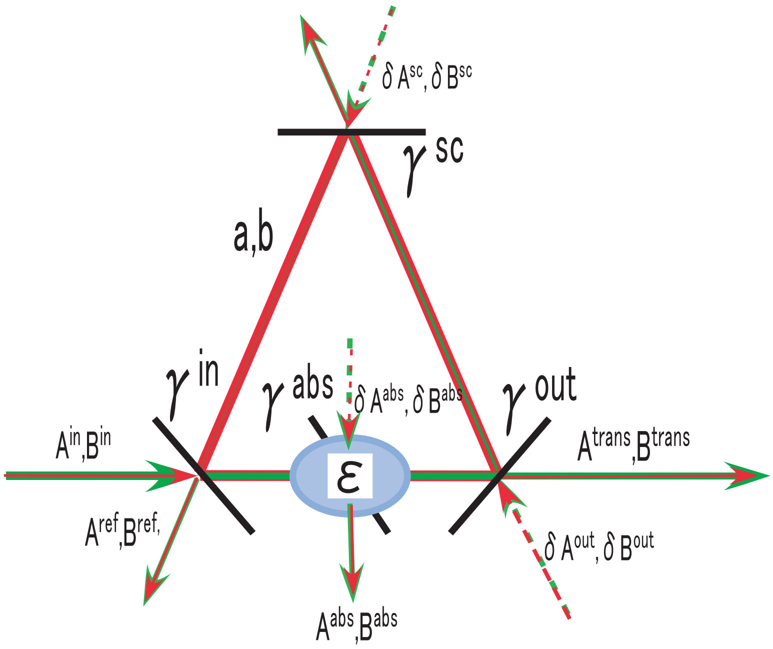


図 2.12: OPO の略図

この節ではフォトサーマル雑音と呼ばれる非線形結合定数とキャビティの共振周波数の揺らぎがもたらす雑音について説明する。これらの揺らぎはレーザー強度が揺らぐ事で結晶における温度揺らぎが生じる事に起因する。

結晶の温度揺らぎ

結晶が吸収するレーザーパワー $P_{\rm abs}$ を線形化すると

$$
\begin{aligned}
P_{\rm abs} &= \bar{P}_{\rm abs} + \delta P_{\rm abs} = \hbar\omega_a \hat{A}^\dagger_{\rm abs}\hat{A}_{\rm abs} + \hbar\omega_b \hat{B}^\dagger_{\rm abs}\hat{B}_{\rm abs} \\
&\simeq \hbar\omega_a[|\bar{A}|^2_{\rm abs} + |\bar{A}_{\rm abs}|(\delta\hat{A}^\dagger_{\rm abs} + \hbar\omega_b[|\bar{B}|^2_{\rm abs} + \delta\hat{B}_{\rm abs})] + |\bar{B}_{\rm abs}|(\delta\hat{B}^\dagger_{\rm abs} + \delta\hat{B}_{\rm abs})] \qquad (2.261)
\end{aligned}
$$

となり, ここで

$$\bar{A}_{\rm abs} = \sqrt{2\gamma_a^{\rm (abs)}}\bar{a} \qquad (2.262)$$

$$\bar{B}_{\rm abs} = \sqrt{2\gamma_b^{\rm (abs)}}\bar{b} \qquad (2.263)$$

$$\delta\hat{A}_{\rm abs} = \sqrt{2\gamma_a^{\rm (abs)}}\delta\hat{a} - \delta\hat{v}_a^{\rm (abs)} \qquad (2.264)$$

$$\delta\hat{B}_{\rm abs} = \sqrt{2\gamma_b^{\rm (abs)}}\delta\hat{b} - \delta\hat{v}_b^{\rm (abs)} \qquad (2.265)$$

である。フォトサーマル雑音の原因となる $\delta\hat{P}_{\mathrm{abs}}$ は

$$\begin{aligned}\delta\hat{P}_{\mathrm{abs}} &= \hbar\omega_a|\bar{A}_{\mathrm{abs}}|(\delta\hat{A}_{\mathrm{abs}} + \delta\bar{A}^{\dagger}_{\mathrm{abs}}) + \hbar\omega_b|\bar{B}_{\mathrm{abs}}|(\delta\hat{B}_{\mathrm{abs}} + \delta\bar{B}^{\dagger}_{\mathrm{abs}}) \\ &= \hbar\omega_a\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}}|\bar{a}|\left[\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}}(\delta\hat{a} + \delta\hat{a}^{\dagger}) - (\delta\hat{v}_a^{(\mathrm{abs})} + \delta\hat{v}_a^{(\mathrm{abs})})\right] \\ &\quad + \hbar\omega_b\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}}|\bar{b}|\left[\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}}(\delta\hat{b} + \delta\hat{b}^{\dagger}) - (\delta\hat{v}_b^{(\mathrm{abs})} + \delta\hat{v}_b^{(\mathrm{abs})})\right]\end{aligned} \tag{2.266}$$

である。結晶でのレーザーパワーの吸収が一様に起こると仮定すると, 結晶温度との関係は [21]

$$C\rho V\left(\delta\dot{T} + \frac{\delta T}{\tau_T}\right) = \delta P_{\mathrm{abs}} \tag{2.267}$$

となる。ここで, ρ は結晶の密度, V はモード体積, C は結晶の比熱, τ_T は熱緩和時間である。熱緩和時間は次の周波数で表される [22], [23]。

$$\tau_T = \frac{1}{\Omega_T} \simeq \frac{C\rho r_0^2}{\kappa} \tag{2.268}$$

ここで, κ は結晶の熱伝導率で r_0 は非線形結晶中のビーム半径である。(2.267) から, 結晶温度の揺らぎのフーリエ成分は

$$\delta\tilde{T} = \frac{\delta\tilde{P}_{\mathrm{abs}}}{(\mathrm{i}\Omega + \Omega_T)C\rho V} \tag{2.269}$$

となる。

非線形結合定数の揺らぎ

非線形結合定数は位相不整合パラメータの関数で

$$\epsilon = \kappa_0 L e^{\mathrm{i}(\triangle kL/2)}\mathrm{sinc}\left(\frac{\triangle kL}{2}\right) \tag{2.270}$$

と表され, ここで κ_0 は定数である。位相不整合パラメータは QPM の場合

$$\triangle k = \frac{2\pi}{\Lambda(T)} - \frac{2\pi}{\Lambda_0} \tag{2.271}$$

であり, Λ_0 は位相整合を満たす場合の格子間隔である。格子間隔は熱膨張率 α を用いて

$$\Lambda(T) = \Lambda_0 + \alpha L(T - T_0) \tag{2.272}$$

と表される。ここで, T_0 は位相整合を満たす場合の結晶温度で, T は結晶温度である。

結晶の温度が揺らぐと光屈折 (photorefractive：PR) 効果と熱膨張を介して非線形結合定数も揺らぐ。

$$
\begin{aligned}
\delta\epsilon &= \frac{\partial\epsilon}{\partial\triangle k}\delta\triangle k + \frac{\partial\epsilon}{\partial z}\delta z \\
&= \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\delta k}\frac{d\triangle k}{dT} + \frac{\partial\epsilon}{\partial z}\frac{dz}{dT}\right)\delta T \\
&= \left[\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\triangle k}\right)\left(\frac{-2\pi}{\Lambda^2}\right)\alpha L + \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial z}\right)\alpha L\right]\delta T
\end{aligned}
\tag{2.273}
$$

(2.270) から微係数は

$$
\frac{\partial\epsilon}{\partial\triangle k} = \epsilon\left(\frac{\mathrm{i}L}{2} - \frac{1}{\triangle k} + \frac{z}{2}\cot\frac{\triangle kL}{2}\right) \tag{2.274}
$$

$$
\frac{\partial\epsilon}{\partial z} = \epsilon\frac{L}{2}\left(\mathrm{i} + \cot\frac{\triangle kL}{2}\right) \tag{2.275}
$$

となる。

(2.269) を (2.273) に代入すると, (2.241) の $\tilde{\boldsymbol{y}}_\epsilon$ は

$$
\tilde{\boldsymbol{y}}_\epsilon = \mathbf{M}_\epsilon^{(\mathrm{c})}\tilde{\boldsymbol{y}}_c + \mathbf{M}_\epsilon^{(\mathrm{abs})}\tilde{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{abs}} \tag{2.276}
$$

となる。ここで,

$$
\mathbf{M}_\epsilon^{(\mathrm{c})} \equiv \Gamma\begin{bmatrix}
\bar a^*\bar b C_a^*\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & \bar a^*\bar b C_a^*\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & \bar a^*\bar b C_b^*\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}} & \bar a^*\bar b C_b^*\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}} \\
\bar a\bar b^* C_a^*\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & \bar a\bar b^* C_a^*\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & \bar a\bar b^* C_b^*\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}} & \bar a\bar b^* C_b^*\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}} \\
\frac{-\bar a^2 C_a}{2}\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & \frac{-\bar a^2 C_a}{2}\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & \frac{-\bar a^2 C_b}{2}\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}} & \frac{-\bar a^2 C_b}{2}\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}} \\
\frac{-\bar a^{*2} C_a^*}{2}\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & \frac{-\bar a^{*2} C_a^*}{2}\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & \frac{-\bar a^{*2} C_b^*}{2}\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}} & \frac{-\bar a^{*2} C_b^*}{2}\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}}
\end{bmatrix} \tag{2.277}
$$

$$
\mathbf{M}_\epsilon^{(\mathrm{abs})} \equiv \Gamma\begin{bmatrix}
-\bar a^*\bar b C_a^* & -\bar a^*\bar b C_a^* & -\bar a^*\bar b C_b^* & -\bar a^*\bar b C_b^* \\
-\bar a\bar b^* C_a & -\bar a\bar b^* C_a & -\bar a\bar b^* C_b & -\bar a\bar b^* C_b \\
\frac{1}{2}\bar a^2 C_a & \frac{1}{2}\bar a^2 C_a & \frac{1}{2}\bar a^2 C_b & \frac{1}{2}\bar a^2 C_b \\
\frac{1}{2}\bar a^{*2} C_a^* & \frac{1}{2}\bar a^{*2} C_a^* & \frac{1}{2}\bar a^{*2} C_b^* & \frac{1}{2}\bar a^{*2} C_b^*
\end{bmatrix} \tag{2.278}
$$

$$
\Gamma = \frac{1}{\mathrm{i}\Omega + \Omega_T} \tag{2.279}
$$

$$
C_a = \frac{\hbar\omega_a\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}}|\bar a|}{C\rho V}\delta\epsilon \tag{2.280}
$$

$$
C_a = \frac{\hbar\omega_b\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}}|\bar b|}{C\rho V}\delta\epsilon \tag{2.281}
$$

である。

光路長の揺らぎ

光屈折効果と熱膨張を介して光路長変動が生じる事で共振周波数からのずれ（detuning）が生じる [24]。

$$\delta\triangle_a^{(\mathrm{c})} = -\frac{2\pi c}{\lambda_a}\left(\frac{1}{n_a}\frac{dn_a}{dT}+\alpha_a\right)\delta T \tag{2.282}$$

$$\delta\triangle_b^{(\mathrm{c})} = -\frac{2\pi c}{\lambda_b}\left(\frac{1}{n_b}\frac{dn_b}{dT}+\alpha_b\right)\delta T \tag{2.283}$$

(2.269) を上式に代入すると, (2.241) の $\tilde{\boldsymbol{y}}_\triangle$ は

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_\triangle = \mathbf{M}_\triangle^{(\mathrm{c})}\tilde{\boldsymbol{y}}_c + \mathbf{M}_\triangle^{(\mathrm{abs})}\tilde{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{abs}} \tag{2.284}$$

となる。ここで

$$\mathbf{M}_\triangle^{(\mathrm{c})} \equiv \Gamma\begin{bmatrix} \mathrm{i}\bar{a}K_a\Pi_a\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & \mathrm{i}\bar{a}K_a\Pi_a\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & \mathrm{i}\bar{a}K_a\Pi_b\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}} & \mathrm{i}\bar{a}K_a\Pi_b\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}} \\ -\mathrm{i}\bar{a}^*K_a\Pi_a\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & -\mathrm{i}\bar{a}^*K_a\Pi_a\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & -\mathrm{i}\bar{a}^*K_a\Pi_b\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}} & -\mathrm{i}\bar{a}^*K_a\Pi_b\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}} \\ \mathrm{i}\bar{b}K_b\Pi_a\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & \mathrm{i}\bar{b}K_b\Pi_a\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & \mathrm{i}\bar{b}K_b\Pi_b\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}} & \mathrm{i}\bar{b}K_b\Pi_b\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}} \\ -\mathrm{i}\bar{b}K_b\Pi_a\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & -\mathrm{i}\bar{b}K_b\Pi_a\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}} & -\mathrm{i}\bar{b}K_b\Pi_b\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}} & -\mathrm{i}\bar{b}K_b\Pi_b\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}} \end{bmatrix} \tag{2.285}$$

$$\mathbf{M}_\triangle^{(\mathrm{abs})} \equiv \Gamma\begin{bmatrix} -\mathrm{i}\bar{a}K_a\Pi_a & -\mathrm{i}\bar{a}K_a\Pi_a & -\mathrm{i}\bar{a}K_a\Pi_b & -\mathrm{i}\bar{a}K_a\Pi_b \\ \mathrm{i}\bar{a}^*K_a\Pi_a & \mathrm{i}\bar{a}^*K_a\Pi_a & \mathrm{i}\bar{a}^*K_a\Pi_b & \mathrm{i}\bar{a}^*K_a\Pi_b \\ -\mathrm{i}\bar{b}K_b\Pi_a & -\mathrm{i}\bar{b}K_b\Pi_a & -\mathrm{i}\bar{b}K_b\Pi_b & -\mathrm{i}\bar{b}K_b\Pi_b \\ \mathrm{i}\bar{b}^*K_b\Pi_a & \mathrm{i}\bar{b}^*K_b\Pi_a & \mathrm{i}\bar{b}^*K_b\Pi_b & \mathrm{i}\bar{b}^*K_b\Pi_b \end{bmatrix} \tag{2.286}$$

$$\Pi_a = \frac{\hbar\omega_a\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}}|\bar{a}|}{C\rho V} \tag{2.287}$$

$$\Pi_b = \frac{\hbar\omega_b\sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}}|\bar{b}|}{C\rho V} \tag{2.288}$$

$$\frac{2\pi c}{\lambda_a}\left(\frac{1}{n_a}\frac{dn_a}{dT}+\alpha_a\right) \tag{2.289}$$

$$\frac{2\pi c}{\lambda_b}\left(\frac{1}{n_b}\frac{dn_b}{dT}+\alpha_b\right) \tag{2.290}$$

である。

フォトサーマル雑音を考慮に入れる場合は, (2.244) に (2.276), (2.284) を代入すれば良い。その結果

$$\left(\mathrm{i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_\mathrm{c} - \mathbf{M}_\epsilon^{(c)} - \mathbf{M}_\omega^{(c)}\right)\tilde{y}_\mathrm{c} = \mathbf{M}_\mathrm{in}\tilde{y}_\mathrm{in} + \mathbf{M}_\mathrm{out}\tilde{y}_\mathrm{out} + \mathbf{M}_\mathrm{loss}\tilde{y}_\mathrm{loss} + \left(\mathbf{M}_\mathrm{abs} + \mathbf{M}_\epsilon^{(\mathrm{abs})} + \mathbf{M}_\triangle^{(\mathrm{abs})}\right)\tilde{y}_\mathrm{abs} \tag{2.291}$$

$$\tilde{y}_{\mathrm{c}} = \left(\mathrm{i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_{\mathrm{c}} - \mathbf{M}_{\epsilon}^{(c)} - \mathbf{M}_{\omega}^{(c)}\right)^{-1}\left[\mathbf{M}_{\mathrm{in}}\tilde{y}_{\mathrm{in}} + \mathbf{M}_{\mathrm{out}}\tilde{y}_{\mathrm{out}} + \mathbf{M}_{\mathrm{loss}}\tilde{y}_{\mathrm{loss}} + (\mathbf{M}_{\mathrm{abs}} + \mathbf{M}_{\epsilon}^{(\mathrm{abs})} + \mathbf{M}_{\triangle}^{(\mathrm{abs})})\tilde{y}_{\mathrm{abs}}\right] \tag{2.292}$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{abs}} = \mathrm{diag}\left[\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}}, \sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{abs})}}, \sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}}, \sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{abs})}}\right] \tag{2.293}$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{trans}} = \mathbf{\Theta}_{\mathrm{in}}\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{in}} + \mathbf{\Theta}_{\mathrm{out}}\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{out}} + \mathbf{\Theta}_{\mathrm{loss}}\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{loss}} + \mathbf{\Theta}_{\mathrm{abs}}\tilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{abs}} \tag{2.294}$$

と求まる。このとき

$$\mathbf{\Theta}_{\mathrm{in}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{M}_{\mathrm{out}}\left(\mathrm{i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_{\mathrm{c}} - \mathbf{M}_{\epsilon}^{(\mathrm{c})} - \mathbf{M}_{\triangle}^{(\mathrm{c})}\right)^{-1}\mathbf{M}_{\mathrm{in}}\mathbf{\Lambda}^{-1} \tag{2.295}$$

$$\mathbf{\Theta}_{\mathrm{out}} = \mathbf{\Lambda}\left[\mathbf{M}_{\mathrm{out}}\left(\mathrm{i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_{\mathrm{c}} - \mathbf{M}_{\epsilon}^{(\mathrm{c})} - \mathbf{M}_{\triangle}^{(\mathrm{c})}\right)^{-1}\mathbf{M}_{\mathrm{out}} - \mathbf{I}\right]\mathbf{\Lambda}^{-1} \tag{2.296}$$

$$\mathbf{\Theta}_{\mathrm{loss}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{M}_{\mathrm{out}}\left(\mathrm{i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_{\mathrm{c}} - \mathbf{M}_{\epsilon}^{(\mathrm{c})} - \mathbf{M}_{\triangle}^{(\mathrm{c})}\right)^{-1}\mathbf{M}_{\mathrm{loss}}\mathbf{\Lambda}^{-1} \tag{2.297}$$

$$\mathbf{\Theta}_{\mathrm{abs}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{M}_{\mathrm{out}}\left(\mathrm{i}\Omega\mathbf{I} - \mathbf{M}_{\mathrm{c}} - \mathbf{M}_{\epsilon}^{(\mathrm{c})} - \mathbf{M}_{\triangle}^{(\mathrm{c})}\right)^{-1}\left(\mathbf{M}_{\mathrm{abs}} + \mathbf{M}_{\epsilon}^{(\mathrm{abs})} + \mathbf{M}_{\triangle}^{(\mathrm{abs})}\right)\mathbf{\Lambda}^{-1} \tag{2.298}$$

である。マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いて (2.294) を解析することで実験装置のパラメータを決めた。それに関しては第 4.1 節で述べる。

2.3.7　パラメトリック増幅

最後に DOPO のパラメトリックゲインを導出する。線形化した運動方程式から $\bar{a}, \bar{a}^*$ は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_a^{(\mathrm{tot})} & \epsilon\bar{b} \\ \epsilon\bar{b}^* & -\gamma_a^{(\mathrm{tot})} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{a}^* \end{bmatrix} + \sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{in})}}\begin{bmatrix} \bar{A}^{(\mathrm{in})} \\ \bar{A}^{(\mathrm{in})} \end{bmatrix} \tag{2.299}$$

である。$q = \epsilon\bar{b}$ とするとパラメトリックゲインは $q = 0$ に対する $q \neq 0$ の場合の基本波の出力光強度の比で表される。

$$G_{\mathrm{para}} = \frac{P_{\mathrm{trans}}(q)}{P_{\mathrm{trans}}(0)} = \frac{[(\gamma_a^{(\mathrm{tot})})^2 + |q|^2 + 2|q|\gamma_a^{(\mathrm{tot})}\cos\theta]\gamma_a^{(\mathrm{tot})2}}{(\gamma_a^{(\mathrm{tot})2} - |q|^2)^2} \tag{2.300}$$

ここで, $q = |q|e^{\mathrm{i}\theta}$ とした。θ はシード光とポンプ光の間の相対位相で, シード光の振幅を実数とした。これを, 発振閾値で規格化した $x = q/\gamma_a^{(\mathrm{tot})}$ を代入し

$$G_{\mathrm{para}} = \frac{1 + x^2 + 2x\cos\theta}{(1 - x^2)^2} \tag{2.301}$$

となる。(2.301) から, パラメトリックゲインは位相依存の関数で, シード光を増幅あるいは減衰させる事が出来る。例えば, $\theta = 0$ の場合は $G_{\mathrm{para}} = 1/(1-x)^2$ でありパラメトリック増幅が起こり, $\theta = \pi$ の場合は $G_{\mathrm{para}} = 1/(1+x)^2$ でありパラメトリック減衰が起こる。

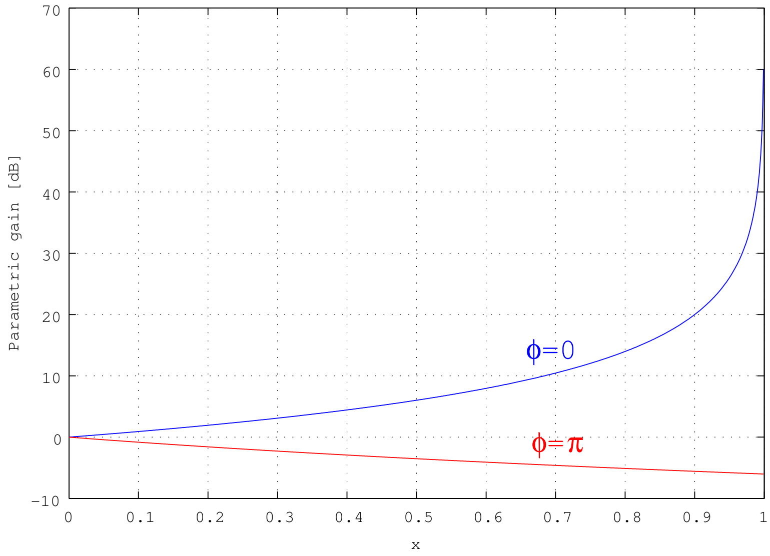


図 2.13: パラメトリックゲイン

2.4　第二次高調波生成

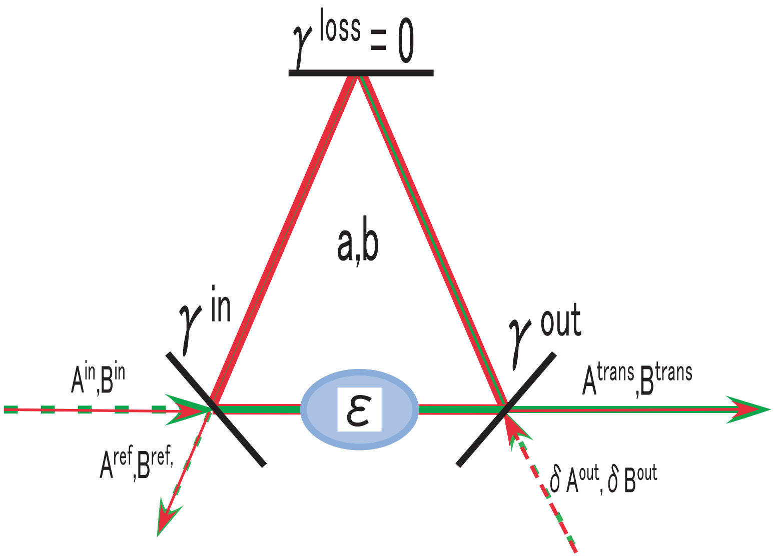


図 2.14: SHG の略図

図 2.14 のようなモデルの SHG を考える。角周波数 ω 基本波がポンプ光として SHG に入力していて, キャビティは基本波だけ共振している。このとき, ハミルトニアンは DOPO の場合同様

$$\mathscr{H}_{\text{int}} = \frac{i\hbar\epsilon}{2}(\hat{a}^{\dagger 2}\hat{b} - \hat{a}^2\hat{b}^\dagger) \tag{2.302}$$

であり, OPO の場合とは違い $\epsilon\bar{a}^2/2 \neq 0$ に注意すると線形化した運動方程式から

$$\bar{a} = \frac{\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{in})}}\bar{A}^{(\mathrm{in})}}{|\gamma_a^{(\mathrm{tot})} + \acute{\gamma} - \mathrm{i}\triangle_a^{(\mathrm{d})}|^2} \tag{2.303}$$

$$\acute{\gamma} = \mu|\bar{a}|^2, \qquad \mu = \frac{\epsilon^2}{2\gamma_b^{(\mathrm{tot})}} \tag{2.304}$$

$$\bar{b} = -\frac{\epsilon}{2\gamma_b^{(\mathrm{tot})}}|\bar{a}|^2 + \frac{\sqrt{2}\bar{B}^{(\mathrm{in})}}{\sqrt{\gamma_b^{(\mathrm{tot})}}} \tag{2.305}$$

が得られる。ここで, $\triangle_b^{(\mathrm{d})} = 0$ とした。境界条件 (2.181) から

$$\bar{B}^{(\mathrm{out})} = \sqrt{\mu}|\bar{a}|^2 \tag{2.306}$$

となるので, そのパワーは

$$P_b^{(\mathrm{out})} = \hbar\omega_b|\bar{B}^{(\mathrm{out})}|^2 \tag{2.307}$$

$$= \hbar 2\omega_a\mu|\hat{a}|^2|\bar{a}|^2 \tag{2.308}$$

$$= 4\hbar\omega_a|\bar{A}^{(\mathrm{in})}|^2\frac{\acute{\gamma}\gamma_a^{(\mathrm{in})}}{|\gamma_a^{(\mathrm{tot})} + \acute{\gamma} - \mathrm{i}\triangle_a^{(\mathrm{d})}|^2} \tag{2.309}$$

となる。従って, 変換効率は

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{P_b^{(\mathrm{out})}}{P_a^{(\mathrm{in})}} \\ &= \frac{4\gamma_a^{(\mathrm{in})}\acute{\gamma}}{|\gamma_a^{(\mathrm{tot})} + \acute{\gamma} - \mathrm{i}\triangle_a^{(\mathrm{d})}|^2}\end{aligned} \tag{2.310}$$

となり, 反射率は

$$\begin{aligned}\acute{\eta} &= \frac{P_a^{(\mathrm{ref})}}{P_a^{(\mathrm{in})}} \\ &= 1 - \frac{4\gamma_a^{(\mathrm{in})}(\acute{\gamma} + |\gamma_a^{(\mathrm{tot})} - \gamma_a^{(\mathrm{in})}|)}{|\gamma_a^{(\mathrm{tot})} + \acute{\gamma} - \mathrm{i}\triangle_a^{(\mathrm{d})}|^2} \\ &= 1 - \eta - \frac{4\gamma_a^{(\mathrm{in})}(\gamma_a^{(\mathrm{tot})} - \gamma_a^{(\mathrm{in})})}{|\gamma_a^{(\mathrm{tot})} + \acute{\gamma} - \mathrm{i}\triangle_a^{(\mathrm{d})}|^2}\end{aligned} \tag{2.311}$$

となる。

次に, $\triangle_a^{(\mathrm{a})} = 0$ とすると変換効率が最大となる条件とそのときのポンプ光パワーは

$$\eta_{\max} = \frac{\gamma_a^{(\mathrm{in})}}{\gamma_a^{(\mathrm{tot})}}, \quad \text{for } P_a^{(\mathrm{in})\max} = 2\hbar\omega_a\frac{(\gamma_a^{(\mathrm{tot})})^3}{\mu\gamma_a^{(\mathrm{in})}} \tag{2.312}$$

である。

反射光強度が 0 のときをインピーダンス整合という。その条件は

$$\acute{\gamma}^{\mathrm{imp}} = 2\gamma_a^{(\mathrm{in})} - \gamma_a^{(\mathrm{tot})}, \quad \text{for } \gamma_a^{(\mathrm{in})} \geq \frac{\gamma_a^{(\mathrm{tot})}}{2} \tag{2.313}$$

であり, そのときのポンプ光パワーは

$$P_a^{(\mathrm{in\ imp})} = 2\hbar\omega_a \frac{\gamma_a^{(\mathrm{in})}(2\gamma_a^{(\mathrm{in})} - \gamma_a^{(\mathrm{tot})})}{\mu}, \quad \text{for } \gamma_a^{(\mathrm{in})} \geq \frac{\gamma_a^{(\mathrm{tot})}}{2} \tag{2.314}$$

となる。

2.4.1 SHG によるスクイージングの限界

この節では, 図 2.14 のように入力光雑音のみを考慮に入れた理想的な場合の SHG からのスクイージングに関して述べる。運動方程式は

$$\dot{\hat{a}} = (\mathrm{i}\triangle_a^{(d)} - \gamma_a^{(\mathrm{tot})})\hat{a} + \epsilon\hat{a}^\dagger\hat{b} + \sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{c})}}\hat{A}^{(\mathrm{in})} + \sqrt{2\gamma^{(\mathrm{out})}}\hat{A}^{(\mathrm{out})} \tag{2.315}$$

$$\dot{\hat{b}} = (\mathrm{i}\triangle_b^{(d)} - \gamma_b^{(\mathrm{tot})})\hat{b} - \frac{\epsilon^*\hat{a}^2}{2} + \sqrt{2\gamma_b^{(\mathrm{tot})}}\hat{B}^{(\mathrm{in})} \tag{2.316}$$

となり, 定常解として

$$\bar{b} = -\frac{\epsilon}{2\gamma_b^{(\mathrm{tot})}}|\bar{a}|^2 + \sqrt{\frac{2}{\gamma_b^{(\mathrm{tot})}}}\bar{B}^{(\mathrm{in})} \tag{2.317}$$

が得られる。これを (2.315) に代入して

$$\dot{\hat{a}} = (\mathrm{i}\triangle_a^{(\mathrm{d})} - \gamma_a^{(\mathrm{tot})})\bar{a} - \mu|\bar{a}|^2\bar{a} + 2\sqrt{\mu}\bar{B}^{(\mathrm{in})}\bar{a}^* + \sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{c})}\hat{A}^{(\mathrm{in})}} + \sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{loss})}}\hat{A}^{(\mathrm{in})} \tag{2.318}$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{\hat{a}} =& (\mathrm{i}\triangle_a^{(\mathrm{d})} - \gamma_a^{(\mathrm{tot})})\delta\hat{a} - \mu(2|\bar{a}|^2\delta\hat{a} + \bar{a}^2\delta\hat{a}^\dagger) + 2\sqrt{\mu}(\hat{B}^{(\mathrm{in})}\delta\hat{a}^\dagger + \bar{a}^*\delta\hat{B}^{(\mathrm{in})}) \\ &+ \sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{in})}} + \sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{loss})}}\hat{A}^{(\mathrm{in})} \end{aligned} \tag{2.319}$$

が得られる。直交位相振幅の揺らぎは

$$\begin{aligned} \delta\dot{\hat{X}}_{1,2}^{(\mathrm{a})} =& -\left(\gamma_a^{(\mathrm{tot})} \pm 2\mu|\bar{a}|^2 + \frac{\mu}{2}[\bar{a}^2 + \bar{a}^{*2}]\delta\hat{X}_{1,2} \mp \left(\triangle_a^{(\mathrm{tot})} \mp \mathrm{i}\frac{\mu}{2}\right)[\bar{a}^2 - \bar{a}^{*2}]\right)\delta\hat{X}_{2,1} \\ &+ \sqrt{\mu}(\bar{a} + \bar{a}^*)\delta\hat{X}_{1,2}^{(\mathrm{B,in})} + \mathrm{i}\sqrt{\mu}(\bar{a} - \bar{a}^*)\delta\hat{X}_{2,1}^{(\mathrm{B,in})} \\ &+ \sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{c})}}\delta\hat{X}_{1,2}^{(\mathrm{A,in})} + \sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{loss})}}\delta\hat{X}_{1,2}^{(\mathrm{A,out})} \end{aligned} \tag{2.320}$$

となり, そのフーリエ成分は

$$\delta\tilde{X}^{(\mathrm{a})}_{1,2}(\Omega) = \Big(\sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{c})}}\delta\tilde{X}^{(\mathrm{A,in})}_{1,2} + \sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{loss})}}\delta\tilde{X}^{(\mathrm{A,out})}_{1,2} + \sqrt{mu}(\bar{a}+\bar{a}^*)\delta\tilde{X}^{(\mathrm{B,in})}_{1,2}$$
$$+\,\mathrm{i}\sqrt{\mu}(\bar{a}-\bar{a}^*)\delta\tilde{X}^{(\mathrm{B,in})}_{2,1} \mp \left(\triangle_a^{(\mathrm{d})} \mp \mathrm{i}\frac{\mu}{2}\right)[\bar{a}^2-\bar{a}^{*2}]\delta\tilde{X}^{(\mathrm{a})}_{2,1}\Big)$$
$$\left(\gamma_a^{\mathrm{tot}} + 2\mu|\bar{a}|^2 + \frac{\mu(\bar{a}^2+\bar{a}^{*2})}{2} - \mathrm{i}\Omega\right)^{-1} \tag{2.321}$$

となる。境界条件は [20]

$$\hat{A}^{(\mathrm{out})} = \sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{c})}}\hat{a} - \hat{A}^{(\mathrm{in})} \tag{2.322}$$
$$\hat{B}^{(\mathrm{out})} = \sqrt{\mu}\hat{a} - \hat{B}^{(\mathrm{in})} \tag{2.323}$$

であり, 従って直交位相振幅の揺らぎ成分は

$$\delta\tilde{X}_i^{(\mathrm{A,out})} = \sqrt{2\gamma_a^{(\mathrm{in})}}\tilde{X}_i^{(\mathrm{a})} - \tilde{X}_i^{(\mathrm{A,in})} \tag{2.324}$$
$$\delta\tilde{X}_i^{(\mathrm{B,out})} = \sqrt{\mu}\left[\delta\tilde{X}_i(\bar{a}+\bar{a}^*) \pm \mathrm{i}\delta\tilde{X}_i(\bar{a}-\bar{a}^*)\right] - \delta\tilde{X}_i^{(\mathrm{B,in})} \tag{2.325}$$

であるので, その分散は

$$\tilde{V}_{X_i}^{(\mathrm{A,ref})}(\Omega) = 1 - 4\gamma_a^{(\mathrm{c})}\frac{\left(V_{X_i}^{(\mathrm{A,in})}-1\right)\left(\gamma_a^{(\mathrm{loss})}+k\mu\bar{a}^2\right) \pm \mu\bar{a}^2}{(\gamma_a^{(\mathrm{tot})}+k\mu\bar{a}^2)^2+\Omega^2} \tag{2.326}$$
$$\tilde{V}_{X_i}^{(\mathrm{B,trans})}(\Omega) = 1 + 8\mu\bar{a}^2\frac{\gamma_a^{(\mathrm{c})}\left(V_{X_i}^{(\mathrm{A,in})}-1\right) \mp \mu\bar{a}^2}{(\gamma_a^{(\mathrm{tot})}+k\mu\bar{a}^2)^2+\Omega^2} \tag{2.327}$$

となる。ここで, $k = 3, 1\ \text{ for }\ i = 1, 2$ である。

(2.332), (2.333) から分かるように, 基本波と第二次高調波は共にスクイーズ状態を生成する事ができる。理想的な場合 ($\gamma_a^{(\mathrm{c})} = \gamma_a^{(\mathrm{tot})}, V_{X_i}^{(\mathrm{in,A})} = 1$) を考える。高周波領域 $\Omega \to \infty$ では

$$\tilde{V}_{X_1}^{(\mathrm{A,out})}(\infty) = \tilde{V}_{X_2}^{(\mathrm{A,out})}(\infty) = 1 \tag{2.328}$$
$$\tilde{V}_{X_1}^{(\mathrm{B,out})}(\infty) = \tilde{V}_{X_2}^{(\mathrm{B,out})}(\infty) = 1 \tag{2.329}$$

のように, 基本波と第二次高調波は共に真空場雑音と同様になる。第二次高調波が最もスクイージングされるのは $\Omega = 0$ において最大の非線形相互作用が生じるとき（$\mu\bar{a}^2 \to \infty$）である。このとき直交位相振幅の分散はそれぞれ

$$\tilde{V}_{X_1}^{(\mathrm{A,out})}(0) = \tilde{V}_{X_2}^{(\mathrm{A,out})}(0) = 1 \tag{2.330}$$
$$\tilde{V}_{X_1}^{(\mathrm{B,out})}(0) = \frac{1}{9}, \quad \tilde{V}_{X_2}^{(\mathrm{B,out})}(0) = 9 \tag{2.331}$$

となる。基本波が最もスクイージングされるのは $\Omega = 0$ においてインピーダンス整合が満たされたときである（つまりスクイーズド真空場が生成される）。ロスの無い場合, これは

(2.313) から $\mu\bar{a}^2 = \gamma_a^{(\mathrm{tot})}$ のような非線形相互作用が生じるときである。このとき直交位相振幅の分散はそれぞれ

$$\tilde{V}_{X_1}^{(\mathrm{A,out})}(0) = \frac{2}{3}, \quad \tilde{V}_{X_2}^{(\mathrm{A,out})}(0) = \frac{7}{4} \tag{2.332}$$

$$\tilde{V}_{X_1}^{(\mathrm{B,out})}(0) = \frac{7}{9}, \quad \tilde{V}_{X_2}^{(\mathrm{B,out})}(0) = \frac{3}{2} \tag{2.333}$$

となり, 第二次高調波もスクイーズされている事が分かる。

2.5　光測定

光検出器を用いた測定では, 次のような光電流 $I(t)$ を通じて入射光強度 $P(t)$ を測定する。

$$I(t) = \eta_{\mathrm{PD}} \frac{eP(t)}{h\nu} \tag{2.334}$$

ここで, η_{PD} は量子効率である。電磁場の強度 $P(t)$ は単位時間当たりの平均光子数に比例し

$$P(t) = h\nu\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle \tag{2.335}$$

である。（ここで $\hat{a}$ は driving field の消滅演算子で単位は $\sqrt{\mathrm{photon}}/s$）光電流と, 入射光強度を線形化すると

$$I(t) = \bar{i} + \delta I(t) \tag{2.336}$$

$$P(t) = \bar{P} + \delta P(t) \tag{2.337}$$

となり, (2.335), (2.337) から

$$\bar{P} = h\nu\bar{a}^2 \tag{2.338}$$

$$\delta P(t) = h\nu(\bar{a}\delta\hat{X}_1 + \delta\hat{a}^\dagger\delta\hat{a}) \simeq h\nu\bar{a}\delta\hat{X}_1 \tag{2.339}$$

が導かれる。従って, 光電流の定常成分, 非定常成分はそれぞれ

$$\bar{I} = \eta_{\mathrm{PD}} \frac{e\bar{P}}{h\nu} = e\bar{a}^2 \tag{2.340}$$

$$\delta I(t) = \eta_{\mathrm{PD}} \frac{e\delta P(t)}{h\nu} = e\bar{a}\delta\hat{X}_1 \tag{2.341}$$

となり, 光電流の分散は

$$\begin{aligned} V^{(i)}(t) &= \langle|\delta i(t)|^2\rangle - \langle\delta i(t)\rangle^2 \\ &= (e\bar{a})^2 V\langle|\delta X_1|^2\rangle \end{aligned} \tag{2.342}$$

となる。つまり, 電磁場の直接測定からは amplitude quadrature 成分のみが測定でき, 位相情報を得ることはできない。

2.5.1　ホモダイン測定

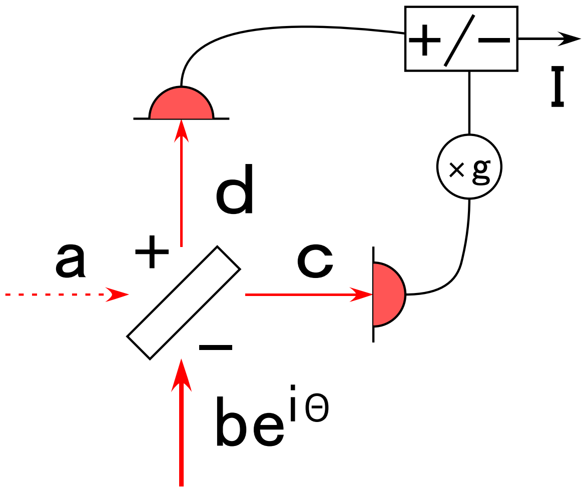


図 2.15: ホモダイン測定の略図。小さな信号 $\hat{a}$ (もしくは真空場やスクイーズド真空場) と LO 光をビームスプリッターに入力している。

図 2.15 のように, 測定したい信号 $\hat{a}$ とそれと同じ周波数の LO 光 $\hat{b}$ をビームスプリッターに入力し, その差を測定する。ここで, $\hat{a}$ は実数とし, $\hat{a}, \hat{b}$ の相対位相を θ とし, $\hat{a} \ll \hat{b}$ である。まず, ビームスプリッターによる変換行列を

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-R} & \sqrt{R} \\ \sqrt{R} & -\sqrt{1-R} \end{bmatrix} \tag{2.343}$$

とすると（エネルギー保存の要請から 2 行 2 列成分の符号が負となる。これは物理的には固定端反射が起こっている。）出力 $\hat{c}, \hat{d}$ は

$$\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-R} & \sqrt{R} \\ \sqrt{R} & -\sqrt{1-R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b}e^{\mathrm{i}\theta} \end{bmatrix} \tag{2.344}$$

である。この時, 出力の数演算子は

$$\hat{c}^\dagger \hat{c} = (1-R)\hat{a}^\dagger \hat{a} + R\hat{b}^\dagger \hat{b} + \sqrt{R(1-R)}(\hat{a}^\dagger \hat{b}e^{\mathrm{i}\theta} + \hat{b}^\dagger \hat{a}e^{-\mathrm{i}\theta}) \tag{2.345}$$

$$\hat{d}^\dagger \hat{d} = R\hat{a}^\dagger \hat{a} + (1-R)\hat{b}^\dagger \hat{b} - \sqrt{R(1-R)}(\hat{a}^\dagger \hat{b}e^{\mathrm{i}\theta} + \hat{b}^\dagger \hat{a}e^{-\mathrm{i}\theta}) \tag{2.346}$$

となり, 測定する出力光の差に比例する成分として

$$\begin{aligned} i_- &= \hat{c}^\dagger \hat{c} - g\hat{d}^\dagger \hat{d} \\ &= [(1-R) - gR]\hat{a}^\dagger \hat{a} + [R - g(1-R)]\hat{b}^\dagger \hat{b} + \sqrt{R(1-R)}(1+g)(\hat{a}^\dagger \hat{b}e^{\mathrm{i}\theta} + \hat{b}^\dagger \hat{a}e^{-\mathrm{i}\theta}) \end{aligned} \tag{2.347}$$

が得られる。これを線形化すると

$$
\begin{aligned}
i_- \simeq &[(1-R)-gR](\bar{a}^2+\bar{a}\delta\bar{X}_1^{(a)})+[R-g(1-R)](\bar{b}^2+\bar{b}\delta\bar{X}_1^{(b)}) \\
&+\sqrt{R(1-R)}(1+g)\Big(2\bar{a}\bar{b}\cos\theta+\bar{a}(\delta\bar{X}_1^{(b)}\cos\theta-\delta\bar{X}_2^{(b)}\sin\theta) \\
&+\bar{b}(\delta\bar{X}_1^{(a)}\cos\theta+\delta\bar{X}_2^{(a)}\sin\theta)\Big) \\
\simeq &\ [R-g(1-R)](\bar{b}^2+\bar{b}\delta\bar{X}_1^{(b)})+\sqrt{R(1-R)}(1+g)\Big(2\bar{a}\bar{b}\cos\theta \\
&+\bar{b}(\delta\bar{X}_1^{(a)}\cos\theta+\delta\bar{X}_2^{(a)}\sin\theta)\Big)
\end{aligned}
\tag{2.348}
$$

となる。$\hat{a} \ll \hat{b}$ であり, 同相信号除去が最大となるように $g=R/(1-R)$ とすると

$$
i_- \simeq \sqrt{\frac{R}{1-R}}\left(2\bar{a}\bar{b}\cos\theta+\bar{b}(\delta\bar{X}_1^{(a)}\cos\theta+\delta\bar{X}_2^{(a)}\sin\theta)\right), \qquad \text{for} \quad g=\frac{R}{1-R} \tag{2.349}
$$

2.5.2　パワースペクトル

　ホモダイン測定により得られる直交位相振幅の揺らぎ成分はスペクトルアナライザーを用いてパワースペクトル密度 $S(\omega)$ として観測される。揺らぎ $\delta(x)$ のパワースペクトル密度は自己相関関数 $G(\tau)$ のフーリエ変換で定義される [26]。

$$
S(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_T G(\tau)e^{-\mathrm{i}\omega\tau}d\tau \tag{2.350}
$$

$$
G(\tau)=\langle\delta x(t)\delta x(t+\tau)\rangle \tag{2.351}
$$

ここで, T は測定時間であり $1/T$ は測定したい周波数よりも十分大きいとする。2 つの周波数の相関関数（two-frequency correlation function）とパワースペクトル密度の間には次の関係がある。

$$
\begin{aligned}
\langle\delta\tilde{X}(\omega_1)\delta\tilde{X}^\dagger(\omega_2)\rangle &= \left\langle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta X(t_1)e^{-\mathrm{i}\omega_1 t_1}\delta X(t_2)e^{\mathrm{i}\omega_2 t_2}dt_1dt_2\right\rangle \\
&= \left\langle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta X(t_2+\tau)\delta X(t_2)e^{-\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2)t_2}e^{-\mathrm{i}\omega_1\tau}dt_2d\tau\right\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\delta(\omega_1-\omega_2)\int_{-\infty}^{\infty}\langle\delta X(t_2+\tau)\delta X(t_2)\rangle e^{\mathrm{i}\omega_2\tau}d\tau \\
&= \delta(\omega_1-\omega_2)S(\omega_1)
\end{aligned}
\tag{2.352}
$$

実験では, 周波数 ω_2 のパワースペクトル密度はあるバンド幅 B に渡って測定され, この幅を分解能帯域幅（resolution bandwidth：RBW）と呼ぶ。RBW はパワースペクトル密度が一定

とみなせる程度の大きさで測定を行う事で正確な測定となる。つまり

$$
\begin{aligned}
S_B(\omega_2) &= \int_{\omega-B/2}^{\omega+B/2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle \delta\tilde{X}(\omega_1)\delta\tilde{X}^\dagger(\omega_2)\right\rangle d\omega_1 d\omega_2 \\
&= \int_{\omega-B/2}^{\omega+B/2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega_1-\omega_2)S(\omega_1)d\omega_1 d\omega_2 \\
&= S(\omega_2)\int_{\omega-B/2}^{\omega+B/2} d\omega_2 \\
&= S(\omega_2)B = \left\langle \left|\delta\tilde{X}(\omega_2)\right|^2\right\rangle B
\end{aligned} \tag{2.353}
$$

である。これから

$$
V(\omega) = \frac{S_B(\omega)}{B} = \left\langle \left|\delta\tilde{X}(\omega)\right|^2\right\rangle \tag{2.354}
$$

が得られる。

2.6　Locking Techniques

この節では実験で用いた制御法に関して説明する。実験では 9 つの制御ループを組み立てる必要がある。まずは, キャビティ長の制御であり, これには Pound-Drever-Hall 法 (PDH) [27] を用いた。キャビティは SHG, MC, OPO の 3 つがあり, SHG 及び OPO ではミラーに取り付けた PZT にフィードバックした。MC ではエラー信号の内低周波成分を光源の温調に, 比較的高周波な成分を光源の PZT にフィードバックした。次に, スクイーズアングルとホモダインアングルの制御ではコヒーレントコントロール [28] により制御を行う。

この節で説明を行うのは以上の 2 つの制御法に関してであるが, この他に非線形光学結晶の温度制御, 第 4.2.1 節で述べるように 2 台のレーザー間の周波数同期をとるための Phase Locking Loop(PLL), 光源の強度安定化を行った。

2.6.1　PDH Techniques

キャビティ長の制御には PDH を用いる。この方法では 位相変調をかけたレーザー光をキャビティに入射させ, 共振点からずれている場合キャリアが被る位相変化に伴い位相変調が振幅変調へと変わる事を利用してエラー信号を得る。ここではそのエラー信号を導く。

位相変調をかけた光 (2.150) の反射光強度を考える。そのために 2.3.5 節で得た FP キャビティの反射率を次のように分かりやすく記述し直すところから始める。

キャビティの振幅反射率 (2.185) は共振点近傍では

$$
\frac{\delta\Delta}{\nu_{\mathrm{fsr}}} = 2\pi N + \frac{\delta\Delta}{\mu_{\mathrm{fsr}}} \tag{2.355}
$$

と書けるので,

$$r(\Delta)=\frac{2\gamma_{\rm in}-\gamma_{\rm tot}-{\rm i}\delta\Delta}{\gamma_{\rm tot}+{\rm i}\delta\Delta} \tag{2.356}$$

となる。高い反射率のミラーで構成されたキャビティのフィネスは

$$\mathcal{F}=\frac{\pi\sqrt{r_{\rm in}r_{\rm out}r_{\rm loss}}}{1-r_{\rm in}r_{\rm out}r_{\rm loss}}\simeq\frac{2\pi}{T_{\rm in}T_{\rm out}T_{\rm loss}} \tag{2.357}$$

で近似でき, これと半値全幅 (Full Width Half Maximum:FWHW) $\delta\mu=\nu_{\rm fsr}/\mathcal{F}$ を用いると

$$\gamma_{\rm in}=\frac{T_{\rm in}}{2}\delta\nu\mathcal{F} \tag{2.358}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\rm tot}&=\gamma_{\rm in}+\gamma_{\rm out}+\gamma_{\rm loss}\\&=\frac{\mu_{\rm fsr}}{2}(T_{\rm in}+T_{\rm out}+T_{\rm loss})\\&\simeq\pi\delta\nu\end{aligned} \tag{2.359}$$

となるので, 共振点近傍 ($2\pi\delta\nu\gg\delta\Delta$) では振幅反射率は

$$r(\delta\Delta)\simeq\left(\frac{T_{\rm in}\mathcal{F}}{\pi}-1\right)-\frac{{\rm i}\delta\Delta}{\pi\delta\nu} \tag{2.360}$$

となる。

以上で準備が整ったので, 位相変調のかかった光の反射光強度を考える。位相変調が小さい場合, 反射光強度は

$$\begin{aligned}P_r&=|a_0|^2|\left({\rm J}_0(m)e^{{\rm i}\omega t}r(\delta\Delta)+{\rm iJ}_1(m)e^{{\rm i}\omega t}e^{{\rm i}\Omega t}r(\delta\Delta+\Omega)+{\rm iJ}_1(m)e^{{\rm i}\omega t}e^{-{\rm i}\Omega t}r(\delta\Delta-\Omega)\right)|^2\\&=P_0[|{\rm J}_0(m)r(\delta\Delta)|^2+|{\rm J}_1(m)r(\delta\Delta+\Omega)|^2+|{\rm J}_1(m)r(\delta\Delta-\Omega)|^2]\\&\quad+2P_0{\rm J}_0(m){\rm J}_1(m){\rm Re}[\{r(\delta\Delta)r^*(\delta\Delta+\Omega)-r^*(\delta\Delta)r(\delta\Delta-\Omega)\}e^{-{\rm i}\Omega t}]\\&\quad+(2\Omega{\rm terms})\end{aligned} \tag{2.361}$$

であり, この内変調周波数成分だけを取り出し, かけた変調と同相で復調すると

$$\begin{aligned}P_r^{\rm (RF)}&=2\sqrt{P_{\rm c}P_{\rm s}}\left({\rm Im}(r(\delta\Delta)-r(\delta\Delta)^*)\right)\\&=2\sqrt{P_{\rm c}P_{\rm s}}\left(\frac{-2\delta\Delta}{\pi\delta\mu}\right)\\&=\frac{4}{\pi}\sqrt{P_{\rm c}P_{\rm s}}\frac{\delta\Delta}{\delta\mu}\end{aligned} \tag{2.362}$$

が得られる。ここで,

$$P_{\rm c}={\rm J}_0^2(m)P,\quad P_{\rm s}={\rm J}_1^2(m)P_0 \tag{2.363}$$

であり, 変調周波数 Ω がキャビティの線幅よりも十分大きいとして, $r(\delta\Delta \pm \Omega) = -1$ とした。共振周波数からのずれをキャビティ長の揺らぎによるものとすると

$$S_{\mathrm{error}} = 8\sqrt{P_{\mathrm{c}} P_{\mathrm{s}}} \frac{L\mathcal{F}}{\lambda} \left(\frac{dL}{L}\right) \tag{2.364}$$

となり, 共振点近傍では δL に比例したエラー信号を得る。このとき, 傾きは

$$S_{\mathrm{slope}} = 8\sqrt{P_{\mathrm{c}} P_{\mathrm{s}}} \frac{\mathcal{F}}{\lambda} \tag{2.365}$$

である。

2.6.2 コヒーレントコントロール

スクイーズド状態を有効利用するためにはスクイーズアングルとホモダインアングルを制御しなければならない。スクイーズアングルを制御することでスクイーズしたい直交位相成分に制御できる。そして スクイーズド真空場を用いた実験を行うには, 制御下におけるスクイージングレベルをホモダイン測定しなければならないのでホモダインアングルをも制御する必要がある。

一般的な制御法としては量子雑音制御 (Quantum Noise Locking) と呼ばれる制御法とコヒーレントコントロールと呼ばれる制御法が主に使われているが安定性の面 [6] からコヒーレントコントロールによる制御を選択した。

スクイーズアングル制御のエラーシグナル

制御のために OPO に周波数 Ω シフトさせた signal（キャリアに対する”上側”のサイドバンド。これまで同様”+”で表す。また, この制御用の光を Quadrature Control Field (QCF) とも記述する。）を入射すると (2.211), (2.220) と同様に

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{+}^{(\mathrm{trans})} \\ \bar{A}_{-}^{(\mathrm{trans})*} \end{bmatrix} = 2\sqrt{\gamma_a^{(\mathrm{in})}\gamma_a^{(\mathrm{out})}} \begin{bmatrix} \gamma_a^{(\mathrm{tot})} & -\frac{1}{2}\epsilon\bar{b} \\ -\frac{1}{2}\epsilon\bar{b}^{*} & \gamma_a^{(\mathrm{tot})} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{A}_{+}^{(\mathrm{in})} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.366}$$

$$\bar{A}_{+}^{(\mathrm{trans})} = \frac{2\sqrt{\gamma_a^{(\mathrm{in})}\gamma_a^{(\mathrm{out})}}}{1-x^2} \bar{A}_{+}^{(\mathrm{in})} \tag{2.367}$$

$$\bar{A}_{-}^{(\mathrm{trans})*} = \frac{2\sqrt{\gamma_a^{(\mathrm{in})}\gamma_a^{(\mathrm{out})}}\, x e^{-\mathrm{i}\phi}}{1-x^2} \bar{A}_{+}^{(\mathrm{in})} \tag{2.368}$$

$$\tag{2.369}$$

のような出力が得られる。ここで回転座標系から静止座標系に戻ると OPO からの出力は,

$$\bar{A}^{(\mathrm{tot})} = \bar{A}_{+}^{(\mathrm{out})} e^{\mathrm{i}(\omega+\Omega)t} + \bar{A}_{-}^{(\mathrm{out})} e^{\mathrm{i}(\omega-\Omega)t} \tag{2.370}$$

である。これを検出すると, 測定される強度は

$$|\bar{A}^{(\mathrm{tot})}|^2 = 4\gamma_a^{(\mathrm{in})}\gamma_a^{(\mathrm{out})}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\bar{A}_+^{(\mathrm{in})2} + 8\gamma_a^{(\mathrm{in})}\gamma_a^{(\mathrm{out})}\frac{x}{(1-x^2)^2}\bar{A}_+^{(\mathrm{in})2}\cos(2\Omega t-\phi) \tag{2.371}$$

となる。(2.371) を周波数 2Ω で復調し, ローパスフィルターにかけて高周波成分をカットすると

$$S_{\mathrm{Err}}^{\mathrm{QCF/Pump}} = 8\gamma_a^{(\mathrm{in})}\gamma_a^{(\mathrm{out})}\frac{x}{(1-x^2)^2}\bar{A}_+^{(\mathrm{in})2}\cos\phi \tag{2.372}$$

が得られる。これはシード光とポンプ光の相対位相 $\phi=\pi/2, 3\pi/2$ 等で, ゼロ点周りで線形なエラー信号となる。また $x=0$ のとき, 即ちポンプ光を入力していない時は OPO ではダウンコンバージョンが起こらないので信号は当然出ない事も分かる。

ホモダインアングル制御のエラーシグナル

続いて, スクイーズド真空場と LO 光の間の相対位相, 即ちホモダインアングルの制御のための信号取得を導く。ホモダイン測定においてはビームスプリッターにスクイーズド真空場と先程得た上下のサイドバンド成分及び LO 光 $\bar{B}e^{\mathrm{i}\omega t+\theta}$ を入力する。

$$\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{A}_+^{(\mathrm{out})}e^{\mathrm{i}(\omega+\Omega)t} + \bar{A}_-^{(\mathrm{out})}e^{\mathrm{i}(\omega-\Omega)t} \\ \bar{B}e^{\mathrm{i}(\omega t+\theta)} \end{bmatrix} \tag{2.373}$$

ビームスプリッターからの出力は上式で与えられ, このとき θ はスクイーズド真空場と LO 光の間の相対位相である。この 2 つの出力の差を測定すると

$$\begin{aligned} I_C - I_D &= \frac{1}{2}(C^\dagger C - D^\dagger D) \\ &= \frac{2\sqrt{\eta_{\mathrm{in}}\eta_{\mathrm{out}}}}{1-x^2}\bar{A}_+\bar{B}[\sin(\theta-\Omega t) + x\sin(\theta+\Omega t+\phi)] \end{aligned} \tag{2.374}$$

が得られる。これを周波数 Ω で復調しローパスフィルターに通すと

$$S_{\mathrm{Err}}^{\mathrm{QCF/LO}} = \frac{2\sqrt{\gamma_a^{(\mathrm{in})}\gamma_a^{(\mathrm{out})}}}{1-x^2}\bar{A}_+^{(\mathrm{in})}\bar{B}[\sin(\theta) + x\sin(\theta+\phi)] \tag{2.375}$$

が得られる。この信号はホモダインアングルのみならずスクイーズアングルにも依存しているが, OPO においてスクイーズアングルを制御した後にホモダインアングルの制御を行うので問題は無い。

2.6.3　その他の制御

以上の 2 つの他に結晶の温度制御, レーザーの強度安定化, 2 つのレーザー間の周波数同期を行ったので, それらについて簡単に述べる。温度制御のためのエラー信号は温度変換のた

めの IC(AD590) によって取得しそれをペルチェ素子にフィードバックする事で制御を行い, レーザーの強度安定化はフォトディテクターで得た信号を光源にフィードバックした。周波数同期は 2 つのレーザー光のうなりを測定し PLL によって同期を行った。それぞれの詳細は第 4.2.2 節, 第 4.2.1 節で示す。

CHAPTER 3
レーザー干渉計型重力波検出器

この章ではまずレーザー干渉計型重力波検出器について紹介し, 真空場の入射に伴い量子雑音が生じる事を説明する。次に, スクイーズド真空場によって量子雑音の低減が可能な事を示し, 最後に複雑な構成となっている現在のレーザー干渉計型検出器に対するスクイーズド光の効果を紹介する。

3.1 マイケルソン干渉計

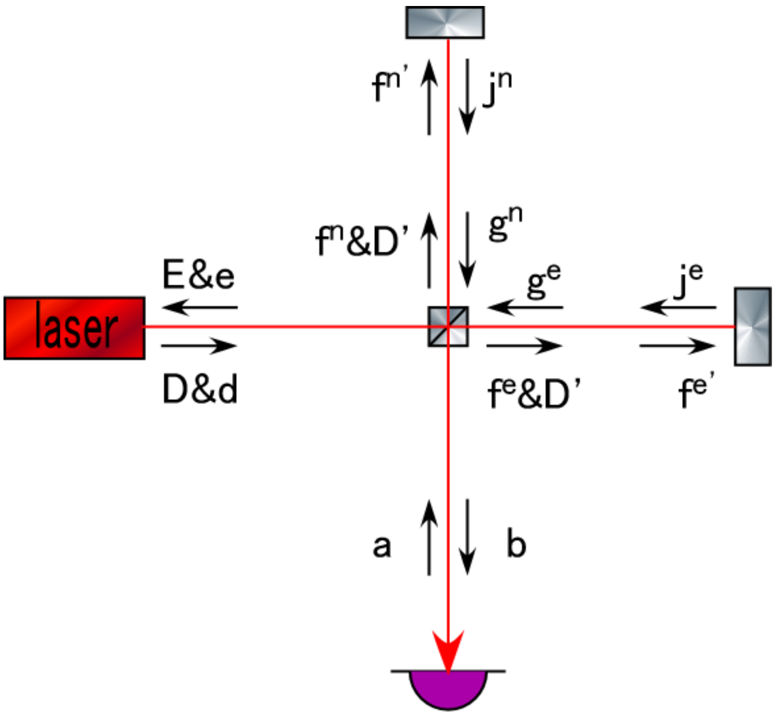


図 3.1: マイケルソン干渉計の略図。$D' = \sqrt{2}D$, $f' = fe^{\mathrm{i}\Omega L/c}$ であり, 腕の長さは L である。

図 3.1 のようなモデルを考え, 出力の信号と雑音を求める。マイケルソン干渉計への入力はシンメトリックポートへ入射するレーザー光（周波数 ω で振動する古典的な振幅 D とサイドバンド周波数 $\pm\Omega$ の消滅演算子 $\tilde{d}_\pm$）とアンチシンメトリックポートへ混入する真空場 $\tilde{a}_\pm$ を考える。このとき, 電場の $\omega > 0$ の成分は

$$\hat{E}^{(+)}_{\mathrm{in,anti}} = \frac{1}{2\pi}\acute{\mathscr{E}} e^{-\mathrm{i}\omega t}\int_0^\infty (\tilde{a}_+ e^{-\mathrm{i}\Omega t} + \tilde{a}_- e^{\mathrm{i}\Omega t})d\Omega \tag{3.1}$$

であるので, 直交位相振幅演算子 $\tilde{a}_{1,2}$ で書きなおすと

$$\hat{E}_{\mathrm{in,anti}} = \frac{\sqrt{2}\acute{\mathscr{E}}}{2\pi}\left[\cos(\omega t)\int_0^\infty(\tilde{a}_1 e^{-\mathrm{i}\Omega t} + \tilde{a}_1^\dagger e^{\mathrm{i}\Omega t})d\Omega + \sin(\omega t)\int_0^\infty(\tilde{a}_2 e^{-\mathrm{i}\Omega t} + \tilde{a}_2^\dagger e^{\mathrm{i}\Omega t})d\Omega\right] \quad (3.2)$$

となる。同様にして

$$\hat{E}^{(+)}_{\mathrm{in,sym}} = \frac{1}{2\pi}\acute{\mathscr{E}}e^{-\mathrm{i}\omega t}\left[D + \int_0^\infty(\tilde{d}_+ e^{-\mathrm{i}\Omega t} + \tilde{d}_- e^{\mathrm{i}\Omega t})\right]d\Omega \quad (3.3)$$

$$\hat{E}_{\mathrm{in,sym}} = \frac{\sqrt{2}\acute{\mathscr{E}}}{2\pi}\left[\cos(\omega t)\left(\sqrt{2}D + \int_0^\infty(\tilde{d}_1 e^{-\mathrm{i}\Omega t} + \tilde{d}_1^\dagger e^{\mathrm{i}\Omega t})d\Omega\right) + \sin(\omega t)\int_0^\infty(\tilde{d}_2 e^{-\mathrm{i}\Omega t} + \tilde{d}_2^\dagger e^{\mathrm{i}\Omega t})d\Omega\right] \quad (3.4)$$

が得られる。ビームスプリッターは損失が無い理想的なものとすると,

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_j^{(n)} \\ \tilde{f}_j^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{d}_j \\ \tilde{a}_j \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{b}_j^{(n)} \\ \tilde{e}_j^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{g}_j^{(n)} \\ \tilde{g}_j^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

となる。ここで, $j = 1, 2$ はそれぞれ amplitude quadrature, phase quadrature を表し, n, e はマイケルソン干渉計の北側と南側の腕を表す。

信号

重力波の信号は二つの腕で折り返されたレーザー光の位相差として測定される。そこで, ミラーが微小距離 $X(t)$ だけ変動した時のキャリア光を考えると

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{carrier}} &= \frac{D}{\sqrt{2}}\cos(\omega t + \phi(t)) \\ &= \frac{D}{\sqrt{2}}[\cos(\omega t)\cos(\phi(t)) + \sin\omega t\sin(\phi(t))] \\ &\simeq \frac{D}{\sqrt{2}}\left[\cos(\omega t) + \frac{2\omega X(t)}{c}\sin\omega t\right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。つまりミラーの変動に伴う直交位相振幅の変化は, 周波数領域において

$$\delta\tilde{X}_1 = 0 \quad (3.8)$$

$$\delta\tilde{X}_2 = \frac{\sqrt{2}D\omega\tilde{X}}{c} \quad (3.9)$$

のように, phase quadrature にのみ現れる。

輻射圧雑音

輻射圧雑音とは, 光子が運動量を持ちかつ鏡に当たる光子数が揺らぎを伴うために, 干渉計のミラーを無相関に揺らし距離の差動成分を生じ発生する雑音である。その起源に関しては"lively but unpublished controversy "があった [4]。それはレーザー光のパワーの揺らぎがその原因と考えられていたが, ビームスプリッターにより揺らぎが相関を持ったまま分割されるなら パワーの揺らぎにより引き起こされるミラーの変動は同相となり雑音とならないという矛盾を抱えていたためである。この問題を解決したのは Caves であり, ビームスプリッターに真空場が入射しレーザー光と重ねあわされるモデルで輻射圧雑音を説明できる事を示した [4]。

パワー P_{in} のレーザー光によりミラーが受ける力は

$$\delta F = \frac{2P_{\mathrm{in}}}{c} \tag{3.10}$$

であり, レーザーパワーは次のように平均成分と変動成分に分けることができる。

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{in}} &= \hbar\omega\frac{D^2}{2} + \frac{\hbar\omega}{2\pi}D\int_0^\infty \left(\tilde{f}_1 e^{-\mathrm{i}\Omega t} + \tilde{f}_1^\dagger e^{\mathrm{i}\Omega t}\right) d\Omega \\ &= \bar{P}_{\mathrm{in}} + \delta P_{\mathrm{in}} \end{aligned} \tag{3.11}$$

この変動成分がアンチシンメトリックポートから入射する真空場との重ね合わせである事により輻射圧雑音が生じる。

輻射圧雑音の効果を考慮にいれたとき, 振幅 $h(t)$ の重力波によりマイケルソン干渉計の腕が伸び縮みさせられている様子を記述する運動方程式は [30]

$$\frac{d^2X^{(n,e)}(t)}{dt^2} = \frac{\eta^{(n,e)}}{2}L\frac{d^2h(t)}{dt^2} + \frac{2\delta P^{(n,e)}(t)}{mc} \tag{3.12}$$

であり, ここで $\eta^{(n,e)}$ は $\eta^{(n)} = 1$ であるなら $\eta^e = -1$ であり, 一方の腕が伸びるとき他方は縮む。これは周波数領域では

$$-\Omega^2 X = -\Omega^2\frac{\eta^{(n,e)}}{2}L\tilde{h} + \frac{2\delta P}{mc} \tag{3.13}$$

となり, レーザーパワーの変動を代入すると

$$X^{(n)} = \frac{1}{2}L\tilde{h} - \frac{\sqrt{2}\hbar\omega D}{mc^2\Omega^2}(\tilde{d}_1 + \tilde{a}_1)e^{\mathrm{i}\beta} \tag{3.14}$$

$$X^{(e)} = -\frac{1}{2}L\tilde{h} - \frac{\sqrt{2}\hbar\omega D}{mc^2\Omega^2}(\tilde{d}_1 - \tilde{a}_1)e^{\mathrm{i}\beta} \tag{3.15}$$

となる。ここで, $\beta = \Omega L/c$ である。両腕の変位量の差は

$$\begin{aligned} \delta x &= X^{(n)} - X^{(e)} \\ &= Lh - \frac{2\sqrt{2\hbar\omega I_0}}{mc^2\Omega^2}\tilde{a}_1 e^{\mathrm{i}\beta} \end{aligned} \tag{3.16}$$

となり, 重力波による信号と真空場雑音の amplitude quadrature 成分に比例した輻射圧雑音が測定される。このとき (3.9) は

$$\frac{\sqrt{2}D\omega X}{c} = \sqrt{2\frac{I_0}{\hbar\omega}}\frac{\omega\delta x}{c} \tag{3.17}$$

であり, ビームスプリッターからの出力は

$$\tilde{b}_1 = \tilde{a}_1 e^{2\mathrm{i}\beta} \tag{3.18}$$

$$\tilde{b}_2 = \tilde{a}_2 e^{2\mathrm{i}\beta} + \sqrt{2\frac{I_0}{\hbar\omega}}\frac{\omega\delta x}{c}e^{\mathrm{i}\beta} \tag{3.19}$$

となる。これをまとめると

$$\tilde{b}_1 = \tilde{a}_1 e^{2\mathrm{i}\beta} \tag{3.20}$$

$$\tilde{b}_2 = (\tilde{a}_2 - \mathcal{K}\tilde{a}_1)e^{2\mathrm{i}\beta} + \sqrt{2\mathcal{K}}\frac{h}{h_{\mathrm{SQL}}}e^{\mathrm{i}\beta} \tag{3.21}$$

が得られ, ここで

$$\mathcal{K} = \frac{4I_0\omega_0}{mc^2\Omega^2} \tag{3.22}$$

は輻射圧雑音の結合定数であり

$$h_{\mathrm{SQL}} = \sqrt{\frac{4\hbar}{m\Omega^2 L^2}} \tag{3.23}$$

はマイケルソン干渉計の歪み感度の標準量子限界である。(3.21) の第一項は重力波検出における量子雑音を表し, $\tilde{a}_2$ は周波数依存の無い散射雑音を生じ, $\tilde{a}_1$ は $1/\Omega^2$ の周波数特性を持った輻射圧雑音を生じる。歪み感度は, 信号と雑音 h_n を比べて

$$b_2 = \sqrt{2\mathcal{K}}\frac{h + h_n}{h_{\mathrm{SQL}}}e^{\mathrm{i}\beta} \tag{3.24}$$

$$h_n = \frac{h_{\mathrm{SQL}}}{\sqrt{2\mathcal{K}}}(\tilde{a}_2 - \mathcal{K}\tilde{a}_1)e^{-\mathrm{i}\beta} \tag{3.25}$$

であるので, パワースペクトル密度は

$$S_h = \frac{h_{\mathrm{SQL}}^2}{2}\left(\frac{1}{\mathcal{K}} + \mathcal{K}\right) \tag{3.26}$$

となり, これは $I_{\mathrm{opt}} = mc^2\Omega^2/(4\omega)$ のとき最適（標準量子限界）である。

3.2　ポンデロモーティブスクイージング

前節で, マイケルソン干渉計のアンチシンメトリックポートに入射する真空場の直交位相振幅揺らぎが量子雑音の起源である事を示した。重力波の信号が無い場合, ビームスプリッターでの（アンチシンメトリックポート側の）入出力関係は (3.20), (3.21) から

$$\begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{bmatrix} e^{2i\beta} \tag{3.27}$$

で表され, 輻射圧雑音により直交位相振幅の大きさが変わる事が分かる。回転演算子 $R(\theta)$ とスクイーズ演算子 $S(r,\phi)$ を用いると [30]

$$\tilde{b}_{1,2} = S^{\dagger}(r,\phi)R^{\dagger}(-\theta)\tilde{a}_{1,2}e^{i\beta}R(-\theta)S(r,\phi) \tag{3.28}$$

と変形できる。ここで回転演算子は

$$R(\theta) = \exp\left[-i\theta(\tilde{a}_+^{\dagger}\tilde{a}_+ + \tilde{a}_-^{\dagger}\tilde{a}_-)\right] \tag{3.29}$$

であり, θ, ϕ, r はそれぞれ回転演算子による回転角度, スクイーズアングル, スクイーズファクターである。

$$\theta = \arctan\left(\frac{\mathcal{K}}{2}\right), \quad \phi = \frac{1}{2}\mathrm{arccot}\left(\frac{\mathcal{K}}{2}\right), \quad r = \mathrm{arcshinh}\left(\frac{\mathcal{K}}{2}\right) \tag{3.30}$$

(3.30) は全て $\mathcal{K}$ に依存しており, $\mathcal{K}$ はサイドバンド周波数 Ω に依存しているためこのスクイージングは周波数依存性を持つ。このスクイージングはミラーに対する輻射圧の反動で生じ, ポンデロモーティブ（ponderomotive）スクイージングと呼ばれる。$\tilde{b}_{1,2}$ のスペクトル密度及びクロススペクトルは

$$S_{b_1} = 1, \quad S_{b_2} = 1 + \mathcal{K}^2, \quad S_{b_1 b_2} = -\mathcal{K} \tag{3.31}$$

であり, ϕ 回転した座標系における直交位相振幅 $\tilde{b}'_{1,2}$ は

$$\tilde{b}'_{1,2} = \tilde{b}'_{1,2}\cos\phi \pm \tilde{b}'_{2,1}\sin\phi \tag{3.32}$$

であり, このスペクトル密度及びクロススペクトルは

$$S_{b'_1} = e^{-2r} = \left[\sqrt{1+\left(\frac{\mathcal{K}}{2}\right)^2} - \frac{\mathcal{K}}{2}\right]^2 \simeq \frac{1}{\mathcal{K}}, \quad \text{if } \mathcal{K} \gg 1 \tag{3.33}$$

$$S_{b'_2} = e^{2r} = \left[\sqrt{1+\left(\frac{\mathcal{K}}{2}\right)^2} - \frac{\mathcal{K}}{2}\right]^2 \tag{3.34}$$

$$S_{b'_1 b'_2} = 0 \tag{3.35}$$

となる。ポンデロモーティブスクイージングされた真空場を図 3.2 に示す。

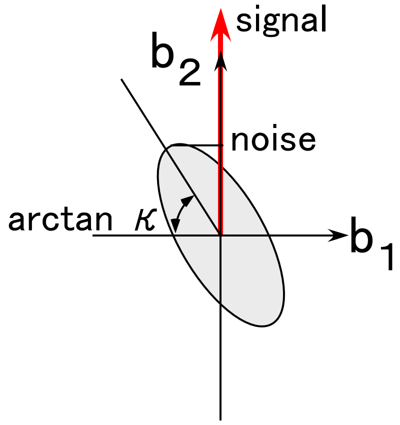


図 3.2: アンチシンメトリックポートから出てくる真空場。

3.3　スクイーズド光による重力波検出器の感度向上

　アンチシンメトリックポートに入射する真空場をスクイーズド真空場に置き換える事で量子雑音が標準量子限界を超える感度が得られる事を示す。まず, 入射する場は

$$|\mathrm{in}\rangle = S(r,\phi)|\tilde{a}=0\rangle \tag{3.36}$$

であり, このとき測定されるパワースペクトル密度は

$$\langle \mathrm{in}|h_n h_{n'}|\mathrm{in}\rangle = \langle \tilde{a}=0|h_{ns}h_{ns'}|\tilde{a}=0\rangle \tag{3.37}$$

であるので,

$$h_{ns} = S^{\dagger}(r,\phi)h_n S(r,\phi) \tag{3.38}$$

が得られる。これに先程得た (3.25) を代入すると歪み感度は

$$\begin{aligned} h_{ns} = -\frac{h_{\mathrm{SQL}}}{\sqrt{2\mathcal{K}}}&\sqrt{(1+\mathcal{K}e^{\mathrm{i}\beta})} \\ &\times(\tilde{a}_1\{\mathrm{cosh}r\cos\Phi-\mathrm{sinh}r\cos[\Phi-2(\Phi+\phi)]\} \\ &-\tilde{a}_2\{\mathrm{cosh}r\sin\Phi-\mathrm{sinh}r\sin[\Phi-2(\Phi+\phi)]\}) \end{aligned} \tag{3.39}$$

であり, このとき Φ は

$$\Phi = \mathrm{arccot}\mathcal{K} \tag{3.40}$$

である。パワースペクトル密度は

$$S_{\mathrm{SQZ}} = \frac{h_{\mathrm{SQL}}^2}{2}\left(\frac{1}{\mathcal{K}}+\mathcal{K}\right)(\cosh(2r)-\cos[2(\phi+\Phi)]\sinh(2r)) \tag{3.41}$$

となる。(3.41) において, スクイーズド真空場の入射により新たに掛け合わされる部分は, スクイーズアングル次第では 1 より小さくなり, 次の場合に最適となる。

$$\phi_{\mathrm{opt}}(\Omega) = -\Phi(\Omega) = -\mathrm{arccot}\mathcal{K}(\Omega) \tag{3.42}$$

このとき, パワースペクトル密度は

$$S_{\mathrm{SQZ/opt}} = \frac{h_{\mathrm{SQL}}^2}{2}\left(\frac{1}{\kappa} + \kappa\right)e^{-2r} \tag{3.43}$$

となり, スクイーズファクターに応じて感度が向上する。図 3.3 に量子雑音に制限されたマイケルソン干渉計の歪み感度とアンチシンメトリックポートにスクイーズド真空場を入射した場合の歪み感度を図示する。

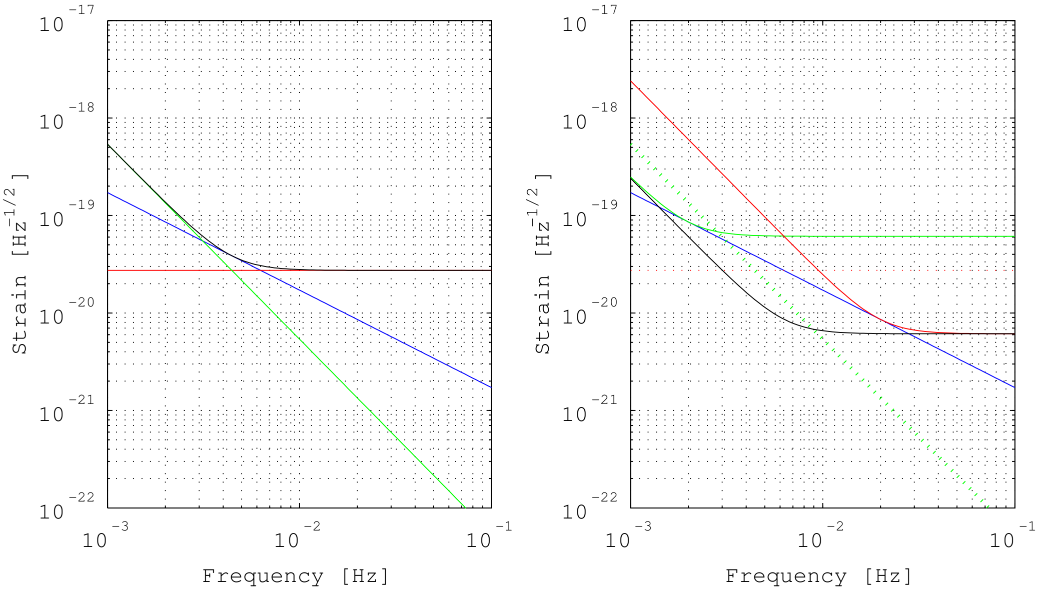


図 3.3: 左図:量子雑音に感度を制限されているマイケルソン干渉計。青線は SQL, 赤線はショットノイズ, 緑線は輻射圧雑音, 黒線は全量子雑音を表す。右図:amplitude quadrature（緑）, phase quadrature（赤）のスクイーズド真空場及び (3.42) のような最適なスクイーズド真空場（黒）を入射したときの歪み感度。青線は SQL, 赤の点線はショットノイズ, 緑の点線は輻射圧雑音を表す。

Chapter 4 実験

この章ではまず第 2 章で得た解析解 (2.294) からスクイージングレベルの大きさに応じた分布を調べる事で, スクイーズド真空場生成のための各パラメータの存在領域を示す。これによって, スクイーズド真空場の生成を目指す場合の各雑音に対する許容範囲の目安を得ることができ, それを知った上で実験を行った。また, この解析により得たスクイージング実験のパラメータの分布からミラーの値等を決定した。

次に実験の紹介を行う。実験では SHG, MC, OPO のキャビティ長制御, 結晶の温度制御, 2 台のレーザー間の周波数同期をとる PLL 制御, レーザー光の強度安定化を行ったのでそれを説明する。

4.1 設計

マルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov chain Monte Carlo method:MCMC) を用いて標的分布 (2.294) からのサンプリングを行うことで, スクイージングレベルに応じたパラメータの分布を調べた上で, 実験装置のパラメータを決定した。この際, 実験装置のパラメータと同時に雑音のパラメータのマルコフ連鎖を作成しその分布を求める事で, スクイージングの達成には主に散乱によるロスや測定の際の位相揺らぎ, OPO キャビティへの戻り光を対策する事が重要であることが分かった。収束の判定には, 時系列プロット, 自己相関関数のチェック及び Geweke の方法 [32], Gelman& , Raftery & Lewis の方法 [33] を用いた。

4.1.1　マルコフ連鎖モンテカルロ法

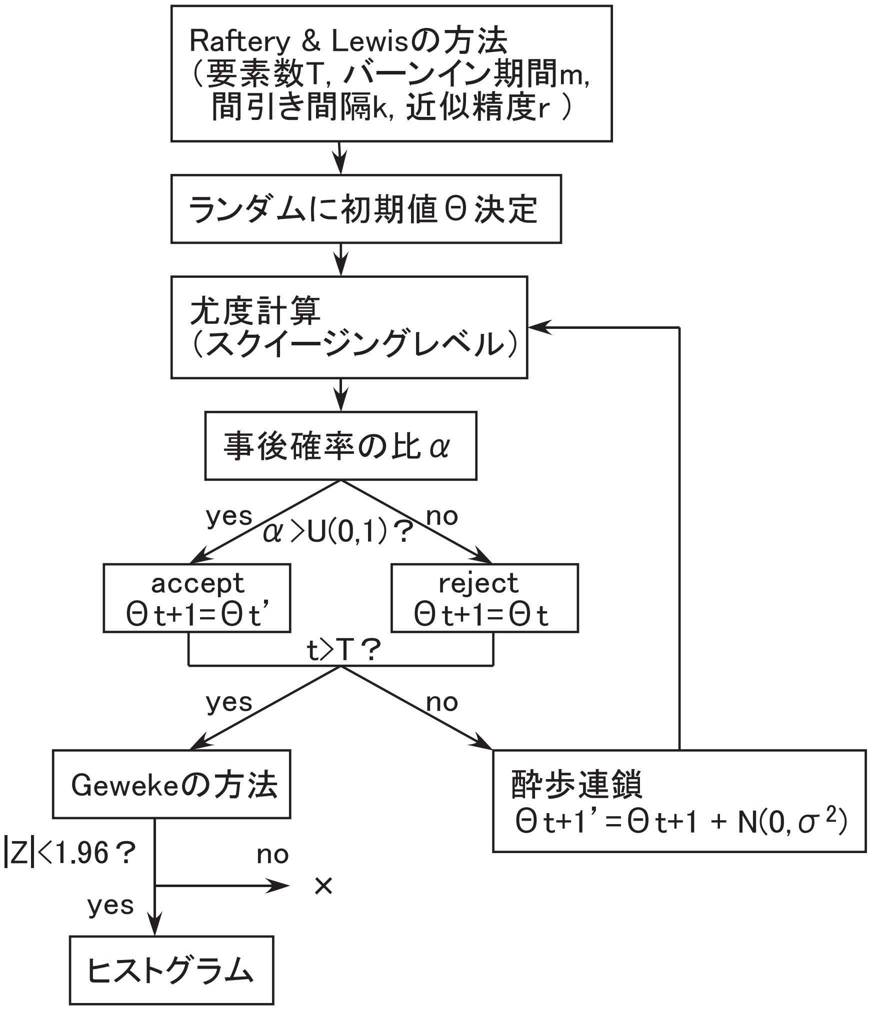


図 4.1: フローチャート。U, N はそれぞれ一様分布, 標準正規分布から得た値を示す。

マルコフ連鎖

離散的な状態空間 S 上の確率過程において, 状態 i から状態 j への推移が

$$P(x^{(t+1)} = j|x^{(1)} = i_1, \dots, x^{(t)} = i) = P(x^{(t+1)} = j|x^{(t)} = i), \quad \text{for} \quad \text{all} \;\; \text{t} \tag{4.1}$$

のように, 将来の状態が現在の状態のみに依存するような確率過程を離散時間マルコフ連鎖と呼ぶ。

エルゴード的なマルコフ連鎖による推移を繰り返す事で目標とする不変分布を得る事ができる。エルゴード的であるとは, 既約的かつ正再帰的, 非周期的な状態である。時点 $x^{(t)}$ から

$x^{(t+1)}$ への推移を $P(x^{(t+1)}=j|x^{(t)}=i)=P_{ij}$ という条件付き確率で規定すると, エルゴード的なマルコフ連鎖では任意の i,j に対し

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}^{(t)}=\pi(j) \tag{4.2}$$

が成り立つ。このとき, π は不変分布である。このような性質はエルゴード性に起因しており,

$$P_{ij}^{(t)}>0, \quad P_{ji}^{(t)}>0 \tag{4.3}$$

が有限回の推移 t に対して成り立つとき（既約的）, これが満たされる連鎖は不変分布に留まり続け部分集合を限なく到達することが保証される。また, 状態 i から状態 j への到達最小時間を T_{ij} とすると, 再帰確率 $P(T_{ii})$ と平均再帰時間 $E(T_{ii})$ が

$$P(T_{ii}<\infty)=1 \tag{4.4}$$

$$E(T_{ii})<\infty \tag{4.5}$$

であるとき（正再帰的）, 連鎖は対象の集合の外へ漂移することなく, 集合内の任意の状態に有限の時間で何度も到達する事が保証される。状態 i の全ての再帰時間 $T_{ii,l}$ の最大公約数は状態 i の周期を表し, 周期 1 の非周期的かつ既約的な離散的マルコフ連鎖は正再帰的となる。

(2.294) において, パラメータのマルコフ連鎖を生成して得ることのできる分布はスクイージングレベルの高さに応じた分布となる。このように確率分布を得ることにより, スクイーズ状態生成に必要な条件はどうなっているのかを調べた。

メトロポリス・ヘイスティング法

メトロポリス・ヘイスティング（Metropolis-Hastings:MH）法ではある提案分布 q からの候補を詳細釣り合い条件が満たされるような採択確率 α に従って採用する事でサンプリングを行う方法である。詳細釣り合い条件とは状態空間 S 上の全ての確率変数に対し

$$\pi(x^{(t)})p(x^{(t+1)}|x^{(t)})=\pi(x^{(t+1)})p(x^{(t)}|x^{(t+1)}) \tag{4.6}$$

が成り立つ事をいう。提案分布 $q(x|x^{(t)})$ が詳細釣り合い条件を満たしていないとき

$$\pi(x^{(t)})q(x|x^{(t)})>\pi(x)q(x^{(t)}|x) \tag{4.7}$$

と表すこともできる。このとき, 状態 $x^{(t)}$ から x への推移を

$$p(x|x^{(t)})=q(x|x^{(t)})\alpha(x|x^{(t)}) \tag{4.8}$$

に従って推移させ, 採択確率 α を (4.7) の詳細釣り合いが満たされるように

$$\alpha(x|x^{(t)})=\frac{\pi(x)q(x^{(t)}|x)}{\pi(x^{(t)})q(x|x^{(t)})} \tag{4.9}$$

とする。すなわち

$$\alpha(x|x^{(t)}) = \begin{cases} \min\left[\frac{\pi(x)q(x^{(t)}|x)}{\pi(x^{(t)})q(x|x^{(t)})}, 1\right] & (\text{分母} > 0) \\ 1 & (\text{分母} = 0) \end{cases} \tag{4.10}$$

である。この採択確率に従って候補の採択を行うと良い。ただし, 初期状態の影響を受ける最初の m 回までの繰り返しは用いない（バーンイン期間）。

提案分布の生成には, 酔歩過程を用いて $x^{(t+1)} = x^{(t)} + z$ のように候補点を発生させる。z の分布には正規分布 $N(0, \sigma^2)$ を用いた。ここで, 分散 σ^2 は分析者が任意に設定する調整母数であり, マルコフ連鎖が収束するように定める必要がある。

収束判定法

時系列プロット・自己相関関数

定性的ではあるが, 最も簡単に収束を判定する方法は, マルコフ連鎖を構成する要素を時系列順に図示する事である。 時系列プロットから連鎖のバーンイン期間が妥当であるか大まかに判断でき, また局所解に留まっていないか見る事が出来る。

同じく定性的にではあるが, 連鎖の自己相関係数を様々な間隔で計算した自己相関関数図も収束の判定に利用できる。マルコフ連鎖は直前の要素に依存して生成されるため, 調整母数が小さい時には自己相関が非常に大きくなる。しかし, MCMC においては目標分布からの無作為標本を再現したいのである程度間隔の離れた要素同士は相関が小さい方が好ましい。そのため, マルコフ連鎖の自己相関関係数をみる事で, 収束の判断の 1 つの基準となる。ただし, 大きすぎる調整母数は採択確率の減少を伴うので注意が必要である。

Geweke の方法

生成したマルコフ連鎖を 2 つに分け, 両者に含まれる構成要素を比較する事で収束を判定する。バーンイン期間を破棄したマルコフ連鎖 θ を $\theta_{\mathrm{A}}, \theta_{\mathrm{B}}$ に分け両者が等しく不変分布に収束しているとき

$$Z = \frac{\bar{\theta}_{\mathrm{A}} - \bar{\theta}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{\triangle\theta_{\mathrm{A}} + \triangle\theta_{\mathrm{B}}}} \sim N(0, 1) \tag{4.11}$$

が成り立つ。検定仮説は”マルコフ連鎖は収束している”として, 有意水準を 5% とするなら $|Z| < 1.96$ のときマルコフ連鎖は収束していると解釈できる。

Raftery & Lewis の方法

標本百分位数を元に擬似標本が目標分布を近似したものとなっているか検討する。この方法を用いると, 一定の近似精度を得るために必要なマルコフ連鎖の長さ T とバーンイン期間

の長さ M が得られる。まず, 目標分布である母数 θ の事後分布に含まれる全要素 $\theta_1,\ldots,\theta_N$ における真の第 q 百分位数は累積確率 Pr を用いて

$$q = Pr(\theta_n \le \theta_q), \quad n = 1,\ldots,N \tag{4.12}$$

を満たす θ_q の事であり, MCMC を用いた推定ではこれを擬似的に知ることができる。マルコフ連鎖から k 個おきに標本を抽出した場合, マルコフ連鎖を $\acute{\theta}_1,\ldots,\acute{\theta}_N$ とすると, 点推定量 $\acute{q}$ は定義関数 I を用いて

$$\acute{q} = \sum_{t=m+1}^{m+n} Z_{1+(t-1)k}, \quad Z_t = I(\acute{\theta}_t \le \theta_q) \tag{4.13}$$

として得られるが, q と $\acute{q}$ が一致するとは限らない。そこで q の $100s\%$ 信頼区間を $\acute{q} \pm r$ の形で求める。つまり

$$P(|\acute{q} - q| \le r) = s \tag{4.14}$$

を満たすような解を求める。Z_t 自体はマルコフ連鎖ではないが, 十分大きな連鎖数の下で得られる分布は均衡分布 π , 推移行列 P を構成すると考えられる [33]。

$$\pi = (\pi_0, \pi_1) = (q, 1-q) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \tag{4.15}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

ここで

$$P = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 \\ \pi_0 & \pi_1 \end{bmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^m}{\alpha+\beta} \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

であり, マルコフ連鎖から得られる確率関数の値と均衡分布から得られる値との差を ϵ 以下になるように m を

$$m = \left[\log \frac{\epsilon(\alpha+\beta)}{\max(\alpha,\beta)}\right] / \log(1-\alpha-\beta) \tag{4.18}$$

と定める事ができる。次に, $\bar{Z} = \sum_{t=m+1}^{m+n} Z_t^{(k)}/n$ に中心極限定理を用いると (4.14) の許容誤差 r は

$$r = z_{(1-s)/2} \sqrt{\frac{\alpha\beta(2-\alpha-\beta)}{n(\alpha+\beta)^3}} \tag{4.19}$$

で与えられ, ここで z_a は標準正規分布の 100(1-a)% 点である。r が予め与えられた値となるようには n を

$$n = \frac{z^2_{(1-s)/2}}{r^2}\frac{\alpha\beta(2-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)^3} \tag{4.20}$$

とすれば良い。従ってバーンイン期間は $M = mk$, マルコフ連鎖は $T = M + nk$ 個生成すれば良い事が分かる。

以上のように, この方法を用いるためには対象とする分位数 q , 推定する許容誤差 r, その信頼区間の確率幅 s, 推定計算のための収束精度 ϵ を指定しなければならない。Raftery と Lewis は $q = 0.025, r = 0.0125, s = 0.95, \epsilon = 0.001$ を推奨しており, ここではそれを採用した。α, β は, 最小の $N = N_{\mathrm{min}}$ 個のマルコフ連鎖を生成し, この N_{min} 個のデータから推定する。$N = N_{\mathrm{min}}$ となるのはバーンイン期間が 0 で定常分布に収束しているときであり, $1-\alpha = \beta = q, M = 0, k = 1$ の場合である。k については, 得られたデータを用いて各 k の値ごとに 1 次のマルコフ過程か 2 次のマルコフ過程かをベイズ情報量規準（Bayesian Information Criterion:BIC）で判定し [34], 1 次のマルコフ連鎖となる最小の k を用いる。

4.1.2　モデル

キャビティのパラメータ

OPO キャビティのインプットミラーの反射率 R_{in}, アウトプットミラーの反射率 R_{out} , キャビティ長 L 及び結晶中のレーザー光のウェストサイズ ω_0, 入力する第二次高調波のパワー $P = P_{\mathrm{in}}/P_{\mathrm{threhold}}$ のマルコフ連鎖を生成しその分布を調べた。ウェストサイズに対する, シングルパス SHG の変換効率は後述の実測値を用いた。このときの各種雑音は表 4.1 のとおりである。また, キャビティを一周したときのロスは最も重要な項となるので, どの程度まで抑える必要があるのかを調べた。OPO はボウタイ型であるのでミラーの数が多く, その HR コーティングをどの程度の質で行う必要があるのかは知らなければならない。

モノリシックに作製した OPO により高レベルのスクイージングが実測されている [36]。キャビティが一体型となっているため安定度が高く, ミラーの数が少ないためロスも小さくできしかも線幅を非常に広く（∼ 200MHz）できる利点がある。しかしこの場合 OPO とホモダイン測定の間にアイソレータを入れる必要があり（10% 程度のロス）, さらに OPO キャビティの制御のために逆回りのモードを使う事が出来ないなどの不利な点がある。

表 4.1: マルコフ連鎖を生成したパラメータ

パラメータ	記号	値	単位
インプットミラーの反射率	R_{in}	[0.1〜0.9999]	-
アウトプットミラーの反射率	R_{out}	[0.85〜0.9999]	-
キャビティの周回損失	loss	[0.3〜1]	-
キャビティ長	L	[30〜80]	m
インプットパワー（シード光）	$\bar{P}_a$	$[10^{-15} \sim 10^{-6}]$	W
インプットパワー（ポンプ光）	$\bar{P}_b$	[0.1〜0.99]	-
detuning（周波数, 平均）	$\bar{\triangle}_a^{(\mathrm{c})}$	$[10^2 \sim 10^8]$	Hz
detuning（キャビティ長, 揺らぎ）	δx	$[10^{-18} \sim 10^{-9}]$	m
振幅雑音（シード光）	$\tilde{V}_{A_1}$	[0〜80]	dB
位相雑音（シード光）	$\tilde{V}_{A_2}$	[0〜80]	dB
振幅雑音（ポンプ光）	$\tilde{V}_{B_1}$	[0〜130]	dB
位相雑音（ポンプ光）	$\tilde{V}_{B_2}$	[0〜130]	dB
位相揺らぎ（ホモダイン）	θ_{rms}	[0.01〜3]	degree
detuning(温度, 平均)	$\bar{\Delta}T$	$[10^{-1} \sim 10^1]$	K

シード光

スクイーズド真空場の生成では入力基本波は真空場なので, その雑音は全ての周波数帯に渡って $\tilde{V}_1^{(\mathrm{A,in})} = \tilde{V}_2^{(\mathrm{A,in})} = 1$ である。しかし実際には主にホモダイン検出器からの戻り光により, 低周波領域で $1/f$ のスペクトルが現れる。そこで, 戻り光に対して影響を受けないボウタイ型キャビティを構成するが, 右回りモードと左回りモードの間のカップリングは 0 ではないため, この効果を考慮にいれる必要がある。実験の際には, ホモダイン検出器の PD とレーザー光がブリュースター角をなすように配置する対処法が考えられる。また, SHG の変換効率が 100% ではないため, SHG から出る基本波の振幅をダイクロイックミラーで十分に減衰させる必要がある。

ポンプ光

ポンプ光の雑音 $\tilde{V}_1^{(\mathrm{B,in})}, \tilde{V}_2^{(\mathrm{B,in})}$ は (2.250), (2.255) のように $\bar{a}^2$ に比例する。従って, $|\bar{a}|\delta\hat{b} \ll |\bar{b}|\delta\hat{a}$ であれば無視できるが, ポンプ光の雑音が大きいときは問題となりうる。

フォトサーマル雑音

フォトサーマル雑音にかかわる物性値は表 4.2 の値を用いた。

表 4.2: フォトサーマル雑音に関連したパラメータ

パラメータ	記号	値	単位
結晶の熱吸収率（1064nm）	$\sigma_a^{(\mathrm{abs})}$	0.1	% /cm
結晶の熱吸収率（532nm）	$\sigma_b^{(\mathrm{abs})}$	0.1	% /cm
結晶の比熱	C	687	J/kg/K
結晶の密度	ρ	3.01	g/cm^3
結晶の熱伝導率	κ	13	W/K/m
結晶の熱膨張係数	α	5×10^{-6}	1/K
フォトリフラクティブ係数	$\frac{dn}{dT}$	37.0 $\times10^{-6}$	1/K

キャビティの detuning

地面振動などによりキャビティ長には揺らぎ δx が伴う。これによって [37]

$$\langle|\delta\triangle_a^{(\mathrm{c})}|^2\rangle = \left(\frac{2\pi c}{\lambda_a L}\right)^2 \langle|\delta x_a|^2\rangle \tag{4.21}$$

のように, 共振周波数からのずれが生じる。ここで, λ_a は基本波の波長で, L はキャビティの光路長である。

phase jitter

直交位相振幅の揺らぎをホモダイン測定により測定する際, 二つの入力の相対位相に応じた直交位相振幅が測定できる。この相対位相は制御中においても揺らいでおり, 以下のようにアンチスクイーズド成分がスクイーズド成分に混入して測定されてしまう。位相揺らぎの無い (2.260) が

$$\acute{\tilde{V}}_\pm \approx \tilde{V}_\pm \sin^2\theta + \tilde{V}_\mp \cos^2\theta \tag{4.22}$$

となる [35]。ここで, θ は相対位相の rms 振幅である。従って, 相対位相の制御（ホモダインアングルの制御）は高レベルスクイージングの実現のために非常に重要であり, アンチスクイージングレベルが高くなり過ぎないところでパラメトリックゲインを制御する方が良い場合もある。

検出効率

ホモダイン測定

LO 光と信号光の間のモードミスマッチはビームスプリッタで不完全な干渉をもたらし, 測定の効率を下げることになる。この検出効率はビジビリティの 2 乗で与えられる。

$$\eta_{\mathrm{homo}} = \left(\frac{I_{\mathrm{max}} - I_{\mathrm{min}}}{I_{\mathrm{max}} + I_{\mathrm{min}}} \right)^2 \tag{4.23}$$

ここで, $I_{\mathrm{max}}, I_{\mathrm{min}}$ はそれぞれ PD で測定される干渉縞の最大値及び最小値である。

フォトディテクター

フォトダイオードにおける光起電力効果では光子から電子へのエネルギー変換効率が 100% ではなく

$$\eta_{\mathrm{PD}} = \frac{\hbar c}{\lambda e} \frac{I}{P} \tag{4.24}$$

となるため, 測定の際にはロスとなる。ここで c は真空中の光速, $\hbar$ はディラック定数, e は素電荷, λ はレーザー光の波長, I は検出器での光電流, P 入射光のパワーである。更なる効率の上昇のために PD の保護窓を取り外す等の対策が必要となる。

光学的なロス

OPO からホモダイン検出器までの間にあるミラーやレンズなどにより光学的なロスがもたらされる。これは数学的には透過率 $T = 1 - L$ で表されるビームスプリッターで真空場が混入するモデルで表される。

$$\acute{\hat{a}} = \sqrt{T}\hat{a} + \sqrt{1-T}\hat{v} \tag{4.25}$$

ここで, $\hat{a}$ は入射光, $\acute{\hat{a}}$ はロスを被った後の光, $\hat{v}$ は真空場である。ロスを被った光の光子数は

$$\begin{aligned} \acute{\hat{a}}^\dagger \acute{\hat{a}} &= T\hat{a}^\dagger \hat{a} + \sqrt{T(1-T)}(\hat{a}^\dagger \hat{v} + \hat{v}^\dagger \hat{a}) \\ &= T\bar{a}^2 + \sqrt{T}\bar{a} \left(\sqrt{T}\delta \hat{X}_1^{(a)} + \sqrt{1-T}\delta \hat{X}_1^{(v)} \right) \end{aligned} \tag{4.26}$$

となり, ここでは線形化を行った。このとき, 光子数の分散は

$$\tilde{V}_1^{(\acute{a})} = T\tilde{V}_1^{(a)+(1-\tilde{V})} \tag{4.27}$$

となり, 光学的なロスにより検出効率は

$$\eta_{\mathrm{loss}} = T = 1 - L \tag{4.28}$$

で表される。

以上の結果をまとめると, 直交位相振幅の分散は $\tilde{V} \to \eta_{\mathrm{homo}}\eta_{\mathrm{PD}}\eta_{\mathrm{loss}}\tilde{V} + (1 - \eta_{\mathrm{homo}}\eta_{\mathrm{PD}}\eta_{\mathrm{loss}})$ となる。これと phase jitter を考慮に入れると

$$\begin{aligned} \acute{\tilde{V}}_{\pm} &\approx \eta_{\mathrm{homo}}\eta_{\mathrm{PD}}\eta_{\mathrm{loss}} \left[\tilde{V}_{\pm} \sin^2\theta + \tilde{V}_{\mp} \cos^2\theta \right] + (1 - \eta_{\mathrm{homo}}\eta_{\mathrm{PD}}\eta_{\mathrm{loss}}) \\ &= \tilde{V}_{\pm}^{(\mathrm{det})} \sin^2\theta + \tilde{V}_{\mp}^{(\mathrm{det})} \cos^2\theta \end{aligned} \tag{4.29}$$

となる。ここで

$$\tilde{V}_{\pm}^{(\mathrm{det})} = 1 \pm 4\eta_{\mathrm{homo}}\eta_{\mathrm{PD}}\eta_{\mathrm{loss}} \frac{x}{(1 \mp x)^2} \qquad \tilde{V}_{\pm}^{(\mathrm{det})} = 1 \mp 4\eta_{\mathrm{homo}}\eta_{\mathrm{PD}}\eta_{\mathrm{loss}} \frac{x}{(1 \pm x)^2} \tag{4.30}$$

である。

GRIIRA

GRIIRA(Green-Induced Infrared Absorption) とは非線形光学結晶にポンプ光（Green）を入力すると, それに伴いシード光 (IR) の吸収が誘発される効果である。しかし KTP 及び PPKTP に関して言えば GRIIRA の影響は大きくない [6]。

4.1.3　結果

表 4.1 のパラメータのスクイージングレベルに応じた分布を求めた。また, Raftery & Lewis の方法により 0.975 分位数を推定した。これによりスクイーズド真空場を生成するために最低限満たすべき値を推定した。

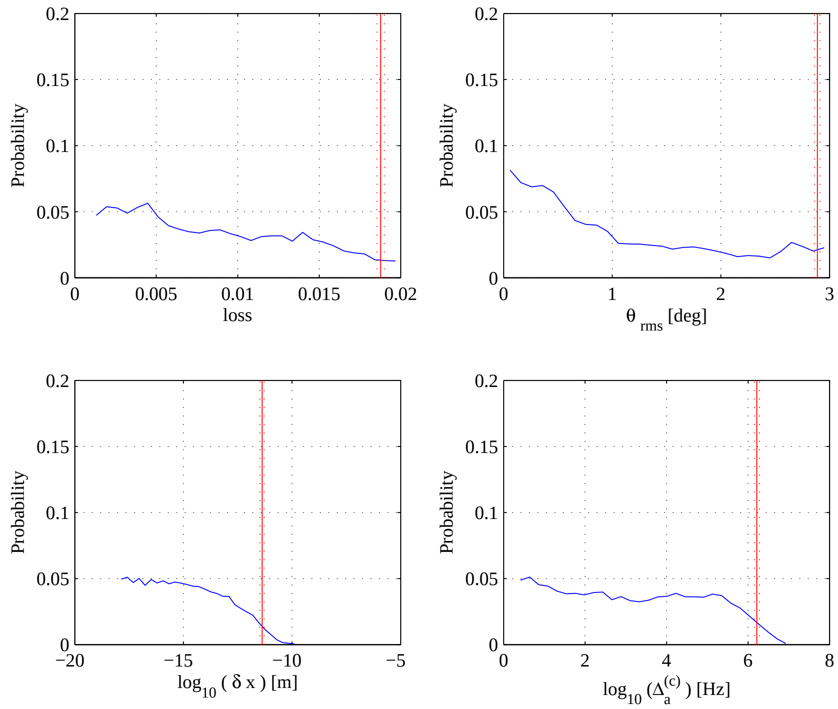


図 4.2: キャビティの周回損失, 測定の際の位相の揺らぎ, キャビティ長揺らぎ, キャビティ長の detuning のスクイージングレベルに応じた分布を示す。赤の実線は 0.975 分位数を表し点線はその許容誤差の範囲を表す。続く 3 つのグラフも同様である。

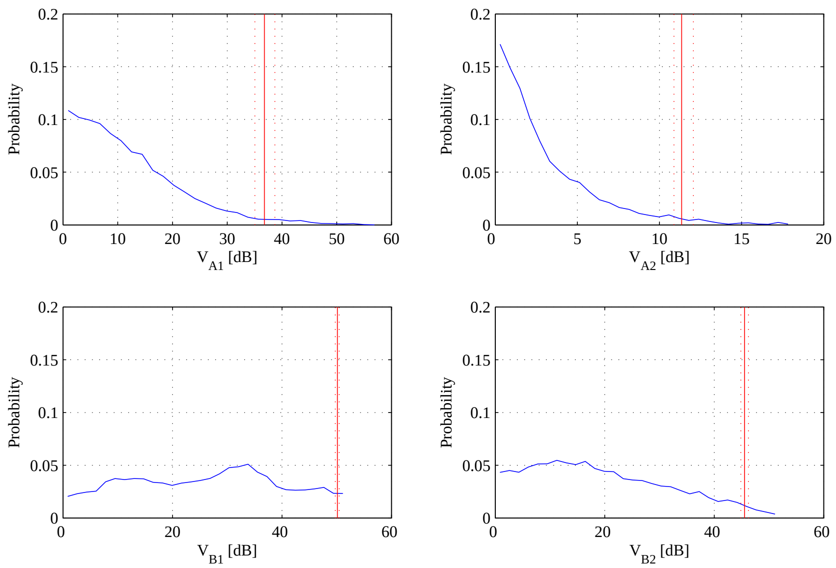


図 4.3: シード光及びポンプ光の phase quadrature 及び amplitude quadrature の雑音のスクイージングレベルに応じた分布を示す。

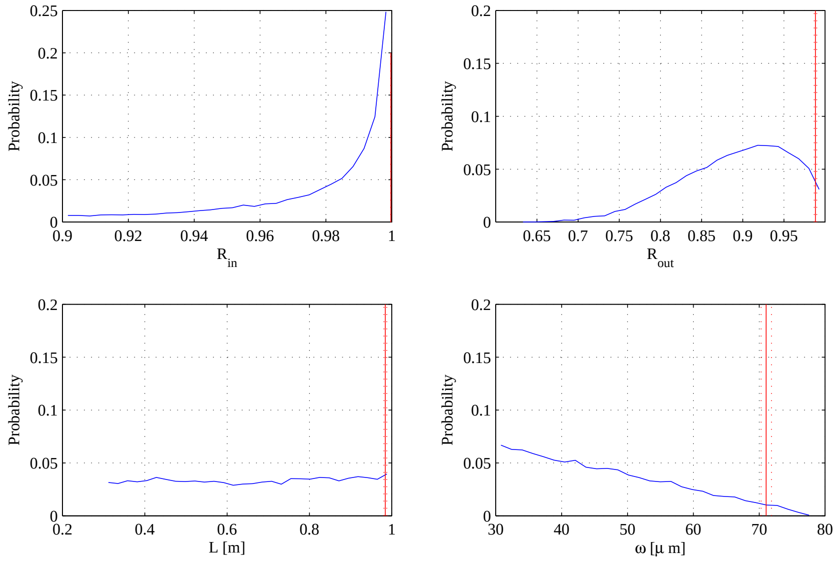


図 4.4: インプットミラー及びオウトプットミラーの反射率, キャビティ長, 結晶中におけるレーザー光のウエストサイズのスクイージングレベルに応じた分布を示す。

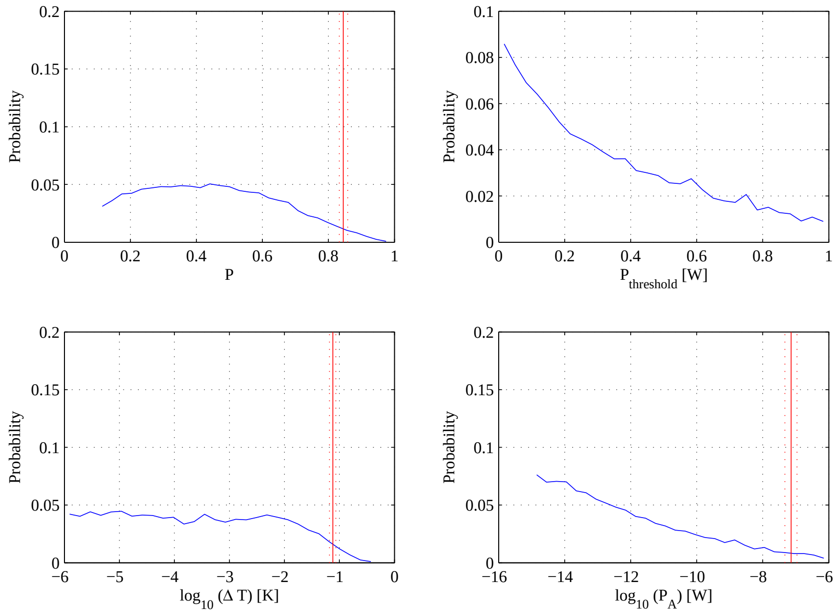


図 4.5: ポンプ光のパワーを発振閾値で規格化したものと位相整合温度からのずれ, シード光強度のスクイージングレベルに応じた分布を示す。また, 右上の図は発振閾値の分布であり, 実験で得た SHG からの出力は 550mW であったのでアウトプットミラーの計算範囲が少し広過ぎたことが分かる。

表 4.3: 図 4.2, 図 4.3, 図 4.4, 図 4.5 の結果をまとめた。(4.11) の Z 値は全て要求値を満たしている。

パラメータ	記号	単位	分位数	95% 信頼区間	Z
反射率（インプット）	R_{in}	-	0.999	-	0.44
反射率（アウトプット）	R_{out}	-	0.988	[0.986〜0.990]	-0.08
キャビティ長	L	m	-	-	0.18
ウェストサイズ	ω	μ m	69.3	[68.5〜70.0]	-0.11
キャビティの周回損失	loss	-	0.0195	[0.0193〜0.0196]	-0.16
位相揺らぎ（ホモダイン）	θ_{rms}	degree	2.70	[2.64〜2.76]	-0.10
detuning（キャビティ長, 揺らぎ）	δx	m	$10^{-11.4}$	[$10^{-11.5}$〜$10^{-11.3}$]	0.006
detuning（周波数, 平均）	$\bar{\triangle}_a^{(c)}$	Hz	$10^{6.45}$	[$10^{6.41}$〜$10^{6.52}$]	-0.46
振幅雑音（シード光）	$\tilde{V}_{A_1}$	dB	35.6	[34.8〜37.0]	-0.07
位相雑音（シード光）	$\tilde{V}_{A_2}$	dB	12.7	[12.1〜13.4]	-0.04
振幅雑音（ポンプ光）	$\tilde{V}_{B_1}$	dB	124	[123〜125]	-1.3
位相雑音（ポンプ光）	$\tilde{V}_{B_2}$	dB	112	[110〜113]	0.19
パワー（ポンプ光）	$\bar{P}_B$	-	0.851	[0.834〜0.865]	-0.11
detuning（温度, 平均）	$\bar{\triangle}T$	K	$10^{-1.05}$	[$10^{-1.11}$〜$10^{-0.987}$]	0.11
パワー（シード光）	$\bar{P}_A$	W	$10^{-7.11}$	[$10^{-7.29}$〜$10^{-6.93}$]	0.05

以上の図において その分布が”寝る（傾き 0）”領域においてはそのパラメータはスクイージングレベルの大きさにとってもはや区別がつかない領域であり, どこまでも”寝ない”パラメータはスクイージングレベルに対し大きな寄与を与える。つまり, キャビティの周回ロス（インプットミラーの反射率）, 位相揺らぎ, シード光の雑音及びコヒーレントな振幅, ウエストサイズ（レイリーレンジとの兼ね合いがあり, 小さすぎると効率が下がるが, 効率の下がらない範囲内において）は可能な限り小さい方がよい。

実験の際に決めるべきパラメータはミラーの反射率やキャビティ長, 結晶中のウエストサイズであり, この結果からアウトプットミラーの反射率 99.95% , インプットパワーの反射率 $88\%, 93\%$, ウエストサイズ 30μ m, キャビティ長 708mm とした。

4.2　スクイーズド光生成実験

この節では実験装置の詳細について説明する。主な実験装置は図 4.6 のように, 第二次高調波生成のための SHG, スクイーズド真空場生成のための OPO, LO 光に対する MC, そしてスクイーズド真空場を測定するためのホモダイン検出器からなる。これらに加えて, OPO のキャビティ長の制御のためにセカンドレーザーを用いており, 実験スペースの問題を解消するためにセカンドレーザーからの光はファイバーで引き回している。

それぞれの役割について簡単に説明する。SHG では入射した波長 1064nm のレーザー光がアップコンバージョンし波長 532nm の第二次高調波に変換される。これをポンプ光として利用する事で, OPO において波長 1064nm のシード光をダウンコンバージョンさせてスクイーズド光を生成する。スクイーズド真空場の生成のためには入力のシード光は真空場である必要があり, そのために OPO におけるダウンコンバージョンとは相互作用しないようにキャビティを 1064nm に対し制御する必要がある。本実験のように OPO をボウタイ型のキャビティで構成する場合は, スクイーズド真空場の生成とは逆回りのモードを用いる事で, お互いに干渉することなく OPO の制御が可能である。しかし, 第 4.2.1 節でも述べるように, カップリングが非常に大きかったため, OPO の制御にはセカンドレーザーからの出力を利用した。

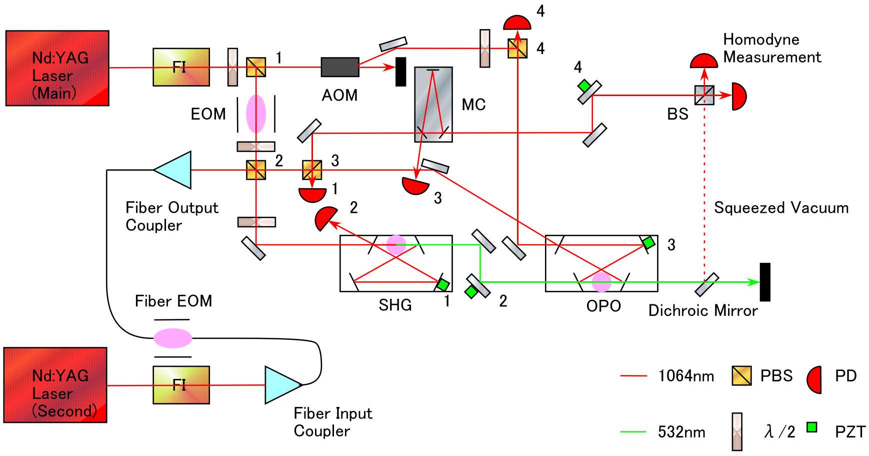


図 4.6: 実験装置の略図

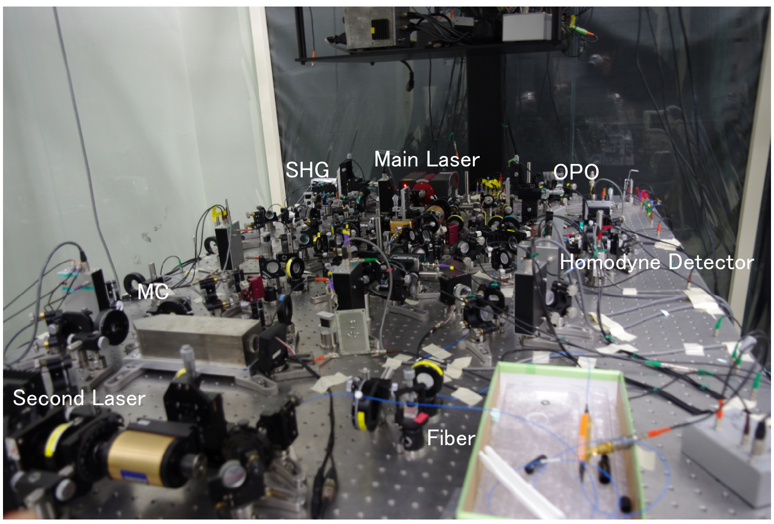


図 4.7: 実験装置。実験はクリーンブース内で行っている。

4.2.1　光源

光源には InnoLight の Mephisto/Prometheus Laser Series III (メインレーザー) と Lightwave Electronics の 126-1064-50(セカンドレーザー) を用いた。波長は共に 1064nm であり, 出力はそれぞれ 2.14W, 50mW である。前者からのレーザー光は SHG, OPO, MC に利用し, 後者のレーザー光は OPO のキャビティ長制御のために利用した。

メインレーザーからの出力はまずペリスコープにより光学定盤から約 1.9 インチの高さまで下げた。これは 1 インチのペデスタルと 1 インチのミラーホルダーを組み合わせた場合の高さに相当しており, 実験系全体を低くする事で振動の影響を抑える事を狙った。ペリスコープによって下げられた光をステアリングミラー及び $\lambda/2$ 板, $\lambda/4$ 板, レンズ (焦点距離 200mm) を透過させ, ファラデーアイソレータの透過光が最大となるような偏光, アライメントに調整しアイソレータからの透過光パワーは 1.9W となった。 光源からのビーム系が距離 103mm においてウエストサイズ 0.107mm であるようなビームであったため, ここでレンズに通す事でアイソレータの損傷閾値 500W/cm^2 を超えずにかつロスが小さくなるようにビーム径を操作した。

セカンドレーザーからの出力はまずステアリングミラー及び $\lambda/2$ 板, $\lambda/4$ 板, レンズ (焦点距離 100mm) を透過させファラデーアイソレータの透過光が最大となるような偏光, アライメントに調整しレーザーパワーは 40mW となった。このレンズによってファイバーのインプットカップラとモードを合わせて, ファイバからは 15mW の出力を得た。OPO のキャビティ長の制御と PLL のために合わせて 10mW 程度あれば十分であるためファイバのカップリングはあまり改善させていない。

当初のセットアップでは光源は 1 つであり, OPO のキャビティ長制御もメインレーザーを利用して行う予定であった。しかし, OPO においてスクイーズド真空場を生成するモード (順周り) と制御のためのモード (逆回り) の間のカップリングが $1 \sim 2\%$ 程度あり, 制御のために数 mW のレーザー光を入射していたためこのままでは真空場を大いに汚す事となるので（図 4.5）急遽セカンドレーザーを利用することにした。そのため, 装置を置くためのスペースが足りなかったのでセカンドレーザーからのレーザー光はファイバーを用いて引き回している。

セカンドレーザーを利用する事で順周りの偏光 (s 波) と直交する光を逆回りに利用する事が可能となり両者のカップリングを抑える事が出来る。しかし, そのためには結晶における屈折率の違いを補償しかつ両者の周波数を同期させる必要があり, 本実験では 36.11MHz だけオフセットをのせた状態で同期をとった。セカンドレーザーを用いるならば, この補償のための周波数シフトに加え FSR の整数倍の周波数シフトを行えばより良いが, その為の装置が手元にないため現状では行っていない。また, セカンドレーザーからの出力が大きく揺らいでいたためレーザー光の強度安定化も行った。

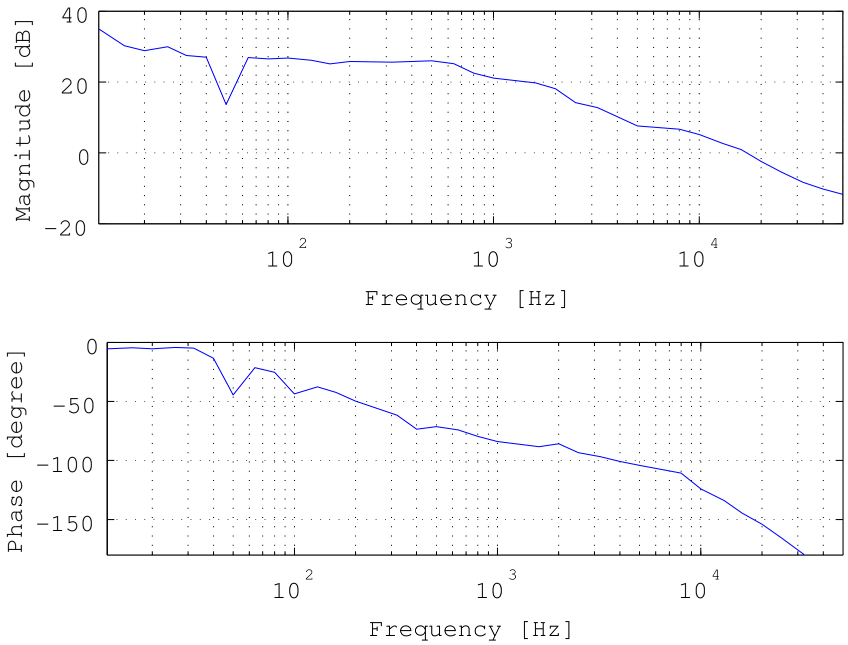
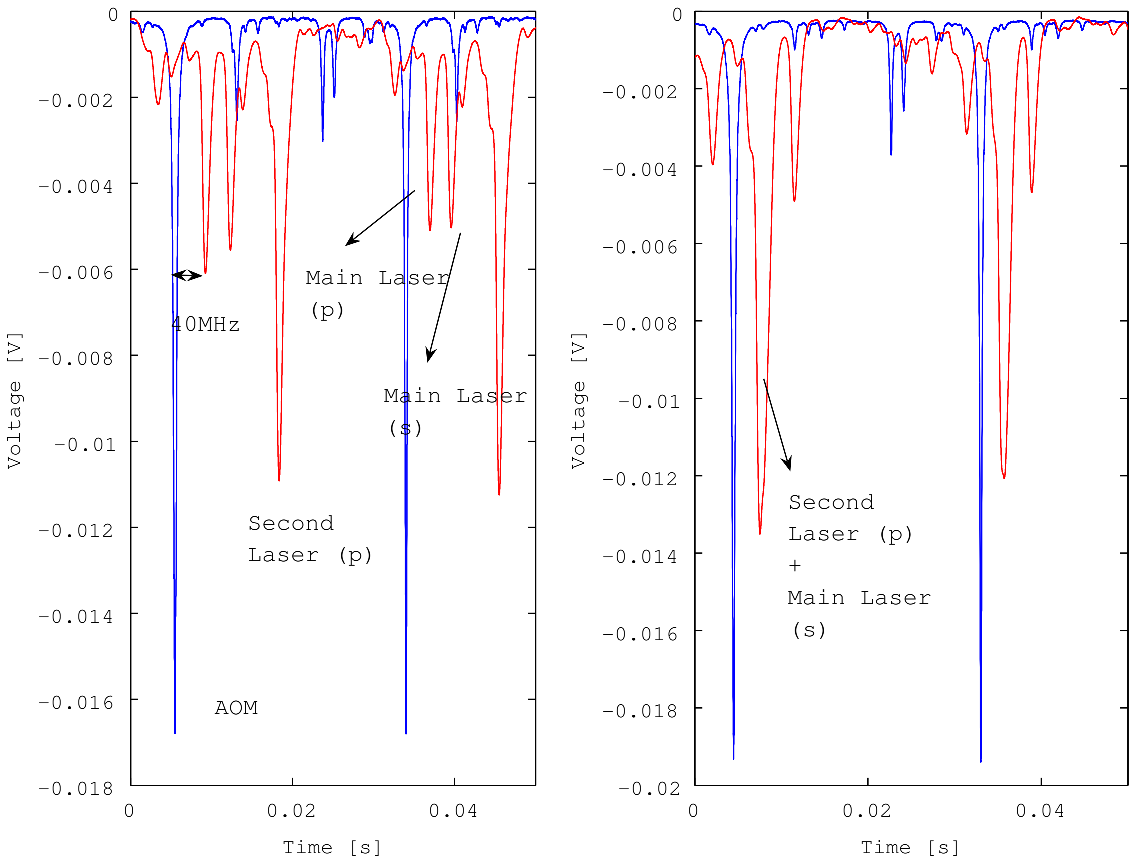


図 4.8: 2 台のレーザー間の周波数同期をとる制御のオープンループ伝達関数。ユニティーゲイン周波数は 10kHz 程度である。



ch

図 4.9: 左図:PLL 制御前の OPO の透過光強度。赤線は逆周りからの透過光であり, メインレーザーからの光（p 波, s 波）及びセカンドレーザーからの光（p 波）である。青線は順回りからの透過光であり, AOM を透過した 40MHz の周波数シフトを受けた光である。従って, PLL 制御は 36.11MHz の LO を入力して行った。右図:PLL 制御後の OPO の透過光強度。左図と概ね同じであるが, セカンドレーザーからの光（p 波）がメインレーザーからの光 (s 波) の共振点と同様の位置で共振している。

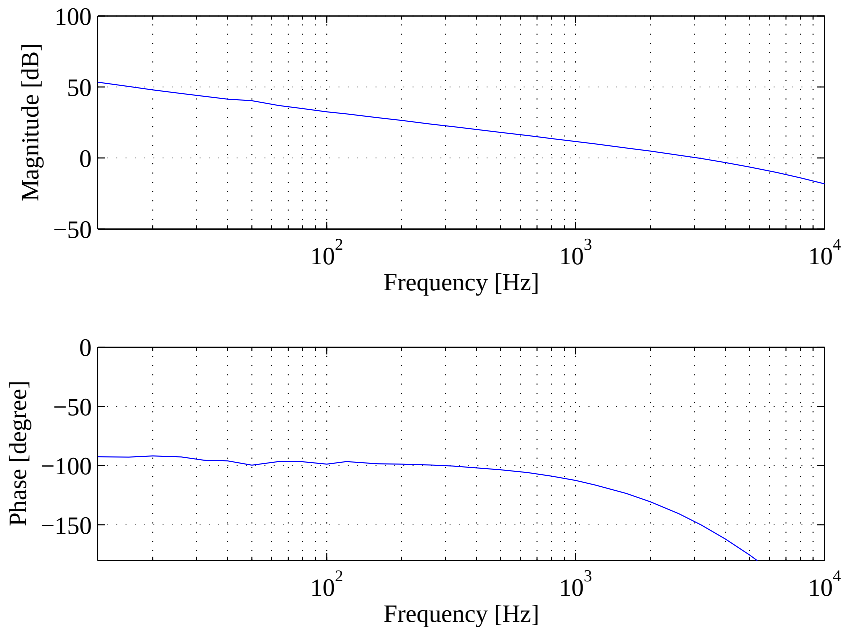


図 4.10: セカンドレーザーの強度安定化のオープンループ伝達関数。ユニティーゲイン周波数は 2kHz 程度である。

4.2.2 SHG

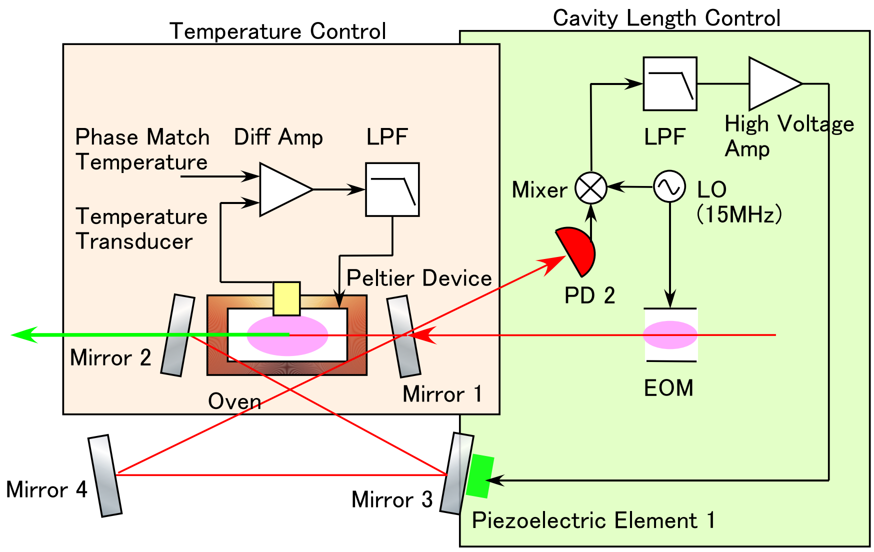


図 4.11: SHG では結晶の温度とキャビティ長を制御している。図 4.6 の PD, PZT の番号とは同じ対応関係である。

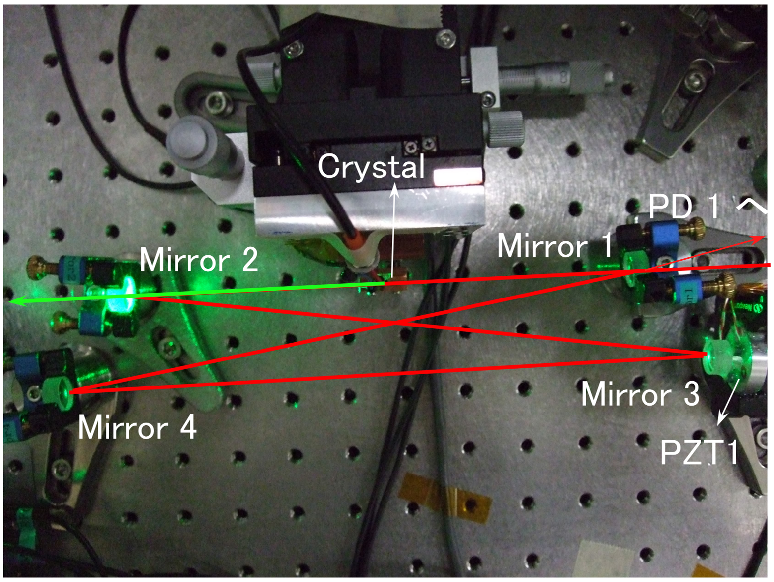


図 4.12: SHG

表 4.4: SHG の詳細

パラメータ	値
非線形光学結晶	PPKTP
インプットパワー（1064nm）	1.2 W
アウトプットパワー（532nm）	550 mW
反射率（ミラー 1, 2）	0.95, 0.999/0.17(IR/Green)
曲率 (ミラー 1, 2, 3, 4)	150 mm, 150 mm, flat, flat
ミラーの直径	1/2 inch
FSR	358MHz
フィネス	120
入射角	12
ウエストサイズ	60μm

OPO に入射するポンプ光を生成するために SHG を用いた。SHG はボウタイ型のキャビティで構成し（詳しくは表 4.4）, 結晶には PPKTP(サイズは 1 × 2 × 15mm で両端面ともに flat で AR コーティングをしている。) を用いた。結果, 550mW 程度の第二次高調波の出力が得られたので OPO への入力としては十分である。

メインレーザーのアイソレータからの透過光の内, 図 4.6 の PBS1 の反射光は EOM(New Focus のモデル 4003 を用いた。これはレゾナントタイプの EOM であり, 15MHz で変調をかけている。) を透過させ, 位相変調をかける事で第 2.6.1 節 で述べた PDH 法に利用する。EOM

からの透過光を再度 $\lambda/2$ 板に入射して PBS2 で p 波と s 波に分離した。その内の p 波を SHG で利用するが, SHG は s 波で 2 次の非線形光学相互作用を及ぼすので再度 $\lambda/2$ 板に通した（当然, 結晶の向きを変えるという選択肢も存在するが, 第 4.2.4 節で述べるような変更のためにこのようなセットアップとなった）。SHG で反射された光は, 入力が 1.2W 程度と非常に大きいため $\lambda/2$ 板と PBS にてパワーを調整したのちフォトディテクター (PD2) で検出し, ミキサーで LO（15MHz） と掛け合わエラー信号を取得した。SHG で生成した第二次高調波 (波長 532nm) のグリーン光は, ダイクロイックミラー（$R \geq 99.5(532\mathrm{nm}), T \geq 95(1064\mathrm{nm})$）によって OPO に導いた。

SHG では結晶の温度制御とキャビティ長制御を行っており, それぞれ制御ループのオープンループ伝達関数は図 4.13, 図 4.14 のようになった。結晶は銅製のオーブンで覆い, それはペルチェ素子と接している。オーブンにはトランスデューサ（AD590）を取り付けており, その出力から温度制御用のエラー信号を取得した。オーブンの伝達特性が遅いのは現在のセッティングがオーブンの片面にのみペルチェ素子を付けているためであり, これは改良する必要がある。

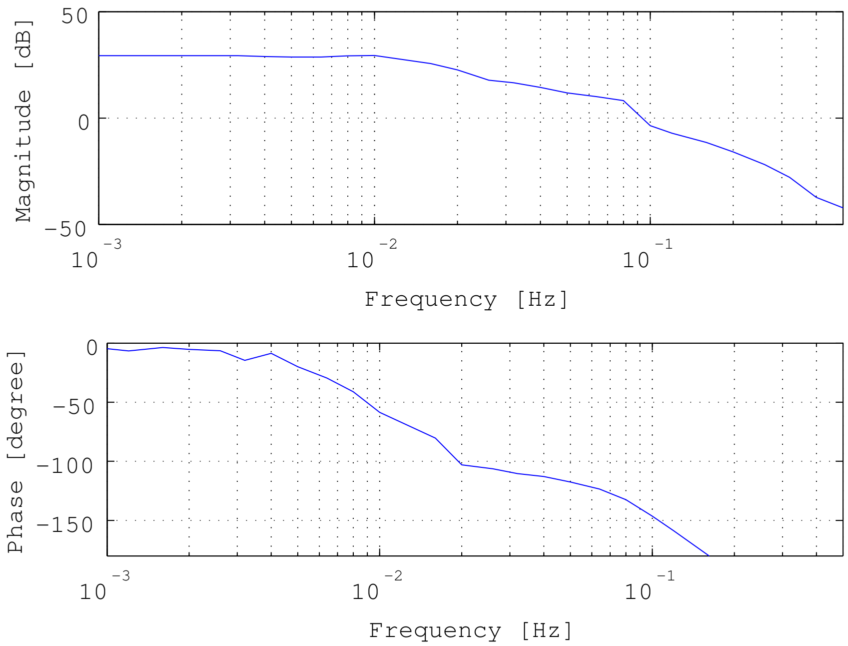


図 4.13: 非線形光学結晶の温度制御のオープンループ伝達関数。ユニティーゲイン周波数は 90mHz 程度である。

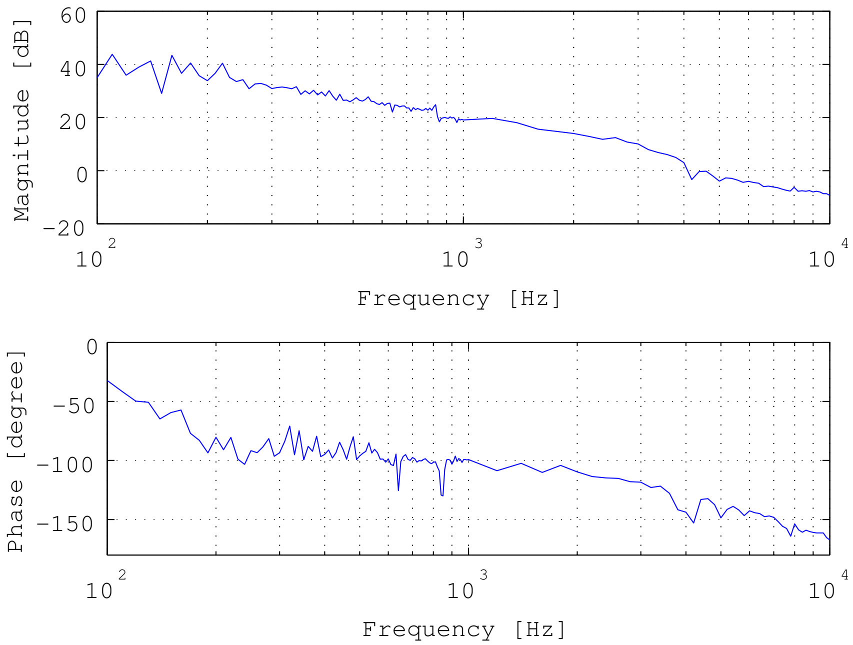


図 4.14: SHG のキャビティ長制御のオープンループ伝達関数。ユニティーゲイン周波数は 4kHz 程度である。

4.2.3　MC

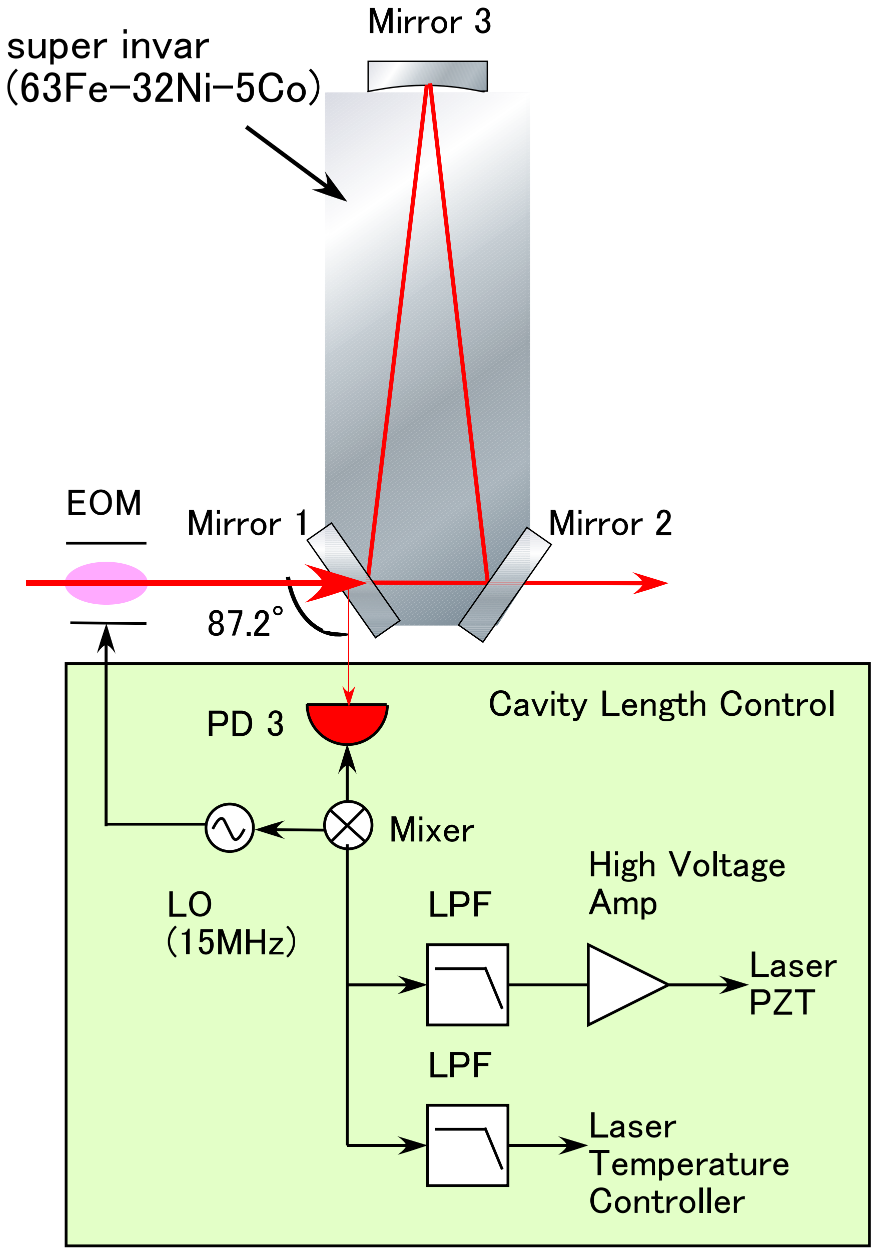


図 4.15: MC ではキャビティ長を制御している。図 4.6 の PD の番号とは同じ対応関係である。

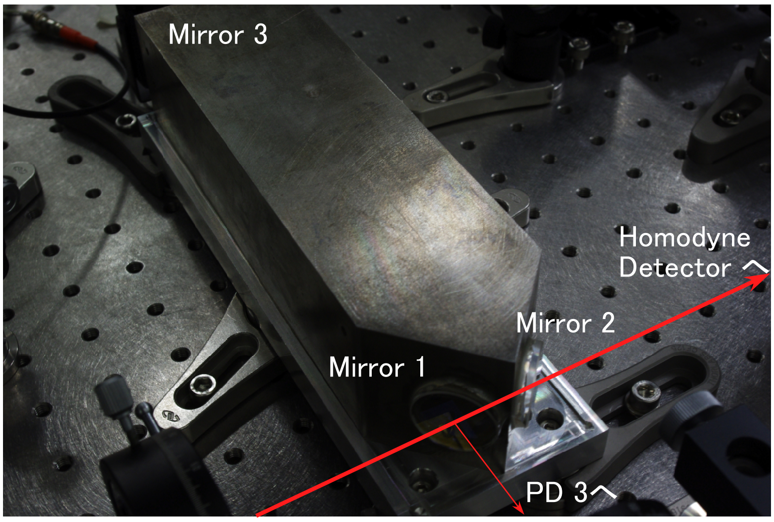


図 4.16: MC

表 4.5: MC の詳細

パラメータ	値
反射率（ミラー 1, 2, 3）	0.999, 0.999, >0.9999
曲率 (ミラー 1, 2, 3)	flat, flat, 300 mm
ミラーの直径	1 inch
FSR	720 MHz
フィネス	3140
入射角	43.6
ウエストサイズ	216μm

ホモダイン検出の際のビジビリティを上げ, さらにキャビティは光学的なローパスフィルターとして働くことから OPO への戻り光の効果を減少させる事も期待できるので LO 光をモードクリーナー (MC) に通した。また, キャビティ長制御のためにメインレーザーの周波数変調器（温調および PZT）にフィードバックする事で光源の安定化の意味もある。MC は以前他の実験 [38] で使用していたトライアングルキャビティであり, そのスペーサーはスーパーインバー製である。

EOM を透過し図 4.6 の PBS2 で分離された内の s 波は, 再び λ /2 板と PBS 3 によって分離させ s 波を MC で利用した。MC に向かった s 波は SHG 同様に MC の制御に用い (PD3), その透過光はホモダイン検出器に向かわせた。

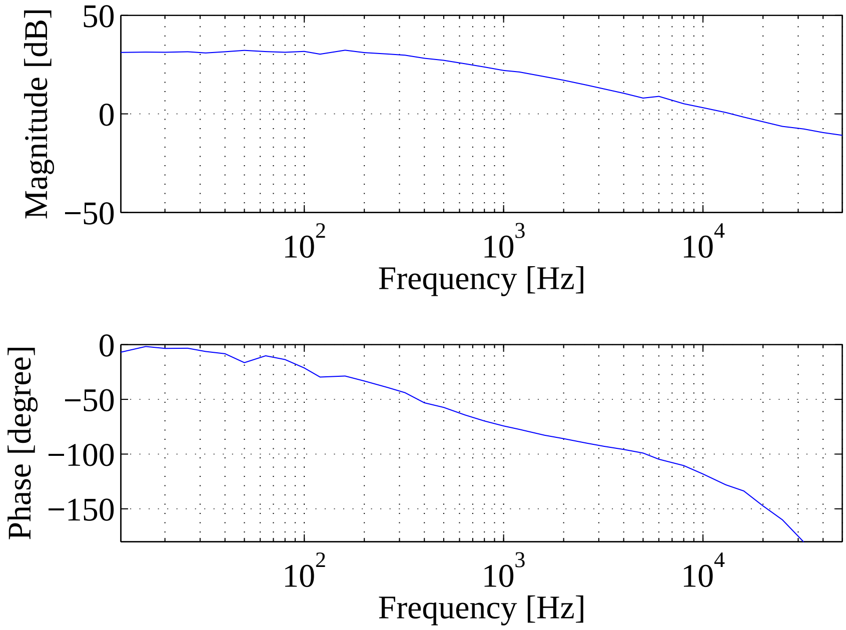


図 4.17: モードクリーナーのキャビティ長制御のオープンループ伝達関数。ユニティーゲイン周波数は 10kHz 程度である。

4.2.4 OPO

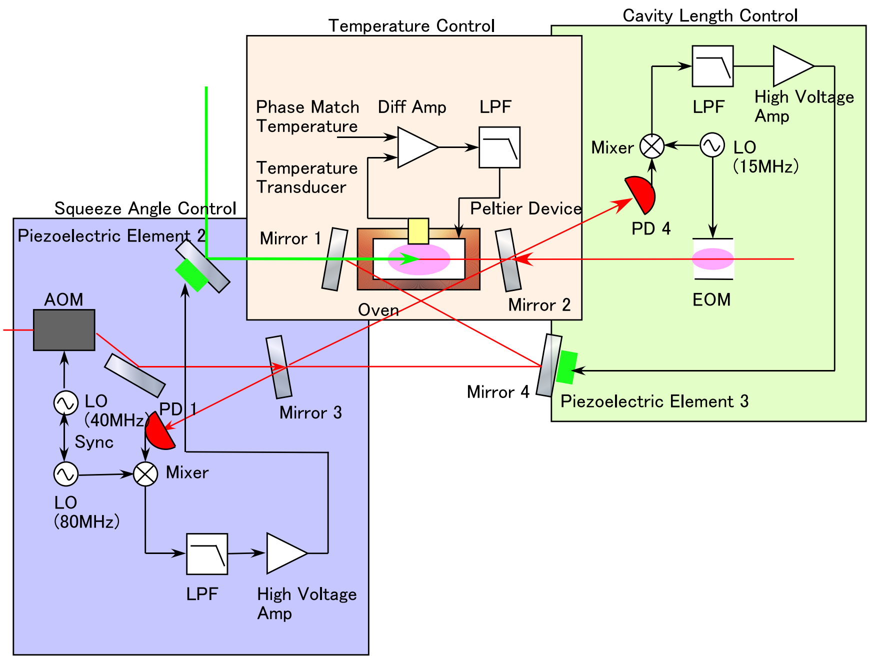


図 4.18: OPO では結晶の温度とキャビティ長とスクイーズアングルの制御を行う。図 4.6 と配置が一部異なるが PD, PZT の番号の対応は同じである。

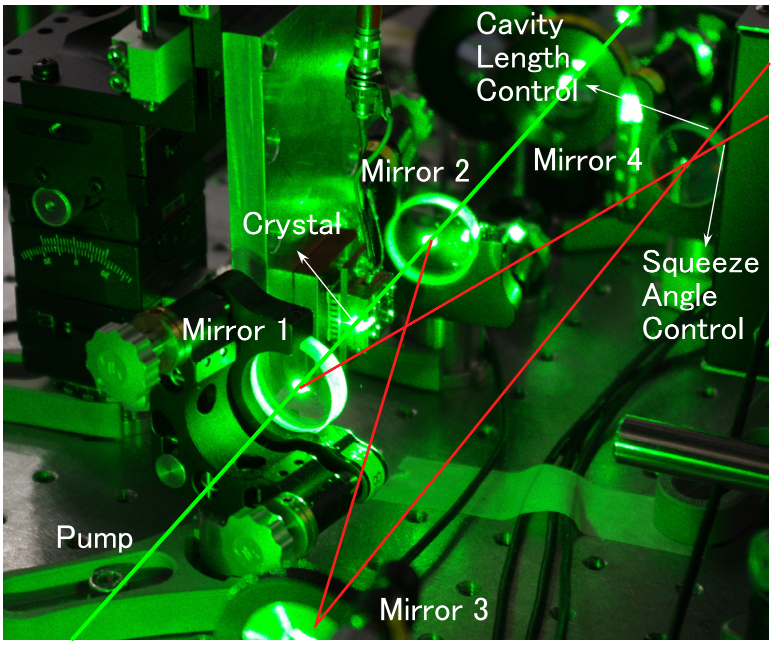


図 4.19: OPO

表 4.6: OPO の詳細

パラメータ	値
非線形光学結晶	PPKTP
シードパワー	<20 nW
ポンプパワー	<300 mW
透過率（ミラー 2）	0.12/AR(IR/Green)
曲率 (ミラー 1, 2, 3, 4)	75 mm, 75 mm, flat, flat
ミラーの直径 (ミラー 1, 2, 4)	1 inch
ミラー 3 の直径	1/2 inch
FWHW	7.4 MHz
フィネス	49.4
入射角	12
ウェストサイズ	29μm

OPO では結晶に PPKTP を用いて, SHG の場合と同様に温度制御を行った。また, キャビティ長の制御をセカンドレーザーからの光を逆回りに入射することで行った。そのオープンループ伝達関数は図 4.20 である。

当初のセットアップでは, 図 4.6 の PBS2 はピックオフミラー（反射率 2% 程度）であり, その反射光を λ/2 板及び PBS3 に透過させ p 波と s 波に分離し, それぞれ OPO と MC に利用し

ていた。しかし, OPO のミラーはインプットミラーが反射率 88%, アウトプットミラーが反射率 99.95% であり, 小さなレーザーパワーではアライメント調整が困難であったためピックオフミラーの部分を λ /2 及び PBS2 へと変更した。そして, PBS3 を透過した p 波とセカンドレーザーからの出力が重ね合わされ , 図 4.6 の PD4 でうなりの検出を行い PLL でセカンドレーザーの周波数を制御した。

SHG で生成した波長 532nm のポンプ光を入射し, シード光に 1064nm のレーザー光を入射する事で OPO でパラメトリック増幅（または減衰）するので, そのゲインが 3dB, 20dB, 40dB となるポンプ光強度と発振閾値を実測した。更に, OPO のキャビティ長制御をかけた状態で AOM からの 40MHz の周波数シフトをかけた光を順周りに入射し, PZT3 に正弦波信号を入力する事で スクイーズアングル制御用のエラー信号を取得した。これらはそれぞれ図 4.21 図 4.22 である。ちなみに, 図 4.6 には記していないが, SHG と OPO の間には 532nm 用の PBS と λ/2 板が配置しており, ポンプ光強度を調整している。

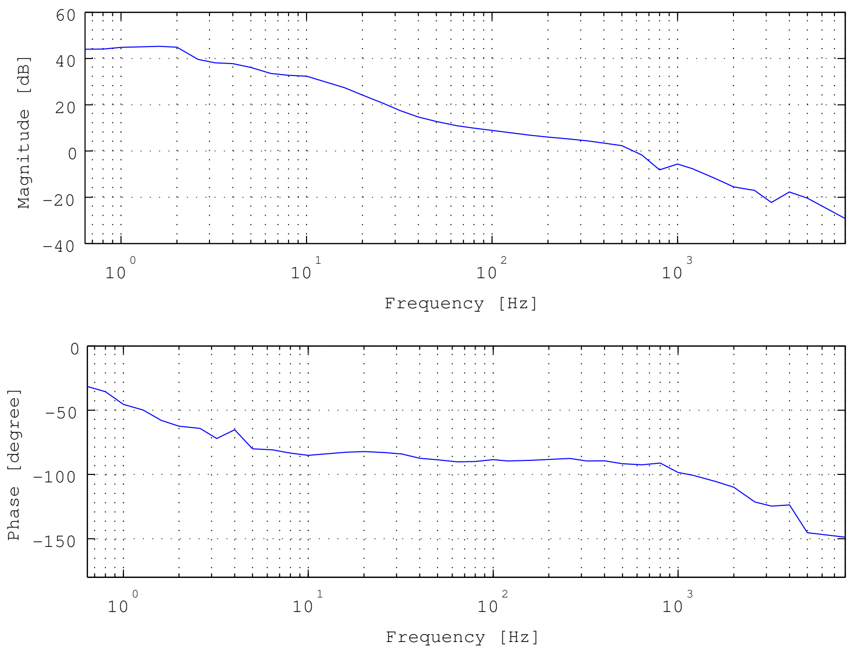


図 4.20: OPO のキャビティ長制御のオープンループ伝達関数。ユニティーゲイン周波数は 600Hz 程度である。

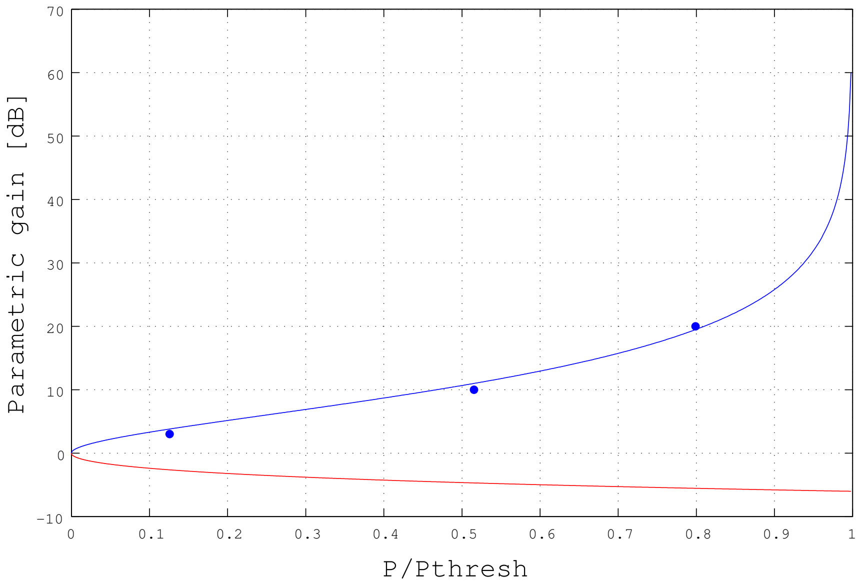


図 4.21: パラメトリックゲインが 3dB, 20dB, 40dB となる 3 点と発振閾値を測定した。実線は発振閾値 $194mW$ から得た理論値である。

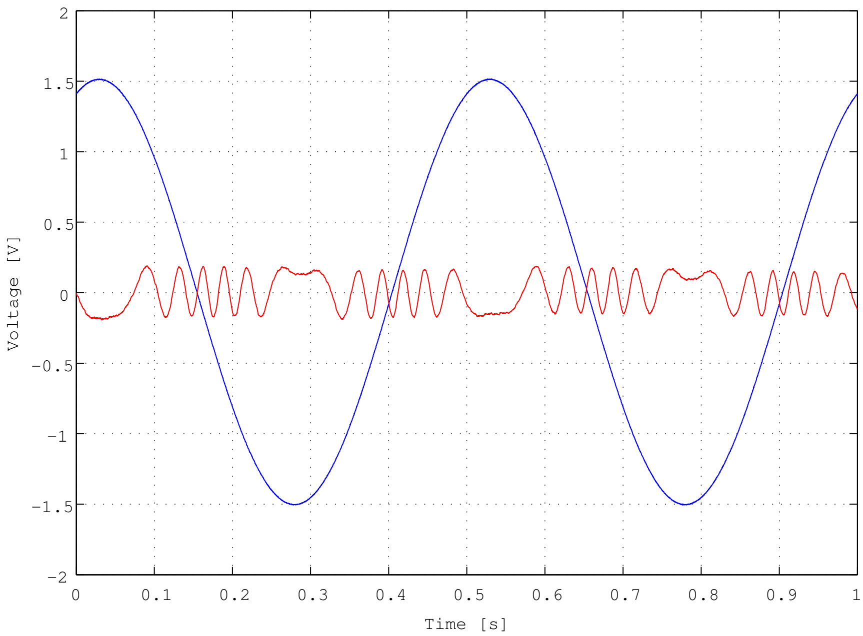


図 4.22: スクイーズアングル制御のエラー信号。青線は図 4.18 の PZT2 への入力電圧を表し，赤線がエラー信号を表す。

4.2.5　ホモダイン検出器

ホモダイン検出のための回路を作製した。現在はスクイーズアングルの制御を行っている最中であり, それが終わればLO光とOPOからの出力の間のモードマッチを行いビジビリティを上げてホモダイン測定に取り組む。

4.3　結果とまとめ

近い将来に大型低温重力波望遠鏡（LCGT）の検出感度は量子雑音に制限される程度となる見込みであり, その対策としてスクイーズド真空場を利用した方法が期待されている。そのためにまずスクイーズド真空場の生成を目指した実験を行った。本研究ではスクイーズド真空場の生成を確認するには至らなかったが, その兆しを確認することができた。また, スクイーズド真空場生成のために満たすべき雑音の上限値を見積もった。結果として, キャビティの周回ロス, , ホモダイン検出の際の位相揺らぎ, シード光の雑音及びそのコヒーレントな振幅を小さく抑える事が重要であることが分かった。これらの事に注意して実際にスクイーザーの製作に取り組み以下のような結果を得た。

- SHGで約550mWの第二次高調波を生成した。
- セカンドレーザーによってOPOの制御を行った。
- OPOにおいてダウンコンバージョンを確認した。

以上のように, 実験はまだ途中の段階ではあるが, 図4.22及び(2.372)から, OPOでのダウンコンバージョンを確認するところまで到達した。従って, 既にスクイーズド真空場の生成ができている可能性は十分にある。スクイーズド光の生成を終えたらレーザー干渉計型重力波検出器の散射雑音の低減を目指すので, スクイーズアングルはパラメトリック減衰するように制御する必要がある。そして生成したスクイーズド真空場をマイケルソン干渉計のダークポートに入射し散射雑音の低減を確認したいと考えている。

現在の世界におけるスクイーズド光を利用した重力波検出器への応用としては, 単純なマイケルソン干渉計の散射雑音の低減のみならず, 吊るしたミラーで構成したマイケルソン干渉計の散射雑音の低減や高周波領域におけるスクイーズアングルに周波数依存性を持たせたスクイーズド真空場(frequency-dependent squeezed vacuum)生成や, 低周波(1Hz程度まで)におけるスクイーズド真空場の生成など数々の成果が報告されている。今回の実験ではスクイーズド真空場の生成には至らなかったが一刻も早く世界のレベルに並び, まだなされていない実験（例えば低周波における周波数依存性を持たせたスクイーズド真空場の生成）に挑みたい。

補遺

実験に使用した回路は全て自作したものである。それらの電気回路のうち重要なものを示す。

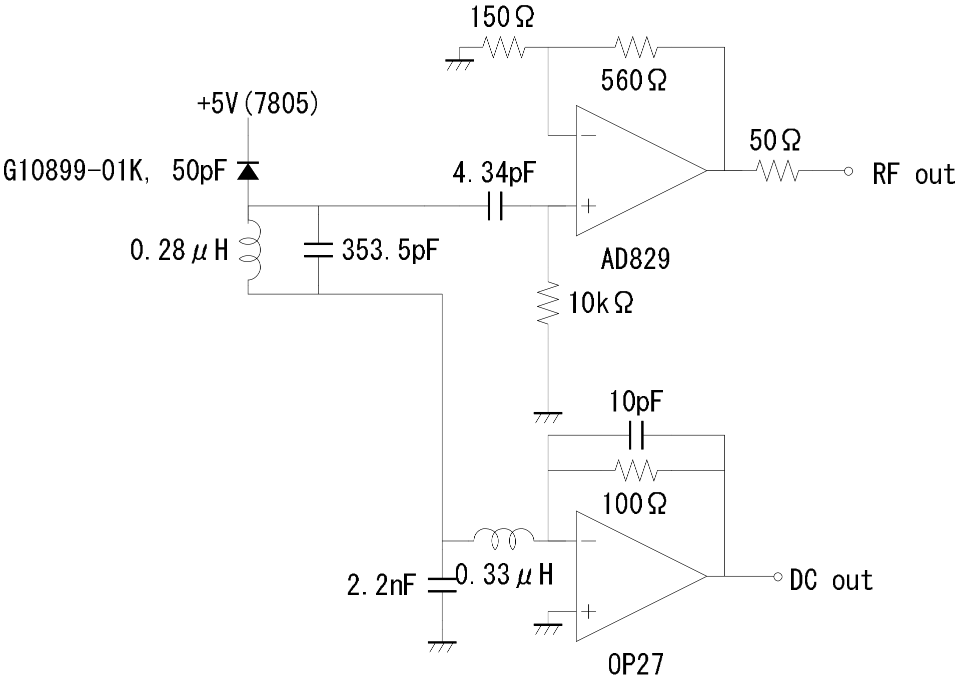


図 4.23: フォトディテクター。キャビティ長制御用の 15MHz 成分を検出するための共振回路を組み込んでいる。これの他に, 40MHz, 80MHz 用のものをそれぞれホモダインアングル制御とスクイーズアングル制御用に作った。

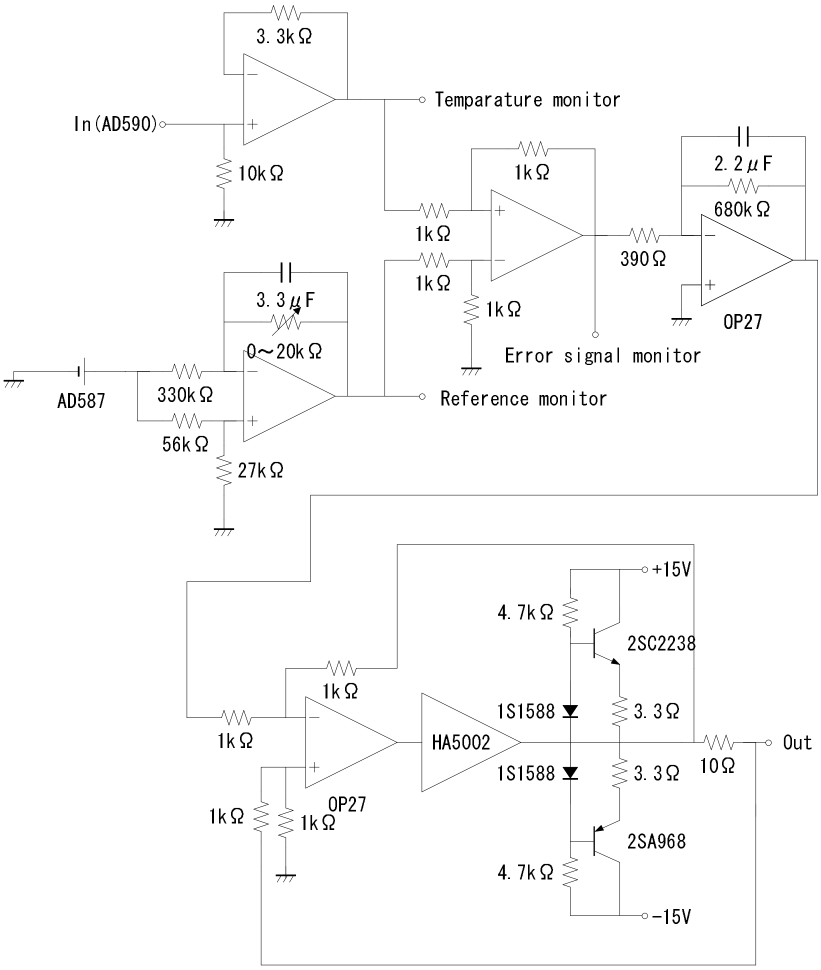


図 4.24: 温度制御用の回路

参考文献

[1] A. Einstein, Annalen der Physik, 49 (1916).

[2] J. H. Taylor and J . M. Wesberg, Astrophys. J, **345**:434, (1989).

[3] 中村 卓, 三尾典克, 大橋正健 編著, 「重力波をとらえる」, 京都大学学術出版会 (1998).

[4] C. M. Caves. Phys. Rev. Lett, **45**:75, 1980.

[5] C. M. Caves. Phys. Rev. Lett, **23**:1693, 1981.

[6] K.Goda, Ph.D. Thesis, Masachusetts Institute of Technology, Cambridge, (2007).

[7] Henning Vahlbruch, Alexander Khalaidovski, Nico Lastzka,Christian Gräf, Karsten Danzmann and Roman Schnabel, Class. Quantum Grav, **27**:084027, (2010)

[8] Henning Vahlbruch, Simon Chelkowski, Boris Hage, Alexander Franzen, Karsten Danzmann, and Roman Schnabel, Physical Review Letters, **95**:211102, (2005)

[9] 安東　正樹, 東京大学 修士論文 (1995).

[10] 麻生　洋一, 東京大学 修士論文 (2001).

[11] ランダウ, リフシッツ,「場の古典論」, 東京図書 (1964).

[12] 尾崎洋二, 「宇宙科学入門」, 東京大学出版会 (1996).

[13] H. Dimmelmeier, J. A. Font and E. Muller, Astronomy and Astrophysics, **388**: 917, 2002.
H. Dimmelmeier, J. A. Font and E. Muller, Astronomy and Astrophysics, **393**: 523, 2002.

[14] 副田 憲志, 東京大学 修士論文 (2003).
桝村 宰, 東京大学 修士論文 (2005).

[15] P. R. Saulson, ’Fundamentals of interferometeric gravitational wave detectors’, World Scientific (1994).

[16] 松岡正浩, 「量子光学」, 東京大学出版会（1996）.

[17] Amnon Yariv, ’Quantum Electronics’, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[18] T. Y. Fan, C. E. Huang, B. Q. Hu, R. C. Eckardt, Y. X. Fan, R. L. Byer, and R. S. Feigelson. Appl. Opt, **26**: 2394, 1987.

[19] C. Gardiner, ’Quantum Noise’, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[20] D. F. Walls and G. J. Milburn, ’Quantum Optics’, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[21] K. Goda, K. McKenzie, E.E. Mikhailov, P.K. Lam, D.E. McClelland, and N. Mavalvala, Phys.Rev.A, **72**:043819, 2005.

[22] M. Cerdonio, L. Conti, A. Heidmann, and M. Pinard, Phys.Rev. D, **63**:082003, 2001.

[23] M. De Rosa, L. Conti, M. Cerdonio, M. Pinard, and F. Marin,Phys. Rev. Lett, **89**:237402, 2002.

[24] A. E. Siegman, ’Lasers’, University Science Books, Mill Valley, California, 1986.

[25] Ping Koy Lam, Master ’s thesis, Physics Department, The Australian National University, Canberra, Australia, (1998).

[26] 日野幹夫, 「スペクトル解析」, 朝倉書店 (1986).

[27] R.W.P. Drever, J.L.Hall, et al, Appl. Phys. B-Photo , **31**, 97, (1983).

[28] S.Chelkowski, H.Vahlbruch, K.Danzmann, and R.Schnabel, Physical Review A,

[29] , 043814, (2007).

[30] H. J. Kimble, Y. Levin, A. B. Matsko, K. S. Thorne, and S. P. Vyatchanin, Phys. Rev. D, **65**:31, 2002.

[31] A. Buonanno and Y. Chen. Phys. Rev. D, **64**:042006, 2001.

[32] Geweke, J.,“ Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments, ”in Bayesian Statistics , Oxford University Press, (1992).

[33] Gelman, A. and Rubin, D.B,“ Inference from iterative simulation using multiple sequences (with discussion) ”, Statistical Science, (1992)

[34] By Imre Csiszar, Paul C. Shields, The Annals of Statistics, **28**:6, 1601-1619, (2000)

[35] Yuishi Takeno, Mitsuyoshi Yukawa, Hidehiro Yonezawa, and Akira Furusawa, OPTICS EXPRESS 4321, **15**:7, (2007)

[36] Henning Vahlbruch, Ph.D. Thesis, (2008).

[37] K. McKenzie, Ph.D. Thesis,Physics Department, The Australian National University, Canberra, Australia, (2008).

[38] 麻生　洋一, 東京大学 博士論文 (1995).

謝辞

指導教官である坪野公夫教授には興味深く, そしてやりがいのある研究テーマを与えて頂きました。同研究室の麻生洋一助教に数々の的確なアドバイスを頂きました。同研究室の院生の皆様には研究に対する姿勢を学ばせて頂きました。また, 特任研究員の平松成範教授や秘書の工藤伯子さん, 第 1 事務分室の上田美樹さん等の多くの方々の助けが無ければ本論文は決して完成しませんでした。心より感謝致します。