## 修士論文

## 巨視的量子現象の観測に向けた 光輻射圧による鏡の支持方法の開発

東京大学大学院理学系研究科 物理学専攻 安東研究室 35-146027 桑原祐也

> 2016年1月5日提出 2016年1月29日改訂 2016年12月19日改訂

概要

量子力学は巨視的な物体の位置の重ねあわせ状態を許すにもかかわらず、二重スリット実験に よって位置の重ねあわせ状態が確認されているのはフラーレンなどの分子までである。これまで にそれ以上の質量スケールで位置の重ね合わせ状態が観測された例はなく、観測問題とともに未解 決の問題である。この問題を説明すべく、コペンハーゲン解釈、多世界解釈、環境によるデコヒー レンス、修正量子論など多くの解釈、モデルが提案されているものの決定打には至っておらず、幅 広い質量スケールでの実験によって知見を得ることが必要である。その中でも特にこれまで手薄 であった mg スケールに注目し、その第一歩として巨視的量子力学が検証できる必要条件である標 準量子限界への到達を目指す。先行研究では対象として mg 鏡を懸架した振り子を採用していたも のの、懸架に伴う熱雑音が標準量子限界到達への障壁となっており、懸架線の改良が必要とされて いた。

そこで新しい方法として、光輻射圧で鏡を浮上させることで熱雑音を導入せずに鏡を支持するこ とを考える。そして実際にそれを可能とする構成として、浮上鏡の上下に光共振器を組むサンド イッチ構成を提案し、鏡の浮上が安定となることの原理検証を行う。原理検証を行うにあたっては mg 程度の曲率つき鏡が必要であるが、そのような鏡は壊れやすく扱いにくいため、代わりにねじ れ振り子に鏡を取り付けることでサンドイッチ構成の微小な復元力に支配される鏡を実現する。こ の実効的に軽い鏡を用いてサンドイッチ構成を作り、サンドイッチ構成に由来する復元力がはたら くことをねじれ振り子の共振周波数の変化として測定し、その安定性を確かめる。この考えの下で 原理検証のための実験装置を設計、構築し、その特性評価を行った。まずねじれ振り子の位置制御 を行い、その揺らぎがピエゾのレンジから決まる要求値 9 μm 以下に抑えられることを確認した。 次にサンドイッチ構成の要素である上下の共振器のフィネスを測定し、設計値よりもフィネスが小 さくなっていたものの原理検証可能な共振器内パワーが得られることがわかった。最後に、ねじれ 振り子の鏡を固定した状態で上下の共振器長の同時制御のテストを行い、共振器が互いに干渉する ことなく制御できることを確認した。今後は、ねじれ振り子を制御した状態で上下の共振器長制御 を行い、サンドイッチ構成に由来する復元力の観測を目指す。

# 目 次

概要		1
<b>第</b> 1章	はじめに	5
1.1	背景	5
1.2	論文の構成	6
第2章	巨視的量子力学の検証	7
2.1	不確定性原理	7
2.2	標準量子限界	7
2.3	検証できる条件	8
2.4	雜音	10
	2.4.1 量子雑音	11
	2.4.2 熱雑音	12
	2.4.3 その他の雑音	16
2.5	鏡の光学浮上	17
第3章	光学浮上の原理	19
3.1	Fabry-Perot 共振器	19
	3.1.1 反射率と透過率	19
	3.1.2 共振とフィネス	20
	3.1.3 Detuning	21
3.2	光バネ	22
	3.2.1 電場の周波数応答	22
	3.2.2 バネ定数と damping rate	24
	3.2.3 Double Optical Spring	26
3.3	共振器の安定条件	26
3.4	浮上鏡の力学的安定性	27
	3.4.1 つり合いの条件	29
	3.4.2 一般の場合	29
	3.4.3 対称性のよい場合	31
3.5	鏡浮上の構成	31
3.6	本研究の目的	32
第4音	字翰装置	34
41	全体の構成	34
4.2	光学系	36
	4.2.1 共振器	36

	4.2.2 光源	39
	4.2.3 入射光学系	11
	4.2.4 モードマッチング	42
	4.2.5 信号取得	43
	4.2.6 <i>PDF</i> <sub>2</sub> <i>X-PA</i>	13
4.3	ねじれ振り子	14
1.0	4.3.1 設計 (2)	14
	439 PVH	15
	$4.9.2  \nabla f = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 +$	17
	4.5.5 / / / 4.2. /	E (
第5章	実験結果 5	0
5.1	ねじれ振り子の位置制御	50
5.2	フィネス測定	53
5.3	共振器長の同時制御	54
第6章	<b>まとめ</b> 5	9
6.1	実験結果	59
6.2	今後の展開	30
補遺 A	誘電体多層膜 6	1
A.1	一般の場合	51
A.2	厚さ $\lambda/4$ の場合	<i>5</i> 2
<mark>補遺</mark> B	Pound-Drever-Hall 法 6	4
補遺 B 補遺 C	Pound-Drever-Hall法 6 フィードバック制御 6	4 6
<b>補遺 B</b> 補遺 C	Pound-Drever-Hall 法     6       フィードバック制御     6       理論     6	5 <b>4</b> 5 <b>6</b> 56
<b>補遺 B</b> 補遺 C C.1 C 2	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6	54 56 56
<b>補遺 B</b> 補遺 C C.1 C.2 C 3	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         雑音の影響       6	54 56 56
<b>補遺 B</b> 補遺 C C.1 C.2 C.3	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         雑音の影響       6	5 <b>4</b> 56 57
補遺 B 補遺 C C.1 C.2 C.3 補遺 D	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         雑音の影響       6         電気回路       6	54 56 57 57
補遺 B 補遺 C C.1 C.2 C.3 補遺 D 補遺 E	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         雑音の影響       6         電気回路       6         カーボンナノチューブ線の開発       7	54 56 56 57 57
<ul> <li>補遺 B</li> <li>補遺 C</li> <li>C.1</li> <li>C.2</li> <li>C.3</li> <li>補遺 D</li> <li>補遺 E</li> <li>E 1</li> </ul>	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         オープンループ伝達関数の測定       6         雑音の影響       6         電気回路       6         カーボンナノチューブ線の開発       7         背景       7	54 56 56 57 57 57 57
<ul> <li>補遺 B</li> <li>補遺 C</li> <li>C.1</li> <li>C.2</li> <li>C.3</li> <li>補遺 D</li> <li>補遺 E</li> <li>E.1</li> <li>E.2</li> </ul>	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         オープンループ伝達関数の測定       6         雑音の影響       6         電気回路       6         カーボンナノチューブ線の開発       7         背景       7         カーボンナノチューブ(CNT) とその炊り線       7	34 36 36 37 37 39 71 71
<ul> <li>補遺 B</li> <li>補遺 C</li> <li>C.1</li> <li>C.2</li> <li>C.3</li> <li>補遺 D</li> <li>補遺 E</li> <li>E.1</li> <li>E.2</li> </ul>	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         オープンループ伝達関数の測定       6         離音の影響       6         電気回路       6         カーボンナノチューブ線の開発       7         背景       7         カーボンナノチューブ (CNT) とその撚り線       7         F 2 1 CNT       7	54 56 57 57 57 57 57 57 57 57 57 57 57 57 57
<ul> <li>補遺 B</li> <li>補遺 C</li> <li>C.1</li> <li>C.2</li> <li>C.3</li> <li>補遺 D</li> <li>補遺 E</li> <li>E.1</li> <li>E.2</li> </ul>	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         オープンループ伝達関数の測定       6         離音の影響       6         電気回路       6         カーボンナノチューブ線の開発       7         背景       7         力ーボンナノチューブ (CNT) とその撚り線       7         E.2.1 CNT       7         E.2.2 CNT の燃り線       7	54 56 57 57 57 57 57 57 57 57 57 57 57 57 57
<ul> <li>補遺 B</li> <li>補遺 C</li> <li>C.1</li> <li>C.2</li> <li>C.3</li> <li>補遺 D</li> <li>補遺 E</li> <li>E.1</li> <li>E.2</li> </ul>	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         オープンループ伝達関数の測定       6         離音の影響       6         電気回路       6         カーボンナノチューブ線の開発       7         背景       7         カーボンナノチューブ(CNT) とその撚り線       7         E.2.1 CNT       7         E.2.2 CNT の撚り線       7         CNT 線の作時       7	34 36 37 37 37 39 71 72
<ul> <li>補遺 B</li> <li>補遺 C</li> <li>C.1</li> <li>C.2</li> <li>C.3</li> <li>補遺 D</li> <li>補遺 E</li> <li>E.1</li> <li>E.2</li> <li>E.3</li> </ul>	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         雑音の影響       6         電気回路       6         カーボンナノチューブ線の開発       7         背景       7         力ーボンナノチューブ(CNT) とその撚り線       7         E.2.1 CNT       7         E.2.2 CNT の撚り線       7         CNT 線の作成       7         下 2.1 試料       7	<b>54</b> $56$ $57$ $57$ $59$ $172$ $7$
<ul> <li>補遺 B</li> <li>補遺 C</li> <li>C.1</li> <li>C.2</li> <li>C.3</li> <li>補遺 D</li> <li>補遺 E</li> <li>E.1</li> <li>E.2</li> <li>E.3</li> </ul>	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         オープンループ伝達関数の測定       6         離音の影響       6         電気回路       6         カーボンナノチューブ線の開発       7         背景       7         カーボンナノチューブ(CNT) とその撚り線       7         E.2.1 CNT       7         E.2.2 CNT の撚り線       7         CNT 線の作成       7         E.3.1 試料       7	34 36 37 37 37 71 72
<ul> <li>補遺 B</li> <li>補遺 C</li> <li>C.1</li> <li>C.2</li> <li>C.3</li> <li>補遺 D</li> <li>補遺 E</li> <li>E.1</li> <li>E.2</li> <li>E.3</li> </ul>	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         雑音の影響       6         電気回路       6         カーボンナノチューブ線の開発       7         背景       7         力ーボンナノチューブ(CNT) とその撚り線       7         E.2.1 CNT       7         E.2.2 CNT の撚り線       7         CNT線の作成       7         E.3.1 試料       7         E.3.2 CNT アレイの切断       7	34 36 37 37 37 37 71 72 73 72 72 72 72 72 72 72 72 72 72 73 72 72 73 72 72 72 72 73 72 72 73 72 72 73 72 72 72 73 72 72 73 72 72 73 72 73
<ul> <li>補遺 B</li> <li>補遺 C</li> <li>C.1</li> <li>C.2</li> <li>C.3</li> <li>補遺 D</li> <li>補遺 E</li> <li>E.1</li> <li>E.2</li> <li>E.3</li> </ul>	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         雑音の影響       6         電気回路       6         カーボンナノチューブ線の開発       7         背景       7         力ーボンナノチューブ線の開発       7         た2.1 CNT       7         E.2.1 CNT       7         E.2.2 CNT の撚り線       7         E.3.1 試料       7         E.3.1 試料       7         E.3.3 撚り線の作成       7         E.2.4 ボッキンボ       7	<b>34</b> $36$ $36$ $37$ $37$ $39$ $17$ $172$ $272$ $272$ $272$ $373$
<ul> <li>補遺 B</li> <li>補遺 C</li> <li>C.1</li> <li>C.2</li> <li>C.3</li> <li>補遺 D</li> <li>補遺 E</li> <li>E.1</li> <li>E.2</li> <li>E.3</li> </ul>	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         雑音の影響       6         電気回路       6         カーボンナノチューブ線の開発       7         背景       7         力ーボンナノチューブ(CNT) とその撚り線       7         E.2.1 CNT       7         E.2.2 CNT の撚り線       7         CNT線の作成       7         E.3.1 試料       7         E.3.2 CNT アレイの切断       7         E.3.3 撚り線の作成       7         E.3.4 ベーキング       7	<b>54</b> <b>66</b> <b>66</b> <b>66</b> <b>67</b> <b>71</b> <b>71</b> <b>71</b> <b>71</b> <b>71</b> <b>71</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b>
<ul> <li>補遺 B</li> <li>補遺 C</li> <li>C.1</li> <li>C.2</li> <li>C.3</li> <li>補遺 D</li> <li>補遺 E</li> <li>E.1</li> <li>E.2</li> <li>E.3</li> </ul>	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         オープンループ伝達関数の測定       6         雑音の影響       6         電気回路       6         カーボンナノチューブ線の開発       7         背景       7         力ーボンナノチューブ(CNT) とその撚り線       7         E.2.1 CNT       7         E.2.2 CNT の撚り線       7         CNT線の作成       7         E.3.1 試料       7         E.3.2 CNT アレイの切断       7         E.3.3 撚り線の作成       7         E.3.4 ベーキング       7         特性評価       7	<b>54</b> <b>56</b> <b>56</b> <b>57</b> <b>57</b> <b>57</b> <b>59</b> <b>71</b> <b>71</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>75</b> <b>75</b> <b>75</b> <b>76</b> <b>76</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b>
<ul> <li>補遺 B</li> <li>補遺 C</li> <li>C.1</li> <li>C.2</li> <li>C.3</li> <li>補遺 D</li> <li>補遺 E</li> <li>E.1</li> <li>E.2</li> <li>E.3</li> <li>E.4</li> </ul>	Pound-Drever-Hall 法       6         フィードバック制御       6         理論       6         オープンループ伝達関数の測定       6         雑音の影響       6         電気回路       6         カーボンナノチューブ線の開発       7         背景       7         力ーボンナノチューブ(CNT) とその撚り線       7         E.2.1 CNT       7         E.2.2 CNT の撚り線       7         CNT線の作成       7         E.3.1 試料       7         E.3.2 CNT アレイの切断       7         E.3.3 撚り線の作成       7         Full マーキング       7         特性評価       7         E.3.1 可能       7         E.3.2 CNT アレイの切断       7         E.3.3 撚り線の作成       7         Full アレイの切断面積と CNT線の直径       7	<b>54</b> <b>56</b> <b>56</b> <b>57</b> <b>59</b> <b>71</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>72</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>73</b> <b>76</b> <b>66</b> <b>66</b> <b>67</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b> <b>77</b>

	E.4.3 ベーキングの効果	78
E.5	Q 値測定	80
E.6	まとめ	83

## 第1章 はじめに

### 1.1 背景

量子力学は相対論と並ぶ現代物理学における柱であり、これまでに微視的な世界を正確に記述す ることに成功してきた。しかし量子力学にもまだ問題は残されており、その1つに巨視的な位置の 重ね合わせ状態の問題がある[1]。位置の重ね合わせは電子の二重スリット実験に代表される量子 力学特有の性質であり、量子力学が線形な理論であることからスケールに関係なく巨視系でも成り 立つはずである。それにもかかわらず、これまでに位置の重ね合わせ状態が確認されているのは最 大でもフラーレンなどの分子までであり[2]、それ以上の質量スケールではいまだに観測された例 はない。さらにこの巨視的な重ね合わせが生じないという問題は、重ね合わせ状態にあった系が観 測後には確定状態のみ出現するといういわゆる観測問題とも深く関連する[1]。

これら巨視的重ねあわせの問題および観測問題を説明するために,これまでにコペンハーゲン解 釈 [3],多世界解釈 [4],環境によるデコヒーレンス [5],修正量子論 [1] などが提案されている。し かしいずれも決定打には至っておらず,具体的なモデルが林立している状況である。したがって実 験の側から知見を得ることは重要であり,古典と量子の境界を知るためにも幅広い質量スケールで 量子力学の検証が行われる必要がある。その方法は,それぞれの質量スケールで量子力学に支配さ れうる系,具体的には環境から十分に孤立させて位置測定感度を不確定性関係から導かれる標準量 子限界 (SQL)[6] にまで達する系を準備し,その系が位置の重ねあわせ状態を生むか否かを検証す るものである [7,8,9]。これまでに,微視的なzgスケールはもちろんプランクスケール (~22 µg) よりも小さい中間的な ng スケールまでは既に SQL に到達するような実験系が準備できており [9], プランクスケールよりも遥かに大きい巨視的な kg スケールにおいても重力波検出器が SQL に到 達しつつある [10]。そのような中,巨視的な領域でもプランクスケールに近い mg,g スケールでは いまだに SQL に到達する系は準備出来ていない。mg,g スケールの場合,量子力学を検証する対 象には振り子が選ばれることが多いが,これまでのところテストマスとしての鏡を懸架するときの 懸架線から導入される熱雑音が SQL 到達への妨げとなっており,懸架線の改善もしくは新しいテ ストマスの支持方法が必要であった。

本研究では,特に mg スケールでの量子力学の検証に向けてこれまでに問題とされてきた懸架に 伴う熱雑音を克服するために,鏡を懸架する代わりに光輻射圧のみで支持する方法 [12, 13] の開発 を行う。この鏡の光学浮上を実現するための構成には,新しく提案されたサンドイッチ構成 [13] を 採用するが,まずこの構成が安定であることの原理検証を行う必要がある。ただし安定な浮上のた めには鏡に曲率をつける必要があり,mg 程度の質量で曲率つきの鏡をつくるのは技術的に簡単で はなく,製作の目処は立っているものの今すぐに多量に用意することは難しい。そこで共振周波数 の低い系であるねじれ振り子の先端に鏡を取り付けることで,サンドイッチ構成に由来する微小な 復元力を感じうる鏡を実現する。そのねじれ振り子に取り付けた実効的に軽い鏡に対してサンド イッチ構成を組み,その安定性を検証することを本研究の目標とする。本実験によってサンドイッ チ構成の安定性が保証された後には,変位感度の SQL 到達に向けて実際に mg 程度の鏡を用いた 光学浮上を目指す。

### 1.2 論文の構成

本論文では、まず第2章で巨視的量子力学を検証するための条件として変位感度が標準量子限界 に到達することが必要であることを見て、鏡の光学浮上はこれを可能とすることを示す。第3章で は、光学浮上の原理として光共振器の理論と光バネの導出、およびサンドイッチ構成の安定性につ いて述べる。第4章では、本研究でサンドイッチ構成の安定性の検証をするための実験装置につい て説明し、第5章では、その実験装置を用いて得られた結果と考察を述べる。第6章で本論文の まとめを述べる。補遺では、本論で説明を省いた理論や回路について、および mg スケールの量子 力学検証に向けて懸架に伴う熱雑音を低減する方向で本研究と並行して進めていたカーボンナノ チューブ線の開発についても述べる。

## 第2章 巨視的量子力学の検証

この章では、初めに量子力学における不確定性原理から位置の測定限界である標準量子限界 (SQL) を導き、SQL への到達が巨視的な量子力学を検証可能とするために必要であることを見る。実験 におけるさまざまな雑音を挙げたあとに、鏡の懸架にともなう熱雑音が SQL 到達への壁となるこ とを見て、本研究の主題である鏡を光輻射圧で浮上させる手法が有力であることを示す。

### 2.1 不確定性原理

量子力学においては、可換でない 2 つの物理量  $\hat{O}_1, \hat{O}_2$  の値を同時に定めることができない。交換関係  $[\hat{O}_1, \hat{O}_2] = \hat{C}$  が満たされるときにはその標準偏差  $\Delta \hat{O} \equiv \sqrt{\langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2}$  の積に対して

$$\Delta \hat{O}_1 \Delta \hat{O}_2 \ge \frac{1}{2} |\langle \hat{C} \rangle| \tag{2.1}$$

が成立し、Robertsonの不等式と呼ばれる [14]。ただし、 $\langle \hat{O} \rangle$  は観測量  $\hat{O}$ の期待値を表す。特に位置  $\hat{x}$  と運動量  $\hat{p}$ の場合には交換関係が  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  であるので、不等式は

$$\Delta \hat{x} \Delta \hat{p} \ge \frac{\hbar}{2} \tag{2.2}$$

となる。

一方,同じような関係が測定精度とその擾乱に対しても当てはまる。古典力学とは異なり,量子 力学では対象が受ける測定に伴った反作用を無視することができない。たとえば位置を正確に測定 するほど運動量に擾乱を与えてしまい,運動量の不確定性を増加させてしまう。この関係は 1927 年に Heisenberg によって考察され [15], Heisenberg の不確定性原理と呼ばれる。式の上では, $\hat{O}_1$ の測定誤差  $\epsilon(\hat{O}_1)$  とそれに伴う  $\hat{O}_2$  への擾乱  $\eta(\hat{O}_2)$  に対し,

$$\epsilon(\hat{O}_1)\eta(\hat{O}_2) \ge \frac{1}{2} |\langle \hat{C} \rangle|$$
(2.3)

によって表され、同様に位置と運動量に対しては

$$\epsilon(\hat{x})\eta(\hat{p}) \ge \frac{\hbar}{2} \tag{2.4}$$

となる。Robertsonの不等式とHeisenbergの不等式は同値な不等式ではないが,測定後の波動関数の広がりが測定誤差よりも小さくなるという仮定のものでは,Robertsonの不等式からHeisenbergの不等式が導かれる[16]。逆にそうでない場合には,Heisenbergの不等式は必ずしも成り立たない。

### 2.2 標準量子限界

不確定性原理から導かれる位置の測定精度の限界が標準量子限界 (SQL) であり、単純な例とし て質量 m の自由質点の位置を測定する場合を考察する。 Heisenberg 描像で時刻  $t_0$  のときの位置と運動量の演算子を  $\hat{x}_0$ ,  $\hat{p}_0$  とすると、その時間発展は

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_0 + \frac{\hat{p}_0}{m}(t - t_0)$$
(2.5)

と書ける。これに交換関係  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \, \varepsilon$ 用いることで、異なる時刻における位置演算子の交換関係、

$$[\hat{x}(t), \, \hat{x}(t')] = \frac{i\hbar}{m}(t'-t)$$
(2.6)

が導かれる。時刻 $\tau$ における $\hat{x}$ の分散は時刻0のときの分散から,

$$(\Delta \hat{x}(\tau))^2 = (\Delta \hat{x}_0)^2 + \frac{\tau^2}{m^2} (\Delta \hat{p}_0)^2 + \frac{\tau}{m} \left\langle \delta \hat{x}_0 \delta \hat{p}_0 + \delta \hat{p}_0 \delta \hat{x}_0 \right\rangle$$
(2.7)

へと増加する。ただし $\delta \hat{x} = \hat{x} - \langle \hat{x} \rangle$ のように置いた。 $\hat{x} \geq \hat{p}$ に相関がないことを仮定して第3項 を落とすと,

$$(\Delta \hat{x}(\tau))^2 = (\Delta \hat{x}_0)^2 + \frac{\tau^2}{m^2} (\Delta \hat{p}_0)^2$$
(2.8)

$$\geq \frac{2\tau}{m} \Delta \hat{x}_0 \Delta \hat{p}_0 \geq \frac{\hbar \tau}{m} \tag{2.9}$$

となる。これは第一の測定から第二の測定までに位置の不確かさが広がる量を表し、位置測定における感度の限界を表す。特に下限である最右辺の量は自由質点の標準量子限界 (free-mass SQL) と呼ばれる。位置の連続測定を行う場合を考えて、SQL を周波数空間における(片側)ノイズスペクトル  $\Delta x_{SQL}(\omega)$  の形で表現すると、測定のバンド幅を  $\omega = 1/\tau$  として

$$\Delta x_{\rm SQL}(\omega) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega^2}} \quad [m/\sqrt{\rm Hz}]$$
(2.10)

と書くことができる。分母の  $m\omega^2$  は自由質点の感受率の逆数  $\chi^{-1}(\omega)$  であり、一般の感受率  $\chi(\omega)$  を持つ場合にも

$$\Delta x_{\rm SQL}(\omega) = \sqrt{2\hbar |\chi(\omega)|} \quad [m/\sqrt{\rm Hz}]$$
(2.11)

と同様の形をとる (modified SQL)[17]。

### 2.3 検証できる条件

巨視的量子力学の検証ができるための条件はもちろん提案されている検証法にも依存し,ある 特定のモデルに対して振動子の古典的な温度上昇の測定で検証ができるとする提案 [18] もあるが, その他は少なくとも系の量子性を覆い隠す古典的な雑音が十分に取り除かれることが必要条件であ る。すなわち,図 2.1 のようにある周波数領域で古典的な雑音を全て SQL よりも小さくし (SQL の窓),系が量子雑音に支配される状況を作れればよい。図 2.1 において  $\Omega_F$  は古典的な力の雑音 と SQL の交点周波数, $\Omega_x$  は古典的なセンシング雑音と SQL の交点周波数, $\Omega_q$  は量子雑音の和の SQL への到達周波数である。鏡の熱雑音は古典的な力の雑音であるが,鏡の共振周波数よりも低 周波の領域であるために周波数依存性が他と異なり,別個で記載している。この SQL の窓が狭す ぎる場合には古典雑音の和まで考えたときに SQL は覆い隠されてしまうが, $\Omega_x/\Omega_F > 2$ が満たさ れれば  $\Omega_F$  と  $\Omega_x$  の間に古典雑音の和が SQL を下回る周波数領域が生まれる [7]。

具体的な検証方法の例として, Müller-Ebhardt らが提案しているのは, SQL に到達した 2 枚の 鏡を用いて図 2.3 のように Power Recycling Michelson 干渉計を作り, その 2 枚の鏡の運動のうち



図 2.1: SQL の窓の例。古典的な雑音が SQL を下回る周波数領域(灰色領域)では,系は量子雑音に支配されて量子力学の検証が可能となる。



図 2.2: SQL に到達した 2 枚の鏡で作られた Power Recycling Michelson 干渉計。2 枚の鏡の同相 モードと差動モードのエンタングルメントを検証する [7]。

同相モードと差動モードのエンタングルメントを観測するものである [7]。また Marshall らが提案 する方法は、基底状態まで冷却された振動子に対して図 2.3 のように単一光子を結合させ、振動子 の基底状態と励起状態のエンタングルメントを観測するものである [8]。こちらの場合は変位感度 で SQL に到達することは必要条件であり、基底状態まで冷却するには振動子の共振周波数を SQL の到達周波数  $\Omega_q$  に一致させる必要がある。これは第3章で述べる光バネによって可能である。加 えてこちらでは基底状態に到達したあとに、外部から熱的なフォノンが流入する中で基底状態を 保ったまま1 周期以上振動することが要求される。この条件は振動子のもとの共振周波数  $f_m$  と Q 値  $Q_m$  に対して、

$$f_{\rm m} \cdot Q_{\rm m} > \frac{k_{\rm B}T}{h} \left(\frac{f_{\rm m}}{f_{\rm eff}}\right)^2 = 6 \times 10^{12} \,\mathrm{Hz} \times \left(\frac{f_{\rm m}}{f_{\rm eff}}\right)^2 \tag{2.12}$$

と書かれる [19]。ここで  $k_{\rm B}$  はボルツマン定数, T は温度, h はプランク定数,  $f_{\rm eff}$  は実効的な共振 周波数であり、光バネなどによって  $f_{\rm eff}$  を上げることで条件を緩和させることができる。

### 2.4 雑音

SQL に到達するためには、全ての古典的な雑音を量子雑音よりも小さくしなければならない。ここでは光を用いて物体(鏡)の位置測定をする場合を考え、感度を決める雑音について述べる。



図 2.3: 単一光子 |1〉と基底状態の振動子  $|0\rangle_{\rm m}$ のエンタングルメント生成 [8]。単一光子が BS で右 に透過した場合は振動子は  $|0\rangle_{\rm m}$ のままで全体の状態は  $|0\rangle_{\rm U} \otimes |1\rangle_{\rm R} \otimes |0\rangle_{\rm m}$ だが、上に透過した場合 は振動子が  $|1\rangle_{\rm m}$  に励起されて全体の状態は  $|1\rangle_{\rm U} \otimes |0\rangle_{\rm R} \otimes |1\rangle_{\rm m}$ となり、この 2 つの状態のエンタ ングルメントを検証する。

### 2.4.1 量子雑音

#### 散射雑音

光は波としての側面をもつ一方,光子としての粒子的な側面も持つ。散射雑音とは,光が光検出 器に入るときに光子数が平均値の周りで量子的にゆらぐことに起因する雑音であり,平均光電流 *I*<sub>0</sub> が流れるときの雑音スペクトルは

$$\delta I_{\rm shot} = \sqrt{2eI_0} \quad [A/\sqrt{\rm Hz}] \tag{2.13}$$

で与えられる [20]。光子1個が電子に変換される割合として光検出器の量子効率を $\eta \equiv (I_0/e)/(P_0/\hbar\omega_L)$ と定義すると、光検出器に入るパワーの散射雑音は

$$\delta P_{\rm shot} = \sqrt{\frac{2\hbar\omega_{\rm L}P_0}{\eta}} \quad [W/\sqrt{\rm Hz}]$$
(2.14)

となる。ここで  $P_0$  は PD に入る光の平均パワー, e は素電荷,  $\hbar$  は換算プランク定数,  $\omega_L$  はレーザーの角周波数である。これを位置測定感度に変換すると、変位から光強度変化への変換係数 S [W/m] を用いて

$$\delta x_{\rm shot} = \frac{\delta P_{\rm shot}}{S} \quad [m/\sqrt{\rm Hz}]$$
 (2.15)

となる。通常この *S* は *P*<sub>0</sub> に比例するため,散射雑音による位置測定感度は *P*<sub>0</sub> の平方根に反比例 し,*P*<sub>0</sub> が大きいほど測定感度がよくなることが分かる。

具体的に FP 共振器の共振器長変動を PDH 法によって測定する場合を考えてみると、補遺 A の 式 (B.9) より

$$S_{\rm PDH} \simeq \frac{P_{\rm in} t_1^2 r_2 m_{\rm mod}}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{\omega_{\rm L}}{c} \quad [W/m]$$
 (2.16)

である。ただし  $P_{\rm in}$  は共振器への入射パワー, t, r はそれぞれ共振器の鏡の振幅透過率,振幅反射率 をであり添字 1, 2 はそれぞれ入射側,透過側の鏡であることを表す。また  $m_{\rm mod}$  は位相変調の変調 指数, L は共振器長である。さらに実際には PD で受ける光量  $P_0(\sim 1 \,\mathrm{mW})$  は、共振器の反射率を R として反射光量  $P_{\rm r} = RP_{\rm in}$  から減光されていることがあり、その場合には PDH 法の変換係数は  $S_{\rm PDH} \times P_0/P_{\rm r}$  に減少する。特に  $r_1 \simeq 1, r_2 = 1$ の場合には、共振器内パワー  $P_{\rm circ} = (F/\pi)^2 t_1^2 P_{\rm in}$ を用いて  $S_{\rm PDH} = 2\pi m_{\rm mod} P_{\rm circ}/\lambda$  と書けるため、 $P_{\rm r} = P_{\rm in}$  であることも用いて

$$\delta x_{\rm shot} = \sqrt{\frac{2\hbar\omega_{\rm L}P_0}{\eta}} \left[ W/\sqrt{\rm Hz} \right] \times \frac{\lambda}{2\pi m_{\rm mod}P_{\rm circ}} \left[ m/W \right] \times \frac{P_{\rm in}}{P_0}$$
$$= \sqrt{\frac{2\hbar\omega_{\rm L}}{\eta P_0}} \frac{\lambda}{2\pi m_{\rm mod}} \frac{P_{\rm in}}{P_{\rm circ}} \left[ m/\sqrt{\rm Hz} \right]$$
(2.17)

となる。

#### 輻射圧雑音

鏡で光が反射すると鏡は光子 1 個あたり運動量  $2\hbar\omega_L/c$  を受け取り,輻射圧  $F_{\rm rad} = 2P_0/c$  を受ける。このとき散射維音に対応する量子的な光子数のゆらぎが鏡を揺らすことで生じる雑音が(量子)輻射圧雑音であり,不確定性関係において散射雑音とは対の関係にある。鏡で反射されるパワーの揺らぎは,光がコヒーレント状態にあるときには散射雑音の大きさ  $\delta P_{\rm shot} = \sqrt{2\hbar\omega_L P_0}$ で与えられるので,鏡の感受率を  $\chi(\omega)$  [m/N] とすれば輻射圧雑音は

$$\delta x_{\rm rad}(\omega) = \frac{2\,\delta P_{\rm shot}}{c} \cdot |\chi(\omega)| \quad [{\rm m}/\sqrt{{\rm Hz}}]$$
(2.18)

となる [20]。輻射圧雑音は直接鏡を揺らすことによって位置測定の誤差となるから,その影響は式 (2.18) で表されるまま光のパワー P<sub>0</sub> の平方根に比例して大きくなり,位置測定感度は散射雑音と は逆に P<sub>0</sub> が小さいほうがよい。

#### 2.4.2 熱雑音

熱雑音は精密測定において感度を制限する原理的な雑音の1つであり、系が熱浴と接していると きにエネルギー等分配則により1自由度あたり $k_{\rm B}T/2$ のエネルギーを受け取るために物理量がラ ンダムに揺らぐ雑音である。これだけでは熱雑音による RMS 振幅の情報しか得られないが、その 周波数依存性は揺動散逸定理により系の散逸と結び付けられ、熱雑音力のスペクトル $\delta f_{\rm th}$ および それによる変位の熱雑音スペクトル $\delta x_{\rm th}$ はそれぞれ

$$\delta f_{\rm th}(\omega) = \sqrt{4k_{\rm B}TR(\omega)} [N/\sqrt{\rm Hz}],$$
 (2.19)

$$\delta x_{\rm th}(\omega) = \sqrt{4k_{\rm B}T \frac{\sigma(\omega)}{\omega^2} \quad [{\rm m}/\sqrt{{\rm Hz}}]}$$
(2.20)

で与えられる [20]。ここで  $k_{\rm B}$  は Boltzmann 定数, T は温度,  $R(\omega)$  は系の resistance,  $\sigma(\omega)$  は系の conductance である。 $\delta f_{\rm th}(\omega)$  と  $\delta x_{\rm th}(\omega)$  は独立なように見えるが, 調和振動子の感受率  $\chi(\omega)$  [m/N] を通じて  $\delta x_{\rm th}(\omega) = |\chi(\omega)| \delta f_{\rm th}(\omega)$ の関係がある。

#### 振り子の熱雑音

振り子の運動方程式は、損失をあとで取り入れることにして無視すると

$$m\left(\ddot{x} + \omega_0^2\right) = f_{\text{ext}} \tag{2.21}$$

と書くことができる。これをフーリエ変換し、損失の効果を複素バネ定数として取り入れると

$$m\left[-\omega^2 + \omega_0^2(1+i\phi)\right]\tilde{x}(\omega) = \tilde{f}_{\text{ext}}(\omega)$$
(2.22)

となる [20]。ここで m,  $\omega_0$ ,  $\phi(\omega)$  はそれぞれ振り子の質量, 共振角周波数, 損失角であり,  $f_{\text{ext}}$  は 熱揺動力,  $\omega$  はフーリエ角周波数である。損失角のモデルは大きく分けて 2 種類あり, 調和振動子 の Q 値を Q として周波数依存性のある viscous damping モデル  $\phi(\omega) = \omega/(\omega_0 Q)$  と, 周波数依存 性の小さい structure damping モデル  $\phi = 1/Q$  がある [20]。式 (2.22) より系の resistance および conductance が求められ, 振り子における熱雑音は

$$\delta f_{\rm th}(\omega) = \sqrt{4k_{\rm B}T \frac{m\omega_0^2 \phi(\omega)}{\omega} [N/\sqrt{\rm Hz}]}, \qquad (2.23)$$

$$\delta x_{\rm th}(\omega) = \sqrt{\frac{4k_{\rm B}T}{m\omega}} \frac{\omega_0^2 \phi(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_0^4 \phi(\omega)^2} \quad [{\rm m}/\sqrt{{\rm Hz}}]$$
(2.24)

のように与えられ,図 2.4 のようになる。さらに低周波 ( $\omega \ll \omega_0$ )の極限では

$$\delta x_{\rm th}(\omega) \simeq \begin{cases} \sqrt{\frac{4k_{\rm B}T}{m\omega_0^3 Q}} & [{\rm m}/\sqrt{{\rm Hz}}] & ({\rm viscous}) \\ \sqrt{\frac{4k_{\rm B}T}{m\omega_0^2 \omega Q}} & [{\rm m}/\sqrt{{\rm Hz}}] & ({\rm structure}), \end{cases}$$
(2.25)

高周波 ( $\omega \gg \omega_0$ ) の極限では

$$\delta x_{\rm th}(\omega) \simeq \begin{cases} \sqrt{\frac{4k_{\rm B}T\omega_0}{m\omega^4 Q}} & [{\rm m}/\sqrt{{\rm Hz}}] & ({\rm viscous}) \\ \sqrt{\frac{4k_{\rm B}T\omega_0^2}{m\omega^5 Q}} & [{\rm m}/\sqrt{{\rm Hz}}] & ({\rm structure}) \end{cases}$$
(2.26)

のように近似される。式からも分かるように,熱雑音を低減するためには温度を下げるもしくは Q 値の高い(損失の小さい)素材を用いることが必要である。

#### 懸架線の弦振動の熱雑音

振り子の熱雑音を考える場合には、観測対象である振り子モードの熱雑音だけでなく、懸架線が弦振 動するバイオリンモードの熱雑音からのカップリングも考慮しなければならない。バイオリンモード の n 次の共振角周波数は  $\omega_n \simeq n\pi\omega_p\sqrt{M/m}$ , その換算質量は  $\mu_n = \frac{M}{2}[1 + (\omega_n/\omega_p)^2/\cos^2(l\omega_n/v)]$ と表され、熱雑音の大きさはこれらの寄与の和として

$$\delta x_{\rm th}(\omega) = \sqrt{\sum_{n} \frac{4k_{\rm B}T}{\mu_n \omega} \frac{\omega_n^2 \phi_n}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \omega_n^4 \phi_n^2}} \quad [{\rm m}/\sqrt{{\rm Hz}}]$$
(2.27)

となる [20]。ただし, *M* は振り子の重りの質量, *m* は弦の質量,  $\omega_{\rm p} = \sqrt{g/l}$  は振り子の共振周波数, *l* は弦の長さ,  $v = \sqrt{Mgl/m}$  は弦の音速,  $\phi_n$  は *n* 次のバイオリンモードの損失角である。



図 2.4: 損失機構の違いによる振り子の熱雑音のスペクトルの違い。

バイオリンモードの熱雑音を低減するには、観測帯域よりも第一バイオリン周波数  $\omega_1 = \pi \omega_p \sqrt{M/m}$ が十分に高いことが必要で、懸架線は短く軽いほどよい。これまでの 5 mg 鏡を直径 3  $\mu$ m のタン グステン線で懸架した振り子 [11] の場合には、観測帯域が 100 Hz – 1 kHz であるのに対して第一 バイオリン周波数は 180 Hz 程度であり、高次のバイオリンモードが観測帯域を汚している状態で ある。第一バイオリン周波数が低いのはタングステンの密度が 19.25 g/cm<sup>3</sup> と大きいためであり、 例えば懸架線を直径 1  $\mu$ m のカーボンナノチューブ線に変更した場合、~ 0.1 g/cm<sup>3</sup> 程度の密度が 得られる可能性があるので、第一バイオリン周波数を 1 桁以上高くできると期待できる。加えて 10<sup>7</sup> を超える Q 値の可能性が示されているために、新たな懸架線として有力である (補遺 D 参照)。

#### 鏡の熱雑音

鏡自体も熱浴に接しているため、弾性体である鏡の基材およびコーティング膜が熱振動して雑音 となる。光学浮上においては懸架線の熱雑音がないため、この鏡の熱雑音が SQL への到達周波数 を決める。鏡のアスペクト比 A(直径/厚さ)がある程度1に近く、鏡の共振周波数は測定帯域よ りも十分に高く、さらに structure damping であることを仮定すると、共振周波数よりも低周波で の雑音スペクトルの大きさはそれぞれ

$$\delta x_{\rm sub}(\omega) = \sqrt{\frac{4k_{\rm B}T}{\omega} \frac{\phi_{\rm s}}{\sqrt{\pi}w_0} \frac{1-\nu_{\rm s}^2}{Y_{\rm s}}} \quad [{\rm m}/\sqrt{{\rm Hz}}],$$
(2.28)  
$$\delta x_{\rm coat}(\omega) = \sqrt{\frac{4k_{\rm B}T}{\omega} \frac{d_{\rm c}\phi_{\rm c}}{\pi w_0^2} \frac{Y_{\rm c}^2(1+\nu_{\rm s})^2(1-2\nu_{\rm s})^2 + Y_{\rm s}^2(1+\nu_{\rm c})^2(1-2\nu_{\rm c})}{Y_{\rm s}^2 Y_{\rm c}(1-\nu_{\rm c}^2)}} \quad [{\rm m}/\sqrt{{\rm Hz}}]$$
(2.29)

で与えられる [21, 22]。ここで  $k_{\rm B}$  はボルツマン定数, T は鏡の温度,  $\phi$  は損失角,  $w_0$  は鏡に当たるビーム径,  $\nu$  はポアソン比, Y はヤング率,  $d_{\rm c}$  はコーティングの厚さであり, 添字の s は鏡基材, c はコーティングを表す。鏡の基材として fused silica (SiO<sub>2</sub>), コーティングとして TiO2-doped

表 2.1: 室温における鏡の基材およびコーティングの物性値 [23]。

物質		Fused Silica $(SiO_2)$	$\mathrm{SiO}_2$	TiO2-doped $Ta_2O_5$
損失角	$\phi$	$1 \times 10^{-6}$	$5 \times 10^{-5}$	$2 \times 10^{-4}$
ポアソン比	ν	0.17	0.17	0.28
ヤング率	Y	$73\mathrm{GPa}$	$73\mathrm{GPa}$	$140\mathrm{GPa}$
屈折率	n	1.45	1.45	2.07

 $Ta_2O_5/SiO_2$ を用いた場合の基材とコーティングの物性値は表 2.1 に示した。この理論式は  $A \approx 1$  かつビーム径が鏡の厚さよりも十分小さい場合に使える近似式であることに注意が必要である。具体的には  $A \leq 3$  程度であれば適用可能である。これよりも大きい場合には、鏡の共振周波数が下がってきて実際の熱雑音は理論式よりも大きくなり、理論式を適用すると過小評価してしまうことになる。少なくとも  $A \sim 50$  までは共振周波数は A に反比例するため、m/ $\sqrt{Hz}$ の次元で鏡の熱雑音は A に比例して大きくなってしまう。

コーティングの厚さ  $d_c$  は任意に決められる訳でななく、必要とする鏡の反射率によって決めら れる。屈折率  $n_1, n_2$  (<  $n_1$ ) の膜を交互にコーティングする誘電体多層膜の場合には、1 層の膜厚 を光路長が  $\lambda/4$  となるようにしたとき反射光が最も強め合うように干渉する。,層の境界におけ る電場の振幅反射率は、 $n_1$  層から  $n_2$  層に入射するとき  $r_1 = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ ,逆のときには  $r_2 = (n_2 - n_1)/(n_1 + n_2) = -r_1$  となり、いずれも強度反射率は  $R_1 = |r_1|^2 = |r_2^2|$  で与えられる。 通常は真空 (n = 1) から基材 ( $n = n_2$ ) へ向かって  $n_1n_2n_1...n_2n_1$ の順に積層し、このように 2k + 1層コーティングしたときの強度反射率は  $R = 1 - (1 - R_1)(2k + 1)$  となるので、反射率とコーティ ングに用いる物質を決めるとコーティングの厚さは

$$d_{\rm c} = \frac{\lambda}{4} \left[ \frac{1}{n_1} + \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) k \right]$$
(2.30)

と決まる。厳密にはこの R は多重反射の効果を考えていないために多少大きめとなり,詳細は補 遺にまとめた。

また,熱雑音の大きさがビーム径 w<sub>0</sub>にも依存することも特徴であり,ビーム径が大きいほど熱雑 音は小さくなる。光学浮上の場合には鏡の質量が重要なパラメータであり,鏡の質量を決めるとそ の直径にも制限がつく。鏡で反射するときにその回折損失が十分に小さいことを要求すると,ビー ム径にも上限がつく。具体的には,ビーム径 w<sub>0</sub>のガウシアンビームの規格化された分布関数は

$$P(r) = \frac{2}{\pi w_0^2} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right)$$
(2.31)

であるので、このうち鏡の半径 wm より外側が失われるとするとその量は

$$\int_{w_{\rm m}}^{\infty} 2\pi r P(r) dr = \left[ -\exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \right]_{w_{\rm m}}^{\infty} = \exp\left(-\frac{2w_{\rm m}^2}{w_0^2}\right)$$
(2.32)

と求められる。これは鏡の半径とビーム径の比 $w_m/w_0$ で決まる量であり、 $w_m/w_0 = 2.0, 2.5$ のときにはそれぞれ  $3 \times 10^{-4}, 4 \times 10^{-6}$ である。フィネス 1000 を実現するには、共振器の全透過率が0.0063 となることが必要で、 $w_m/w_0 = 2.5$  ぐらいの余裕を見れば回折損失は全透過率よりも十分に小さくできる。

#### 2.4.3 その他の雑音

#### 光源の雑音

光源としてレーザーを用いたとき、そのレーザー光には古典的な強度ゆらぎと周波数ゆらぎが存 在する。強度ゆらぎは輻射圧を変動させて鏡を揺らしてしまうことにより、また周波数ゆらぎは鏡 の変位による信号と区別がつかないことにより、いずれも鏡の位置測定にとって雑音となる。した がって、これらが量子雑音よりも小さくなるようにレーザー光の強度安定化と周波数安定化を行う 必要がある。

強度安定化は、レーザー光の一部  $P_{\text{ref}}$ をモニターし、その強度変動を打ち消すようなフィードバック制御をかけることで可能である。安定化の限界は、強度モニター光の散射雑音  $\delta P_{\text{shot}} = \sqrt{2\hbar\omega_{\text{L}}P_{\text{ref}}}$ が BS(振幅反射率 r、振幅透過率 t)から導入される真空場揺らぎと同程度になったときであり、そのときに得られる透過光の安定度は

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2\hbar\omega_{\rm L}}{P_{\rm ref}}} \tag{2.33}$$

となる [24]。取得するパワーを大きくするほど散射雑音が小さくなって強度雑音を抑えることがで きるため、ここから強度安定化用に必要なパワー P<sub>ref</sub> が決まる。

周波数安定化は、レーザーの周波数を参照共振器の共振周波数にロックすることで行うことがで きる。このときの周波数安定度は参照共振器の共振器長変動 δ*L*/*L* に等しく,

$$\frac{\delta\omega_{\rm L}}{\omega_{\rm L}} = \frac{\delta L}{L} \tag{2.34}$$

である。高い周波数安定度は参照共振器の共振器長変動を抑えることで可能である。

#### 地面振動

地面は常に微小振動しており、これが共振器長を変化させるために雑音となる。その大きさは場 所などによるものの、典型的には

$$\delta x_{\rm seis}(f) = \begin{cases} 10^{-5} \,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}} & (f < 0.1 \,\mathrm{Hz}) \\ \frac{10^{-7}}{f^2} \,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}} & (f > 0.1 \,\mathrm{Hz}) \end{cases}$$
(2.35)

であることが知られている。たとえば東京大学理学部1号館地下2階においては、典型的に図2.5 のようなスペクトルとなる。この地面振動雑音の影響を低減するには防振が必要であり、振り子に よって防振をすることができる。いま振り子の共振角周波数をω<sub>0</sub>,Q値をQとすると、懸架点の 変位から末端の変位への伝達関数は、

$$H(\omega) = \frac{\omega_0 + i\omega_0\omega/Q}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega_0\omega/Q}$$
(2.36)

$$\sim -\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \quad (\omega \gg \omega_0, Q \gg 1)$$
 (2.37)

となり、共振周波数よりも高周波の領域において $\omega^{-2}$ の特性で防振される。1 段のみで防振が不十分な場合には、多段にすることでさらに防振することができ、n 段の振り子によって $H(\omega) \propto \omega^{-2n}$ の防振特性を得ることができる。また今回のように鉛直方向の防振も必要な場合には、バネ振り子を用いることで水平方向と同時に鉛直方向の防振をすることができる。



図 2.5: 東京大学理学部1号館地下2階における鉛直方向および水平方向の地面振動。点線は式 (2.35)で示した典型的なスペクトルである。

#### 残留ガスによる雑音

鏡の周りに残留ガスが存在する場合,熱運動するガス分子はランダムに鏡に衝突する。その結 果,鏡にはその速度に比例する viscous damping がはたらくために雑音となる。このとき残留ガス による Q 値は

$$Q_{\rm gas} = \frac{Cm\omega_0}{SP} \sqrt{\frac{k_{\rm B}T}{m_{\rm mol}}}$$
(2.38)

であることが知られている [25]。ここで、 $C(\sim 1)$  は鏡の形状に依存する因子、 $m, \omega_0, S$  はそれぞれ鏡の質量、共振角周波数、反射面の面積、P はガスの圧力、 $m_{mol}$  はガス分子の平均質量である。この式より、鏡に関しては質量が大きく面積が小さいほど残留ガスの影響を受けにくいことが分かる。鏡のパラメータが決まっている場合には、圧力を小さくする(真空度を高くする)もしくは光バネによって共振周波数を高くすることでQ 値を必要なレベルにまで上げる必要がある。

### 2.5 鏡の光学浮上

前節で雑音について述べたが,mg 程度の振動子を振り子によって実現した場合には振り子の熱 雑音および懸架線の熱雑音が SQL 到達への問題となる。振り子の形のままで SQL を目指すには 懸架線の改良が必要であり,鏡の質量 5 mg の場合には Q 値 10<sup>7</sup> 程度が求められる。ただし現状で  $Q > 10^7$ が可能な細線はなく,カーボンナノチューブを用いた細線は有力であるものの開発段階で ある (補遺 D 参照)。

そこで本研究では鏡を懸架することをやめ、図 2.6 のように光輻射圧のみで鏡を浮上させることを目指す。鏡は光と結合し、後述する光バネによってトラップされることになるが、レーザー光の1量子あたりのエネルギーは  $\hbar\omega_L/k_B \sim 10^4 \text{ K} \gg 300 \text{ K}$ であるために室温で熱的に励起されること

はなく,光バネは実質的に温度0Kのバネとみなせる。したがって,問題であった懸架に伴う熱雑 音からは完全に逃れることができる。



図 2.6: 懸架線から振り子への熱雑音の混入(左図)。光輻射圧による鏡支持のイメージ(右図)。光 バネは温度0Kの熱浴と接したバネとみなせるため鏡の懸架に伴う熱雑音をなくすことができる。

## 第3章 光学浮上の原理

この章では、光学浮上に用いる Fabry-Perot 共振器や光バネについてその性質を説明したのち、 安定な光学浮上の条件について議論し、実際にその条件を満たす構成が存在することを示す。

### 3.1 Fabry-Perot 共振器

#### 3.1.1 反射率と透過率



図 3.1: Fabry-Perot 共振器

Fabry-Perot (FP) 共振器とは、図 3.1 のように 2 枚の鏡を向かい合わせに配置して光を多重干 渉させる装置である。以下では、単に共振器と言った場合にも FP 共振器のことを指す。2 枚の鏡 の振幅反射率を  $r_1, r_2$  (符号は内側を正とする)、振幅透過率を  $t_1, t_2$ 、共振器長を L とし、光電 場  $E_{in} = E_0 e^{i\omega_L t}$ を左から共振器に入射した場合を考える。光は共振器内で反射を繰り返したのち に透過してくるので、反射電場  $E_r$  は

$$E_{\rm r} = -r_1 E_{\rm in} + t_1^2 r_2 e^{-2i\phi} E_{\rm in} + t_1^2 r_2 e^{-2i\phi} (r_1 r_2 e^{-2i\phi}) E_{\rm in} \cdots$$
$$= \left[ -r_1 + t_1^2 r_2 e^{-2i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-2i\phi})^n \right] E_{\rm in}$$
$$= \left( -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-2i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\phi}} \right) E_{\rm in}$$
(3.1)

となる。ただし、 $\phi = L\omega_{\rm L}/c$ は片道の光の位相変化である。同様にして透過電場  $E_{\rm t}$ は

$$E_{t} = t_{1}t_{2}e^{-i\phi}E_{in} + t_{1}t_{2}e^{-i\phi}(r_{1}r_{2}e^{-2i\phi})E_{in} + t_{1}t_{2}e^{-i\phi}(r_{1}r_{2}e^{-2i\phi})^{2}E_{in} + \cdots$$

$$= t_{1}t_{2}e^{-i\phi}\sum_{n=0}^{\infty}(r_{1}r_{2}e^{-2i\phi})^{n}E_{in}$$

$$= \frac{t_{1}t_{2}e^{-i\phi}}{1 - r_{1}r_{2}e^{-2i\phi}}E_{in}$$
(3.2)

となる。共振器内電場は、図 3.1 左側の鏡1の直後の電場 Ecirc を求めると、

$$E_{\text{circ}} = t_1 E_{\text{in}} + t_1 (r_1 r_2 e^{-2i\phi}) E_{\text{in}} + t_1 (r_1 r_2 e^{-2i\phi})^2 E_{\text{in}} + \cdots$$
  
$$= t_1 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-2i\phi})^n E_{\text{in}}$$
  
$$= \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\phi}} E_{\text{in}}$$
(3.3)

となる。

これらより、この FP 共振器を1つの鏡とみなした場合の振幅反射率  $r(\phi)$ 、振幅透過率  $t(\phi)$ は、

$$r(\phi) = \frac{E_{\rm r}}{E_{\rm in}} = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-2i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\phi}}$$
(3.4)

$$t(\phi) = \frac{E_{\rm t}}{E_{\rm in}} = \frac{t_1 t_2 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\phi}}$$
(3.5)

であることが分かる。

最終的に光検出器で検出されるのは電場振幅の2乗に比例する光のパワーであるので,(強度)反射率 *R* と(強度)透過率 *T* を計算するとそれぞれ

$$R = \left| \frac{E_{\rm r}}{E_{\rm in}} \right|^2 = \frac{\{ (r_1^2 + t_1^2)r_2 - r_1 \}^2 + 4r_1 r_2 (r_1^2 + t_1^2)\sin^2\phi}{(1 - r_1 r_2)^2 (1 + F\sin^2\phi)}$$
(3.6)

$$T = \left| \frac{E_{\rm t}}{E_{\rm in}} \right|^2 = \frac{(t_1 t_2)^2}{(1 - r_1 r_2)^2 (1 + F \sin^2 \phi)}$$
(3.7)

となる。ただし、 $F = 4r_1r_2/(1-r_1r_2)^2$ とした。また、入射パワー  $P_{\rm in}$ と共振器内パワー  $P_{\rm circ}$ の比は

$$\frac{P_{\rm circ}}{P_{\rm in}} = \left|\frac{E_{\rm circ}}{E_{\rm in}}\right|^2 = \frac{t_1^2}{(1 - r_1 r_2)^2 (1 + F \sin^2 \phi)}$$
(3.8)

で与えられる。

### 3.1.2 共振とフィネス

透過率を位相変化 $\phi$ の関数としてプロットすると、図 3.2 のようになる。これより $\phi = n\pi (n :$ 自然数)のときに透過光強度が鋭いピークを持つことが分かる。この状態を共振していると呼び、 共振器内パワーも最大となっている。いま共振器長 *L* が一定であるとして共振条件をレーザーの 周波数 $\nu$ に対して書くと、

$$\phi = n\pi = \frac{L\omega_{\rm L}}{c} \tag{3.9}$$

$$\nu = \frac{\omega_{\rm L}}{2\pi} = \frac{c}{2L}n\tag{3.10}$$

となる。共振する周波数の差は Free Spectral Range (FSR) と呼ばれ、

$$\nu_{\rm FSR} = \frac{c}{2L} \tag{3.11}$$

である。



図 3.2:  $r_1^2 = r_2^2 = 0.8, t_1^2 = t_2^2 = 0.2$ の場合の FP 共振器の強度透過率。

次に共振ピークの半値全幅  $\nu_{\rm FWHM}$  を求める。式 (3.7) より

$$\frac{1}{1+F\sin^2\left(\frac{\pi L\nu_{\rm FWHM}}{c}\right)} = \frac{1}{2}$$
(3.12)

であり、 $\nu_{\rm FWHM} \ll \nu_{\rm FSR}$ のときに sin を展開すると、

$$\nu_{\rm FWHM} \simeq \frac{c}{\pi\sqrt{F}L} = \frac{1 - r_1 r_2}{\pi\sqrt{r_1 r_2}} \nu_{\rm FSR} \tag{3.13}$$

となる。比 $\nu_{FSR}/\nu_{FWHM}$ は共振の鋭さを表す量でフィネスFと呼ばれ、

$$\mathcal{F} = \frac{\nu_{\text{FSR}}}{\nu_{\text{FWHM}}} = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \tag{3.14}$$

で与えられる。さらに共振器の全透過率をそれぞれの鏡の透過率とロスの<br/>和 $\mathcal{T}(=2-r_1^2-r_2^2)$ と定義すれば、近似的に

$$\mathcal{F} \simeq \frac{2\pi}{\mathcal{T}} \tag{3.15}$$

と書くこともできる。

### 3.1.3 Detuning

特にある 1 つの共振モード  $\omega_{cav} = n\pi c/L$  に注目し、その共振角周波数  $\omega_{cav}$  からのレーザーの 角周波数  $\omega_L$  のずれを detuning  $\Delta$  と呼び、

$$\Delta \equiv \omega_{\rm L} - \omega_{\rm cav} \tag{3.16}$$

のように定義する。Detuning は共振器長変動とも対応し、共振器長がもとのLからxだけ大きくなったときには

$$\omega_{\rm cav}(x) \simeq \omega_{\rm cav} - \frac{\omega_{\rm cav}}{L} x \tag{3.17}$$

$$\Delta = \omega_{\rm L} - \omega_{\rm cav} + \frac{\omega_{\rm cav}}{L} x \tag{3.18}$$

となる。共振器長変動を考える場合には、レーザーの角周波数を基準にして $\omega_{\rm L} = \omega_{\rm cav}$ とすれば

$$\Delta = \frac{\omega_{\text{cav}}}{L}x\tag{3.19}$$

のように対応する。

式 (3.3) より共振器内電場は

$$\frac{E_{\rm circ}}{E_{\rm in}} = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\phi}} = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{-2iL\Delta/c}}$$
(3.20)

であった。これを $\Delta$ ( $\ll \omega_{FSR}$ )で展開すると、 $\kappa \equiv \pi \nu_{FWHM}$ を cavity decay rate として

$$\frac{E_{\text{circ}}}{E_{\text{in}}} \simeq \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 (1 - 2iL\Delta/c)} \\
\simeq \frac{\nu_{\text{FSR}} t_1}{\kappa + i\Delta},$$
(3.21)

共振器内パワーは

$$P_{\rm circ} = \frac{\nu_{\rm FSR}^2 t_1^2}{\kappa^2 + \Delta^2} P_{\rm in} = \frac{(\mathcal{F}/\pi)^2 t_1^2}{1 + (\Delta/\kappa)^2} P_{\rm in}$$
(3.22)

のように Lorentzian の形をとる。

### 3.2 光バネ

Fabry-Perot 共振器内に貯められた光は、両端の鏡に輻射圧  $F = 2P_{\text{circ}}/c$ を及ぼす。共振器が共振状態からずれている(denuning されている)場合には、図 3.3 のように共振器長変動に対して輻射圧が変動するために、両端の鏡に対して光バネ(Optical Spring)と呼ばれる効果をもたらす。  $\Delta > 0$  (blue-detuned)の場合には復元力がはたらく正バネ、 $\Delta < 0$  (blue-detuned)の場合には反復元力がはたらく反バネとなることが見て取れる。加えて、一般に輻射圧は有限の時間遅れを伴って応答するために、1 周期で輻射圧のする仕事はゼロでなくなり、アンチダンピングの効果ももたらす。自明ではないものの、式 (3.34)より $\Delta > 0$ の場合にはアンチダンピング、 $\Delta < 0$ の場合にはダンピングとなることが分かる。ここでは、この光バネの効果を導出する。

#### 3.2.1 電場の周波数応答

共振器長が時間変化する場合の電場の応答を求める。共振器長を  $L(t) = L_0 + \delta x(t)$ のように 共振に十分近い平均値  $L_0$  とそこからの変動成分  $\delta x(t)$ に分離し、同様に片道の光の位相変化を  $\phi(t) = \phi_0 + \delta \phi(t)$ とする。 $\phi(t)$ が時間の関数であるためもはや式 (3.3)の結果を使うことはできず、



図 3.3: 光バネの模式図。縦軸は最大値で規格化されている。

時刻 t よりも m 回前の往復での光の位相変化が  $\delta\phi \ll 1$  の場合には  $2\phi \rightarrow 2\phi(t - \frac{2m-1}{c}L_0)$  である ことを考慮すれば、共振器内電場  $E_{\text{circ}}(t)$  は  $\delta\phi$  の 1 次まで採って

$$E_{\rm circ}(t) = t_1 E_{\rm in} + t_1 [r_1 r_2 e^{-2i\phi(t - \frac{L_0}{c})}] E_{\rm in} + t_1 [r_1 r_2 e^{-2i\phi(t - \frac{L_0}{c})}] [r_1 r_2 e^{-2i\phi(t - \frac{3L_0}{c})}] E_{\rm in} + \cdots$$

$$= t_1 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-2i\phi_0})^n \exp\left[-2i \sum_{m=1}^n \delta\phi\left(t - \frac{2m-1}{c}L_0\right)\right] E_{\rm in}$$

$$\simeq t_1 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-2i\phi_0})^n \left[1 - 2i \sum_{m=1}^n \delta\phi\left(t - \frac{2m-1}{c}L_0\right)\right] E_{\rm in}$$
(3.23)

となる。したがって共振器内電場の平均値と変動成分は

$$E_{\rm circ} = t_1 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-2i\phi_0})^n E_{\rm in} = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\phi_0}} E_{\rm in}$$
(3.24)

$$\delta E_{\rm circ}(t) = -2it_1 E_{\rm in} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-2i\phi_0})^n \sum_{m=1}^n \delta \phi \left( t - \frac{2m-1}{c} L_0 \right)$$
(3.25)

である。変動成分に対して Fourier 変換  $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$  を施し, 簡単のために  $\theta \equiv L_0 \omega / c (\ll 1)$  とおくと,

$$\begin{split} \delta \tilde{E}_{\text{circ}}(\omega) &= -2it_1 E_{\text{in}} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-2i\phi_0})^n \sum_{m=1}^n \delta \tilde{\phi}(\omega) \exp\left(-i\omega \frac{2m-1}{c} L_0\right) \\ &= -2it_1 E_{\text{in}} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{-2i\phi_0})^n \frac{e^{-i\theta}(1-e^{-2i\theta_n})}{1-e^{-2i\theta}} \delta \tilde{\phi}(\omega) \\ &= -\frac{t_1 E_{\text{in}}}{\sin \theta} \left[ \frac{1}{1-r_1 r_2 e^{-2i\phi_0}} - \frac{1}{1-r_1 r_2 e^{-2i(\phi_0+\theta)}} \right] \delta \tilde{\phi}(\omega) \\ &\simeq -\frac{2it_1 E_{\text{in}}}{1-r_1 r_2 e^{-2i\phi_0}} \frac{1}{1-r_1 r_2 e^{-2i(\phi_0+\theta)}} \delta \tilde{\phi}(\omega) \\ &= -\frac{2iE_{\text{circ}}}{1-r_1 r_2 e^{-2i(\phi_0+\theta)}} \delta \tilde{\phi}(\omega) \end{split}$$
(3.26)

となる。途中,  $\phi_0, \theta \ll 1$ ,  $r_1, r_2 \simeq 1$ のもとで近似を行った。これを  $\Delta, \kappa, \delta \tilde{x}(\omega)$ で書き直せば,

$$\delta \tilde{E}_{\rm circ}(\omega) = -\frac{2iE_{\rm circ}}{1 - r_1 r_2 e^{-2iL_0(\Delta + \omega)/c}} \frac{\omega_{\rm L}}{c} \delta \tilde{x}(\omega)$$
$$\simeq -\frac{\omega_{\rm L} E_{\rm circ}}{L_0} \frac{1}{\Delta + \omega - i\kappa} \delta \tilde{x}(\omega)$$
(3.27)

となる。

### 3.2.2 バネ定数と damping rate

共振器内パワーは  $P_{
m circ} \propto |E_{
m circ}|^2$  であるので,その変動成分は

$$\delta \tilde{P}_{\rm circ}(\omega) \propto E_{\rm circ}^* \delta \tilde{E}_{\rm circ}(\omega) + E_{\rm circ} \delta \tilde{E}_{\rm circ}^*(\omega)$$
(3.28)

で与えられる。 $\delta \tilde{E}_{
m circ}^{*}(\omega) = \left[\delta \tilde{E}_{
m circ}(-\omega)
ight]^{*}$ に注意して式 (3.27) を代入すると,

$$\delta \tilde{P}_{\rm circ}(\omega) = -\frac{P_{\rm circ}\omega_{\rm L}}{L_0} \left[ \frac{1}{\Delta + \omega - i\kappa} + \frac{1}{\Delta - \omega + i\kappa} \right] \delta \tilde{x}(\omega)$$
$$= -\frac{P_{\rm circ}\omega_{\rm L}}{L_0} \left[ \frac{\Delta + \omega}{(\Delta + \omega)^2 + \kappa^2} + \frac{\Delta - \omega}{(\Delta - \omega)^2 + \kappa^2} + i \left( \frac{\kappa}{(\Delta + \omega)^2 + \kappa^2} + \frac{\kappa}{(\Delta - \omega)^2 + \kappa^2} \right) \right] \delta \tilde{x}(\omega)$$
(3.29)

となる。鏡の受ける輻射圧は  $F = 2P_{\text{circ}}/c$ であり,  $K(\omega) \equiv -\delta F(\omega)/\delta x(\omega)$  で複素バネ定数を, その実部と虚部に対して  $K(\omega) \equiv K^{\text{opt}}(\omega) + im\omega\Gamma^{\text{opt}}(\omega)$ のようにバネ定数  $K^{\text{opt}}$  と damping rate  $\Gamma^{\text{opt}}$ を定義すると,

$$K(\omega) = \frac{2P_{\rm circ}\omega_{\rm L}}{L_0c} \left[ \frac{\Delta + \omega}{(\Delta + \omega)^2 + \kappa^2} + \frac{\Delta - \omega}{(\Delta - \omega)^2 + \kappa^2} + i\left(\frac{\kappa}{(\Delta + \omega)^2 + \kappa^2} + \frac{\kappa}{(\Delta - \omega)^2 + \kappa^2}\right) \right],$$
(3.30)



図 3.4: Normalized detuning  $\Delta/\kappa$  を変化させたときの規格化した  $K^{\text{opt}}$  と  $\Gamma^{\text{opt}}$  の挙動。

$$K^{\text{opt}}(\omega) = \frac{2P_{\text{circ}}\omega_{\text{L}}}{L_0 c} \left[ \frac{\Delta + \omega}{(\Delta + \omega)^2 + \kappa^2} + \frac{\Delta - \omega}{(\Delta - \omega)^2 + \kappa^2} \right],$$
(3.31)

$$\Gamma^{\text{opt}}(\omega) = \frac{2P_{\text{circ}}\omega_{\text{L}}}{L_0 m \omega c} \left[ \frac{\kappa}{(\Delta + \omega)^2 + \kappa^2} + \frac{\kappa}{(\Delta - \omega)^2 + \kappa^2} \right]$$
(3.32)

のように表される。さらに低周波 ( $\omega \ll \sqrt{\kappa^2 + \Delta^2}$ ) での近似を行うと,

$$K^{\text{opt}}(\omega) \simeq \frac{4P_{\text{circ}}\omega_{\text{L}}}{L_{0}c} \frac{\Delta}{\kappa^{2} + \Delta^{2}}$$
$$= \frac{8\omega_{\text{L}}t_{1}^{2}}{c^{2}} \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^{3} \frac{\Delta/\kappa}{\left[1 + (\Delta/\kappa)^{2}\right]^{2}} P_{\text{in}}, \qquad (3.33)$$

$$\Gamma^{\text{opt}}(\omega) \simeq -\frac{8P_{\text{circ}}\omega_{\text{L}}}{L_0mc}\frac{\kappa\Delta}{(\kappa^2 + \Delta^2)^2}$$
$$= -\frac{16\omega_{\text{L}}t_1^2}{\kappa mc^2} \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^3 \frac{\Delta/\kappa}{\left[1 + (\Delta/\kappa)^2\right]^3} P_{\text{in}}$$
(3.34)

のように、ωに依存しない形で表され、図 3.4 のように振る舞う。

系が安定となる条件は  $K^{\text{opt}} > 0$  かつ  $\Gamma^{\text{opt}} > 0$  であるが,式 (3.33), (3.34) から分かる通りこ れらは必ず逆符号をとるために、単一の光バネのみでは不安定性を伴う。そのため、安定な光バ ネを実現するためには、gas damping や次節で述べる double optical spring など何らかの方法で damping を導入する必要がある。



図 3.5: Double optical spring の例。Spring 光(赤)と damping 光(青)の和が安定な紫の光バ ネを作る。

### 3.2.3 Double Optical Spring

前節の最後では、単一の光バネのみではどちらに detuning しても不安定であることを見た。も ちろんガスダンピングのような外部から正の散逸を正の光バネに加えてやることで安定な系は実 現できるが、新たな散逸は熱雑音を導入してしまう。そこで、この新たな熱雑音を導入することな く光のみで安定なバネを作ることができると提案されたのが、double optical spring [26] である。 Double optical spring では detuning の異なる 2 つの光を同時に共振器に導入し、一方に大きなバ ネの効果を、もう一方に大きなダンピングの効果を担わせる。両者のパワーおよび detuning のバ ランスを調節することで、図 3.5 のようにそれらの和を正バネ、正ダンピングの安定領域へと持っ ていくことができる。

### **3.3 共振器の安定条件**

共振器内に光をためるためには、そもそも共振器が光学的に安定である必要がある。共振器長を L、2枚の鏡の曲率半径を R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub> としたとき、共振器の安定条件は

$$0 \le \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) \le 1 \tag{3.35}$$

であり [27], 鏡とその曲率中心の位置関係は図 3.6 のようになる。ただし鏡の曲率半径の符号は, 共振器に対して外側に凸のときに正とする。ビームの発展を考えるときには曲率半径を進行方向に 対して凸のとき正と定義するが,これとは異なるので注意したい。以下では,共振器はこの安定性 を満たすもののみを考える。



図 3.6: 光学的に安定となる共振器の構成。色つきの部分が安定な領域であり、扇型の中心は鏡の 曲率中心である。

### 3.4 浮上鏡の力学的安定性

ここでは、輻射圧を受けて浮上する鏡の力学的な安定性について議論する。図 3.7 のように鉛直 上向きを z 軸をとり、浮上鏡の質量を m、重力加速度を g、曲率中心を  $r_L$ 、曲率半径を R とし、 重心  $r_G$  ははじめに原点 O にあるとする。1 つの浮上鏡に対していくつかの共振器が組まれている とき、i 番目の共振器に対して i 番目 の固定鏡の曲率中心を  $r_i$ 、曲率半径を  $R_i$ 、共振器長を  $L_i$ 、 浮上鏡のビームスポット位置を  $s_i$ 、輻射圧による力を  $F_i$ 、その  $F_i$ の x 軸、z 軸との成す角をそれ ぞれ  $\phi_i$ ,  $\theta_i$ 、光バネ定数を  $K_i^{\text{opt}}$  とする。

鏡の曲率半径は共振器に対して外側に凸のとき正とする。さらに便利のために浮上鏡から固定鏡 への符号付き曲率中心間距離 *a<sub>i</sub>* を

$$a_i = s_i (R + R_i - L_i) \tag{3.36}$$

で定義する。固定鏡が浮上鏡の下にあるとき  $s_i = 1$ ,上にあるとき  $s_i = -1$ とする。浮上鏡が力 学的に安定となるためには、つり合いの位置からの重心の微小な位置変動  $d\mathbf{r} = {}^t(dx, dy, dz)$ およ び角度変動  $d\mathbf{\alpha} = {}^t(d\alpha, d\beta, d\gamma)$ に対して( ${}^t$ はベクトルの転置を表す)、復元力  $d\mathbf{F}$ および復元ト ルク  $d\mathbf{N}$  がはたらくことが必要である。すなわち、

$$\begin{pmatrix} dF \\ dN \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} dr \\ d\alpha \end{pmatrix}$$
(3.37)

と書いたとき,バネ定数行列 K の固有値が全て正となることが必要である。以下ではこの K を具体的に計算し,安定となる条件を議論する。



図 3.7: 浮上鏡と固定鏡からなる共振器。



図 3.8: 鏡の重心の変位および回転の座標の取り方。

### 3.4.1 つり合いの条件

浮上鏡にはたらく力は重力と輻射圧のみなので、力のつり合いの条件は

$$\sum_{i} \boldsymbol{F}_{i} - m\boldsymbol{g} = 0 \tag{3.38}$$

である。次に、重心は原点にあるとして重心周りのトルクのつり合いを考えると、

$$\sum_{i} \boldsymbol{F}_{i} \times \boldsymbol{s}_{i} = 0 \tag{3.39}$$

となる。浮上鏡が球面鏡であることから、 $s_i = R(g/g + F_i/F_i)$ であるので、式 (3.38) が成り立っていれば式 (3.39) は自動的に成り立つ。したがって独立な条件は力のつり合いのみである。

#### 3.4.2 一般の場合

#### 共振器長変動

はじめに、重心が微小に変位したときの共振器長変動を考える。浮上鏡の z 軸対称性より z 軸周 りの回転  $\gamma$  は無視し、鏡の運動は x と y で対等なので重心の x, z 並進  $d\mathbf{r}_{\rm G} = (dx, 0, dz)$  および y 軸周りの回転  $d\mathbf{\alpha} = (0, d\beta, 0)$  を考えれば十分である。このとき浮上鏡の曲率中心は

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}}(dx,\,dz,\,d\beta) = \begin{pmatrix} dx - R\sin d\beta \\ 0 \\ dz - R\cos d\beta \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dx - R \cdot d\beta \\ 0 \\ dz \end{pmatrix}$$
(3.40)

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{L},0} = \begin{pmatrix} 0\\0\\-R \end{pmatrix}, \qquad d\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} dx - R \cdot d\beta\\0\\dz \end{pmatrix}$$
(3.41)

と変化する。ただし近似は微小量の1次まで行い,添字0はつり合いのときの量であるとする。曲 率中心間ベクトルを

$$\boldsymbol{a}_{i}(dx, dz, d\beta) \equiv \boldsymbol{r}_{i} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{L}}(dx, dz, d\beta) = \boldsymbol{a}_{i,0} - d\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}}$$
(3.42)

で定義すれば、前に定義した曲率中心間距離  $a_i = s_i(R + R_i - L_i)$ は  $|\mathbf{a}_i|$ に等しく、

$$a_i(dx, dz, d\beta) \simeq a_{i,0} - \hat{\boldsymbol{a}}_{i,0} \cdot d\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}}$$
 (3.43)

である。ここで,

$$\hat{\boldsymbol{a}}_{i,0} = \frac{\boldsymbol{a}_{i,0}}{a_{i,0}} = \begin{pmatrix} \sin\theta_i \cos\phi_i \\ \sin\theta_i \sin\phi_i \\ \cos\phi_i \end{pmatrix}$$
(3.44)

は光軸方向の単位ベクトルである。共振器内の光軸は2つの曲率中心を通るので(図 3.7),共振 器長変動  $dL_i$  は曲率中心間距離の変動  $da_i = a_i(dx, dz, d\beta) - a_{i,0}$ に等しく,

$$dL_i = -\hat{\boldsymbol{a}}_{i,0} \cdot d\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} \tag{3.45}$$

となる。

#### ビームスポット位置変動

浮上鏡のビームスポット $s_i$ は、ベクトル $a_i$ と浮上鏡表面のの交点であるから、

$$\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} + \boldsymbol{R} \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_i \tag{3.46}$$

で与えられる。したがってビームスポット位置の変動は、

$$d\boldsymbol{s}_{i} = d\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} + R \cdot d\hat{\boldsymbol{a}}_{i}$$

$$= d\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} + R \left[ d\left(\frac{1}{a_{i}}\right) \boldsymbol{a}_{i,0} + \frac{1}{a_{i,0}} d\boldsymbol{a}_{i} \right]$$

$$= \left( 1 - \frac{R}{a_{i,0}} \right) d\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}} + \frac{R}{a_{i,0}} (\hat{\boldsymbol{a}}_{i,0} \cdot d\boldsymbol{r}_{\mathrm{L}}) \hat{\boldsymbol{a}}_{i,0}$$
(3.47)

となる。

#### 輻射圧とトルク

浮上鏡が正の光バネでトラップされているとき、輻射圧の大きさは共振器長変動に応じて

$$F_i = F_{i,0} - K_i^{\text{opt}} dL_i \tag{3.48}$$

と変化する。輻射圧の向きは光軸の向きと同じなので  $F_i = F_i \hat{a}_i$  となり、その変動は

$$d\mathbf{F}_{i} = dF_{i}\hat{\mathbf{a}}_{i,0} + F_{i,0}d\hat{\mathbf{a}}_{i}$$
  
=  $-K_{i}^{\text{opt}}dL_{i}\hat{\mathbf{a}}_{i,0} + F_{i,0}\left[-\frac{R}{a_{i,0}}d\mathbf{r}_{\text{L}} + \frac{R}{a_{i,0}}(\hat{\mathbf{a}}_{i,0} \cdot d\mathbf{r}_{\text{L}})\hat{\mathbf{a}}_{i,0}\right]$  (3.49)

となる。

輻射圧が鏡に与えるトルクは、重心が動いた効果も含めて

$$\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{F}_i \times (\boldsymbol{s}_i - d\boldsymbol{r}_{\rm G}) \tag{3.50}$$

である。したがって,

$$d\mathbf{N}_{i} = d(\mathbf{F}_{i} \times \mathbf{s}_{i}) - \mathbf{F}_{i,0} \times d\mathbf{r}_{G}$$
  
=  $d\mathbf{F}_{i} \times \mathbf{s}_{i,0} + \mathbf{F}_{i,0} \times (d\mathbf{s}_{i} - d\mathbf{r}_{G})$  (3.51)

となる。

鏡が受ける全ての力とトルクはこれらの和なので,

$$d\boldsymbol{F} = \sum_{i} d\boldsymbol{F}_{i}, \qquad d\boldsymbol{N} = \sum_{i} d\boldsymbol{N}_{i}$$
(3.52)

である。

#### 3.4.3 対称性のよい場合

系が *z* 軸周りで *n* 回対称性をもつ場合には,系のバネ定数行列は以下のように簡単にまとめられる。

$$K = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 & -Rw & 0\\ 0 & w & 0 & Rw & 0 & 0\\ 0 & 0 & v & 0 & 0 & 0\\ 0 & Rw & 0 & R^2w - mgR & 0 & 0\\ -Rw & 0 & 0 & 0 & R^2w - mgR & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(3.53)

であることが分かった。その具体形は、浮上鏡の中心に光を何本も当てる場合は

$$w = \sum_{i} \frac{F_i}{a_i}, \qquad (3.54)$$

$$v = \sum_{i} K_{i}^{\text{opt}} \tag{3.55}$$

である。また正三角形状に当てる場合は

$$w = \frac{3F_1}{a_1} + \frac{3}{2} \left( K_1^{\text{opt}} - \frac{F_1}{a_1} \sin^2 \theta_1 \right) , \qquad (3.56)$$

$$v = \frac{3F_1}{a_1} + \frac{3}{2} \left( K_1^{\text{opt}} - \frac{F_1}{a_1} \cos^2 \theta_1 \right)$$
(3.57)

である。まず z 並進は独立しているため v > 0 が必要なことが分かる。それ以外の部分では行列 (3.53) は対角化されていないが、問題となっているのは x(y) 並進と  $\beta(\alpha)$  回転のカップリングであ る。そこで運動方程式のうち x と  $\beta$  のカップリング部のみを取り出して、

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} w & -Rw \\ -Rw & R^2w - mgR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \beta \end{pmatrix}$$
(3.58)

が安定となればよい。すなわち,このバネ定数行列  $K_{x,\beta}$ の固有値が2つとも正であればよく, その条件は  $tr(K_{x,\beta}) > 0$ ,  $det(K_{x,\beta}) > 0$  である。この不等式を解くと,安定となる条件として w > 0, R < 0を得る。はじめに得たz並進の条件も併せると,結局安定となる条件は

$$v > 0, w > 0, R < 0$$
(下に凸) (3.59)

であることがわかった。ところで浮上鏡の中心に光を何本も当てる構成の場合には、安定共振器となる条件が $a_i < 0$ であったため、必ずw < 0となってしまう。ただし浮上鏡の上側にも安定共振器を作った場合には、符号付き曲率中心間距離の符号定義から $a_i < 0$ 、輻射圧の向きが下向きに変わるため $F_i < 0$ となり、 $F_i/a_i > 0$ を実現できる。このため、上下の共振器をうまく調節することで、それらの和 $w = \sum_i F_i/a_i$ を正にすることが可能である。

### 3.5 **鏡浮上の構成**

前節で安定な鏡浮上の条件を導いたが、それを実際に構成することは可能であり、これまでに提 案されていた光を3本入れる三脚型[12]と我々の提案する光を上下から1本ずつ入れるサンドイッ



図 3.9: 三脚型(左図)とサンドイッチ型(右図)の概念図。

	三脚型	サンドイッチ型
利点	鏡を支えるだけのパワーでよい。	光が2本でよい。
		z 並進を直接見ることができる。
弱点	3本の光のバランスをとる機構が必要。	鏡を支える以上のパワーが必要。
	鏡が大きくなる。	光軸を重力方向に合わせる機構が必要。

表 3.1: 三脚型とサンドイッチ型の比較。

チ型[13]がある(図 3.9)。三脚型は浮上鏡を3本の光で下から支える構成で、それぞれの光に式 (3.57)のような光バネを導入することで鉛直方向と水平方向ともに復元力を生み、安定に浮上させ る。一方で式(3.55)のようなバネを導入するサンドイッチ型では浮上鏡を支えるのは下からの光 のみであり、これだけでは水平方向の運動が不安定となってしまうところを上からの光で補助する という構成である。鉛直方向は下からの光バネで安定させ、水平方向は図 3.10のように上からの 光の光軸が大きくずれることで復元力を生む。

これよりも多くの光を入れても安定な構成はできるかもしれないが,系を複雑にしてしまうだ けと思われるので,上の2つに絞ってその利点と弱点を考察すると表 3.1 のようになる。どちら も何かしらのバランスをとる機構は必要で,その難しさも同程度と考えられる。したがって光が2 本と最小の本数でよく,かつ鏡のz並進を直接測定することができるサンドイッチ型に利が多い。 加えて最終的に double optical spring を利用することを考えると,三脚型では3本の光すべてに double optical spring を入れることとなり結局6本の光を入れることとなる一方,サンドイッチ型 では下からの光のみに入れればよいので結局必要な光は3本となり半分に抑えられる。

### 3.6 本研究の目的

前節より本研究では我々の新しく提案するサンドイッチ構成を採用し,実際にこのサンドイッチ 構成が安定であることの原理検証を行う。安定性を検証すべきモードは,鉛直並進,水平並進,回 転運動の3種類である。このうち,鉛直並進運動は光バネによって,水平並進および回転運動はサ ンドイッチ構成の形状に依存する復元力(F<sub>1</sub>/a<sub>1</sub> + F<sub>2</sub>/a<sub>2</sub>)によって安定となるはずである。 サンドイッチ構成によって光学浮上を実現するためには,まず質量 mg 程度の曲率付きの鏡を用



図 3.10: サンドイッチ構成の水平方向の復元力(中央)および復元トルク(右)。鏡の変位に対して 上共振器のビーム位置(オレンジ)と下共振器のビーム位置(赤)が上のように変化するが,光量 は赤の方が多いもののオレンジの変位の方が大きく,力(トルク)の和はオレンジが優勢となる。

意する必要がある。そのような鏡は既に何枚か試作されており用意できる目処は立っているもの の、薄くて割れやすく扱いにくい。そこでまずは原理検証のみを行うことに目的を絞り、mgの質 量を持つ鏡の代わりにねじれ振り子の先端に取り付けた鏡を用いる。ねじれ振り子は容易にその 共振周波数を1Hz以下にできるために、サンドイッチ構成に由来する微弱な復元力を感じるセン サーとして用いることができる。ねじれ振り子の運動のうち水平回転と鉛直回転は局所的には鏡の 水平並進と鉛直並進とみなせるため、その2つのモードが安定となることを確かめる。鉛直 z 方向 の復元力はよく知られた光バネなので、自明ではない水平方向にはたらくサンドイッチ構成に由来 する復元力によって共振周波数が上がることを確かめる。サンドイッチ構成の軸対称性より、水平 方向の安定性は特定の x 軸方向で安定性を確かめれば十分である。

## 第4章 実験装置

### 4.1 **全体の構成**

本実験の全体図は図 4.1 のようになっている。曲率つきで mg 程度の鏡は壊れやすく扱いにくい ため、そのような mg 鏡の代わりにハーフインチ鏡をねじれ振り子の先端に取り付けて用いること で、サンドイッチ構成の微小な復元力を感じうる扱いやすい鏡を実現する。そのねじれ振り子で代 用する中央の浮上鏡の上下に鏡を配置して、浮上鏡を共有した Fabry-Perot 共振器を上下に作る。 ただしこのままではねじれ振り子が大きくふらついて共振がとれないため、あらかじめねじれ振



図 4.1:装置の全体図。



図 4.2: 全体のブロックダイアグラム。

り子の位置をフォトセンサで測定してその水平回転と鉛直回転を制御した後に上下の共振器を独立 に共振させる。今回は浮上鏡の位置測定感度は問題としないため、あえて低真空もしくは大気圧で 実験を行うことでガスダンピングによる散逸を導入する。そうすることで正バネ、アンチダンピン グの単一光バネのみで安定な光バネを実現し、構成を単純にする。

全体の制御は図 4.2 のように行う。1 つはねじれ振り子のふらつきを抑えるための制御で、変位 を $x_0$ からxへと抑える。この制御ループにおける伝達関数については、 $S_1$ はフォトセンサ、 $F_1$ はフィルター回路、 $A_1$ はコイル・マグネットアクチュエータ、Mはねじれ振り子を表す。もう 1 つはは FP 共振器の共振器状態の制御で、共振器長変動を読み取ってピエゾにフィードバックし、 ねじれ振り子の鏡の変動に対してもう一方の鏡を追従させるようにする。こちらの制御ループにお ける伝達関数については、 $S_2$ は共振器長変動を読み取るセンサ、 $F_2$ はフィルター回路、 $A_2$ はピエ ゾを表す。ピエゾのレンジによって追従できる範囲が決まるため、前のねじれ振り子の制御を行っ て鏡の位置変動を十分に小さくしたうえで制御を行う。こうして FP 共振器を共振状態に保つこと で鉛直方向には光バネ  $K^{opt}$ の効果を、水平方向にはサンドイッチ構成の復元力を出現させる。図 4.2 ではどちらも  $K^{opt}$ で示される量である。そうして光学浮上が安定である、すなわちこれらの 効果が正のバネとなって鏡の共振周波数がもとのねじれ振り子の共振周波数よりも高くなる効果を 見る。


図 4.3: 共振器の構成。

## 4.2 光学系

### 4.2.1 共振器

### サンドイッチ構成

サンドイッチ構成では、図 4.3 のように中央の浮上鏡(ねじれ振り子の鏡)を共有して下の鏡と 中央の鏡で下側の共振器、上の鏡と中央の鏡で上側の共振器のように、2つの別の共振器を構成す る。下側の共振器には下側から光を入射して共振させ、上側の共振器には上側から別の光を入射し て共振させる。このとき上下の光が干渉しないように、一方の光を AOM によって周波数をずらし ておく。ただしこのような 3 枚鏡の共振器の場合、一方の共振器の状態が他方の共振器から影響を 受ける効果は依然として残る。例として下側のみから光を入射する場合と考える。下側の共振器が 共振しているときその透過光は上側の共振器内に入っていくことになるが、もしその透過光が上側 の共振器でも共振してしまうと下側の共振器にとって中央の鏡の反射率が実効的に落ち、下側の共 振器内パワーが下がってしまう。逆に透過光が上側で反共振となると、下側の共振器内パワーは少 し増える結果となる。上側の共振器にとっても同様であり、どちらの大振器にとっても他方の共振 器が反共振となるのが最適である。今回は、下側の共振器長を下側の光によって、上側の共振器長 を周波数の異なる上側の光によって独立に制御し、どちらの光にとっても手前側の共振器は共振状 態、奥側の共振器は反共振に近い状態となるようにする。

<b>秋 111 规约</b> 获时置							
t	$6.35\mathrm{mm}$						
d	$12.7\mathrm{mm}$						
n	1.444	$@1550\mathrm{nm}$					
$r^2$	>99.95%						
$l^2$	< 0.2%						
$r_1^2$	>99.9%						
$r_2^2$	>99.9%						
R	$75\mathrm{mm}$	凸					
R' = R/n	$53\mathrm{mm}$	凸					
$R_1$	$100\mathrm{mm}$	凹					
$R_2$	$75\mathrm{mm}$	凹					
	$\frac{t}{d}$ $\frac{d}{n}$ $r^{2}$ $l^{2}$ $r_{1}^{2}$ $r_{2}^{2}$ $R$ $R' = R/n$ $R_{1}$ $R_{2}$	$\begin{array}{cccc} t & 6.35 \mathrm{mm} \\ \hline t & 6.35 \mathrm{mm} \\ \hline d & 12.7 \mathrm{mm} \\ \hline n & 1.444 \\ \hline r^2 & > 99.95\% \\ \hline l^2 & < 0.2\% \\ \hline r_1^2 & > 99.9\% \\ \hline r_2^2 & > 99.9\% \\ \hline R & 75 \mathrm{mm} \\ \hline R' = R/n & 53 \mathrm{mm} \\ \hline R_1 & 100 \mathrm{mm} \\ \hline R_2 & 75 \mathrm{mm} \end{array}$					

表 4.1: 鏡の設計値

表 4.2: 共振器の設計値

	下側の共振器		上側の共振器	
共振器長	$L_1$	$55\mathrm{mm}$	$L_2$	$127\mathrm{mm}$
符号付き曲率中心間距離	$a_1$	$30\mathrm{mm}$	$a_2$	$1\mathrm{mm}$
フィネス	$\mathcal{F}_1$	4200	$\mathcal{F}_2$	1100
(Normalized) Detuning	$\Delta_1/\kappa_1$	$1/\sqrt{3}$	$\Delta_2/\kappa_2$	0
入射パワー	$P_1$	$0.2\mathrm{W}$	$P_2$	$1.4\mathrm{W}$
共振器内パワー	$P_{\rm circ,1}$	$360\mathrm{W}$	$P_{\rm circ,2}$	$170\mathrm{W}$
鉛直方向バネ定数	$K_1^{\mathrm{opt}}$	$8.4\times 10^4\mathrm{N/m}$	$K_2^{\mathrm{opt}}$	0
水平方向バネ定数	$F_1/a_1$	$-0.08\times10^{-3}\mathrm{N/m}$	$F_2/a_2$	$1.1\times 10^{-3}\mathrm{N/m}$

#### 要請

サンドイッチ構成の安定性を検証するには、その構成に由来するバネ定数をねじれ振り子のバネ 定数よりも大きくし、ねじれ振り子の共振周波数の変化として観測できることが必要である。ここ で鏡の感じるバネ定数  $k_i$  は共振角周波数  $\omega_i \ge k_i = I\omega_i^2/L^2$ で換算される量であり、i = ver, hor, L は懸架点から鏡の中心(輻射圧の作用点)までの距離、I はねじれ振り子の慣性モーメントであ る。後のねじれ振り子の節で述べるように、ねじれ振り子のバネ定数は無理のない範囲で小さく設 計して  $k_{ver} = 6.2 \times 10^{-2}$  N/m、 $k_{hor} = 7.8 \times 10^{-5}$  N/m である。また、サンドイッチ構成の特徴は、 鏡を支えるために下側の共振器内パワーの方が大きいにもかかわらず水平方向の復元力は上側の共 振器で決まる点にあるので、意味のある原理検証のためには共振器内パワーを  $P_{circ,1} > P_{circ,2}$  と する必要がある。共振器はこれらの条件を満たすように図 4.3 のような構成とし、鏡と共振器のパ ラメータは表 4.1 と表 4.2 に示した。図中および以下の議論においては、添字 1,2 でそれぞれ下側 の共振器、上側の共振器を表している。

#### 復元力

浮上鏡が受ける鉛直方向と水平方向の復元力について考える。下側,上側の共振器に入射する レーザーパワーをそれぞれ *P*<sub>1</sub>, *P*<sub>2</sub> とする。下共振器のみに光バネを導入するので,鉛直方向のバ ネ定数 *k*<sub>ver</sub> は下共振器の光バネ *K*<sub>1</sub><sup>opt</sup> に等しく,式 (3.33) より

$$k_{\rm ver}^{\rm opt} = \frac{8\omega_{\rm L} t_{1,1}^2}{c^2} \left(\frac{\mathcal{F}_1}{\pi}\right)^3 \frac{\Delta_1/\kappa_1}{\left[1 + (\Delta_1/\kappa_1)^2\right]^2} P_{\rm in,1}$$
(4.1)

となる。フィネスについては、下側の共振器は内側に両方の鏡の HR 面がくるためにロスは小さいと考えられ、フィネスは  $F_1 \simeq 2\pi/T_1 = 4200$  と見積もられる。それ対して上側の共振器は浮上鏡の AR 面が内側にあり、その AR 面での反射率  $l^2(<0.2\%)$ はロスとなって  $T_2 = T_1 + l^2$ となり、フィネスは  $F_2 \simeq 1100$  と見積もられる。Detuning は光バネが最大となる  $\Delta_1/\kappa_1 = 1/\sqrt{3}$ に調節して鏡のパラメータを入れると  $k_{ver}^{opt} = 8.4 \times 10^4$  N/m となる。一方で水平方向はサンドイッチ構成に特有の復元力がはたらき、そのバネ定数  $k_{hor}^{opt}$  は

$$k_{\rm hor}^{\rm opt} = \frac{F_1}{a_1} + \frac{F_2}{a_2} \tag{4.2}$$

で与えられる。ただし、 $F_i$ は鏡の受ける輻射圧、 $a_i$ は符号付きの曲率中心間距離であり、i = 1, 2である。上側共振器の $a_2$ を計算する際にはレーザー光は屈折率nの基材を通して浮上鏡の反射面を見ることを考慮し、曲率半径として見かけの曲率半径  $R' = R/n = 53 \,\mathrm{mm}$ を用いることに注意したい。こちらも鏡のパラメータを入れると $k_{\rm hor}^{\rm opt} = 1.0 \times 10^{-3} \,\mathrm{N/m}$ となる。

#### 共振器内パワー

このときの共振器内パワーについて考えると,式 (3.22) より  $P_{\text{circ},1} = 360 \text{ W}$ ,  $P_{\text{circ},2} = 170 \text{ W}$  であり,意味のある原理検証となるための条件  $P_{\text{circ},1} > P_{\text{circ},2}$  は満たされている。支えられる鏡の質量は  $2(P_{\text{circ},1} - P_{\text{circ},2})/(gc) = 0.13 \text{ mg}$  である。今回は鏡の質量自体は支えないために関係ないものの,最終的に光学浮上の実験を行う際には 0.1 mg の曲率つき鏡を製作するか,共振器内パワーを kW オーダーにして mg の鏡を支えるかを選ぶこととなる。前者は技術的に難しいと思われるので後者が有力であるが,共振器のフィネスは特に AR 面側でこれ以上大きくすることが難しいため,10 W クラスの光源が必要となる。



図 4.4: ファイバーアンプで増幅されたレーザーの出力。9:1のカプラで光を分けた後でパワーを 測定して(図の 90% と 10%) その和をとった(図の Sum)。

### 4.2.2 光源

光源には NKT Photonics 社のファイバーレーザー Koheras AjustiK E15 モデル (1550 nm, 最 大 50 mW)を用いた。50 mW ではサンドイッチ型の効果を見るにはパワーが小さすぎるので,ファ イバーレーザーの出力を NKT Photonics 社のファイバーアンプ Koheras Boostic HPA に接続し て出力を増幅した。ファイバーアンプに流す電流と増幅された出力の関係は図 4.4 のようになり, 駆動電流が I = 8 A のときに最大で 1.6 W まで増幅できる。

次にビームの横モードのクオリティを考える。一般にレーザー光源から出た光は基本 TEM<sub>00</sub> モードだけではなく高次モードも含み、その高次モードが含まれる程度を表すパラメータとしてビーム 伝搬率  $M^2$  がしばしば用いられる。TEM<sub>00</sub> に対しては  $M^2 = 1$  である。高次モードは複雑な空間 分布を持つが、平均的にビーム径が TEM<sub>00</sub> モードの  $M(\geq 1)$  倍であるとして定式化すると、ビーム半径は TEM<sub>00</sub> モードの場合から、

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_{\rm R}}\right)^2} \tag{4.3}$$

$$z_{\rm R} = \frac{\pi w_0^2}{M^2 \lambda} \tag{4.4}$$

のように補正を受ける [28]。ここで w<sub>0</sub> はビームウエスト半径, z はビームウエストからの距離, z<sub>R</sub> はレイリーレンジ, λ はレーザーの波長である。使用するのはファイバーレーザーなので, コ リメータを通して空間光にしてからビームプロファイルを測定した。コリメータは上共振器用には を,下共振器用には Thorlabs の F240APC-1550 を用いた。

結果は図 4.5 と図 4.6 となり、フィッティングからどちらもビーム伝搬率  $M^2 = 1.0$  であった。したがってこのレーザー光は TEM<sub>00</sub> モードとみなせるため、共振器を TEM<sub>00</sub> モードで共振させる



図 4.5: 上共振器に入れる光のビームプロファイル。横軸はコリーメータからの距離。ビームウエスト位置 0.0 mm, ビームウエスト半径 0.18 mm,  $M^2 = 1.0_{\circ}$ 



図 4.6: 下共振器に入れる光のビームプロファイル。横軸はコリーメータからの距離。ビームウエ スト位置 – 320 mm, ビームウエスト半径 0.74 mm,  $M^2 = 1.0$ 。



図 4.7: 下共振器用の光学系の配置。赤は入射光,オレンジは反射光を表す。

に当たっては出力を無駄なく用いることができる。前節で決めた共振器のパラメータと後で決める ねじれ振り子のパラメータは、この1.6W出力のもとで現実的な値の中から決定した。

## 4.2.3 入射光学系

本実験での光学系は、はじめは光ファイバーでレーザー光を取り回し、その後にやぐらに固定 されたコリメータを通して空間光に移行する構成となっている(図4.8,図??)。こうすることで、 大気中でテストをしたあとに真空槽内で実験をするときに、コリメータを動かさないようにすれば 全体のアライメントを壊さないままでやぐらに移植することができる。

レーザーから出た光は、まずレーザーへの戻り光をカットするために FI (Faraday Isolator) に通さ れる。次に PDH 法によって共振器長変動の信号を取得するために EOM (Electro-Optic Modulator) で 15 MHz の位相変調をかけ、生じたキャリアとサイドバンドをまとめてファイバーアンプで増幅 させる。ファイバーアンプの出力光は再び FI に通された後に Coupler でパワー比 9:1 に分岐さ せる。パワー比 1 の光は HWP (Half-Wave Plate) と PBS (Polarization Beam Splitter) でパワー を調節して真空槽内に導入され、下側の共振器に入射する。下側の共振器からの反射光は QWP (Quarter-Wave Plate) と PBS で選択的に取り出して PD (Photo Detector) で検出する。一方パ ワー比 9 の光は上側の共振器に入射させ、反射光も同様に QWP と PBS で選択的に取り出して PD で検出する。



図 4.8: 上共振器用の光学系の配置。赤は入射光,オレンジは反射光を表す。

## 4.2.4 モードマッチング

コリメータから出たビームを共振器内で共振させるためには、ビームの縦モードを共振器の形に 合わせるモードマッチングをする必要がある。共振器に入射するビームが共振器の形にどれだけ 合っているかを表す量にモードマッチング率 M があり、入射ビーム  $\psi$  を共振器の固有モード  $\phi_{mn}$ (TEM<sub>mn</sub> モード) で

$$\psi = \sum_{m,n} a_{mn} \phi_{mn} \tag{4.5}$$

と展開したときの係数  $a_{nm}$  に対し,  $M \equiv |a_{00}|^2$  で定義される。ビーム伝搬率  $M^2$  と同じ文字が使われているが,異なる量であることに注意したい。これは入射ビームのうち共振器の TEM<sub>00</sub> モードに合っているパワーの割合を表す。ここでビームの半径 w と等位相波面の曲率半径 R で q パラメータを

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i\frac{\lambda}{\pi w^2} \tag{4.6}$$

と定義する [27]。この q を用いてモードマッチング率を書けば、入射ビームの q パラメータを  $q_{in}$ 、同じ位置での共振器の固有モードの q パラメータを  $q_{cav}$  として

$$M = \frac{4 \operatorname{Im}[q_{\mathrm{in}}] \operatorname{Im}[q_{\mathrm{cav}}]}{|q_{\mathrm{in}}^* - q_{\mathrm{cav}}|^2}$$

$$(4.7)$$

で与えられる。今回はいくつかのレンズを組み合わせてモードマッチングを行い,十分な共振器内 パワーを確保するために設計値でモードマッチング率 99% 以上となるようにした。



図 4.9: PDH 信号,反射光強度と光バネの強さ。

### 4.2.5 信号取得

下側の共振器では、共振点周りの裾での反射光の光量変化を共振器長変動の信号とした。下側の 光の役目は、最終的には鏡の重さを支えることと光バネによって鉛直方向にトラップすることの2 つである。光量を最大にすると光バネはゼロになり、逆に光バネの効果を最大にすると光量はおよ そ半減するために、これらは両立しない。ただし今回の原理検証では鏡の重さは支えないので、光 バネの効果が最大となるように、すなわち反射光強度の変化が最大となる点 ( $\Delta/\kappa = 1/\sqrt{3}$ ) 付近に ロックするのがよく(図 4.9)、反射光の光量変化をそのまま共振器長変動の信号とするのがよい。

一方,上側の共振器においては PDH 法(補遺 A 参照)によって共振器長変動の信号を取得した。 上側の光の役割は鏡に水平方向の復元力を与えることであるが光バネは必要ないので,光量が最大 となる共振ピークでロックするのがよい。ただし共振ピークの前後では光量変化をエラー信号とす ることができないため,PDH 法により光量変化の微分に対応する信号を作り出す。この PDH 信号 は共振点まわりで線型かつ共振点の前後で符号が変わるので,共振点でロックする際のエラー信号 とすることができる。今回は、シードレーザーの後ろに配置した EOM に LO (Local Oscillator)か ら 15 MHz の信号を加えて位相変調をかけ、共振器からの反射光を PD で受けて同じく LO からの 15 MHz で復調し、PDH 信号とした。用いた EOM は EOspace 社の PM-0K5-00-PFA-PFA-UL-S であり、加える電圧に対する光の位相変化は DC において  $\pi/4.0$  [rad/V] (データシート値)であ る。変調指数 m は 1 よりも十分小さくする必要があるので、加える電圧を 0.4 V<sub>pp</sub> として m = 0.16となるようにした。また、変調周波数はサイドバンドが共振しないように線幅  $\kappa/2\pi \sim 0.4$  MHz よ りも十分大きくなるように選んだ。

## 4.2.6 アクチュエータ

共振器長制御は,浮上鏡をはさむ上下の鏡に取り付けたピエゾアクチュエータによって行う。今回用いたピエゾは NEC TOKIN の AE0203D08DF で,バランスをとるためにミラーホルダーの



図 4.10: 使用したピエゾ(左)とピエゾの伝達関数測定のセットアップ(右)。

3ヶ所に取り付けてその上に鏡を接着した。このときピエゾにかかる荷重の影響で特性が変化する ことが考えられるので、ピエゾの伝達関数(アクチュエート効率)[m/V]の測定を行った。

図 4.10 のようにピエゾ付き鏡と固定鏡を両端とするマイケルソン干渉計を組み,干渉計の信号 をピエゾにフィードバックすることでミッドフリンジに制御する。干渉計の伝達関数を *I*,回路の 伝達関数を *F*,ピエゾの伝達関数を *A*,オープンループ伝達関数を *G* = *IFA* とすると,*I*,*F*,*G* が測定可能なのでそこから *A* を逆算する。干渉計の伝達関数 *I*[m/V] は,ミッドフリンジにおいて は出力信号の振れ幅を  $\Delta V$  として *I* =  $2\pi\Delta V/\lambda$  である。今回は *I* =  $4.9 \times 10^6$  V/m であった。

結果は図 4.11 のようになり、コヒーレンスのよかった 300 Hz 以下で平均をとって上の共振器 のピエゾは  $(3.7 \pm 0.3) \times 10^{-8} \text{ m/V}$ 、下の共振器のピエゾは  $(3.3 \pm 0.2) \times 10^{-8} \text{ m/V}$  となった。 データシートの値 9  $\mu$ m/150 V = 6 × 10<sup>-8</sup> m/V よりも小さいが、この値は荷重がない場合のも のなので、測定値は小さく出たと考えられる。また、制御の際に問題となるピエゾの寄生共振が 50 Hz, 600 Hz, 4 kHz などにあることが分かった。1 kHz 以上での位相遅れのために 4 kHz で発振 しやすいが、UGF (Unity Gain Frequency) は最大 3 kHz まで上げることができた。マイケルソン 干渉計のセンサーとしての伝達関数と、後で共振器長制御を行う際の PDH 法や反射光強度変化の 伝達関数は、どちらも周波数依存性のない定数であるため、同じようなオープンループ伝達関数と なることが期待できる。したがって共振器制御においても、必要と考えられる UGF1 kHz 程度を 実現するには十分と考えられる。

## 4.3 ねじれ振り子

### 4.3.1 設計

本研究においてねじれ振り子は、壊れやすく扱いにくい曲率付き mg 鏡の代わりに、微小な力を 感じる扱いやすい鏡を実現するために用いる。ねじれ振り子の回転の共振周波数は1Hz よりも小 さくできるのでその復元力は小さく、光バネによる復元力やサンドイッチ構成での復元力といった 微弱な力によって運動が支配される系となりうる。

作成したねじれ振り子は図 4.12 のようなものであり、サンドイッチ構成とねじれ振り子の対応 関係は図 4.13 に、パラメータは表 4.3 にそれぞれ示した。ねじれ振り子の YAW と ROLL の共振



図 4.11: ピエゾの伝達関数。青が上の共振器のピエゾで  $(3.7 \pm 0.3) \times 10^{-8}$  m/V,赤が下の共振器 のピエゾで  $(3.3 \pm 0.2) \times 10^{-8}$  m/V であった。

周波数はそれぞれ

$$f_{\rm YAW} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi n a^4}{2Il}}$$
(4.8)

$$f_{\text{ROLL}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgd}{I}} \tag{4.9}$$

で与えられ、対応する鏡の位置でのバネ定数は  $k_{hor} = I(2\pi f_{YAW})^2/L^2$ ,  $k_{ver} = I(2\pi f_{ROLL})^2/L^2$ となる。ここで、n, a, lはそれぞれワイヤーの剛性率、半径、長さ、m, I, L, dはそれぞれねじれ 振り子の質量、(懸架点周りの) 慣性モーメント、懸架点から鏡中心までの距離、懸架点と重心の 距離である。これらがサンドイッチ構成由来のバネ定数より小さくなるようにパラメータを決定 した。鉛直方向の共振周波数  $f_{ROLL}$  においては dが重要であるが、そもそも光バネの作る鉛直方 向のバネ定数が大きいためにあまり気にする必要はない。これに対して水平方向の共振周波数は できるだけ小さくする必要があり、特にワイヤーの半径 aが重要である。細すぎると耐荷重が落 ちて実験がやりにくくなるため、今回は半径  $20 \,\mu\text{m}$ のタングステン線を選んだ。タングステン線 の引張り強度はおよそ  $100 \,\text{kg/mm}^2$ であるため、耐荷重は  $100 \,\text{g}$  程度である。また、共振周波数は  $f_{YAW} = 17 \,\text{mHz}$ となる。最終的に、観測すべきねじれ振り子の共振周波数の変化は図 4.4 のよう にまとめられる。

#### 4.3.2 センサ

ねじれ振り子の変位の読み取りには、フォトセンサを用いた。フォトセンサは LED と光検出器 (PD) から成り、対象物で反射される LED の光量を PD で読み取ることで距離を読み取ることが



図 4.12: ねじれ振り子の全体像。右側のミラーホルダーの位置をフォトセンサで読み取り、コイル・ マグネットアクチュエータによって力を左側のミラーホルダーにフィードバックして制御を行う。



図 4.13: サンドイッチ構成とねじれ振り子の対応関係。ねじれ振り子の回転の呼び名と座標の取り 方は図中のように定義する。ねじれ振り子の YAW 回転は鏡の x 並進に, ROLL 回転は鏡の z 並 進に対応する。

	-	
材料		アルミニウム
全長		$180\mathrm{mm}$
懸架点から鏡中心までの距離	L	$85\mathrm{mm}$
重心と懸架点の距離	d	$4.5\mathrm{mm}$
質量	m	$10\mathrm{g}$
懸架点周りの慣性モーメント	Ι	$4.7\times 10^{-5}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$
ワイヤー素材		タングステン
ワイヤー長	l	$72\mathrm{mm}$
ワイヤー半径	a	$20\mu{ m m}$
ワイヤー剛性率	n	161 GPa

表 4.3: ねじれ振り子の設計値

表 4.4: 共振周波数,バネ定数の比較(設計値)

	共振周波数		バネ定数	
ねじれ振り子の水平方向	$f_{\rm YAW}$	$17\mathrm{mHz}$	$k_{ m hor}$	$7.8\times10^{-5}\mathrm{N/m}$
サンドイッチ構成による水平方向	$f_{ m YAW}^{ m opt}$	$62\mathrm{mHz}$	$k_{ m hor}^{ m opt}$	$1.0  imes 10^{-3} \mathrm{N/m}$
ねじれ振り子の鉛直方向	$f_{\rm ROLL}$	$0.49\mathrm{Hz}$	$k_{\rm ver}$	$6.2\times 10^{-2}\mathrm{N/m}$
サンドイッチ構成による鉛直方向	$f_{ m ROLL}^{ m opt}$	$570\mathrm{Hz}$	$k_{ m ver}^{ m opt}$	$8.4\times10^4\mathrm{N/m}$

できる。今回はフォトセンサとして LED と PD が一体となっている素子を用いた。ねじれ振り子 のミラーホルダーの上面および側面からの反射光を見ることで, ROLL 回転と YAW 回転に対応す る並進運動の大きさを測定する。ミラーホルダーはアルミニウム製であり,その上面と側面で反射 させた場合の距離と出力の関係は図 4.15 となった。実際にねじれ振り子の位置制御を行った際に は、このうち距離 1-2 mm の領域を用いた。

### 4.3.3 アクチュエータ

アクチュエータには、コイル・マグネットアクチュエータを用いた。磁石は  $4 \text{ mm} \times \phi 1 \text{ mm}$ のネ オジム磁石、コイルはインダクタンス 3.5 mH、抵抗  $12 \Omega$  のものを用いた。電子天秤に置いた磁石 の真上にコイルを支持し、電流を加えたときの磁石の受ける力を秤の目盛りの変化として読み取る



図 4.14: フォトセンサの模式図(左)と写真(右)。



図 4.15: アルミ板までの距離とフォトセンサ出力の大きさ。

ことで,このアクチュエート効率の測定を行った。電圧を変化させたときと,コイル・マグネットの距離を変化させたときのアクチュエータの出す力の依存性は図 4.16 と図 4.17 のようになった。ただし力の符号は、今回の測定を行った場合において引力がはたらいた場合を負、斥力がはたらいは場合を正とした。これよりアクチュエート効率は、電圧に対して -5.0×10<sup>-4</sup> N/V,距離に対して 0.11 N/m である。



図 4.16: コイルドライバに加えた電圧とアクチュエート力の関係。コイルの端とマグネットの端が 重なる位置で距離を固定して電圧のみを変化させた。



図 4.17: コイル・マグネットの距離とアクチュエート力の関係。コイルの端とマグネットの端が重なるときをゼロ点とし、加えた電圧は 1V で固定した。

# 第5章 実験結果

## 5.1 ねじれ振り子の位置制御

ねじれ振り子のふらつきを抑制し、先端の鏡を共振器の共振がとれる位置まで持っていくため に、ねじれ振り子の位置の制御を行う。さらに、ねじれ振り子の制御によって浮上鏡の位置を制御 した後に共振器長制御を上下の鏡に取り付けられたピエゾによって行う予定なので、鏡の位置での 鉛直並進の RMS(Root Mean Square) はピエゾのレンジ 9 µm よりも小さくする必要がある。

今回はねじれ振り子の ROLL と YAW に対して独立に制御をかけ、どちらもそのブロックダイア グラムは図 5.1 のようになる。大文字アルファベットはそれぞれ伝達関数を表し、*M*: ねじれ振り 子、*S*: フォトセンサー、*F*: フィルター回路、*A*: コイル・マグネットアクチュエータである。*s*<sub>ER</sub>、 *s*<sub>FB</sub> はそれぞれエラー信号、フィードバック信号である。この制御によって、制御していないとき の位置の外乱 *x*<sub>0</sub> を制御後に *x* = *x*<sub>0</sub>/(1+*G*) まで抑える。ここで *G* = *AFSM* はオープンループ 伝達関数である(フィードバック制御の詳細は補遺 B を参照)。制御時にフォトセンサの出力に加 えたオフセット電圧から反射面までの絶対距離が分かるため、そこからエラー信号を変位に換算す るのに必要な *S* の値を求めた。今回は YAW が *S* = (146 ± 2) V/m、ROLL が *S* = (96 ± 1) V/m であった。

実験の結果, YAW のオープンループ伝達関数は図 5.2 のようになり, UGF は 1 Hz で,  $-180^{\circ}$  からの位相余裕が 15° であることから安定に制御できていることが分かる。1 Hz 以下では理論線 と実測が合致していないが, この領域でオープンループ伝達関数を測定するときにたびたびロック がはずれていたためと思われる。UGF はさらに高い方がよいが, 3.5 Hz にある並進モードを超え られず最大でも 1 Hz までしか上げられなかった。また制御の前後で, 変位スペクトルは図 5.3 の ようになり, RMS は自由振動させたときの 14  $\mu$ m から, 制御後の inloop 信号で 0.6  $\mu$ m まで抑え られた。

次に, ROLLのオープンループ伝達関数は図 5.4 のようになり, UGF が 3 Hz, 位相余裕が 30° な



図 5.1: ねじれ振り子の位置制御のブロックダイアグラム。



図 5.2: YAW のオープンループ伝達関数。緑線は理論線のフィッティングである。



図 5.3: YAW に対応する鏡の水平並進の変位スペクトル。



図 5.4: ROLL のオープンループ伝達関数。緑線は理論線のフィッティングである。



図 5.5: ROLL に対応する鏡の鉛直並進の変位スペクトル。

ので、こちらも安定に制御できていることが分かる。ROLL の共振周波数は 0.5 Hz である。10 Hz のピークは目視で pitch と分かり、30 Hz のディップは位相が反転していることから鉛直並進モードと思われる。UGF がここまでしか上げられなかったのは、10 Hz にある pitch モードを超えられ なかったためである。また制御の前後で、変位スペクトルは図 5.5 のようになり、RMS は自由振動させたときの 40  $\mu$ m から、制御後の inloop 信号で 0.1  $\mu$ m まで抑えられた。これは RMS の要求 値 9  $\mu$ m 以下を満たす。

## 5.2 フィネス測定

原理検証を行うためには、サンドイッチ構成による復元力がねじれ振り子の復元力  $k_{hor} = 8 \times 10^{-5}$  N/m よりも大きくなる必要があり、並進方向の復元力を生む上側共振器の共振器内パワーは最低でも 12 W 必要である。入射パワーが 1.4 W の場合、上側共振器のフィネスへの要求値は  $F_2 > 290$  である。今回の原理検証を意味あるものとするために、下側共振器の共振器内パワーが 上側よりも大きくなることを要求すると、入射パワーが 0.2 W の場合、下側共振器のフィネスへの 要求値は  $F_1 > 770$  である。ただしどちらも限界の値なので、できるだけフィネスは大きい方がよい。そこで実際にフィネスが設計値通りとなっているかを知るために、上下の共振器のフィネスを 測定する。

まず下側共振器については、共振状態に保たれた共振器への光の入射を突然止めたときの透過光の減衰を見る ringdown 測定によってフィネスを測定した。共振器の(電場の) cavity decay rate  $\epsilon_{\kappa}$  としたとき、パワーの decay rate は  $2\kappa$  となるので、共振器内パワー P(t) が満たす微分方程式は

$$\frac{d}{dt}P(t) = -2\kappa P(t) \tag{5.1}$$

となる。Ringdown の開始時刻をt = 0として解くことにより,

$$P(t) = P(0)e^{-2\kappa t} \tag{5.2}$$

を得る。このときの時定数は $\tau = 1/(2\kappa)$ である。一方, cavity decay rate はフィネスと $\kappa = \pi \nu_{1/2} = \pi \nu_{FSR}/F$ の関係があるため,

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \nu_{\rm FSR}}{\kappa} = \frac{\pi c}{L} \tau \tag{5.3}$$

からフィネスを求めることができる。ただし L は共振器長で、 $\nu_{FSR} = c/(2L)$  であることを用いた。透過光強度 V(t) は P(t) に比例するため、透過光強度の時定数を測定すればよい。

測定は図 5.6 のように行い, AOM ドライバに加える電圧の on/off で AOM の 1 次光を on/off し,高速光スイッチとした。まずはじめに光スイッチを off にしたときのレーザー光を PD1 で直接 測定したところ,時定数  $\tau_0 = 36$  ns で減衰する様子が測定できた (図 5.7 の黒点)。ドライバに加え る電圧は 1 ns 以下で off にしていたので,これは PD の応答速度の限界によるものと考えられる。

次に下側の共振器 ( $L_1 = 55 \text{ mm}$ )を共振状態に保って光スイッチを off にしたときに透過光強度 を PD3 (PD1 を移し替えた)で測定したところ,図 5.7 の青点となった。このデータは時定数  $\tau_1$  の ringdown に時定数  $\tau_0$  のローパスフィルターがかかった後のものであるが,一般に時定数  $\tau(\neq \tau_0)$ の ringdown の信号  $V(t) = V(0) \exp(-t/\tau)$ は、このローパスフィルターにより

$$V(t) = V(0) \frac{\tau \exp(-t/\tau) - \tau_0 \exp(-t/\tau_0)}{\tau - \tau_0}$$
(5.4)

と補正を受けて出力される。この補正も込めてフィッティングした結果,4回の測定の平均が $\tau_1 = (106\pm 2)$  ns となり, $F_1 = 1512\pm 24$ を得た。これは要求値 $F_1 > 770$ を満たすが,設計値 $F_1 = 4200$ を下回った。

また、フィネスは共振器長を変化させたときの透過光ピークの形からも求めることができる。 ピエゾによって速度一定で共振器長を変化させたとき、FSR と半値全幅を掃引する時間  $t_{\text{FSR}}$ ,  $t_{\text{FWHM}}$ を用いて  $F = \nu_{\text{FSR}}/\nu_{\text{FWHM}} = t_{\text{FSR}}/t_{\text{FWHM}}$ である。結果は図 5.8 となり、5 回測定して  $t_{\text{FWHM,1}} = (87\pm7)\mu_{\text{S}}$ ,  $t_{\text{FSR,1}} = (136\pm12) \text{ ms}$ となり、 $F_1 = 1560\pm190$ を得た。これは ringdown 測定と矛盾しない値である。Ringdown 測定と比べて誤差が大きいのは、ピエゾの掃引速度が一定 でないために  $t_{\text{FSR}}$ ,  $t_{\text{FWHM}}$ のばらつきが大きかったためである。

上側の共振器についてはフィネスが低いために ringdown では測定できず,透過光の形からのみ でフィネスを測定した。その結果は図 5.9 のようになり,5 回測定して  $t_{\rm FWHM,2} = (54 \pm 3) \mu$ s,  $t_{\rm FSR,2} = (28 \pm 11) \, {\rm ms} \, {\rm k}$ なり,  $F_2 = 520 \pm 210 \, {\rm e}$ 得た。こちらも要求値  $F_2 > 290 \, {\rm e}$ 満たすが,や はり設計値  $F_2 = 1100 \, {\rm e}$ 下回った。図 5.9 を見るとピークが 2 つあるが,このピークだけでなく 他の高次モードのピークも全て同様に 2 つ並んだ状態で見えていた。この原因はまだ分かってい ない。

上下の共振器のフィネスはどちらも要求値を満たすが,設計値を下回ってしまった。ただし,今回の結果は鏡を1ヶ月以上空気中に置いた後のものであり,新品の鏡の封を切った直後に測定したときは,透過光ピーク形の測定から $F_1 = 4900 \pm 1200$ と $F_2 \sim 1200$ を得ていた。もともとは設計値と矛盾しない値だったので,空気中に置いていた間に鏡が汚れてしまってフィネスが落ちたと思われる。

今回のフィネスの場合,入射パワーを $P_1 = 0.2 \text{ W}, P_2 = 1.4 \text{ W}$ としたときに共振器内パワーは  $P_{\text{circ},1} = 46 \text{ W}, P_{\text{circ},2} = 38 \text{ W}, 水平方向の復元力は <math>k_{\text{hor}}^{\text{opt}} = 2.4 \times 10^{-4} \text{ N/m}$ と見積もられる。 ねじれ振り子の復元力  $k_{\text{hor}} = 7.8 \times 10^{-5} \text{ N/m}$ よりは大きいために検証不可能ではないものの,鏡 は新しいものに取り替えた方がよいことが分かった。

### **5.3 共振器長の同時制御**

サンドイッチ構成では、中央の浮上鏡を共有して上下に2つの共振器を構成する。それらが干渉 せずに共振器長制御ができることを確かめるために、大気中でねじれ振り子を固定した状態で上下



図 5.6: Ringdown 測定のセットアップ。



図 5.7: 下側共振器の ringdown 測定。 $\mathcal{F}_1 = 1512 \pm 24$ を得た。



図 5.8: 下側共振器の透過光のピーク形状の測定。<br/>  $\mathcal{F}_1 = 1560 \pm 190$ を得た。



図 5.9: 上側共振器の透過光のピーク形状の測定。 $\mathcal{F}_2 = 520 \pm 210$ を得た。

の共振器長の同時制御の試験を行った。共振器長変動の信号の取得は、上側の共振器は PDH 法に よって、下側の共振器は反射光の強度変化を見る方法によって行った。

下側の制御をかけたあとに上側の制御をかけたときの時系列は図 5.10 のようになった。下側は時刻 7s 付近から,上側は時刻 14s 付近から制御がかかり,同時に制御できていることが見て取れる。この状態でそれぞれオープンループ伝達関数を測定した結果は下側が図 5.11,上側が図 5.12 となり,それぞれ UGF800 Hz,900 Hz において位相余裕が 90° 程度とれているために,安定な制御ができていることが確かめられた。



図 5.10: 上下の共振器長制御を行ったときの誤差信号(上)と反射率(下)の時系列。



図 5.11: 下側共振器のオープンループ伝達関数。共振器長変動の信号は、反射光量の変化を見ることで得た。緑線は回路とピエゾの伝達関数からのフィッティングである。



図 5.12: 上側共振器オープンループ伝達関数。共振器長変動の信号は PDH 法によって得た。緑線 は回路とピエゾの伝達関数からのフィッティングである。

# 第6章 まとめ

## 6.1 実験結果

本研究では, 懸架に伴う熱雑音を導入しない mg 程度の鏡の支持方法としてサンドイッチ構成に よる光輻射圧支持を目指し,私たちの提案するサンドイッチ構成による鏡浮上の安定性の検証に向 けて装置を設計,構築し,特性評価を行った。実験結果は以下のようになった。

#### ねじれ振り子の特性評価

まず,製作したねじれ振り子の特性評価を行い,設計値通りの共振周波数が得られていることを 確認した。さらにねじれ振り子の位置制御を行い,鉛直方向 (ROLL)の RMS を inloop で 0.1  $\mu$ m ま で抑えた。これはピエゾのレンジからの要求値 9  $\mu$ m を満たす。水平方向 (YAW)の RMS は inloop で 0.6  $\mu$ m まで抑えたが,この値で上下の共振器の共振がとれるかどうかは分かっておらず,さらに RMS を抑えることが必要な場合は制御のゲインを上げることになる。ただし現在のところ,UGF は ROLL で 3 Hz, YAW で 1 Hz であり,これ以上ゲインを上げられない状態である。この UGF はそれぞれ pitch モード (10 Hz),水平並進モード (3.5 Hz) とのカップリングの影響で決まってい るが,現在は制御を行っていないこの 2 つのモードも同時に制御することで UGF は上げられると 考えられる。

#### 共振器のフィネス測定

原理検証を行うために必要な共振器内パワーを得るために、上下の共振器のフィネスがそれぞれ 要求値  $F_1 > 770$ ,  $F_2 > 290$ を満たすかどうかを確認した。上側の共振器のフィネスは、ピエゾを 等速で動かしたときの透過光ピーク間隔とピークの幅を測定し、その結果  $F_2 = 520 \pm 210$  を得た。 下側の共振器のフィネスは同様の方法で  $F_1 = 1560 \pm 190$ , ringdown 測定から  $F_1 = 1512 \pm 24$  を 得た。これらは要求値を満たすものの、設計値  $F_1 = 4200$ ,  $F_2 = 1100$  を下回り、鏡を空気中に長 い間置いていたために汚れてしまったと考えられる。開封直後には設計値に矛盾しない値が出てい たため、必要であれば新しい鏡に交換することでフィネスは設計値に近い値が得られると考えら れる。

#### 上下の共振器長の同時制御

サンドイッチ構成では中央の鏡を共有して上下にそれぞれ独立な共振器を組むため,それらが干 渉することなく共振器長制御できることを確認した。今回の場合は中央の鏡はねじれ振り子に取り 付けられた鏡であり,ねじれ振り子を固定した状態で共振器長の同時制御を行った。それぞれオー プンループ伝達関数を測定した結果,どちらも UGF において位相余裕 90° が確認され,安定な制 御となっていることが分かった。

# 6.2 今後の展開

ねじれ振り子を制御した状態での共振器長制御が行えていないため、まずそれを進めることにな る。空気中で実験がやりにくい場合には真空槽に入れることも考えられ、今回の装置はもともとス ムーズに真空槽内に移植できるように設計されているために大きな手間とはならない。またフィネ ス測定の項でも述べたように、フィネスは要求値を満たすものの設計値がでていないため、鏡を新 しい物に交換してフィネスを上げてサンドイッチ構成の復元力を大きくすることで、ねじれ振り子 の共振周波数の変化を観測しやすくすることも考えられる。そのような改善をしたのちに、実際に サンドイッチ構成に由来する復元力が生まれるかどうかを検証していく。この原理検証が肯定的に なされた場合には、光学浮上による SQL の到達に向けた実験を開始することとなる。

# 補遺 A 誘電体多層膜

誘電体多層膜は、図 A.1 のようにガラス基材に屈折率の高い膜  $(n_1)$  と低い膜  $(n_2)$  を交互にコー ティングした反射膜で、金属膜と比べて高い反射率と低い吸収率を実現できる。そのため光学浮 上においては反射膜に誘電体多層膜を用いる。ただしコーティングの厚さ  $d_c$  は熱雑音の大きさに  $\delta x \propto \sqrt{d_c}$  のように寄与し、その計算のために反射率とコーティングの層数の関係を求めておく。 定常状態における膜内の電磁場の計算の方法には、電場と磁場が境界で連続となることから条件式 を立てる方法と電場を進行波と後退波に分けて境界での反射と透過を考える方法がある。ここで は、Fabry-Pérot 共振器の計算でもよく見られる後者で計算する。

## A.1 一般の場合

図 A.1 のように、反射膜が 2N + 1 枚コーティングされており、それぞれの厚さは  $d_i$  (i = 1, 2, ..., 2N + 1)、レーザー電場の片道の位相変化は  $\phi_i = 2\pi d_i n_i / \lambda$  である。また k 層目から k+1 層目に向かって入射する電場を  $E_i$ 、反射される電場を  $E'_i$  とする。まず一般に、屈折率  $n_1, n_2$ の層の境界において  $n_1$  側から光が入射するとき、電場の振幅反射率  $r_1$  と透過率  $t_1$  は、

$$r_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t_1 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$
 (A.1)

で与えられる。逆に $n_2$ 側から入射するとき、振幅反射率 $r_2$ と透過率 $t_2$ は、

$$r_2 = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = -r_1, \quad t_1 = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} \tag{A.2}$$

で与えられる。さらに屈折率  $n_1, n_2$  の層が交互にコーティングされている場合には,  $r_1 = r_3 = \cdots = r_{2N+1}, r_2 = r_4 = \cdots = r_{2N} = -r_1, t_1 = t_3 = \cdots = t_{2N+1}, t_2 = t_4 = \cdots = t_{2N}$  が成り立つ。



図 A.1: 誘電体多層膜の模式図。

さて、 k 層目と k+1 層目の境界における電場の入出力を考えると、次の式が成立する。

$$E'_{k} = r_{k}E_{k} + t_{k+1}E'_{k+1}e^{i\phi_{k+1}}, \qquad (A.3)$$

$$E_{k+1} = t_k E_k e^{i\phi_{k+1}} + r_{k+1} E'_{k+1} e^{2i\phi_{k+1}}.$$
(A.4)

したがって行列の形で,

$$\begin{pmatrix} -r_{k} & 1\\ t_{k}e^{i\phi_{k+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{k}\\ E'_{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t_{k+1}e^{i\phi_{k+1}}\\ 1 & -r_{k+1}e^{2i\phi_{k+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{k+1}\\ E'_{k+1} \end{pmatrix}$$
(A.5)  
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} E_{k}\\ E'_{k} \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{k}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi_{k+1}} & -r_{k+1}e^{i\phi_{k+1}}\\ r_{k}e^{-i\phi_{k+1}} & (t_{k}t_{k+1} - r_{k}r_{k+1})e^{i\phi_{k+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{k+1}\\ E'_{k+1} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{t_{k}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi_{k+1}} & r_{k}e^{i\phi_{k+1}}\\ r_{k}e^{-i\phi_{k+1}} & e^{i\phi_{k+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{k+1}\\ E'_{k+1} \end{pmatrix}$$
$$= M_{k} \begin{pmatrix} E_{k+1}\\ E'_{k+1} \end{pmatrix}$$
(A.6)

と書き直せる。最後の変形で  $r_{k+1} = -r_k$  および  $t_k t_{k+1} - r_k r_{k+1} = t_1 t_2 - r_1 r_2 = 1$  が成り立つことを用いた。ここで、右辺に現れる行列

$$M_k = \frac{1}{t_k} \begin{pmatrix} e^{-i\phi_{k+1}} & r_k e^{i\phi_{k+1}} \\ r_k e^{-i\phi_{k+1}} & e^{i\phi_{k+1}} \end{pmatrix}$$
(A.7)

は転送行列と呼ばれる。真空との境界である k = 0においても、 $n_0 = 1$ を考慮に入れて  $r_0 = (n_0 - n_1)/(n_0 + n_1)$ 、 $t_0 = n_0/(n_0 + n_1)$ を用いれば同様に成り立つ。また基材との境界である k = 2N + 1においても成り立つ。 $\phi_{2N+2}$ が定まらないことが気になるかもしれないが、適当に定めても  $E_t$ の位相が変化するだけなので反射率と透過率の計算には影響しない。この転送行列を用いれば、

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ E'_0 \end{pmatrix} = M_0 M_1 M_2 \dots M_{2N+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} E_t$$
(A.8)

のように両端での電場の関係が記述できる。基材内では反射電場がないので境界条件として $E'_t = 0$ とおいた。この行列の積を計算することで多層膜の反射率Rと透過率Tが

$$R = \left| \frac{E'_0}{E_0} \right|^2, \quad T = \left| \frac{E_t}{E_0} \right|^2 \tag{A.9}$$

から求められる。また特に  $n_1$  層と  $n_2$  層の厚さすなわち位相変化がそれぞれすべて等しい場合は  $M_1 = M_3 = \ldots$ ,および  $M_2 = M_4 = \ldots$  が成り立つため、さらに

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ E'_0 \end{pmatrix} = M_0 (M_1 M_2)^N M_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} E_t$$
(A.10)

と簡単にかける。

# A.2 厚さ $\lambda/4$ の場合

すべての層の片道の位相変化が  $\phi_k = \pi/2$ , すなわち光路長が  $\lambda \phi_k / (2\pi) = \lambda/4$  の場合に各層で の反射光が最も強めあって干渉するため, (最適化をしない場合には) HR コーティングにはこの厚 さがよく用いられる。そのため, この場合の計算を式 (A.10) からさらに進めておくと便利だろう。

まず式 (A.7) に  $\phi_{k+1} = \pi/2$  を代入すると,

$$M_k = \frac{i}{t_k} \begin{pmatrix} -1 & r_k \\ -r_k & 1 \end{pmatrix}$$
(A.11)

を得る。したがって N 乗される部分は,

$$M_1 M_2 = -\frac{1}{t_1 t_2} \begin{pmatrix} -1 & r_1 \\ -r_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ -r_2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{1}{t_1 t_2} \begin{pmatrix} 1 + r_1^2 & 2r_1 \\ 2r_1 & 1 + r_1^2 \end{pmatrix}$$
(A.12)

となる。このような形の行列は

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
(A.13)

のように行列 Pによって対角化されるので,

$$M_{1}M_{2} = -\frac{1}{t_{1}t_{2}}P\begin{pmatrix}(1+r_{1}^{2})^{2} & 0\\ 0 & (1-r_{1}^{2})^{2}\end{pmatrix}P^{-1}$$
$$= -\frac{1}{n_{1}n_{2}}P\begin{pmatrix}n_{1}^{2} & 0\\ 0 & n_{2}^{2}\end{pmatrix}P^{-1}$$
$$\Rightarrow (M_{1}M_{2})^{N} = \left(-\frac{1}{n_{1}n_{2}}\right)^{N}P\begin{pmatrix}n_{1}^{2N} & 0\\ 0 & n_{2}^{2N}\end{pmatrix}P^{-1}$$
(A.14)

となる。これを式 (A.10) に代入して計算すれば,

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ E'_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{t_1 t_2} \begin{pmatrix} -1 & r_0 \\ -r_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{n_1 n_2} \end{pmatrix}^N P \begin{pmatrix} n_1^{2N} & 0 \\ 0 & n_2^{2N} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & r_1 \\ -r_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} E_t$$

$$= -\frac{1}{n_0 n_1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{n_1 n_2} \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} n_1^2 \cdot n_1^{2N} + n_0 n_2 \cdot n_2^{2N} \\ -n_1^2 \cdot n_1^{2N} + n_0 n_2 \cdot n_2^{2N} \end{pmatrix} E_t$$
(A.15)

が得られる。したがって多層膜の反射率は

$$R = \left| \frac{-n_1^2 \cdot n_1^{2N} + n_0 n_2 \cdot n_2^{2N}}{n_1^2 \cdot n_1^{2N} + n_0 n_2 \cdot n_2^{2N}} \right|^2 = \left[ \frac{1 - \frac{n_1^2}{n_0 n_2} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{2N}}{1 + \frac{n_1^2}{n_0 n_2} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{2N}} \right]^2$$
(A.16)

と求められた。またこれを N について解くと,

$$2N = \frac{\ln\left[(n_0 n_2/n_1^2)(1+\sqrt{R})/(1-\sqrt{R})\right]}{\ln(n_1/n_2)}$$
(A.17)

となり、全コーティングの厚さは

$$d_{\rm c} = \frac{\lambda}{4} \left[ \frac{1}{n_1} + \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) N \right] \tag{A.18}$$

である。

# 補遺 B Pound-Drever-Hall 法

本研究では Fabry-Perot 共振器の共振器長変動の信号を得るために, Pound-Drever-Hall (PDH) 法 [29] を用いた。PDH 法では、レーザーに位相変調をかけることで生じたサイドバンドとキャリ アのビートの大きさを測定することで、完全に共振している状態からの共振器長変動に比例した信 号を得ることができる。ここでは、PDH 法の原理について説明する。

レーザー光源から出た光の電場を

$$E_{\rm in} = E_0 e^{i\omega_{\rm L}t} \tag{B.1}$$

とする。この光に変調指数m,変調角周波数 $\omega_m$ で位相変調をかけると、電場は

$$E_{\rm in}^{\rm mod} = E_0 e^{i(\omega_{\rm L}t + m\cos\omega_{\rm m}t)} \tag{B.2}$$

に変化する。これをベッセル関数  $J_n(m)$  で展開し,  $m \ll 1$  の場合には高次項を無視できるので  $n = 0, \pm 1$  の項を残せば,

$$E_{\rm in}^{\rm mod} = E_0 e^{i\omega_{\rm L}t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) i^n e^{in\omega_{\rm m}t}$$
$$\simeq E_0 \left[ J_0(m) e^{i\omega_{\rm L}t} + iJ_1(m) e^{i(\omega_{\rm L}+\omega_{\rm m})t} + iJ_1(m) e^{i(\omega_{\rm L}-\omega_{\rm m})t} \right]$$
(B.3)

となる。これより、位相変調をかけられた光からは元の角周波数  $\omega_L$  と同じ角周波数を持つキャリアと角周波数  $\omega_L + \omega_m$ 、 $\omega_L - \omega_m$ を持つサイドバンドが生成されることが分かる。この光を FP 共振器に入射してキャリアを共振させ、サイドバンドが共振から十分離れるように変調周波数を選ぶ。このとき式 (3.4) よりキャリアの反射率  $r_c$ 、サイドバンドの反射率  $r_s$  はそれぞれ

$$r_{\rm c} = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-2i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\phi}} \tag{B.4}$$

$$\simeq -r_1 + \frac{t_1^2 r_2}{1 - r_1 r_2} - i \frac{2t_1^2 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \delta\phi$$
(B.5)

$$r_{\rm s} \simeq -1$$
 (B.6)

である。ただし、 $\phi = n\pi + \delta\phi$ ,  $|\delta\phi| \ll 1$  とした。したがって反射光の電場  $E_r$  とパワー  $P_r \propto |E_r|^2$ は、

$$E_{\rm r} \simeq E_0 \left[ r_{\rm c} J_0 e^{i\omega_{\rm L}t} - i J_1 e^{i(\omega_{\rm L} + \omega_{\rm m})t} - i J_1 e^{i(\omega_{\rm L} - \omega_{\rm m})t} \right]$$
(B.7)

$$P_{\rm r} \simeq P_0 \left[ |r_{\rm c}|^2 J_0^2 + 2J_1^2 + 2i(r_{\rm c} - r_{\rm c}^*) J_0 J_1 \cos \omega_{\rm m} t + 2J_1^2 \cos 2\omega_{\rm m} t \right]$$
(B.8)

である。このうち $\cos \omega_{\rm m} t$ を含む項は

$$2P_0 i(r_c - r_c^*) J_0 J_1 \cos \omega_m t = \frac{4P_0 t_1^2 r_2 J_0 J_1}{(1 - r_1 r_2)^2} \delta \phi \cos \omega_m t$$
(B.9)

であるので、この光を検出して  $\cos \omega_m t$  で復調すれば  $\delta \phi$  に比例した PDH 信号を得ることができる。一般にキャリアが共振点から離れている場合を含めて計算すると、PDH 信号の形は図 B.1 のようになる。



図 B.1:  $\mathcal{F} = 160$ ,変調角周波数  $\omega_m = \omega_{FSR}/4$ の場合の PDH 信号。 $\phi = 0$  はキャリアの共振による信号で、 $\phi = \pm \pi/4$  はサイドバンドの共振による信号である。

# 補遺 C フィードバック制御

ある物理量を特定の値に固定したいとき,フィードバック制御がしばしば用いられる。本研究に おいても,ねじれ振り子の位置制御や共振器長制御においてフィードバック制御が用いられてい る。ここではこのフィードバック制御について説明する。

## C.1 理論

フィードバック制御では、一般に図 C.1 左のように制御したい物理量  $x_0$  をセンサー S で測定し、 目標とする値  $x_t$  に対応するセンサーの出力  $Sx_t$  との差の信号(エラー信号)をフィルター F、ア クチュエータ A、その他の伝達関数 M を介してもとの値に負帰還することで差  $x - x_t$  を 0 に近づ ける。このとき周波数空間において、

$$x = x_0 - MAF(Sx - Sx_t) \tag{C.1}$$

$$\Rightarrow \quad x \quad = \quad x_0 - G(x - x_t) \tag{C.2}$$

が成り立つ。ただし、2 行目でオープンループ伝達関数をG = MAFSで定義して用いた。これより、ブロックダイアグラムは図 C.1 右と等価であることが分かる。式 (C.2) を変形すると、

$$x - x_t = \frac{1}{1 + G}(x_0 - x_t)$$
 (C.3)

となり、目標の値との差  $(x_0 - x_t) \ge 1/(1 + G)$  に抑えることができる。

一般に G には周波数依存性があり, |G| = 1となる周波数を UGF (Unity Gain Frequency), |G| > 1となる周波数帯を制御帯域とよぶ。問題となるのは位相が 180° 遅れて G = -1となって しまう場合で, このときは式 (C.3) の分母が発散し, 制御できずに信号は発振してしまう。これを



図 C.1: フィードバック制御におけるブロックダイアグラム。



図 C.2: オープンループ伝達関数のナイキスト線 図。実線は安定な系で,破線は不安定な系である。

防ぐために、UGF においては回路などによってGに $-180^{\circ}$ からの位相余裕をもたせてやる必要がある。制御が安定となる条件はナイキストの条件として知られ、周波数を0から $+\infty$ に変化させた時のGの軌跡を複素数平面上に書いたときに(ナイキスト線図)、図 C.2 のように-1を左手に見て回るときに安定である。

## C.2 オープンループ伝達関数の測定

オープンループ伝達関数は各伝達関数が既知であればその積で求められ、また全てが既知でなくても制御ループを切った状態で信号 s を注入し、ループを1周してきた信号 Gs との比を取れば求められる。ただし、センサーのレンジの狭さのために制御をかけたままでないと正しいオープンループ伝達関数とならない場合も多い。例えばセンサーにマイケルソン干渉計を用いた場合はそうである。そのような場合は、図 C.3 のように制御をかけたままループに信号 s を注入し、前後の信号  $x_1, x_2$  を取得する。このとき  $x_1 = x_0 - G(x_1 + s)$  が成り立つので、

$$x_1 = \frac{1}{1+G}x_0 - \frac{G}{1+G}s$$
(C.4)

$$x_2 = x_1 + s = \frac{1}{1+G}x_0 + \frac{1}{1+G}s$$
 (C.5)

となる。注入する信号を $s \gg x_0$ となるようにすれば $x_0$ の項は無視できるので、比をとることで

$$G \simeq -\frac{x_1}{x_2} \tag{C.6}$$

のように求めることができる。

## C.3 雑音の影響

実際に制御を行うときには、さまざまなところから制御ループの中に雑音が入ってくるために残 留変動に限界がある。ここでは雑音を考慮した場合の残留変動の見積もり方を考える。



図 C.4: 雑音まで考慮したブロックダイアグラム。

目標値を $x_t = 0$ としても一般性を失わないので、その場合の雑音まで考慮したブロックダイア グラムは図 C.4 のようになる。nは混入する雑音を表し、S'は out-of-loop モニター用のセンサー、  $s_{MN}$ は out-of-loop モニター信号である。前節と同様に制御ループに対して成り立つ方程式を書き 下すと、

$$x = x_0 - M(A(F(Sx + n_S) + n_F) + n_A)$$
(C.7)

となり、残留変動 x について解けば、

$$x = \frac{x_0}{1+G} - \frac{1}{S} \frac{G}{1+G} n_S - \frac{MA}{1+G} n_F - \frac{M}{1+G} n_A$$
(C.8)

となる。制御ループ内のエラー信号 (in-loop 信号) は  $s_{\text{ER}} = Sx + n_S$  で与えられるので,そこか ら雑音の影響を無視して残留変動を見積もると,

$$x^{(\text{ER})} \equiv \frac{s_{\text{ER}}}{S} = \frac{x_0}{1+G} + \frac{1}{S} \frac{1}{1+G} n_S - \frac{MA}{1+G} n_F - \frac{M}{1+G} n_A \tag{C.9}$$

となる。これはゲインが十分に高いとき  $x^{(\text{ER})} \sim 0$  となる量だが、実際の残留変動は  $x = (s_{\text{ER}} - n_S)/S \sim n_S/S$  であるので、in-loop 信号を用いた場合にはセンサー雑音  $n_S/S$  の分が考慮されずよく 見積もり過ぎていることが分かる。一方、制御ループ外のモニター用センサーから信号 (out-of-loop 信号) を取得した場合、 $s_{\text{MN}} = S'x + n_{S'}$  となる。ここから残留変動を見積もると、

$$x^{(MN)} \equiv \frac{s_{MN}}{S'} = \frac{x_0}{1+G} + \frac{1}{S} \frac{G}{1+G} n_S - \frac{MA}{1+G} n_F - \frac{M}{1+G} n_A + \frac{n_{S'}}{S'}$$
(C.10)

となる。Out-of-loop 信号を用いて残留変動を見積もった場合、ゲインが十分に高い場合にも $x^{(MN)} \sim n_S/S + n_{S'}/S'$ となるために in-loop と比べて正しい値を与える。

# 補遺 D 電気回路

ここでは実験に用いた自作回路のうち、主なものの回路図を示し説明する。



図 D.1: ねじれ振り子の変位測定に用いたフォトセンサの回路。用いたフォトセンサは, LED と フォトトランジスタが一体となっているものであり, TA7805 で電源電圧 5 V を作ってそれぞれ駆 動させる。フォトトランジスタの光電流は 6.7 kΩ の抵抗で電圧に変換されて出力となる。



図 D.2: ねじれ振り子の位置制御に用いたコイル・マグネットアクチュエータのコイルドライバ, およびコイル。OP27 だけでは十分に電流を供給できないので,電流バッファHA5002 を挟んでい る。保護抵抗としてドライバの出力部分に 100 Ω が入っている。その右の 3.5 mH, 12 Ω はそれぞ れコイルの自己インダクタンス,内部抵抗である。



図 D.3: ねじれ振り子の位置制御に用いたサーボフィルター回路。ねじれ振り子自身が2次のロー パス特性を持つために,初段で位相補償を入れている。2,3 段目では増幅,最終段で信号の符号が 選択できるようになっている。



図 D.4: 共振器長制御に用いたサーボフィルター回路。初段で1次のローパスとゲインブースト, 2,3 段目では増幅,最終段で信号の符号が選択できるようになっている。

# 補遺 E カーボンナノチューブ線の開発

本論で述べた光学浮上と並行してカーボンナノチューブ (CNT) 線の開発を行った。こちらは懸 架線を軽くて高い Q 値をもつ素材に改良することで,振り子の形で mg スケールでの巨視的量子 力学の検証を目指すものである。

## E.1 背景

本文の第2章でも述べたように、mgスケールで SQL に到達するためには懸架線の改善によっ ても可能である。これまでは5mgの鏡を長さ5cm,直径3 $\mu$ mのタングステン線で懸架した振り 子が作られておりその振り子モードのQ値は $Q_m = (3.2 \pm 1.0) \times 10^5$ であった[11]。しかし、こ の装置で SQL に到達するためには $Q_m > 1 \times 10^6$ が必要である[30]。加えてこの装置で巨視的量 子力学が検証できるためには、振動子を基底状態まで冷却した上でその状態を保ったまま1周期以 上振動できるという条件も加わる。この熱的デコヒーレンスの条件は振動子のもともとの共振周波 数 $f_m$  とQ値 $Q_m$ 、光バネで硬くした実効的な共振周波数 $f_{\text{eff}}$ に対して、

$$f_{\rm m} \cdot Q_{\rm m} > \frac{k_B T}{h} \left(\frac{f_{\rm m}}{f_{\rm eff}}\right)^2 = 6 \times 10^{12} \,\mathrm{Hz} \times \left(\frac{f_{\rm m}}{f_{\rm eff}}\right)^2 \tag{E.1}$$

で与えられる [19]。すでに  $f_{\text{eff}} \sim 1 \text{ kHz}$  は達成されているので [30],  $f_{\text{m}} \sim 1 \text{ Hz}$  を入れると Q 値へ の要求値は  $Q_{\text{m}} > 1 \times 10^7$  であり、こちらの条件のほうが厳しく、この要求値まで 30 倍 足りない 状況である。振り子の Q 値は  $Q_{\text{m}}$  は重力希薄化によってもともとの懸架線の素材の Q 値  $Q_{\text{int}}$  より も大きな値を獲得し、おもりの質量 m、懸架線の長さ L、直径 d、ヤング率 E としたときに

$$Q_{\rm m} = \sqrt{\frac{4MgL^2}{E\pi(d/2)^4}}Q_{\rm int} \tag{E.2}$$

と書ける [31]。つまり同じ素材を用いた場合は、Q 値は  $\sqrt{ML/d^2}$  に比例する。おもりの質量を変 えない場合は長さを 4 倍に、直径を 1/3 倍にすれば達成可能であるが、いまのところ直径 1  $\mu$ m の タングステン線は存在しない。加えて、タングステン線は密度が 19.25 g/cm<sup>3</sup> と大きいために、振 り子のバイオリンモードの周波数が低くなり、観測帯域を汚してしまうという問題もあった。

そこで私たちは、良好な物性値を持つことで有名であるカーボンナノチューブ CNT,特にその撚り線が、Q値の高く、軽い懸架線素材として有力であると考えた。この CNT 線は、素材のQ値はタングステン線と同等であるが、直径 1  $\mu$ m まで細くできる可能性がある。また密度は~0.1 g/cm<sup>3</sup>とも言われ、バイオリンモードの周波数を 1 桁以上高くできる可能性もある。私たちは、実際にCNT 線の作成装置を製作した上でそれを用いて CNT 線を作り、もっとも細いもので直径 3  $\mu$ m を製作したほか、直径 38  $\mu$ m 線によって振り子を作り、そのQ値測定を行った。以下で、その CNT線の開発状況と結果について述べる。


図 E.1: CNT アレイの模式図。



図 E.2: 25 µm の CNT の撚り線の SEM 画像。

## E.2 カーボンナノチューブ (CNT) とその撚り線

## E.2.1 CNT

カーボンナノチューブ (CNT) は、1991 年にフラーレンを作っている途中で発見された炭素の同 位体の1つであり [32],炭素の作る1枚の六員環構造であるグラフェンを丸めて管状にした巨大分 子であり、その直径は0.4-50 nm 程度であり、ナノチューブという名の由来となっている。機械 的に良好な物性値をもつものの、1分子で巨視的な物体を懸架することはさすがにできないので、 次に述べる CNT を束にして撚り線としたものを懸架線として用いることを考える。

#### E.2.2 CNTの撚り線

図 E.1 のように基板上に CNT を密に成長させたシート状のものを CNT アレイと呼ぶ。この CNT アレイの端をピンセット等で水平に引っ張ると,ファンデルワールス力により隣り合う CNT が次々と引き出される乾式紡績(ドライスピニング)が起こり,CNT の線を紡ぎだすことができる [33]。この乾式紡績は1本の CNT が隣の CNT を引き連れてくるというよりも,いくつかの CNT が束になった CNT バンドルという構造が次の CNT バンドルを引き連れてくる。SEM 画像で撚ら れているように見える束はこのバンドルである。ただし紡ぎだしただけでは強度が小さいため,回 転させながら引くことで図 E.2 のような強度のある CNT の撚り線を得ることができる。これが, 今回懸架線として有力視する CNT の撚り線である。

## E.3 CNT 線の作成

### E.3.1 試料

CNT 線を作るにあたって,原料となる CNT アレイは静岡大工学部の井上研究室で作成された ものを用いた。今回用いた CNT アレイは,Si + SiO<sub>2</sub> 基板上におよそ 100 億/cm<sup>2</sup> の密度で垂直に CNT を成長させてあり,およそ 1 $\mu$ m 間隔で CNT が存在する。CNT の高さはおよそ 1 mm であ るが,CNT アレイの断面積とできる CNT 線の直径の関係の測定では,高さ 0.53 mm と 0.21 mm のものも加えた 3 種類で実験を行った。

#### E.3.2 CNT アレイの切断

CNT アレイの端をそのまま引っ張ると、はじめはアレイの一部分だけ引き出されるために細い CNT 線ができるが、だんだん引き出されるアレイの部分が広がっていき、CNT 線が太くなって いってしまう。引き出すアレイの量が作られる CNT 線の径を決めると考えられるので、必要な径 の CNT 線を均一に作るためには、CNT アレイを短冊状に切り分けておいて余分なアレイを巻き 込まないようにしておく必要がある。切り分けには  $\phi$ 30  $\mu$ m のタングステン線を用いた。そのタン グステン線を xz ステージに固定し、x 方向のマイクロメータで切り分ける位置を決め、z 方向のマ イクロメータでタングステン線を上下に動かして切り分けた。

#### E.3.3 撚り線の作成

撚り線の作成のために、図 E.3 のような装置を製作した。図 E.4 はその写真である。移動ステージは 0.2 mm/s 刻みで速度を変えられるものであり、その上にモーターが固定されている。モーターの回転速度と移動ステージの引っ張り速度は、できあがる CNT 線の撚り角度が 30° 程度になるようにする。撚り角度が 20° 程度になるといけないのは、モーターの回転が遅いために撚りながら引っ張って CNT 線を作る過程で回転が端から端まで伝わらず、撚られていない"ダマ"の部分ができるためである。逆に撚り角度が 40° 程度にしていけないのは、CNT を引っ張ったときに CNT 線を構成するバンドルが横方向に力を受けることになるために引張り強度が劇的に悪化するからである。この撚り角度の条件を式で表すと、モーターの回転数をω [rpm]、引っ張り速度を v [mm/s]、撚り角度を  $\theta$ , CNT 線の直径を  $\phi$ [ $\mu$ m] としたときに、簡単な幾何学から

$$\omega \left[ \text{rpm} \right] = \frac{v \left[ \text{mm/s} \right] \tan \theta}{\pi \phi \left[ \mu \text{m} \right]} \times 6 \times 10^4 \tag{E.3}$$

であることが分かる。ただし $\phi$ [ $\mu$ m] は実際は作った後でないと分からないが,作成に用いたときの CNT アレイの断面積から予想して式に当てはめてその他のパラメータを決めた。例えば, $\phi$ 10 $\mu$ m ができると予想され,撚り角度を 30° にしたい場合には,v = 1.0 mm/s, $\omega = 1100$  rpm などであ る。CNT アレイはモーターの軸と同じくらいの高さに固定し,短冊状に切断された CNT アレイ の端をピンセットでつまんで引っ張ってモーターの軸の先端につけた両面テープに接着する。この 状態ではまだ CNT は撚られていない。モーターを ON にして CNT アレイの端とモーターの軸の 先端の間の CNT が全て撚られるまで待ち,その後モーターを ON にしたまま移動ステージを ON にし,CNT を撚りながら引っ張って欲しい長さまで続ける。終わったら移動ステージとモーター を OFF にして,ハサミなどで必要な長さに切り取れば CNT 線の試料となる。

### E.3.4 ベーキング

CNT 線は撚り糸であるため、放置していると撚りがほどけてきてしまう。これを防ぐために、 作成した CNT 線を 1000 K 程度で数十分ベーキングを行う。ベーキングにより CNT のバンドル 間には炭素分子の架橋構造ができると考えられており、この架橋構造が CNT の撚り戻りを抑える はたらきをする。

用意したベーキング装置は図 E.5 のようなものであり,電気炉の中心にガラス管をはさみ込み, このガラス管の中に CNT 線を固定したガラス板を挿入する。空気中でベーキングを行うと CNT は燃えてしまうため,10 Pa 程度の真空下でベーキングを行った。



図 E.3: CNT 撚り線作成装置。



図 E.4: CNT 撚り線作成装置の写真。



図 E.5: ベーキング装置の写真。



図 E.6: ベーキングで用いる CNT 線保持具とガラス板。

## E.4 特性評価

### E.4.1 CNT アレイの断面積と CNT 線の直径

作成した CNT 線の直径は電子顕微鏡を用いればもちろん測定できるものの,測定が大掛かりに なる上に測定した CNT を破壊してしまうため,通常は CNT 線にレーザー光を照射したとき背後 のスクリーンにできる干渉縞の間隔から径の測定を行う。特にこれを動作させながら CNT 線を作 成することで,作られた線径のスキャンが行われることとなり,径の均一性を保証する手段とも なる。

図 E.7 のように直径 d の CNT 線に波長  $\lambda$  のレーザー光を照射して,距離 L だけ離れたスクリーンで光強度を測定した場合,次数 n の強め合う点では 0 次光からの距離を x として

$$d\sin\theta \simeq d\frac{x}{L} = n\lambda \Rightarrow x = \frac{L\lambda}{d}n$$
 (E.4)

が成り立つ。このとき、 $\theta$ が存在するための条件は $\lambda < d$  (~ 1 $\mu$ m) であり、安全のために波長は短めの青色レーザーポインター ( $\lambda = 405$  nm) を採用した。このとき干渉縞間隔  $\Delta x$  が測定できれば、

$$d = \frac{L\lambda}{\Delta x} \tag{E.5}$$

から直径を求めることができる。今回は図 E.8 のように CNT 線から L = 20 cm 離れた位置にスク リーンを置いて、その干渉縞間隔を定規で測定した。1 本の CNT 線も場所によって直径がばらつ くため、離れた 3 点以上を選んで直径を測定してその平均を CNT 線の直径とした。

CNT線の断面積はもとの CNT アレイの中でつまみ出した部分の断面積 σ に比例すると思われ, したがって CNT 線の直径 d は CNT アレイの断面積の平方根  $\sqrt{\sigma}$  に比例すると考えられる。CNT アレイの高さ(1 mm,0.53 mm,0.21 mm)とアレイを切り分ける幅を変えることで CNT アレイ の断面積を変えた。高さ 0.21 mm のものはピンセットで引っ張っても全く紡績されなかったため、 高さ 1 mm, 0.53 mm を用いて作られた CNT 線の直径を測定した結果, 図 E.9 のようになった。 もっとも断面積の小さいものは 0.15 mm<sup>2</sup> (高さ 0.53 mm,幅 0.3 mm) であり、このときの切り分 け幅 0.3 mm はタングステン線で切り分ける限界に近く、これよりも細く切り分けようとすると短 冊が潰れてしまうことがほとんどであった。図 E.9 の結果を  $d \propto \sigma^{\alpha}$  で最小二乗フィッティングし た結果,赤線でしめした α = 0.5 が最もよくフィットし,仮定が正しいことが分かった。ここか ら外挿すると, 直径 1 μm に到達するためは断面積 0.01 mm<sup>2</sup> 程度が必要である。ただしそのよう な CNT 線は1本でもできればよいので,もっとも細くできた場合(断面積(0.3±0.1) mm で直径 (3±2) μm)に注目すると、0.03 mm<sup>2</sup> 程度で偶然できる可能性もある。少なくとも CNT が紡績さ れるためにはアレイの高さ  $0.5\,\mathrm{mm}$  が必要なため,断面積  $0.01\,\mathrm{mm}^2$ を実現するためには幅  $20\,\mu\mathrm{m}$ でアレイを切り分けなければならず,外れ値の値 0.03 mm<sup>2</sup> を採用しても幅 60 μm である。これは 現在のタングステン線を用いた切り分け方法では厳しいと思われるが、はじめから細幅となるよう にマスキングをして CNT アレイを製作することで切り分けの問題を解決できる可能性がある。す でにマスキングによって初めからアレイ幅 25 μm, 50 μm, 150 μm となるものが試作されており, 今後はこの試料を用いて CNT 線の製作が可能かどうかを調べていく。

#### E.4.2 引張り強度

現在の振り子のおもりが 5 mg であるので,余裕をよって耐荷重の要求値を 20 mg に設定する。 1 µm 線での引張り強度に焼き直せば,250 MPa 以上に相当する。作成した CNT 線がこの要求値







図 E.8: 線径測定の様子。



図 E.9: 線径測定の結果。

を満たすかどうかを調べるために、今回は直径  $6 \, \mu m - 53 \, \mu m$  の CNT を用いて図 E.10 と図 E.11 のように引張り試験を行った。

結果は図 E.12 のようになり、細くするほど引張り強度が大きくなる傾向が見られた。この傾向 が続くならば、1 $\mu$ m線にしたときに 250 MPa 以上の引張り強度が達成されると思われる。今回の 試験では、特に 10 $\mu$ m 以下のファイバは作業中にほとんど切ってしまいサンプル数が少ない。引 張り強度はファイバのもっとも弱いところの値が出るので、一様なファイバを作成することができ れば引張り強度はさらに大きいものになると考えられる。

## E.4.3 ベーキングの効果

ベーキングが撚り戻りを防止する効果を見るために、ベーキングしたものとしていないものを自由に回転できる状態にして平衡状態になるまで吊るし、その撚り戻りの違いを電子顕微鏡で調べた。 ベーキングは1300Kで30分間行った。結果は図 E.13と図図 E.14のようになり、左側がベーキングを施したもの、右側がベーキングしていないものである。まずベーキングをしていないものは見た目でほつれていることが分かり、直径もベーキングしたものが34 $\mu$ m なのに対してベーキングをしていないものは47 $\mu$ m にほつれていた。これは目視でも確認できるものであった。また前節で述べた引張り強度試験を行った結果、ベーキングしたものは (200±110) MPa、ベーキングしていないものは (70±50) MPa となり、直径が増えたことも考慮すると耐荷重は 200×34<sup>2</sup>/(70×47<sup>2</sup>)~1.5倍だけベーキングしたものの方が大きくなった。これは撚り戻りによって部分的に強度の弱い箇所が生まれたためと思われる。





図 E.10: 引張り試験用の紙に荷重をかけた状態の まま CNT ファイバを接着する。

図 E.11: 引張り強度の測定。



図 E.12: 引張り強度測定の結果。



図 E.13: CNT 線を放置したときの撚り戻りの比較 SEM 画像。左がベーキングあり,右がなし。



図 E.14: SEM 画像拡大。左がベーキングあり、右がなし。

ベーキングは上で述べた CNT 線の縦方向の引張り強度だけでなく,横方向からの力への耐性も 大きくする。実際ベーキングしていないものはステンレスクランプで挟もうとしたときに全て切れ てしまったが,ベーキングしたものは全く切れなかった。ベーキングは耐荷重を大きくするために よいが,それよりも実際に CNT 線をクランプできるか否かを決めてしまったので必須な工程であ ることが分かった。

本節のベーキングの効果の試験は、牛場氏によってなされた。

## E.5 Q 值測定

作成した CNT 線を用いて振り子を作成し、その Q 値測定を行った。CNT 線の直径は (38±3)  $\mu$ m, 長さは 5 cm であり、おもりには質量 23 mg のアルミ製の円盤を用いた。振り子モードの共振周波 数は  $f_0 = 2.1$  Hz であった。図 E.15 のように、CNT 線とおもりは接着剤(ロックタイト)で留め、 CNT 線の上側はステンレス製のクランプで挟むことで固定した。この振り子を真空槽内に入れ、 振動を励起した後の ringdown をシャドーセンサーを用いて測定した。シャドーセンサーとは、図 E.16 のようにレーザー光の一部が振り子のおもりに重なるようにし、振り子の動きを遮られた光 量として測定するものである。

測定の結果, (2.4±1.2)×10<sup>-3</sup> Pa下でQ 値測定を行ったときに図 E.17 のような ringdown を



図 E.15: CNT 線を用いた振り子の作成。



図 E.16: シャドーセンサーの模式図。



図 E.17: 直径 38 µm 線で作成した振り子の ringdown 測定。

観測した。Ringdown 測定では

$$\sin(\omega_0 t + \phi_0) \exp\left(-\frac{\pi f_0}{Q}t\right) \tag{E.6}$$

に比例した振幅が得られ、その包絡線から Q 値を求めることができる。ここで  $\phi_0$  は適当な初期 位相である。今回の ringdown 測定では振り子の非対称性に起因すると思われる横揺れと縦揺れの ビート ( $f_{\text{beat}} = 0.6 \,\text{mHz}$ )が同時に見えており、これも含めて包絡線を

$$[A + B\sin(\omega_{\text{beat}}t + \theta_0)] \exp\left(-\frac{\pi f_0}{Q}t\right)$$
(E.7)

でフィッティングした結果,  $Q = 11300 \pm 100$ を得た。ここで A, Bはビートの大きさを表す係数,  $\theta_0$ はビートの初期位相である。これが残留ガスによるものでないことを示すために, 圧力を 1.5 Pa, 0.3 Pa でも測定したところ, Q 値の圧力依存性は図 E.18 となった。1.5 Pa での Q 値が完全に 残留ガスリミットであると仮定しても,その影響は図 E.18 の赤線にとどまり,はじめの Q = 11300は振り子の Q 値を表していることが分かった。この値を基準としてワイヤー長を 20 cm に, 直径 を 1  $\mu$ m に, おもりの質量を 5 mg にしたばあい, Q 値は

$$Q = 1.1 \times 10^4 \times \left(\frac{20 \,\mathrm{cm}}{5 \,\mathrm{cm}}\right) \times \left(\frac{38 \,\mu\mathrm{m}}{5 \,\mu\mathrm{m}}\right)^2 \times \sqrt{\frac{5 \,\mathrm{mg}}{23 \,\mathrm{mg}}} \simeq 3 \times 10^7 \tag{E.8}$$

まで向上すると見積もられ,要求値であるQ値10<sup>7</sup>を超えるという示唆を得た。



図 E.18: Q 値の圧力依存性。

## E.6 まとめ

振り子を用いて mg スケールの量子力学を検証できるための条件は,SQL に到達するためには  $Q > 10^6$ ,熱的デコヒーレンスの $f \cdot Q$ 条件を満たすためには $Q > 10^7$ が必要である。しかしこれ までの懸架線 (タングステン,直径 3  $\mu$ m)では,それぞれ 3 倍, 30 倍足りなかった。

そこで私たちはカーボンナノチューブを用いた撚り線に注目し、 $Q > 10^7$ を目指して開発を進めた。直径 38 µm で振り子を作成した結果、 $Q = 1.1 \times 10^4$ を得たため、この値を基準に外挿すると、ワイヤー長を 20 cm に、直径を 1 µm に、おもりの質量を 5 mg としたときに、要求値であるQ 値 10<sup>7</sup>を超えるという示唆を得た。

直径 38  $\mu$ m までしか Q 値測定ができていないのは、CNT 線が非常に軽くて扱いにくく、おもり にうまく線を接着できなかったためであり、今後はそのような工程を熟練の技術に頼る事のないよ うにジグを製作してさらにさらに細い直径の CNT 線で振り子を作成し、Q 値測定を行う必要があ る。また、直径 1  $\mu$ m の線を作るために、CNT アレイをマスキングして作成することではじめか ら断面積 0.01 mm<sup>2</sup> 以下となるようにし、CNT アレイの切り分け作業での困難を解消する。その 上で実際に直径 1  $\mu$ m ができるかどうかを確かめることとなる。

# 参考文献

- A. Bassi *et al.*, Rev. Mod. Phys. **85**, 471 (2013).
   Models of wave-function collapse, underlying theories, and experimental tests
- M. Arndt, K. Hornberger, Nature Phys. 10, 271 (2014).
   Testing the limits of quantum mechanical superpositions
- [3] N. Bohr, Nature (London) 121, 580 (1928).The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory1
- [4] Everett, III, H, Rev. Mod. Phys., 29, 454 (1957)."Relative State" formulation of quantum mechanics
- [5] W. Zurek, Rev. Mod. Phys. 75, 715 (2003).Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical
- [6] C. M. Caves *et al.*, Rev. Mod. Phys. **52**, 341 (1980).
   On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. I. Issues of principle
- H. Müller-Ebhardt *et al.*, Phys. Rev. Lett **100**, 013601 (2008).
   Entanglement of Macroscopic Test Masses and the Standard Quantum Limit in Laser Interferometery
- [8] W. Marshall *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 130401 (2003). Towards Quantum Superpositions of a Mirror
- M. Aspelmeyer *et al.*, Rev. Mod. Phys. 86, 1391 (2014).
   Cavity optomechanics
- [10] K. Somiya (KAGRA collaboration), Class.Quant.Grav. 29, 124007 (2012).
   Detector configuration of KAGRA: The Japanese cryogenic gravitational-wave detector
- [11] N. Matsumoto *et al.*, Phys. Rev. A **92**, 033825 (2015).
  5-mg suspended mirror driven by measurement-induced backaction
- [12] G. Guccione *et al.*, Phys. Rev. Lett **111**, 183001 (2013). Scattering-Free Optical Levitation of a Cavity Mirror
- [13] Y. Michimura *et al.*, to be published.
- [14] H. P. Robertson, Phys. Rev. 34, 163 (1929). The Uncertainty Principle

- [15] W. Heisenberg, Z. Phys. 43, 172 (1927).
   Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik
- [16] M. Ozawa, Phys. Rev. A 299, 1 (2002).Position measuring interactions and the Heisenberg uncertainty principle
- [17] Müller-Ebhardt, Doctoral thesis, Hannover University (2009).
   ON QUANTUM EFFECTS IN THE DYNAMICS OF MACROSCOPIC TEST MASSES
- [18] L. Diósi, Phys. Rev. Lett 114, 050403 (2015).
   Testing Spontaneous Wave-Function Collapse Models on Classical Mechanical Oscillators
- [19] Y. Chen, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 46, 104001 (2013).Macroscopic quantum mechanics: theory and experimental concepts of optomechanics
- [20] 中村卓史,三尾典克,大橋正健 編著,重力波をとらえる,京都大学学術出版会
- [21] Y. Levin, Phys. Rev. D 57, 659 (1998).Internal thermal noise in the LIGO test masses: A direct approach
- [22] G. Harry *et al.*, Class. Quantum. Grav. **19**, 897 (2002).Thermal noise in interferometric gravitational wave detectors due to dielectric optical coatings
- [23] R. Flaminio *et al.*, Class. Quantum. Grav. 27, 084030 (2010). A study of coating mechanical and optical losses in view of reducing mirror thermal noise in gravitational wave detectors
- [24] http://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/michimura/document/noteSNLISS.pdf
- [25] P. R. Saulson, WorldScientific, (1994)Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors section 7.6.
- [26] T. Corbitt *et al.*, Phys. Rev. Lett **98**, 150802 (2007).An all-optical trap for a gram-scale mirror
- [27] E.Siegman, LASERS.
- [28] http://jasosx.ils.uec.ac.jp/RLE/RLE/lsj1998/1998\_10/lsj1998\_10-723.pdf
- [29] R.W.P. Drever, J.L.Hall *et al.*, Appl. Phys. B-Photo 31, 97 (1983). Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator
- [30] 小森健太郎,東京大学修士論文 (2015) 巨視的振動子の遠隔光冷却
- [31] P. R. Saulson, Phys. Rev. D 42, 2437 (1990). Thermal noise in mechanical experiments
- [32] S. Iijima, Nature (London) 354, 56 (1991).Helical microtubules of graphitic carbon
- [33] K. Jiang, Q. Li, S. Fan, Nature 419, 801 (2002).Spinning continuous carbon nanotube yarns

# 謝辞

本研究を行うにあたって多くの方にお世話になり,決して独力で成し遂げられるものではありま せんでした。

指導教員の安東正樹准教授には、学部4年の特別実験から一貫して指導してきていただいた中で 本研究テーマを選ぶきっかけを与えていただき、自由な環境で研究をさせていただきました。また 実験で行き詰まっているときには親身になって相談に乗っていただき、私の中ではどんなときにも 心強い存在でした。

リーディング大学院 ALPS における副指導教員の相原博昭教授には,定期的に研究の進捗状況 を見ていただき,またそのリーディング大学院 ALPS からは生活面を強力にサポートしていただ き,研究に集中できる環境を作っていただきました。

東京大学工学系研究科の三尾典克教授には、本修士論文審査の副査を務めていただきました。その審査の中で、本研究で用いた鏡に関して今後に役立つコメントをいただきました。

東京大学理学系研究科の酒井広文准教授には,同じく本修士論文審査の副査を務めていただきました。多忙な中で修士論文の細部まで添削していただき,より洗練された修士論文とすることができました。

安東研究室の道村唯太助教はこの光学浮上の提案者であり,装置の設計から実際の実験にわたっ て私に最も身近なところで数多くの助言をいただきました。また私が必要だと思った装置を全て快 く購入していただき,物品不足に困ることはありませんでした。

安東研究室博士課程の牛場崇文氏には,週に1日のミーティング時という限られた時間の中で, いつも的確な指摘を下さいました。また私が1週間かかっても合わせられなかった共振器のアライ メントの問題にすぐに気づき,泥沼から救ってくださいました。

東北大学電気通信研究所の松本伸之助教は,オプトメカニクスに精通しておりいつも鋭い指摘を 下さいました。また CNT 線の開発を提案し,私にやりがいのある実験テーマを与えてくださいま した。

静岡大学工学研究科の井上翼准教授には、CNT 線の作成方法を学ぶために研究室へ出張させて いただき、その後も私たちの CNT 線の研究のために CNT アレイを提供して下さいました。

国立天文台の正田亜八香氏には,修士1年の間に TOBA の開発に携わらせていただきました。 そこでねじれ振り子の制御などを一緒にやらせていただく中で,基礎的な実験技術を教えていただ きました。

ビックバンセンターの枝和成氏には、TOBA のデータ解析でお世話になりました。学会のポス ター発表の際には的確なコメントをいただきました。

安東研究室修士課程の小森健太郎氏は、ちょっとしたことでも気軽に議論できる相手であり、貴 重な存在でした。また同期でありながら特にオプトメカニクスについては教えてもらうことばかり でした。

安東研究室修士課程の有富尚紀氏,下田智文氏は普段からよく議論をする後輩であり,また実験 に用いた回路を提供していただきました。

国立天文台の麻生洋一准教授は安東研究室の前助教で、私が学部4年のときには実験装置の使い

方などを教えていただき,天文台に異動した後にも神岡の KAGRA のシフト作業においてお世話 になりました。

同じく国立天文台の阿久津智忠助教には,KAGRA で用いる補助光学系の開発に携わらせていただき,奥富弘基氏にはデータ解析に関する良書を紹介していただきました。

宇宙線研究所の川村静児教授には,修士1年次に柏キャンパスで光共振器の基礎について教わり,また普段からも私のちょっとした質問に的確に答えていただきました。

同じく宇宙線研究所の,関口貴令氏には国立天文台において KAGRA のサスペンション装置の 開発に携わらせていただき,中野雅之氏には主に神岡において KAGRA のシフト作業に携わると きにお世話になり,小野謙次氏には主に飲み会でお世話になり,榎本雄太郎氏には光バネの導出に ついて教えていただき,山中祐治氏,田中宏樹氏,宮本昂拓氏とは川村教授の基礎レクチャーの中 でよく議論をし,長野晃士氏には PD を使わせていただき,片山純子氏,三代浩世希氏とはイエナ のサマースクールでよく議論し,そのほかの宇宙線研究所の方にも主に KAGRA プロジェクトの 中でお世話になりました。また,宇宙線研究所 OB の渡辺篤史氏には私の修士号取得を盛大に祝っ ていただきました。

東京工業大学理工学研究科の宗宮健太郎准教授には,夏にドイツのイエナへ熱雑音サマースクー ルに連れて行っていただき,そこで熱雑音や光バネについて価値ある議論をすることができました。

名古屋大学情報科学研究科の小澤正直教授には,名古屋大学において量子力学の基礎について教 えて下さり,また巨視的量子力学について実験の面でも議論を交わすことができました。

分子科学研究所の鹿野豊特任准教授には,自信を持って話すことの大切さを教えていただき,そ の圧倒的存在感から離れた地にいるにもかかわらず常に私が目標とする存在でした。

物理学科試作室の大塚茂巳氏と南城良勝氏には,使用した実験装置の金属加工をしていただきま した。どんな細かな要望にも快く応えていただき,スムーズに装置を製作することができました。 物理事務分室の伊藤彩美氏には,普段の物品購入から出張手続きなどの多くの事務関係において

お世話になりました。同じく分室の河野久仁子氏には ALPS の報告書の手続きにおいてお世話に なりました。

これだけではなく,家族や友人,ここには書ききれない多くの方にお世話になり,支えられてき ました。ありがとうございました。