

修士論文
銀河系内モニター用
共振型重力波検出器の開発

物理学専攻 26066
近藤 尚人

1994年1月17日

はじめに

この論文は銀河系内モニター用共振型重力波検出器を開発するにあたって、修士課程において得られた研究結果をまとめたものである。本文は全部で6章からなり、本研究の目的（第1章）から共振型検出器の一般論及び、開発にあたっているディスクタイプアンテナに関する理論（第2章）とアンテナ本体製作のための実験結果（第3章）、振動検出のためのトランスデューサーである Fabry-Perot 型干渉計について（第4章）とそれをアンテナ本体に装備するための予備実験の結果（第5章）、そして本研究のまとめ（第6章）となっている。また補遺として共振型における静電型トランスデューサーの補論（Appendix A）、実験に使用した回路（Appendix B）を加えた。

現時点において重力波検出器開発の主流は自由質量型の大型レーザー干渉計になっているが、技術的に未解決な問題が多く、長時間安定運転の維持という点で共振型検出器には遠く及ばない。一方共振型についても銀河系内での超新星爆発を検出できる感度をもつ検出器が存在してはいるが、低温装置のため常時モニターを行なえない。そこでトランスデューサーにレーザー干渉計の技術を応用して室温において低温検出器と同じ感度を達成し、連続運転可能な装置を作動状態にもっていくことは重力波検出への大きな前進であると考えられる。また本研究は共振型という確立された技術とレーザー干渉計という新しい技術の融合という点においても、とても興味深いものであると思う。

近藤 尚人

東京

1994 年 初春

目次

1	はじめに	1
1.1	本研究の目的	1
1.2	重力波	2
1.2.1	一般相対性理論	2
1.2.2	重力波の質点に対する効果	4
2	共振型重力波検出器	6
2.1	共振型検出器の運動方程式	6
2.2	トランスデューサーと雑音	7
2.2.1	トランスデューサー	7
2.2.2	雑音	8
2.3	ディスクタイプアンテナの弾性振動	10
2.3.1	振動モード	10
2.3.2	有効断面積と換算質量	15
3	大型アンテナ製作のための実験	16
3.1	実験方法	16
3.1.1	試作ディスク	16
3.1.2	Q値測定系と静電型トランスデューサー	19
3.2	実験結果	23
3.2.1	Q値データの信頼性のための予備実験	25
3.2.2	支持方法	29
3.2.3	穴の影響	31
3.2.4	まとめ	34
4	Fabry-Perot 型レーザー干渉計	37
4.1	Fabry-Perot Cavity	37
4.1.1	光共振器の周波数応答	37
4.1.2	ガウシアンビームとモードマッチング	40
4.2	変調と復調	43
4.2.1	位相変調光を用いた変位の検出	43

4.2.2 復調	47
5 共鳴振動検出のための高感度トランスデューサーの開発	50
5.1 システムの構成	50
5.1.1 He-Ne Laser による予備実験	52
6 まとめ	63
A 静電型トランスデューサー	64
A.1 機械系と電気系の結合	64
A.2 極板の振動	66
B 実験に使用した回路	70

第 1 章

はじめに

1.1 本研究の目的

1987年、大マゼラン星雲でおきた超新星爆発 SN1987A は、それに伴うニュートリノバーストが観測され、さらにもし高感度の検出器が稼働していれば、直接重力波¹が検出される可能性が十分にあったものであった。しかし当時高感度の重力波検出器は運転されておらず、貴重なチャンスを逸する結果となってしまった。その原因は、ローマ大学、スタンフォード大学などにある極低温を利用する共振型検出器が、低温冷却に伴うメンテナンスのため長時間の連続運転が困難であることにある。一方、将来的に有望視されている高感度の km 規模のレーザー干渉計は、実現するまでに少なくとも今後 10 年の時間が必要とされ、その間に太陽系近傍、つまり我々の銀河系内で重力波が発生した場合、またも貴重な機会を失うこととなる。そんな機会を逃がさないためにも、銀河系内での重力波発生を常時モニターすることの可能な検出器の開発は、現時点で非常に重要なことである。そこで常温で稼働し、かつ低温検出器なみ感度をもった「銀河系内モニター用共振型重力波検出器」を数年で稼働体制に持っていくという、東京大学宇宙線研究所の開発計画に沿って本研究を行なった。

さて本研究の目標とするところが短期間で銀河系内発生源からの重力波を常温で検出できる検出器を作動させることである以上、要求されることは以下の要件に絞られる。一つは重力波の空間に対する効果を検出可能なものに変える方法として、技術的に確立されたものを使うこと。もう一つは重力波の非常に小さな効果を常温で検知できる装置を開発することである。

前者の要求に答える検出器のタイプとして共振型を採用する。共振型は重力波の潮汐力を弾性体の共鳴に変換するもので、20 年以上におよぶ技術の蓄積がある。しかも規模としては最大でも 2 m、数トンといった程度であるため、本体となる弾性体の共振周波数近傍の周波数成分の重力波しか検出できない短所はあるものの、現在においてはアンテナ本体の製作は容易である。ただし検出可能な感度をよくするためには本体の熱雑音は極力抑

¹ 現在連星パルサー PSR1913+16 の公転周期の変化の解析から、重力波の存在の間接的な証拠が得られている。

えなければならない。低温検出器はそのために極低温までの冷却を行なっているのである。本研究の検出器が常温で作動させることにある以上、熱雑音のパワースペクトラムはできるだけ小さくする必要がある。後者のためには、常温で低温検出器なみの感度をもつ共鳴振動の振動検出器（トランスデューサー）を製作するために、その型式として従来のもととは違うものを採用しなければならない。

超新星爆発や連星中性子星の合体などのイベントに伴う重力波放射は、理論的予想によると、その周波数は数百Hz～数千Hzで、発生源が銀河系内の場合その振幅は $factor \times 10^{-19}$ が上限²であると考えられている。よって以上より、要求される事柄をまとめると以下のようになり、

- アンテナ本体の共振周波数は数百Hz～数千Hzの範囲内にすること
- 本体の熱雑音のパワースペクトラムは可能な限り小さくする
- 低温検出器に匹敵する感度をもつトランスデューサーを開発する

アンテナ本体の共振周波数は形状によって決まることから、必要な研究は

- 熱雑音を下げると、弾性体の減衰振動の *Quality factor* ができるだけ大きくなるような、アンテナ本体の製作法をさがす
- 高感度の振動検出トランスデューサーを得るために、自由質量型に用いられているレーザー干渉計の技術を応用する

ことである。

以上のことを達成すれば、常温における運転と低温検出器と同程度の感度が可能となり、それは整備の簡略化と長期間に渡る安定した観測を保証するものである。

本論文は上の研究テーマにおいて修士課程で得られた結果をまとめたものである。

1.2 重力波

1.2.1 一般相対性理論

一般相対性理論においてはメトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ によって四次元時空内の異なる2点 x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ 間の距離 ds は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

によって与えられる。ここで x^μ はそれぞれ $x^0 = ct$ 、 $x^1 = x$ 、 $x^2 = y$ 、 $x^3 = z$ である。 $g_{\mu\nu}$ は $T_{\mu\nu}$ を物質のエネルギーモーメントテンソルとしてアインシュタイン方程式に従う。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

²km クラスのレーザー干渉計が狙う乙女座銀河団内で発生する重力波の振幅は 10^{-21} 程度

ここで G は重力定数で、 $R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソル、 $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ であり

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \quad (1.3)$$

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} \right) \quad (1.4)$$

と書ける。これは $g_{\mu\nu}$ の 2 階の偏微分方程式である。

現在のところこの一般相対性理論は、ニュートンの重力ポテンシャル ϕ によって表されるパラメータ $\epsilon = \phi/c^2$ において $\epsilon \leq 10^{-6}$ の精度まで正しいことが確かめられている [6]。

重力波：一般相対性理論の線形近似

式 (1.2) で真空状態つまり $T_{\mu\nu} = 0$ を考える。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (1.5)$$

一般相対性理論は特殊相対性理論を含むから、重力場のない平らな時空 Minkowski 空間におけるメトリックテンソル

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

は、式 (1.5) の解になっている。ここで時空の $\eta_{\mu\nu}$ からのわずかなずれ $h_{\mu\nu}$ を考えると、これは Minkowski 空間の摂動であるからメトリックテンソルは

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

となる。この摂動を $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 0$ に注意して Ricci テンソルにあてはめ、最低次の項、つまり $h_{\mu\nu}$ について一次の量だけ残すと、

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial h_{\mu}{}^\rho}{\partial x^\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial h_{\nu}{}^\rho}{\partial x^\rho} \right) - \square h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h_{\rho}{}^\rho = 0 \quad (1.8)$$

を得る (ここで $h_{\mu}{}^\nu = h^\nu{}_\mu = \eta^{\nu\rho} h_{\rho\mu}$ と定義されている)。一般相対性理論は任意の座標変換に対して共変であるから、適当な座標条件を置くことが可能である。ここで

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (1.9)$$

という変換に対して、ローレンツゲージの条件 $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ を課すと

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} h_{\mu}{}^\nu - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} h_{\rho}{}^\rho = 0 \quad (1.10)$$

となるので、式(1.8)は

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (\square = -\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \Delta) \quad (1.11)$$

となる。これは波動方程式であり、Minkowski 空間の摂動が光速で伝搬することを意味している。これが重力波であり、アインシュタイン方程式を線形近似したことによって導かれている。

式(1.11)の解について単色平面波

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp[ik_\rho x^\rho] \quad (1.12)$$

を考える。これがローレンツゲージの条件と波動方程式をみたすためには

$$A_{\mu\nu} k^\nu = 0 \quad (1.13)$$

$$k_\mu k^\mu = 0 \quad (1.14)$$

でなければならない。ここでローレンツゲージを課していても、まだ座標の取り方に任意性が残っているので、さらに

$$\bar{h}_{\mu 0} = 0 \quad (1.15)$$

$$\bar{h}_\mu{}^\mu = 0 \quad (1.16)$$

という条件を課す。この条件のもとでは $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ であり、このゲージを Transverse Traceless Gauge ; T.-T. gauge と呼ぶ。このとき波の進行方向を z 軸にとると、

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

と書け、 h_+ と $h_\times$ は $t - z$ の任意関数であるけれども、上式より

$$h_+ = A_+ \exp[i\omega(t - z)] \quad (1.18)$$

$$h_\times = A_\times \exp[i\omega(t - z)] \quad (1.19)$$

であり、重力波は横波で二つの自由度をもっていることがわかる。

1.2.2 重力波の質点に対する効果

重力波の場にある質点について考える。運動方程式

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (1.20)$$

において質点の速度が光速 c に比べて十分に小さいとし、 $dx^\alpha/d\tau \cong (c, 0, 0, 0)$ とすると

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + c^2 \Gamma^\alpha{}_{00} = 0 \quad (1.21)$$

であるが、平坦な時空の弱い重力波の場では $\Gamma^{\alpha}_{00} \cong 0$ であるから、

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tau^2} = 0 \quad (1.22)$$

となり、質点は座標 x^{α} に関して等速直線運動を行なうだけで、みかけ上は重力波の作用は現れない。

重力波の影響をみるには、二つの近接した質点の相対位置ベクトル X^{μ} を考えなければならない [4]。 X^{μ} は測地線偏差の方程式

$$\frac{D^2 X^{\mu}}{D\tau^2} = R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} X^{\sigma} \quad (1.23)$$

に従うが、右辺は重力波の場で有限の値をもっている。ここで

$$\frac{Dx^{\mu}}{D\tau} = 0 \quad (1.24)$$

を満たすベクトル x^{μ} を考える。 x^{μ} は常に自分自身に平行であるようなベクトルであり、重力波のない平坦な時空では X^{μ} に一致するものとして

$$X^{\mu} = x^{\mu} + \zeta^{\mu} \quad (1.25)$$

とおく。これを式 (1.23) に代入し、 $D^2 x^{\mu}/D\tau^2 = 0$ 、及びベクトル ζ^{μ} がベクトル x^{μ} に比べて十分に小さいものとして最低次の項だけとりだすと

$$\frac{d^2 \zeta^{\mu}}{d\tau^2} = R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} x^{\sigma} \quad (1.26)$$

が得られる。ここで質点の速度が光速 c に比べて小さいことから、 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ の性質を考え合わせて

$$\frac{d^2 \zeta^0}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \zeta^{\mu}}{dt^2} = c^2 \sum_{\nu=1}^3 R^{\mu}_{00\nu} x^{\nu} \quad (\mu = 1, 2, 3) \quad (1.27)$$

が得られる。さらに十分時間が経過した時に ζ^0 が発散しないように $\zeta^0 = 0$ とし、 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ の表式より

$$\ddot{\zeta}_{\mu} = \frac{c^2}{2} \left(\frac{1}{c^2} \ddot{h}_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{0\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^0} - \frac{\partial^2 h_{\mu 0}}{\partial x^0 \partial x^{\nu}} \right) x^{\nu} \quad (1.28)$$

$$\cong \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^3 \ddot{h}_{\mu\nu} x^{\nu} \quad (1.29)$$

という結果となる。これは質点が質量 m をもっているならば、重力波は質点に対して $m\ddot{\zeta}_{\mu} = (m/2) \sum \ddot{h}_{\mu\nu} x^{\nu}$ という外力となって働くことを意味している。

第 2 章

共振型重力波検出器

共振型検出器は二つの自由な質点のかわりに、弾性体（アンテナ）が重力波中におかれる。重力波によってアンテナも質点同様に運動するが、その変位はアンテナと同じ大きさの自由質量型干渉計と同程度であるだけである。しかし、弾性体アンテナは二つの質点間をバネで結んだものと考えることができるから、重力波がアンテナの共振周波数の成分を持つならば、アンテナの振動が励起され長時間にわたって振動し続けることになる。この振動を測定することによって重力波の存在を検知することが共振型の原理である。つまり共振型検出器は、重力波のエネルギーを弾性体の振動エネルギーに変換するものである。

2.1 共振型検出器の運動方程式

共振型検出器は弾性体でできているので、その自由振動の運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \mu \Delta \vec{u} - (\lambda + \mu) \text{grad div} \vec{u} = 0 \quad (2.1)$$

となる。ここで ρ は密度、 λ 、 μ をラメ係数、変位ベクトルを $\vec{u}$ としている。重力波 h_{ij} の中での弾性体の運動方程式は、重力波による力が外力として働くので、右辺に重力波の項が加わる。

$$\rho \ddot{u}_i - \mu \Delta u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \rho \ddot{h}_{ij} x_j \quad (2.2)$$

ここで弾性体の固有振動モードに着目して、モードの変位 $\vec{u}(t, x)$ を振幅 $\xi(t)$ とモードパターン $\vec{w}(x)$ によって

$$\vec{u}(t, x) = \sum_n \xi_n(t) \vec{w}_n(x) \quad (2.3)$$

と表すと、モードパターンについて

$$\rho \omega_n^2 w_{ni} + \mu \Delta w_{ni} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w_{nj}}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (2.4)$$

となり、一般座標 ξ としてトランスデューサーの検出する変位をとると、運動エネルギーの考察より ξ に対するアンテナの n 番目の固有振動モードに対応する換算質量 μ_n が

$$T = \frac{1}{2} \int \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right|^2 dV = \frac{1}{2} \sum_n \mu_n \dot{\xi}_n^2(t) \quad (2.5)$$

によって定義される。式 (2.3)、(2.5) より換算質量は

$$\mu_n = \int \rho |\vec{w}_n|^2 dV \quad (2.6)$$

と表され、式 (2.2)、(2.4)、(2.6) より

$$\rho \ddot{\xi}_n w_{ni} + \rho \omega_n^2 \xi_n w_{ni} = \frac{1}{2} \rho \ddot{h}_{ij} x_j \quad (2.7)$$

を得る。(2.7) の両辺に w_{ni} をかけて体積積分を行い、

$$\mu_n \ddot{\xi}_n + \mu \omega_n^2 \xi_n = \frac{1}{2} \int \rho \ddot{h}_{ij} x_j w_{ni} dV \quad (2.8)$$

重力波の波長はアンテナに比して十分に大きいと考えられるから、上式の右辺について $\ddot{h}_{ij}$ を積分の外にとりだすことができ、アンテナの内部摩擦による減衰項を付け加えて、最終的にアンテナの運動方程式として以下の式を得る。

$$\mu_n \left(\ddot{\xi}_n(t) + \frac{\omega_n}{Q_n} \dot{\xi}_n(t) + \omega_n^2 \xi_n(t) \right) = \frac{1}{4} \ddot{h}_{ij} q_{nij} \quad (2.9)$$

ここで ω_n は n 番目のモードの共振周波数、 Q_n はそのモードにおける減衰振動の Quality factor で、 q_{nij} は四重極モーメントの変動成分（振動子の質量四重極モーメント Q_{ij} は $Q_{ij} = \int \rho (x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x_k x_k) dV$ ）であり、重力波とアンテナとなる弾性体の結合の度合を示す重要な量である。また Quality factor、 Q 値は内部摩擦に関する確実な理論が存在していないため、実際に測定してみるまでは不明である。

$$q_{nij} = \partial_{\vec{w}_n} Q_{ij} = \int \rho (w_{ni} x_j + w_{nj} x_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} w_{nk} x_k) dV \quad (2.10)$$

2.2 トランスデューサーと雑音

2.2.1 トランスデューサー

重力波の到来によって振動する弾性体アンテナの変位を電気信号に変換するものがトランスデューサー (Transducer) である。トランスデューサーには受動型と能動型という二つのタイプがある。受動型のうち最も簡単なものは容量型もしくは静電型（図 2.1(a)）と呼ばれるもので、アンテナ表面と外部に固定した電極によりコンデンサーを形成し、その容量がアンテナの振動によって変化するのを測定するものである。他に誘導型（図 2.1(b)）と

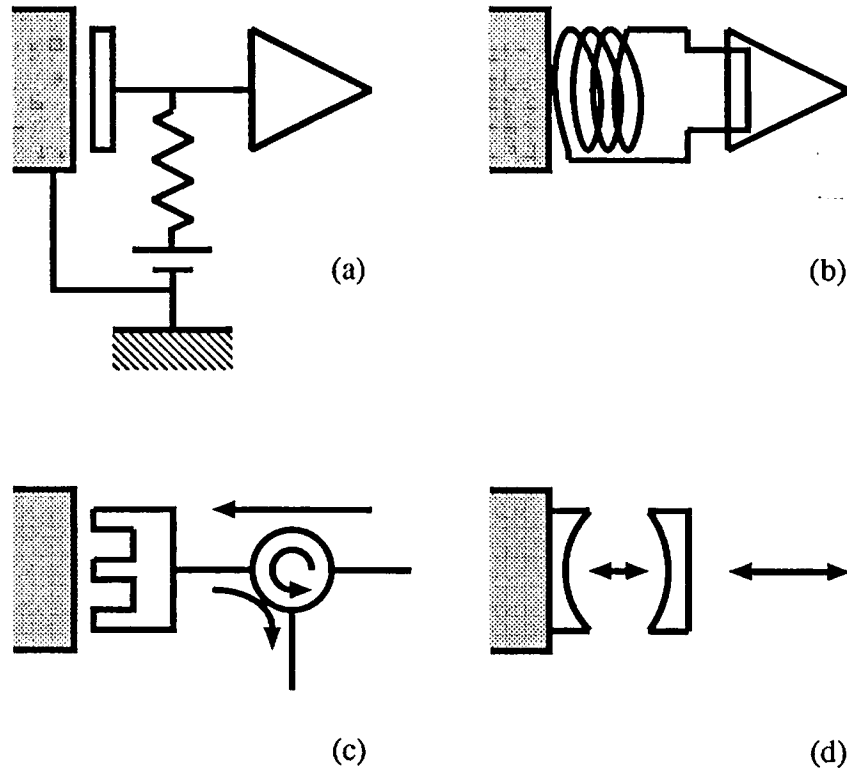


図 2.1: トランスデューサーのタイプ

いう超伝導コイルを利用したものがある。これは液体ヘリウムで冷却した超伝導状態にあるアンテナ表面との距離が変化するとコイルに誘導電流が流れ、それを SQUID で増幅して信号を取り出す仕組みになっている。

能動型のトランスデューサーとしてはマイクロ波とリエントラントキャビティの組合せ（図 2.1(c)）や、Fabry-Perot キャビティにレーザー光を入射させるもの（図 2.1(d)）がある。本研究にはこの Fabry-Perot 型レーザー干渉計をもちいている。

2.2.2 雑音

共振型検出器の雑音で問題になるものは、アンテナとなる弾性体の熱雑音とトランスデューサーの雑音であり、これが検出器の感度を制限している。

熱雑音

熱雑音はアンテナに重力波以外の力 $f(t)$ が加わったとした

$$\mu \left(\ddot{\xi}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi \right) = f(t) \quad (2.11)$$

の運動方程式から求めることができる。両辺をフーリエ変換するとアンテナの応答が

$$\xi(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (2.12)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\mu\omega_o^2 - \omega^2 + i\frac{\omega_o\omega}{Q}} \quad (2.13)$$

という伝達関数の形で表され、任意の外力 $f(t)$ に対する応答がグリーン関数で表現できる。

$$\begin{aligned} G(t-s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp[i\omega(t-s)] d\omega \\ &= \frac{1}{\mu\omega_e} \exp\left[-\frac{t-s}{2\tau_A}\right] \sin(\omega_e(t-s)) \theta(t-s) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\tau_A = \frac{Q}{\omega_o} \quad (2.15)$$

$$\omega_e = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (2.16)$$

ここで τ_A は振動の減衰を示す時定数で、緩和時間である。ところでアンテナが温度 T の熱平衡状態にあれば、その熱振動のエネルギーは $\frac{1}{2}kT$ であるから、

$$\frac{1}{2}kT = \frac{1}{2}\mu\dot{\xi}^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi^2 \quad (2.17)$$

が成り立ち、熱浴からのエネルギーの流入と振動の減衰による散逸がつりあっているため、

$$\begin{aligned} dE &= \frac{\mu}{\tau_A} \dot{\xi} d\xi \\ &= \frac{\mu}{\tau_A} \dot{\xi}^2 dt \end{aligned} \quad (2.18)$$

結果として次式を得る。

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{\mu}{\tau_A} \langle \dot{\xi}^2 \rangle = \frac{kT}{\tau_A} \quad (2.19)$$

熱雑音力を $f_T(t)$ とすれば、単位時間あたりに $f_T(t)$ のする仕事は

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle &= \langle f_T(t) \dot{\xi} \rangle \\ &= \langle f_T(t) \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_T(s) ds \rangle \\ &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t) f_T(s) \frac{d}{dt} G(t-s) ds \right\rangle \\ &= \frac{1}{4\mu} \langle |f_T(\nu)|^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.20)$$

となり、式 (2.19)(2.20) よりアンテナの熱揺動力のパワースペクトラムは

$$\langle |f_T(\nu)|^2 \rangle = \frac{4\mu kT}{\tau_A} \quad (2.21)$$

と表される。したがって、熱雑音を小さくするためには温度 T を下げ、 Q 値をあげればよいことになる。(2.17) より $\mu \sim 10^3 \text{kg}$ 、 $\omega \sim 10^4 \text{rad/s}$ 、 $T \sim 300 \text{K}$ 、としたとき熱雑音による振動変位の自乗平均値は $\sqrt{\langle \xi^2 \rangle} \sim 2 \times 10^{-16} \text{m}$ 程度の大きさになる。この結果は熱雑音が共振周波数付近の比較的狭い周波数帯域では近似的に白色雑音とみなせることを示している。

トランスデューサーの雑音

トランスデューサーの雑音には等価変位雑音 ξ_N とアンテナへのバックアクション f_N の2種類あり、どちらもアンテナの共振周波数近傍では白色雑音と考えて差し支えない。よって(2.11) の f を $f_T + f_N$ とすれば、トランスデューサーの検出する雑音による変位は

$$\xi(t) = \frac{1}{\mu\omega} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{t-s}{2\tau_A}\right] \sin[\omega(t-s)] \{f_T(s) + f_N(s)\} ds + \xi_N(t) \quad (2.22)$$

となる。このトランスデューサーの雑音 ξ_N と f_N は機械系（アンテナ）と電気系のカップリング β を変化させることで、両者の相対的な大きさを変えることができる。一般に β を大きくすると、結合の度合を強めるので読みとり精度が向上し（変位雑音は減少）、バックアクションは増加する。このことから重力波の測定周波数帯域に対応してカップリングを変えてやれば、最適な S/N 比が得られることになる。

2.3 ディスクタイプアンテナの弾性振動

2.3.1 振動モード

ディスクタイプアンテナの面内固有振動については、それが円盤に近い形であることから円盤において第0近似を使って固有振動モードの解を求め、円盤からのずれは摂動によって解く手法を用いる。

円柱座標をとり円盤の半径を a 、厚さを h 、密度を ρ 、Poisson 比及びヤング率をそれぞれ σ 、 E とおくと、第0近似は厚さ方向の応力テンソルを厚さに依存しないとして、 $\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zz} = 0$ とすることである。ここで面内振動の変位ベクトルをモード展開して

$$u_r = U \quad (2.23)$$

$$u_\theta = V \quad (2.24)$$

$$U = \sum U_n \cos n\theta \cos \omega_n t \quad (2.25)$$

$$V = \sum V_n \sin n\theta \cos \omega_n t \quad (2.26)$$

とおくと、微小部分 $rdrd\theta dz$ のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \omega_n^2 (U^2 + V^2) - \frac{1}{2} \sigma_{ik} u_{ik} \quad (2.27)$$

で与えられ、全ラグランジアンは

$$L = \frac{Eh}{2(1-\sigma^2)} \int \left\{ k^2(U^2 + V^2) - \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{U}{r} \right)^2 \right. \\ \left. + 2(1-\sigma) \frac{\partial U}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{U}{r} \right) - \frac{1-\sigma}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right)^2 \right\} r dr d\theta \quad (2.28)$$

となる。ここで k は音速 v_s と周波数とで決まる波数であり、

$$k^2 = \frac{(1-\sigma^2)\omega_n^2 \rho}{E} \quad (2.29)$$

$$v_s = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}} \quad (2.30)$$

の関係がある。 U 、 V に関する Euler-Lagrange 方程式、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_r} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_\theta} = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_r} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_\theta} = 0 \quad (2.32)$$

を解くと、

$$U_n = \frac{1}{kr} \left[A_n \left\{ n J_n(kr) - kr J_{n+1}(kr) \right\} + n B_n J_n(k'r) \right] \quad (2.33)$$

$$V_n = -\frac{1}{kr} \left[n A_n J_n(kr) + B_n \left\{ J_n(k'r) - k'r J_{n+1}(k'r) \right\} \right] \quad (2.34)$$

$$k'^2 = \left(\frac{2}{1-\sigma} \right) k^2 \quad (2.35)$$

という Bessel 関数を用いた式が得られる。 A_n 、 B_n は応力に関する境界条件によって決まる係数である。

ここであらためて、振動モードを表現するために (n, m, p) という整数を導入すると、

n : θ 方向の対称性 $n=0, 1, 2, \dots$

m : n に対する固有値を決める式の根の順位 $m=1, 2, 3, \dots$

p : polarization $p=1, 2$

変位ベクトル $(u_{np}^r, u_{np}^\theta)$ は以下のように書ける。

$$u_{np}^r = W_n^r(r) (\delta_{p1} \cos n\theta + \delta_{p2} \sin n\theta) \cos \omega_n t \quad (2.36)$$

$$u_{np}^\theta = W_n^\theta(r) (\delta_{p1} \sin n\theta - \delta_{p2} \cos n\theta) \cos \omega_n t \quad (2.37)$$

$$W_n^r(r) = \frac{1}{kr} \left[A_n \left\{ n J_n(kr) - kr J_{n+1}(kr) \right\} + n B_n J_n(k'r) \right] \quad (2.38)$$

$$W_n^\theta(r) = -\frac{1}{kr} \left[n A_n J_n(kr) + B_n \left\{ J_n(k'r) - k'r J_{n+1}(k'r) \right\} \right] \quad (2.39)$$

それぞれの固有モードの固有振動数は $r = a$ で応力テンソルについて $\sigma^{rr} = \sigma^{r\theta} = 0$ という境界条件から求まる。応力テンソルは

$$\sigma^{rr} = \frac{E}{1-\sigma^2} \left\{ U_r + \sigma \left(\frac{1}{r} V_\theta + \frac{U}{r} \right) \right\} \quad (2.40)$$

$$\sigma^{r\theta} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \left(V_r - \frac{V}{r} + \frac{1}{r} U_\theta \right) \quad (2.41)$$

によって与えられるので、固有モードに対して以下のようになる。

$$\sigma_{np}^{rr} = \chi_n^{rr}(r) (\delta_{p1} \cos n\theta + \delta_{p2} \sin n\theta) \cos \omega_n t \quad (2.42)$$

$$\sigma_{np}^{r\theta} = \chi_n^{r\theta}(r) (\delta_{p1} \sin n\theta - \delta_{p2} \cos n\theta) \cos \omega_n t \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \chi_n^{rr}(r) = \frac{E}{(1+\sigma)r^2} & \left[A_n \left[\left\{ n(n-1) - \frac{(k'r)^2}{2} \right\} J_n(kr) + kr J_{n+1}(kr) \right] \right. \\ & \left. + nB_n \left[(n-1)J_n(k'r) - k'r J_{n+1}(k'r) \right] \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \chi_n^{r\theta}(r) = \frac{E}{(1+\sigma)r^2} & \left[nA_n \left[(n-1)J_n(kr) - kr J_{n+1}(kr) \right] \right. \\ & \left. + B_n \left[\left\{ n(n-1) - \frac{(k'r)^2}{2} \right\} J_n(k'r) + k'r J_{n+1}(k'r) \right] \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

この式より境界条件は

$$\begin{pmatrix} \chi_n^{rr}(a) \\ \chi_n^{r\theta}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = 0 \quad (2.46)$$

となるので、固有振動モードの波数は $|M| = 0$ の永年方程式より求まる。更に B_n/A_n が得られるので、固有振動モードが決まる。図 2.2 にいくつかの (n, m, p) について、そのモードパターンを示した。

一般にアンテナにはトランスデューサーを取り付けるための切り欠きがあり、その外周は円よりずれている。この場合には固有振動を摂動によって解けばよい。外周を

$$\begin{aligned} r(\theta) &= r_0 + \delta r(\theta) \\ \int_0^{2\pi} \delta r(\theta) d\theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

とすると、式 (2.46) の代わりに

$$\chi_{np}^{rr}(r_0 + (-1)^{p+1} \epsilon_n) = 0 \quad (2.48)$$

$$\chi_{np}^{r\theta}(r_0 + (-1)^p \epsilon_n) = 0 \quad (2.49)$$

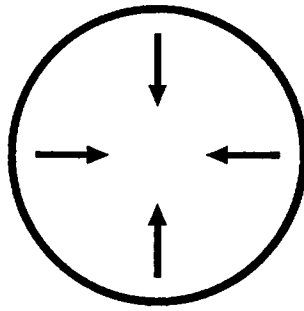
$$\epsilon_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta r(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (2.50)$$

が得られ、永年方程式より同様に波数を求めることができる。

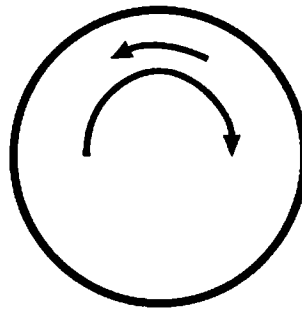
重力波活性な四重極モードの振動は $n=2$ の $(2,1,1)$ 、 $(2,1,2)$ 、 $(2,2,1)$ であり、円盤の場合の永年方程式は

$$\begin{vmatrix} \{2 - \frac{(k'a)^2}{2}\} J_2(ka) + ka J_3(ka) & 2\{J_2(k'a) - k'a J_3(k'a)\} \\ 2\{J_2(ka) - ka J_3(ka)\} & \{2 - \frac{(k'a)^2}{2}\} J_2(k'a) + k'a J_3(k'a) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.51)$$

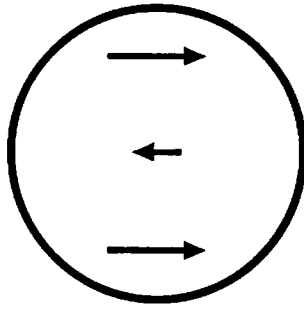
となり、波数が求まる。切り欠きがある場合は等価半径 r_0 と摂動 ϵ_2 を r 方向、 θ 方向、polarization に注意して a に $r_0 \pm \epsilon_2$ を代入すればよい。



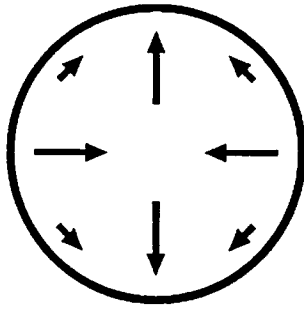
$(0, 1, 1)$



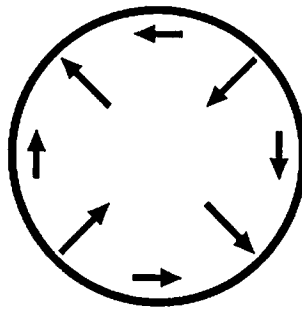
$(0, 1, 2)$



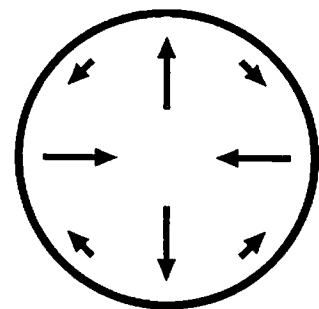
$(1, 1, 1)$



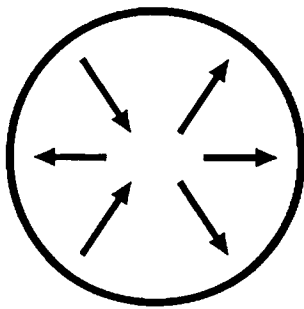
$(2, 1, 1)$



$(2, 1, 2)$



$(2, 2, 1)$



$(3, 1, 1)$

図 2.2: ディスクの面内固有振動モードパターン

2.3.2 有効断面積と換算質量

有効断面積 A_G と換算質量 μ_n は以下の式によって表される。

$$A_G = \frac{2 \sum_{ij} q_{ij}^2}{\mu M} \quad (2.52)$$

$$\mu_n = \int \rho |\vec{w}_n|^2 dV \quad (2.53)$$

ここで有効断面積は換算質量 μ や q_{ij} と異なり、一般座標 ξ のとりかたによらずに決まるアンテナ振動子固有のものである。

$n=2$ の四重極モードでは円盤の質量 M 及び半径 a より換算質量は

$$\frac{\mu}{M} = \frac{1}{[W_2^r(a)]^2} \int_0^1 [(W_2^r(at))^2 + (W_2^\theta(at))^2] t dt \quad (2.54)$$

によって求まり、有効断面積は重力波の偏向 (T.T.-gauge) に対応した polarization に対してそれぞれ

$$q_{ij} = \begin{cases} D \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (p=1) \\ D \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (p=2) \end{cases} \quad (2.55)$$

$$\frac{D}{M} = \frac{a}{W_2^r(a)} \int_0^1 [W_2^r(at) - W_2^\theta(at)] t^2 dt \quad (2.56)$$

$$\frac{A_G}{S} = \frac{4 [\int_0^1 (W_2^r(at) - W_2^\theta(at)) t^2 dt]^2}{\pi \int_0^1 [(W_2^r(at))^2 + (W_2^\theta(at))^2] t dt} \quad (2.57)$$

のようになる。ここで S はアンテナの重力波入射面の表面積である。

第 3 章

大型アンテナ製作のための実験

大型の共振型アンテナを製作した結果、その熱雑音のパワースペクトラムが小さくなっているためには、アンテナ本体が高い Q 値を持っていないなければならない。しかし、内部摩擦に関して確実な理論が存在せず、 Q 値をあらかじめ見積もることができない以上、大型アンテナの製造された段階で Q 値の損失が起っていないようにするために製造のための最良の方法を調べておかなければならない。本実験は、アンテナを製作した結果できるだけ高い Q 値が維持されているためには、どのようなアンテナの形状及び支持方法を選択するのかを決めるために行なわれたものである。

3.1 実験方法

実験の手法は次のものである。形状及び支持方法を選んだ小型の試作品を幾つか製作し、それを真空中にいれ、重力波の到来によって励起されるであろう四重極モードの振動を他の方法で励起して、その減衰の緩和時間を静電型トランスデューサーで測定することによって、 Q 値を比較するものである。こうすることで、どのタイプのものがもっとも高い Q 値を維持できるかを調べることができる。

3.1.1 試作ディスク

材質及び形状

小型の試作品の材質及び形状は以下のとおりである。

共振型アンテナ本体のディスクの材質は弾性体のなかでも Q 値の高いアルミ合金 5056 を採用しているのので、同じアルミ合金 5056 によって試作ディスクを作製した。この材質の物質定数は以下に示すとおりである。

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{密度} & \rho & = 2.64 \quad (\text{g/cm}^3) \\ \text{Poisson 比} & \sigma & = 0.33 \\ \text{ヤング率} & E & = 7.03 \times 10^{10} \quad (\text{N/m}^2) \end{array} \right.$$

Type	支持方法	支柱の固定方法	分類
1	溶接型	$\phi 40\text{mm}$ と $\phi 30\text{mm}$ の支柱を溶接	(A)
1	ねじ止め型	$\phi 12\text{mm}$ のねじを中心に、その周囲に 4 本の $\phi 8\text{mm}$ のねじ	(B)
2	ねじ止め型	$\phi 12\text{mm}$ のねじを中心に 1 本のみ	(C)
3	一体成型型	一体成型の支柱直径 $\phi 24\text{mm}$	(D)

表 3.1: 試作ディスクの種類

試作ディスクの基本的な形状は直径 30cm、厚さ 4cm の円盤で、静電型トランスデューサーを形成するため 90 度ごとに 5cm の切り欠きをもたせた。Q 値比較測定のための形状のタイプは図 3.1、表 3.1 のようになっている。

(A) と (B) は大型アンテナには採用しなかったが、レーザー光の経路をアンテナ本体内部にとれるように振動面内に直径 9mm の穴があいているものである。また最初の段階では (A)、(B) とともに支柱は全くおなじもので、それを溶接したか、ねじによって固定したかの違いのみである。ねじの止め方は直径 40mm の支柱をもつ台座とディスクを 4 本の $\phi 8$ のねじで止め、後述するが、トランスデューサーを装着するための 30mm の支柱をもつ上部円盤とディスクの固定に $\phi 12$ のねじを使っている。(C) は台座と上部円盤とを $\phi 12$ のねじ 1 本で固定しているもので、支柱の部分を除いて振動面内に穴は存在していない。(D) は支柱そのものが一体となっていると考えられるものである。

四重極モードの周波数と換算質量

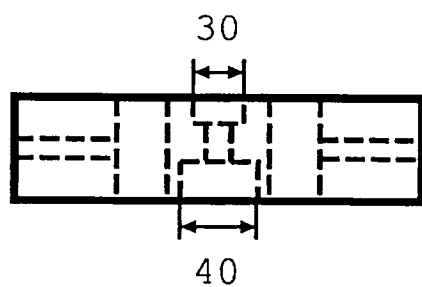
ディスクの四重極モードの励起は、その側面を叩くことによって行なう。これによって励起される振動モードは、実際に測定してみたところディスクタイプということもあって (2,1,1) モードが最も励起されやすく、(2,1,2)、(1,1,1)、(3,1,1) のモードも若干励起された。

ここで 2.3 で示した理論よりアンテナの形状から、四重極モードの固有振動数と換算質量を求めることができる。分類における (D) のディスクについての計算を行なう。ディスクの周囲に切り欠きがあるために完全な円ではないので摂動を用い、円盤の半径を a 、切り欠きの中心角を 2ϕ 、外周長を l 、等価半径を r_0 とすると (図 3.2)、

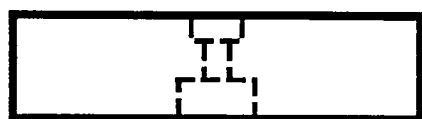
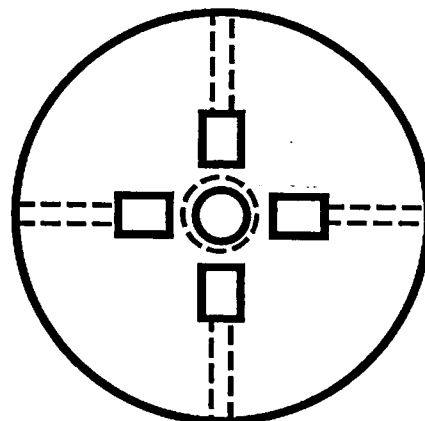
$$\begin{aligned}
 l &= 2\pi r_0 \\
 &= a(2\pi - 8\phi) + 4 \int_{-\phi}^{\phi} \frac{a \cos \phi}{\cos \theta} d\theta \\
 &= a(2\pi - 8\phi) + 4a \cos \phi \log \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

の関係がある。式 (3.1) より、半径 15cm、切り欠きの幅 5cm より等価半径を求めると $r_0 \approx 14.972\text{cm}$ となり、式 (2.50) で表される ϵ_2 は

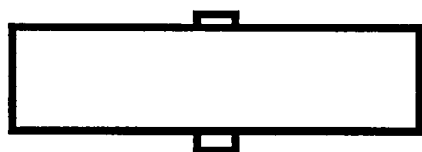
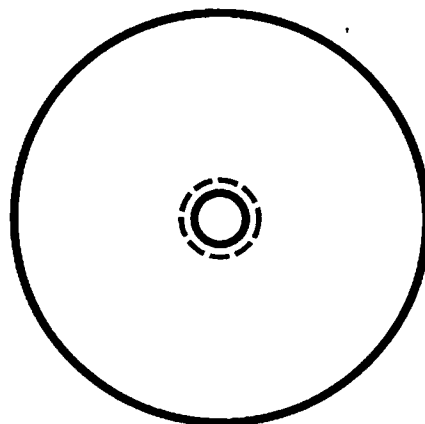
$$\epsilon_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{r(\theta) - r_0\} \cos 4\theta d\theta$$



Type 1



type 2



type 3

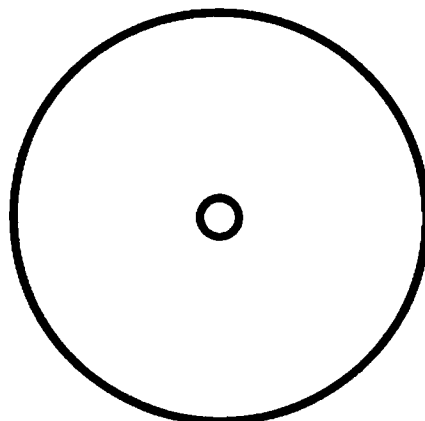


図 3.1: 試作ディスクの概略図

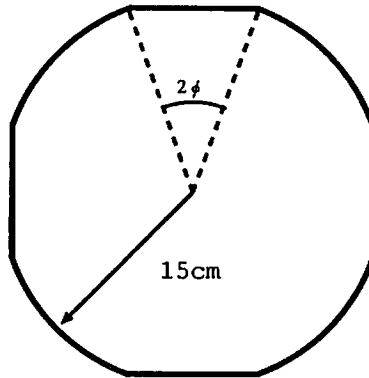


図 3.2: ディスクの形状

$$= \frac{2a}{\pi} \left[2 \cos \phi \int_0^\phi \frac{\cos 4\theta}{\cos \theta} d\theta - \frac{1}{2} \sin 4\phi \right]$$

$$\approx 2.7 \times 10^{-4} (\text{cm})$$

(2,1,1) モードの解は、式 (2.48)、(2.49) より

$$\begin{pmatrix} \chi_{21}^{rr}(r_0 + \epsilon_2) \\ \chi_{21}^{r\theta}(r_0 - \epsilon_2) \end{pmatrix} = 0$$

の永年方程式を解けば良い。結果として $k \approx 9.07957$ の値を得、これは周波数にして 7898 Hz であった。

次に B_n/A_n を求めて、換算質量を計算すると $\mu/M = 0.5184$ であった。

(2,1,2) モードについても計算を行ない、その結果をまとめると表 3.2 のようになった。

mode	周波数 (Hz)	換算質量 (kg)
(2,1,1)	7899	3.8569
(2,1,2)	7883	3.8563

表 3.2: 四重極モードの周波数と換算質量

3.1.2 Q 値測定系と静電型トランスデューサー

Q 値を測定するための測定系の概略を図 3.3 に示す。その構成は以下のようになっている。真空槽内に試作ディスクを入れ、バイアスをかけた極板で静電型トランスデューサーを形成し、その信号を 100 倍の pre.Amp. で増幅した後、ディスクの固有振動数に対応した 10 倍の Band-pass filter を通して、Lock-in Amp. にとりこみ、A/D Converter から computer

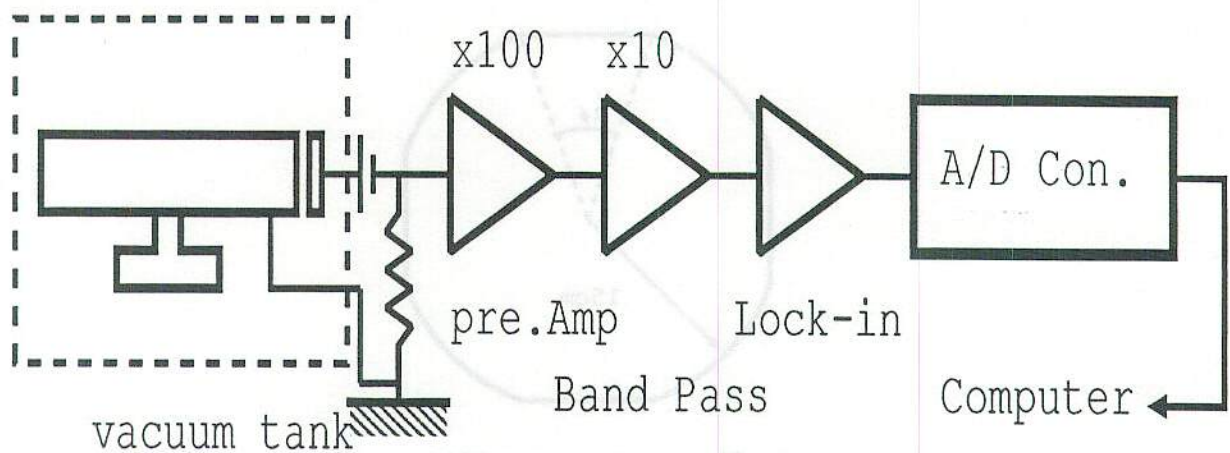


図 3.3: Q 値の測定系

へデータを送るものである。ここで試作ディスクと静電型トランスデューサーの配置及びトランスデューサーの振動検出の仕組みについて詳述する。

トランスデューサーとディスクの配置

試作ディスクと静電型トランスデューサーの配置は図 3.4 に示すように 2 通りある。当然 (I) の測定配置より (II) の配置の方が Q 値が高い。

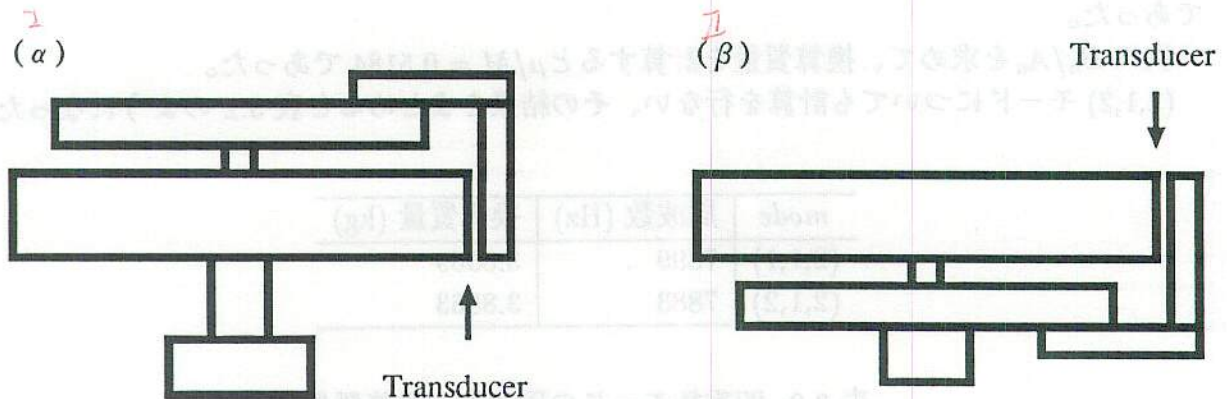


図 3.4: ディスクとトランスデューサーの測定配置

それぞれ測定配置において表 3.1 のどの分類のディスクを使用したかを表 3.3 に示す。

(I)		
(A)	溶接型	この方法のみ
(B)	ねじ止め型	ねじを5本全て使用した場合 ねじを中心1本のみ使用した場合
(C)	ねじ止め型	ねじは中心1本のみ
(D)	一体成型型	支柱は接着剤で固定
(II)		
(B)	ねじ止め型	ねじは使用しない
(C)	ねじ止め型	ねじは使用しない
(D)	一体成型型	支柱は固定しない

表 3.3: トランスデューサーの配置

静電型トランスデューサー

図 3.5 にアンテナとトランスデューサー部分の回路を示す。ここでアンテナは減衰のある調和振動子として表し、その端面においてコンデンサーを形成している。図 3.5 におけるそれぞれの記号の意味は以下のものであり、雑音源となっている。

i_R	抵抗の熱雑音電流
i_N	Amp の電流性雑音
v_N	Amp の電圧性雑音
C_s	回路の浮遊容量

力学系と電気系の結合によって導かれるトランスデューサーの方程式は、コンデンサーの電荷を $q(t)$ 、アンテナ端面の変位を x として、浮遊容量 C_s が小さいとして無視すると、

$$\frac{q(t)}{C_0} + R\dot{q}(t) + R(i_R + i_N) = Ex \quad (3.2)$$

$$\mu \left(\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x \right) = Eq(t) + F \quad (3.3)$$

となる。ここで μ はモードの換算質量、 ω_0 はディスクの固有振動数、 Q はその Q 値、 $E = V_{Bias}/d$ 、 $C_0 = \epsilon_0 S/d$ はそれぞれ振動していない状態での d ：極板間隔 (S は極板の面積) によって決まるトランスデューサーの電場、静電容量を表しており、 F はディスクを励起させる力である。浮遊容量を考慮するならば、式 (3.2) の左辺の二項目の係数を

$$R \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{R} + jC_s\omega} \quad (3.4)$$

とすればよい。

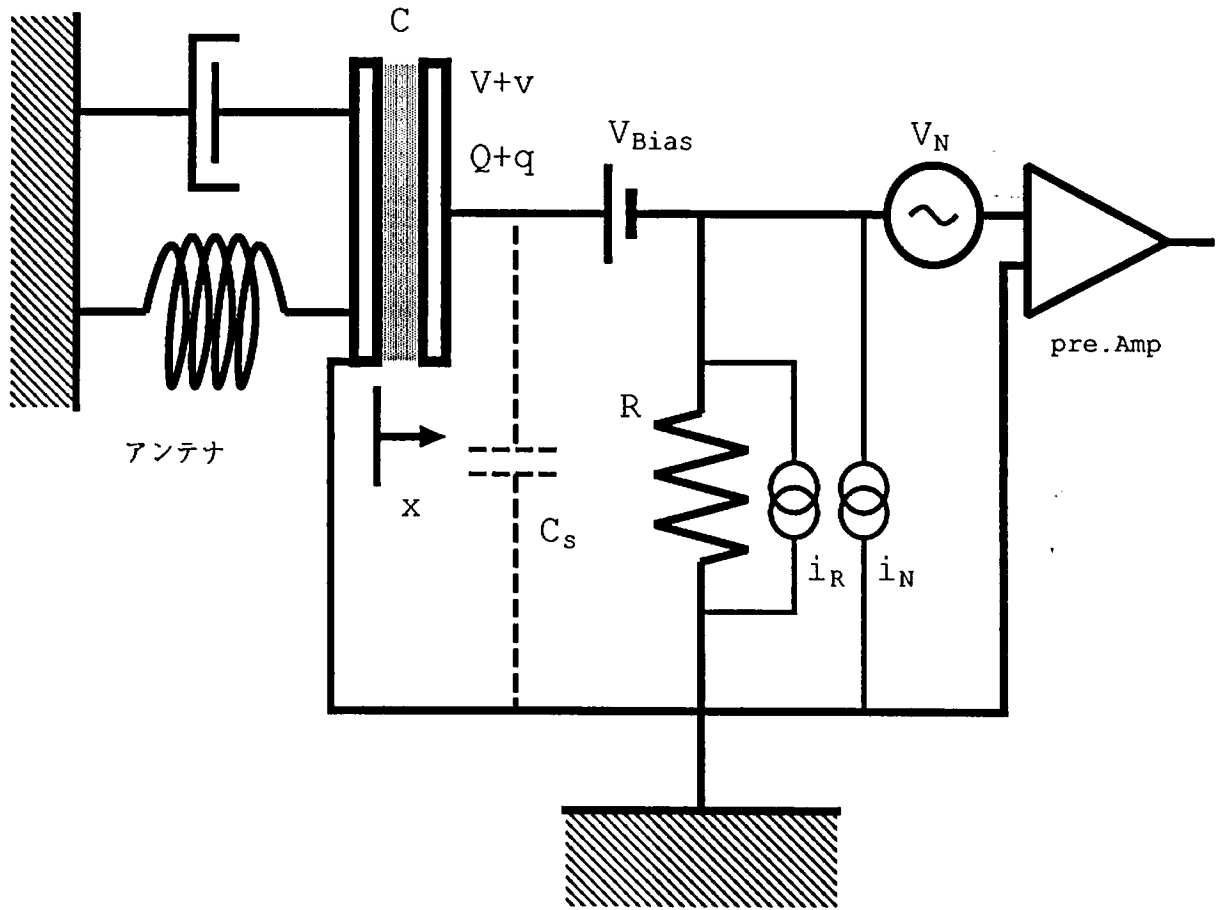


図 3.5: アンテナとトランスデューサー

式 (3.2) より出力電圧が求まり、

$$q(t) = \frac{C_0}{1 + j\omega C_0 R} \left\{ Ex - R(i_R + i_N) \right\} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} v &= \dot{q}(t)R + v_N \\ &= \frac{j\omega C_0 R}{1 + j\omega C_0 R} \left\{ Ex - R(i_R + i_N) \right\} + v_N \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。この $q(t)$ を式 (3.3) に代入すれば、ディスクとトランスデューサーの結合によって生じる力学系への影響が計算できる。

$$\mu \left[\ddot{x} + \left\{ \frac{\omega_0}{Q} + \frac{1}{\mu} \frac{C_0^2 E^2 R}{1 + (\omega C_0 R)^2} \right\} \dot{x} + \left\{ \omega_0^2 - \frac{1}{\mu} \frac{C_0 E^2}{1 + (\omega C_0 R)^2} \right\} x \right] = F' \quad (3.7)$$

$$F' = F - \frac{C_0 E R (i_R + i_N)}{1 + j\omega C_0 R} \quad (3.8)$$

この結果よりディスクの Q 値と固有振動数は、 $\omega \cong \omega_0$ と考えてよいから

$$Q_{eff} = \frac{1}{\frac{1}{Q} + \frac{C_0 E^2}{\mu \omega^2} \frac{\omega C_0 R}{1 + (\omega C_0 R)^2}} \quad (3.9)$$

$$\omega_{eff} = \left[\omega^2 - \frac{1}{\mu} \frac{C_0 E^2}{1 + (\omega C_0 R)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

と変更されることになる。

実際の測定においてトランスデューサーをつけた結果パラメーターが変わるかどうか調べるために、実験における典型的な値

$$\begin{aligned} C_0 &= 200 \text{ pF} \\ d &= 88.5 \text{ } \mu\text{m} \\ E &= 1.5 \times 10^4 \text{ V/m} \\ R &= 200 \text{ M}\Omega \\ \mu &= 3.86 \text{ kg} \\ \omega &\simeq 2\pi \times 7900 \approx 4.96 \times 10^4 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

をとり、この値を式 (3.9)、式 (3.10) に代入すると、

$$\begin{aligned} Q_{eff} &= \frac{Q}{1 + 2.38 \dots \times 10^{-15} \times Q} \cong Q \\ \omega_{eff} &= \left[\omega^2 - 2.96 \dots \times 10^{-9} \right]^{\frac{1}{2}} \cong \omega \cong \omega_0 \end{aligned}$$

となる。トランスデューサーをつけたことによるディスクの力学系への影響は計算上は無視してよいことがわかった。

また出力電圧に関しては雑音が小さいとして無視すると、式 (3.6) より

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{1 + (\omega C_0 R)^2} \{ (\omega C_0 R)^2 + j\omega C_0 R \} E x \\ &\cong E x + j \frac{1}{\omega C_0 R} E x \quad (\omega C_0 R \gg 1) \end{aligned}$$

となり、ディスクの振動変位に比例した値が出力されると考えてよい。

以上の結果に対して浮遊容量を考慮にいれても、同様の結果が得られた。

3.2 実験結果

Q 値を導くための緩和時間の測定例を図 3.6 に示す。使用したディスクは (B) で、縦軸はトランスデューサーの電位変化で、これが $1/e$ となる時間より Q 値を計算している。

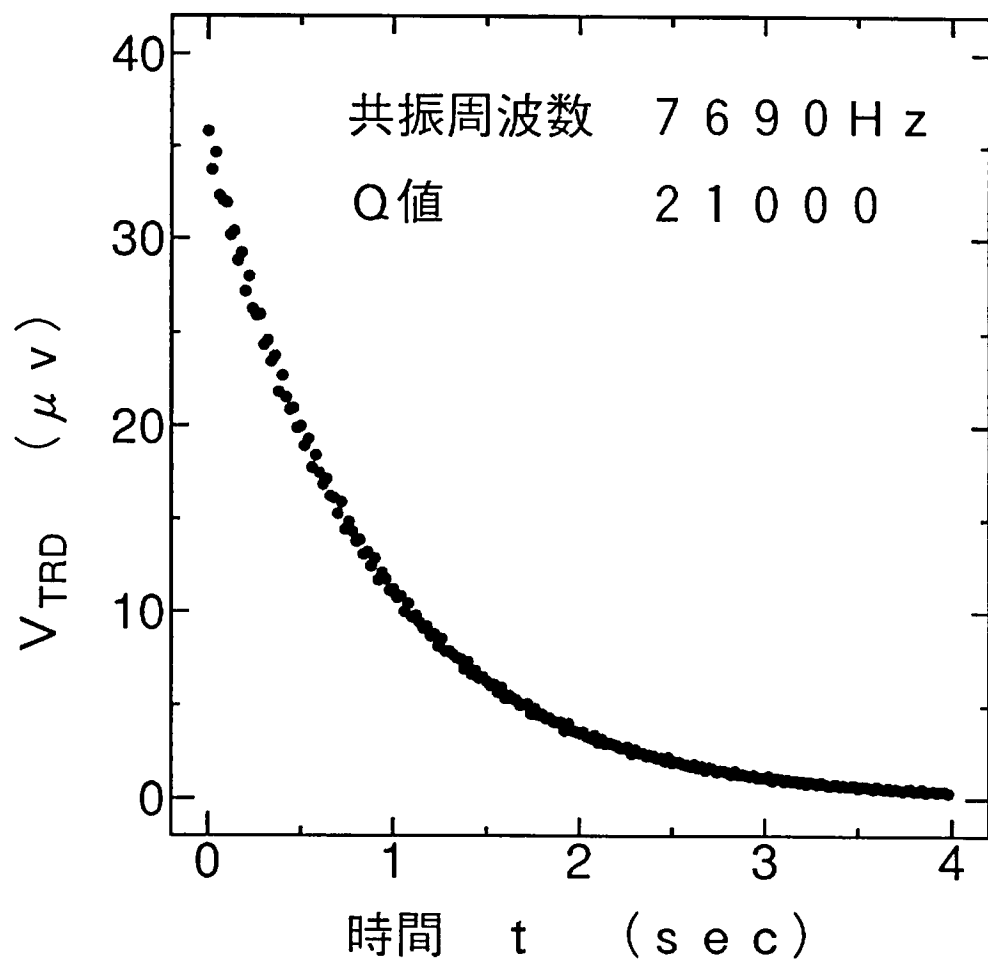


図 3.6: 緩和時間の測定

3.2.1 Q 値データの信頼性のための予備実験

さてアンテナの製作方法を決めるための比較実験を行なう前に、Q 値を変化させる要因についてはあらかじめ除去しておかなければならない。そこで環境因子や内部パラメーター、測定系に原因のある Q 値の変化を調査してみた。

真空度

Q 値を決定する振動の減衰をおこさせるものに、内部摩擦や支柱との接触面での摩擦のほかに気体分子の影響がある。振動子に発生したフォノンが振動子表面で当然気体分子にそのエネルギーをうばわれるので、低圧力ほど緩和時間は長くなる。また実際に高真空ほど良いに違いないが、重力波を検出するための作動環境としてどの程度の真空度が必要になるかを考えると、真空度によって Q 値の変化が大きくみられることはデータの信頼性や雑音に対する影響上好ましくない。そこで真空度によってどの程度 Q 値が変化するかを調べてみた。

どのタイプのディスクも大気圧の下では Q 値は 1×10^4 以下であった。そこで真空度を 0.1torr から 2.0×10^{-4} torr まで連続的にかけて Q 値の測定を行なった。その結果を図 3.7 に示す。ディスクは (A) を用い、カップリングの影響を取り除くため極板間隔は $80\mu\text{m}$ で一定にした。

この結果はこの範囲での真空度の変化は Q 値に対して 1 % から 2 % の変化しか影響を及ぼさないことを示している。よってこの真空度の範囲内では Q 値は一定であると考えてよい。これを踏まえて以後の測定は 0.1torr で行なった。

トランスデューサーのカップリング

トランスデューサーを装着したことによるディスクの機械系への影響は計算上は無視できることが 3.1.2 で示されたが、実際にカップリングの影響がどの程度のものであるか、トランスデューサーの極板間隔を変えて Q 値の測定を行なった。その結果を図 3.8、3.9 に示す。

図 3.8 はディスク (A) について測定したもので、図 3.9 はディスク (B) を (II) の測定配置で測定したものである。二つの結果とも $100\mu\text{m}$ 付近ではカップリングの影響は考えなくてもよいことを示している。以後、極板間隔が $80\mu\text{m}$ から $120\mu\text{m}$ の範囲にあるようにしてトランスデューサーを装着した。

測定系の雑音と誤差

電気系の雑音が多い場合正確な Q 値測定の妨げになる。そこで pre.Amp の雑音などを測定すると Amp の電流性雑音と抵抗の熱雑音電流の和は、電圧値に換算して

$$R(i_N + i_R) = 30 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$$

であり、Amp の電圧性雑音は

$$v_N = 1.6 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$$

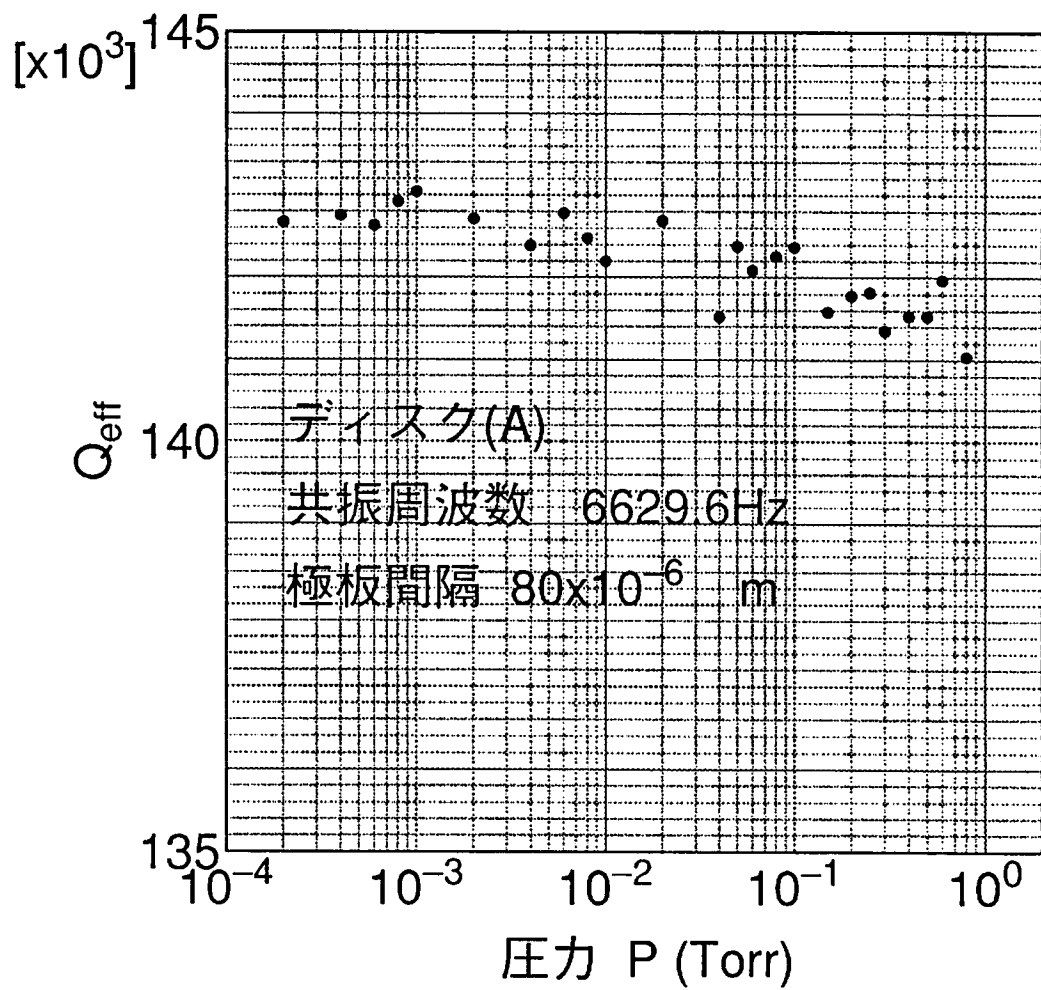


図 3.7: 真空度による Q 値の変化

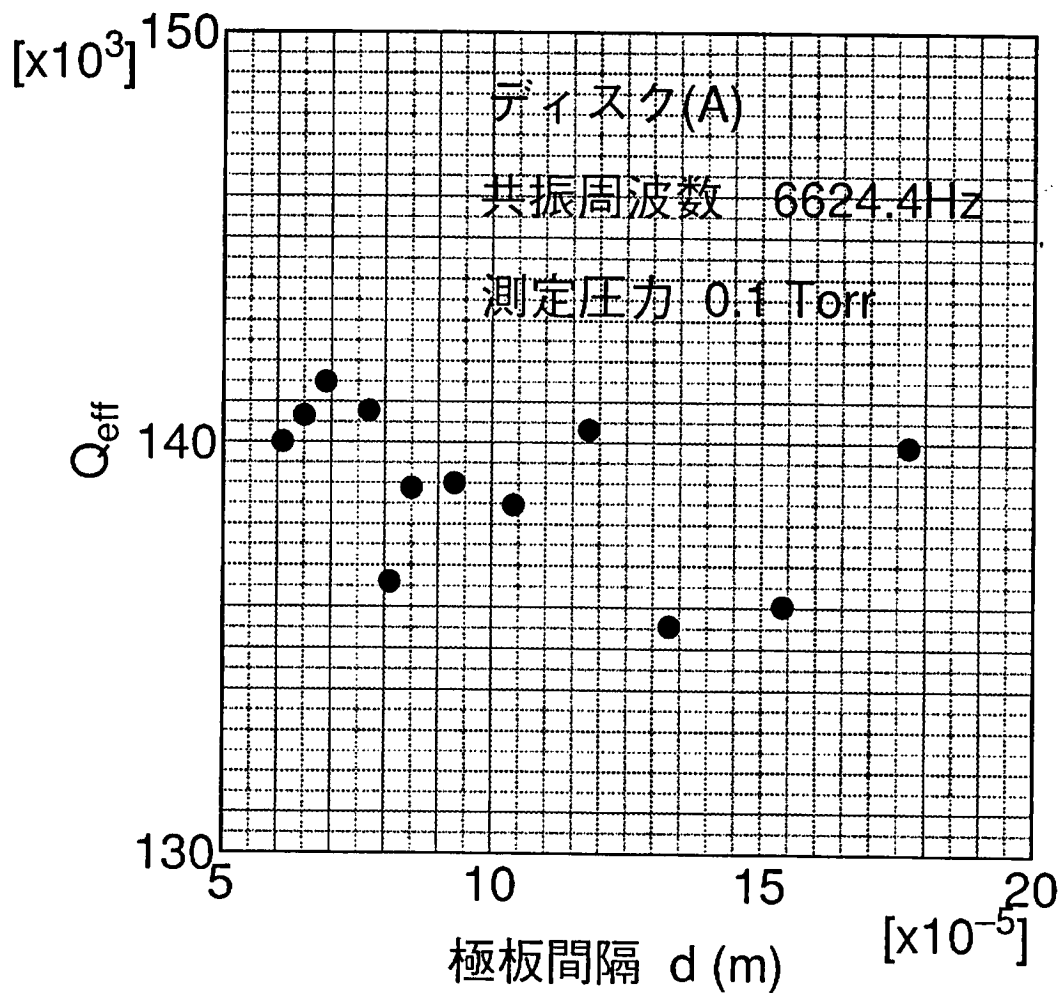


図 3.8: 極板間隔と Q 値変化 (A)

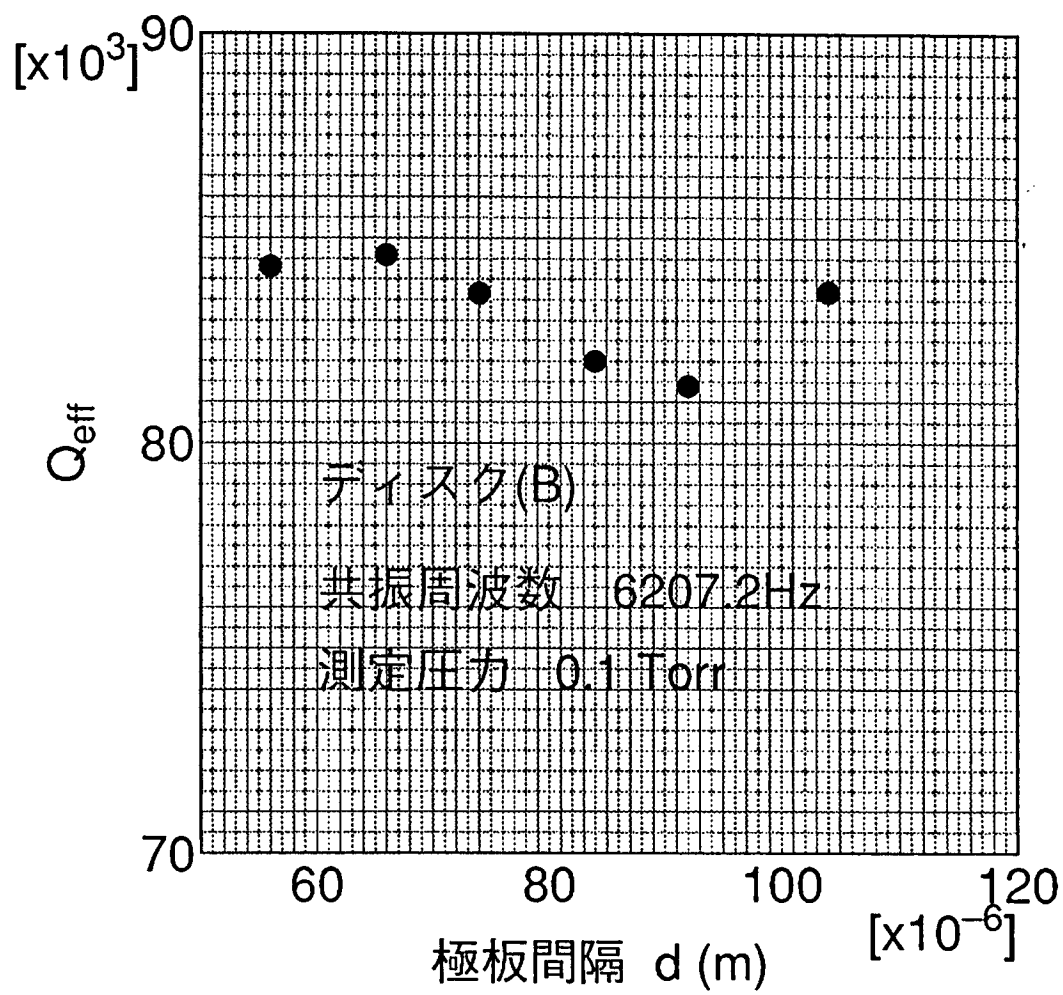


図 3.9: 極板間隔と Q 値変化 (B)

であった。これは実際の測定におけるトランスデューサーの電位変化が μV 以上のオーダーであることを考えれば、無視してもかまわない値である。また熱雑音による振動変位が換算質量 3.86kg 、共振周波数 7900Hz より

$$\sqrt{\xi^2} = 6.6 \times 10^{-16} \text{ m}$$

と求まり、出力電圧の式よりこれが約 10pV という十分に小さい値で、 Q 値の測定には影響を与えないことが分かる。ちなみに雑音による振動変位の検出限界は $2 \times 10^{-12}\text{m}$ である。

他の測定装置による Q 値に生じる誤差としては、A/D ConverterのClockのもつ測定タイミングのずれからなるものが考えられる。つまり緩和時間の測定結果が真の値よりずれるのではないかとということである。しかしA/D Converterは基本周期 4MHz で、サンプリングタイムの誤差としては $\pm 100\text{ppm}$ しかもっていない。つまり時間分解能にして $\pm 25\text{psec}$ の誤差しかないことになり、実験では 20msec でサンプリングを行ない、減衰の緩和時間が1秒以上であることを考えると、この誤差は問題となるものではない。

以上のことから Q 値の値を変動させる要因を取り除くことができたので、以降 Q 値の比較測定の結果を示す。

3.2.2 支持方法

比較測定の方針は支持方法の違いによるものと、振動面に対する穴の影響をみるという二つである。この小節では支持方法についての結果を示す。

(I) の測定配置の場合

ディスク(A)はこの配置でしか測定できない。その結果は以下のとおりで、 Q 値はおおよそ 1.4×10^5 であった。

ディスク	共振周波数	Q 値
(A)	6630 Hz	$(1.40 \pm 0.02) \times 10^5$

ディスク(B)については、これはねじで支柱を固定していることから Q 値は明らかにディスク(A)より小さいことがわかる。しかしそれがどの程度であるか、またねじで固定する支柱との接触面積を減らせば Q 値を高くすることが可能かを調べるために、支柱を漸時削って Q 値の測定を行なった。その結果を図3.10に、最初の直径 30mm の上部円盤用支柱と直径 40mm の台座用の支柱とディスクとの接触面積を100とし、ねじの本数の違いと支柱の径を小さくしていった時の Q 値の変化として示してある。共振周波数は 6280Hz であった。図3.10より固定するねじの本数は少ないほうがよく、また支柱との接触面積も小さくすればするほど Q 値が高くなるということがわかる。

ディスク(C)については次の小節でまとめて述べる。

一体成形のディスク(D)の場合の結果は以下のとおりである。

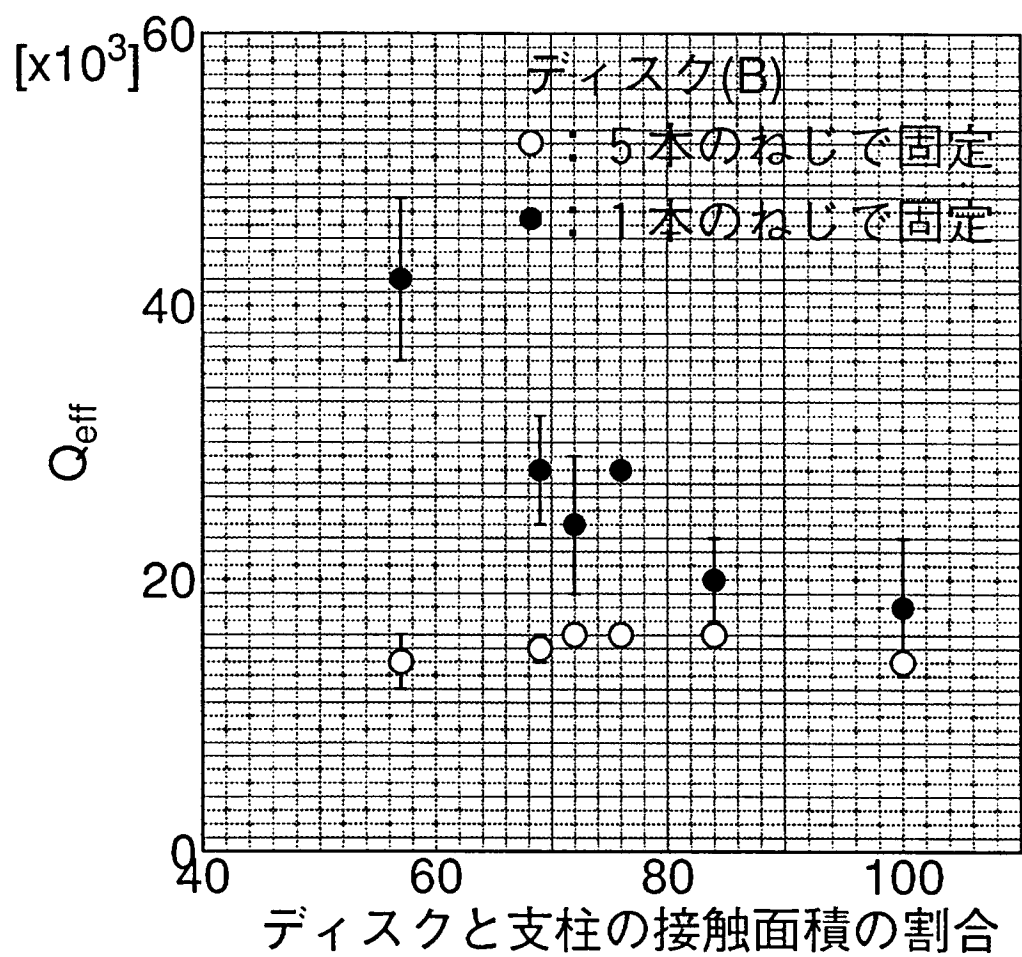


図 3.10: 支持面積と Q 値の関係

ディスク	共振周波数	Q 値
(D)	7910 Hz	1.38×10^5

(A) の溶接型ディスクと同程度の Q 値である。

(II) の測定配置の場合

この配置は支柱との接触部分を極端に減らした配置で、ねじによる固定はなく、次の結果が得られた。

ディスク	共振周波数	Q 値	接触面積の割合
(B)	6230 Hz	$(7.6 \pm 0.4) \times 10^4$	21%
(D)	7910 Hz	$(1.63 \pm 0.03) \times 10^5$	

ディスク (B)、(D) とともに最高の Q 値を示している。

以上より支持方法としてはねじによる固定方式は採用してはいけないことと、ディスクの中心での支持（不動点支持）において支柱との接触面積は極力減らすべきであることがわかる。

3.2.3 穴の影響

ディスクの振動面内に穴が存在している場合の Q 値に対する影響について考えてみる。この時に中心不動点付近にある場合と、中心より離れた位置に穴がある場合とに分ける。

(I) の配置の場合

(A)、(B) のディスクには振動面に垂直に 2cm×3cm の長方形の穴が存在している。前小節で示しているが、(A) と (D) の結果を比べると、この穴の存在は Q 値に影響を与えていないと考えられる。これを確かなものとするために、ディスク (B) を用いて、中心より 7.5cm のところにさらに穴をうがち（長方形の穴とは重ならないように）、その大きさを変えながら Q 値を測定した。その結果を図 3.11 に示す。支柱との接触面積の割合は 57% で、共振周波数は 6260Hz から 6200Hz である。穴をふやしたことで Q 値の値に大きな変化はなく、中心不動点より離れた位置に穴があっても Q 値にはあまり影響しないことが分かった。

中心不動点近傍の穴の存在の影響をディスク (C) を用いて調べると、

ディスク	共振周波数	Q 値	接触面積の割合
(C)	7680 Hz	$(5.5 \pm 0.5) \times 10^4$	57%

となった。1 本のねじで固定したディスク (B) の場合と比較すると Q 値は 1 万は良くなっている。さらにこれを確かめるためにディスク (C) の上下の振動面に直径 10cm、幅、深さともに 5mm の溝をきった。すると Q 値は

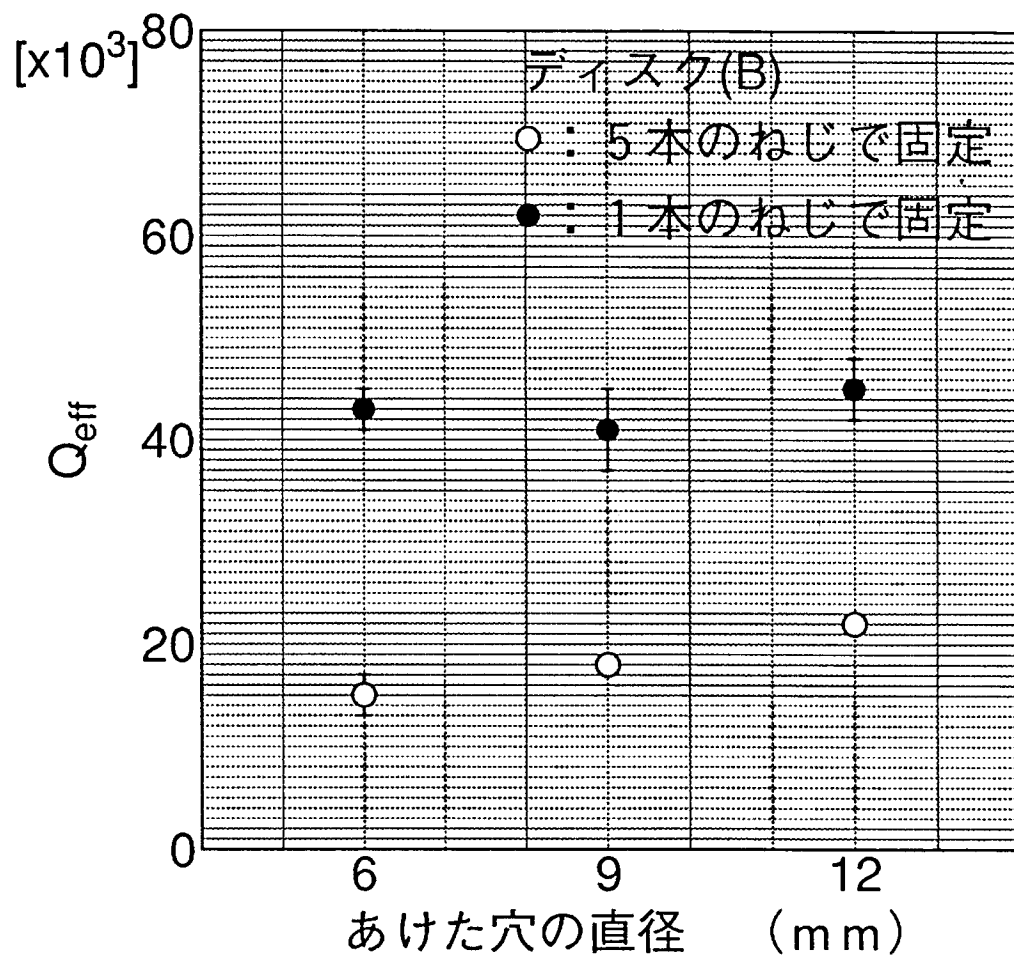


図 3.11: 振動面内の穴と Q 値の関係

ディスク	共振周波数	Q 値	接触面積の割合
(C)	7540 Hz	$(4.8 \pm 0.3) \times 10^4$	44%

となり、わずかだが悪化した。この結果は以下のことを示している。

1. 中心不動点近傍の穴や溝の存在は Q 値を悪化させる要因となる。
2. 振動面に対して垂直の方向に不完全な欠損がある場合、これも Q 値を悪化させる。ただし中心より離れていて、振動面を完全に貫く穴は、Q 値に影響を与えない。

(II) の配置の場合

ディスク (B) について (I) の配置と同様に四ヶ所に穴がある場合

ディスク	穴の直径	共振周波数	Q 値
(B)	6 mm	6230Hz	$(6.7 \pm 0.5) \times 10^4$
	9 mm	6210Hz	$(8.8 \pm 0.3) \times 10^4$
	12 mm	6200Hz	$(8.0 \pm 1.0) \times 10^4$

穴の存在によって Q 値が上昇しているとも考えられるが、ばらつきが大きく判断しかねる結果である。

ディスク (C) についても、

ディスク	共振周波数	Q 値	接触面積の割合
(C)	7680 Hz	$(8.2 \pm 1.3) \times 10^4$	21%

Q 値のばらつきは大きいですが、値としては最高値であり、ディスク (B) よりは確実に大きい。さらに直径 10cm、深さ 5mm、幅 5mm の溝をきった場合も

ディスク	共振周波数	Q 値	接触面積の割合
(C)	7540 Hz	$(5.7 \pm 1.3) \times 10^4$	21%

と、ばらつきの大きい結果を示したが、Q 値の値としては減少していると考えられる。以上の結果より、次のことが言える。

1. 中心不動点近傍の穴の存在は Q 値を低下させる。
2. 中心不動点支持であっても固定されていないときは、Q 値がばらつき定常的な状態におちつかない。
3. 振動面の欠損となるような溝はやはり Q 値を低下させる。

3.2.4 まとめ

Q 値の比較測定の結果をまとめると、以下のようになる。

- 支持は中心不動点で行ない、Q 値のばらつきを防ぐため支持柱と不動点は固定する。
- 支持柱の固定方法としては溶接、もしくは支持柱とディスクが一体に成形されているものがよい。
- 支持面積は極力小さいほうがよい。
- 中心不動点およびその近傍に穴などの振動面に対する欠損があってはならない。

これを指針とし、ディスクタイプ大型アンテナを製造した。

大型アンテナ

製造した大型アンテナの概要は以下のとおりで、Q 値導出のための減衰緩和時間の測定は宇宙線研究所の黒田、神田によって行なわれた。

材質	Al 合金 5056
直径	2 m
厚さ	20 cm
質量	1700 kg
換算質量	880 kg
共振周波数	1200 Hz
Q 値	3.2×10^5

Q 値 3.2×10^5 という値は室温におけるディスクタイプのものとしては、典型的な値が 1.0×10^5 のオーダーであることから若干良いものとなっている。この大型アンテナの外形を図 3.12 に示す。直径 2m という大きさのため、一体成形は工作上できなかった。よって支持柱はディスクの中心で振動面を損なわないように溶接している。上部の円盤は光学素子などをのせるための台である。

最後に比較のために他の研究機関の稼働中の低温共振型アンテナ（液体ヘリウム温度で稼働）について、そのパラメーターを示す。

所属	質量 (kg)	共振周波数 (Hz)	Q 値	トランスデューサー
ローマ大学	2270	916	10^7	容量型
スタンフォード大学	4800	840	5×10^6	誘導型
ルイジアナ大学	2270	915	10^7	誘導型
高エネ研	1200	60	2×10^7	容量型

材質はすべてアルミ合金であり、感度は 10^{-18} 以下である。この感度はアンテナを低温に冷却することでえられているものであり、我々の大型アンテナの計画目標が室温でこれを実

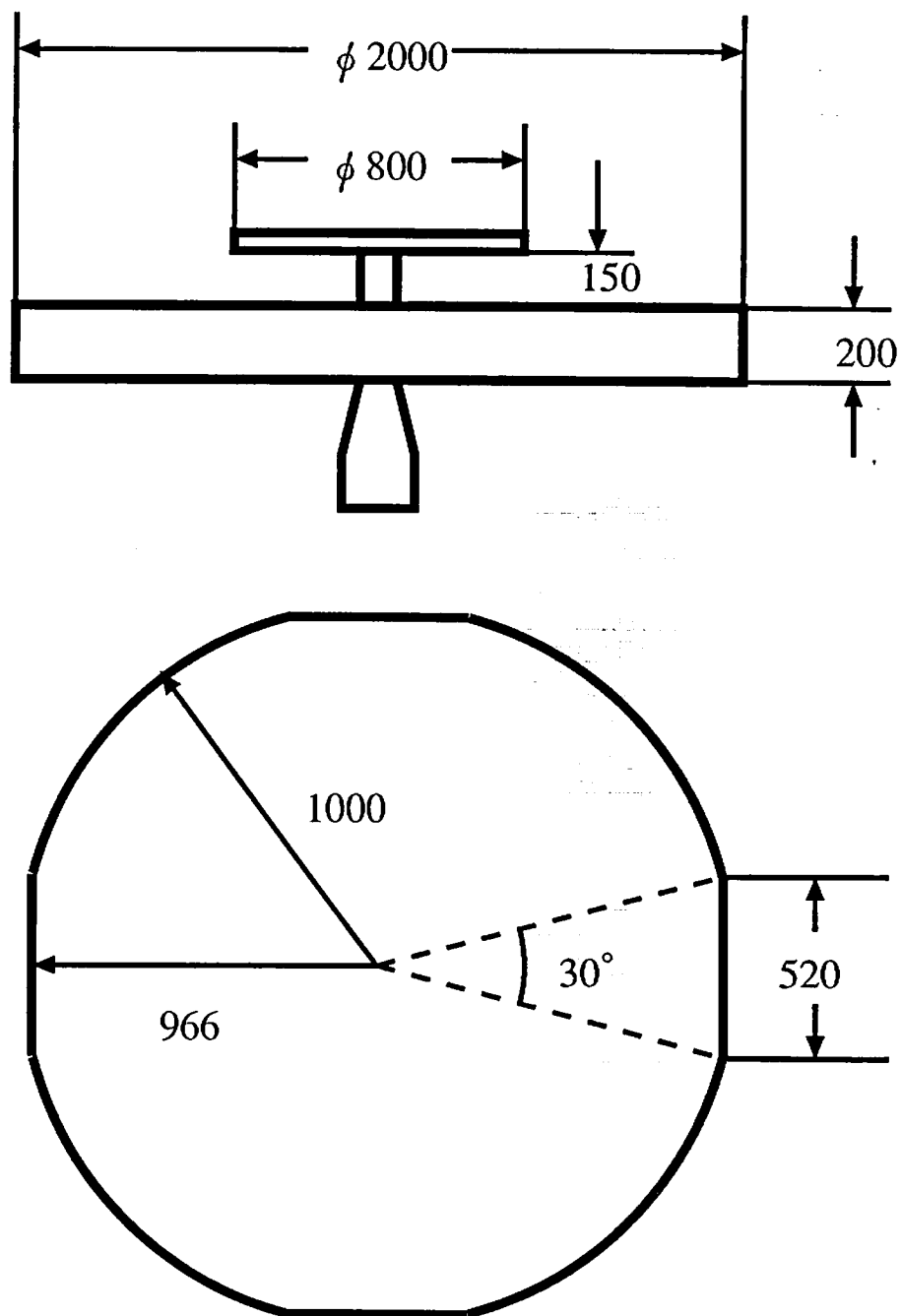
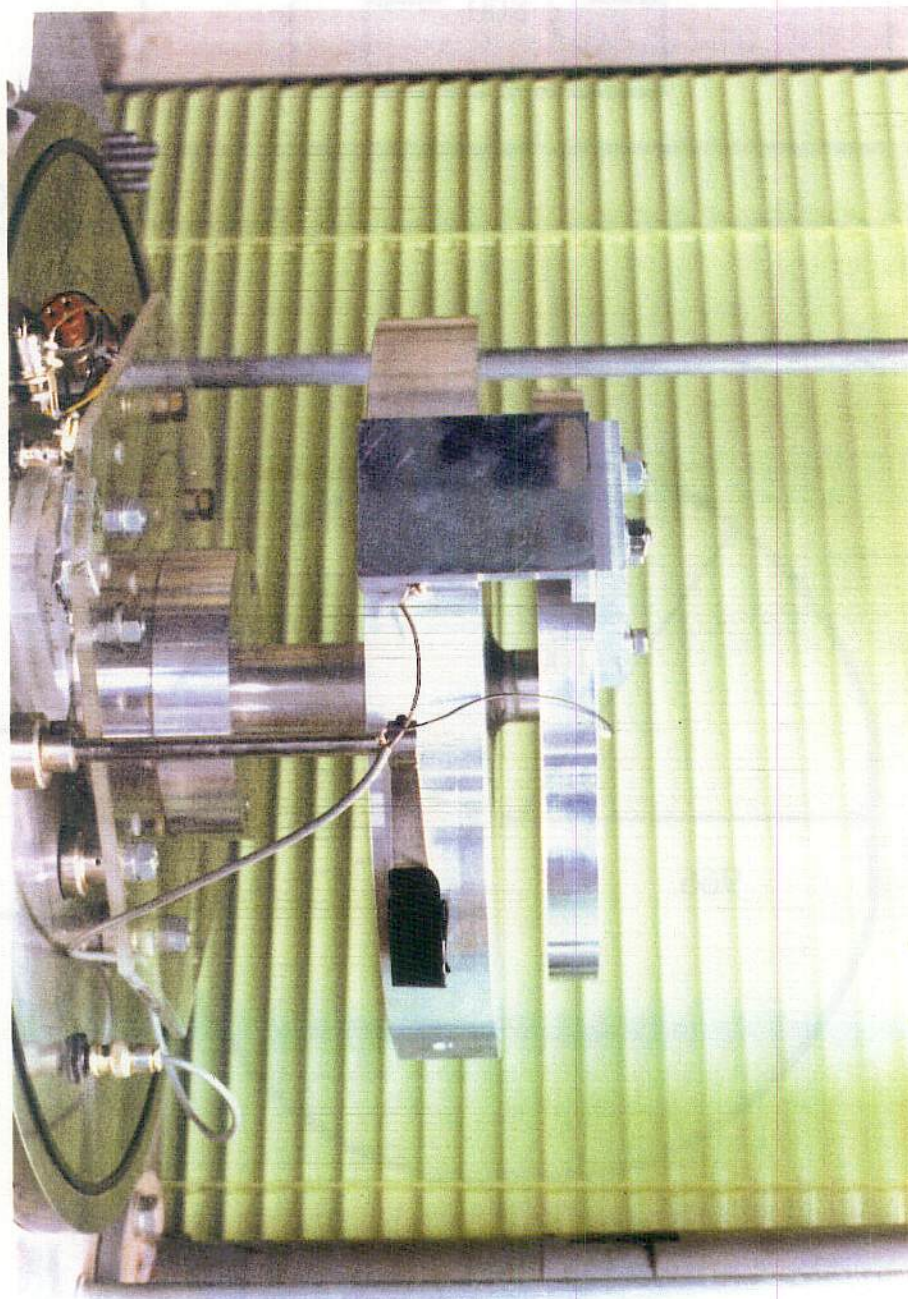


図 3.12: 製造した大型アンテナ

現することであるので、成功した場合は非常に大きな前進と考えられる。

次章よりその感度を達成するためのトランスデューサーである Fabry-Perot 共振器について述べるが、本章の最後として実験に使用したディスク (A) の写真を掲載しておく。



第 4 章

Fabry-Perot 型レーザー干渉計

本研究の目的の一つは、共振型検出器の振動変位測定の特ランスデューサーとして自由質量型の技術である Fabry-Perot 型レーザー干渉計の技術を応用することである。Fabry-Perot 干渉計の透過光および反射光は Fabry-Perot cavity、つまり光共振器の共振器長（基線長）の関数であり、共振型アンテナの端面に一つの鏡をおき、もう一枚の鏡をアンテナとは独立にして cavity を構成してやれば、アンテナ弾性体の振動がレーザー干渉計の出力の変化となって現れる、というものである。この特ランスデューサーは外部にポンピング源（レーザー）をもつので、機械振動をレーザー光の出力の変動に変換する時の損失や、アンテナ振動子に対する反作用が非常に小さいという利点をもっており、周波数雑音などのない理想的な条件では純粋に散乱雑音限界までの基線長の変化を測定することができる。実際にはレーザー光の周波数雑音や強度雑音、光共振器の外乱による揺れなど全てを基線長の変化として光共振器の出力するので、高感度を得るためには技術的な問題を解決しなければならないが、常温において低温特ランスデューサーと同程度の感度を確実に得られる点は大きな長所である。

本章においては、この Fabry-Perot 型レーザー干渉計の原理と共振器長の変化を測定するための変調および復調について述べる。

4.1 Fabry-Perot Cavity

4.1.1 光共振器の周波数応答

多重反射とフィネス

Fabry-Perot 干渉計における周波数応答は図 4.1 のように入射側および出射側ミラーの振幅反射率、振幅透過率をそれぞれ r_1 、 t_1 、 r_2 、 t_2 とおき（共振器内の反射率は負の実数とする）、入射光として角周波数 ω_0 の単色光を考えると

$$E_i(t) = E_0 e^{i\omega_0 t} \quad (4.1)$$

鏡が無限に薄いと考えて、共振器長が L のとき透過光および反射光の振幅 E_t 、 E_r は

$$E_t(t) = \frac{t_1 t_2 e^{-i\omega_0 \frac{L}{c}}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\omega_0 \frac{2L}{c}}} E_i(t) \quad (4.2)$$

$$E_r(t) = \left[r_1 - \frac{r_2 t_1^2 e^{-i\omega_0 \frac{2L}{c}}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\omega_0 \frac{2L}{c}}} \right] E_i(t) \quad (4.3)$$

ここで透過光、反射光の周波数伝達関数を

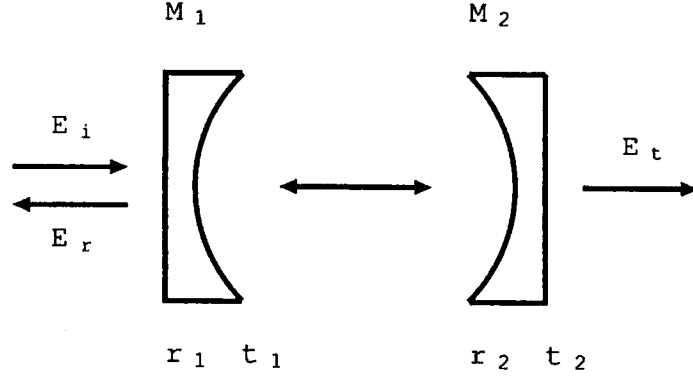


図 4.1: Fabry-Perot Cavity

$$a(\omega) = \frac{t_1 t_2 e^{-i\omega \frac{L}{c}}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\omega \frac{2L}{c}}} \quad (4.4)$$

$$b(\omega) = r_1 - \frac{r_2 t_1^2 e^{-i\omega \frac{2L}{c}}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\omega \frac{2L}{c}}} \quad (4.5)$$

の形で定義しておくと、入射光、透過光、反射光の強度をそれぞれ I_i 、 I_t 、 I_r として、その比が

$$\begin{aligned} \frac{I_t}{I_i} &= |a(\omega)|^2 \\ &= \frac{(t_1 t_2)^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{1}{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \sin^2 \frac{\omega L}{c}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{I_r}{I_i} &= |b(\omega)|^2 \\ &= \frac{\left\{ \frac{r_1 - r_2(r_1^2 + t_1^2)}{(1 - r_1 r_2)^2} \right\}^2 + \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} (r_1^2 + t_1^2) \sin^2 \frac{\omega L}{c}}{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \sin^2 \frac{\omega L}{c}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

となる。これは ω の周期関数で、その基本周期はフリースペクトラルレンジと呼ばれ、

$$\frac{\omega_{FSR} L}{c} = \pi \longrightarrow \nu_{FSR} = \frac{c}{2L} \quad (4.8)$$

となっている。鏡の反射率が1に近いとき、 $|a(\omega)|^2$ 、 $|b(\omega)|^2$ は間隔 ν_{FSR} で鋭いピークをもつ。このピークの半値全幅を $\Delta\nu_c$ とすると、 $\omega = \omega_{FSR} + \frac{1}{2}\Delta\omega_c$ において

$$\frac{1}{1 + \frac{4r_1r_2}{(1-r_1r_2)^2} \sin^2\left(\frac{\Delta\omega_c}{2} \frac{L}{c}\right)} = \frac{1}{2} \quad (4.9)$$

であり、 $\Delta\omega_c \ll \omega_{FSR}$ ならば、

$$\frac{4r_1r_2}{(1-r_1r_2)^2} \left(\frac{\Delta\omega_c}{2} \frac{L}{c}\right)^2 = 1 \quad (4.10)$$

とでき、半値全幅は

$$\Delta\nu_c = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r_1r_2}{\sqrt{r_1r_2}} \frac{c}{L} \quad (4.11)$$

と定義できる。また ω の代わりに L を変数とみると、同様に L_{FSR} 、 ΔL_c が定義される。

$$L_{FSR} = \frac{c}{2\omega} \quad (4.12)$$

$$\Delta L_c = \frac{1-r_1r_2}{\sqrt{r_1r_2}} \frac{c}{\omega} \quad (4.13)$$

フリースペクトラルレンジの半値全幅に対する比をフィネスといい、

$$\begin{aligned} F &= \frac{\nu_{FSR}}{\Delta\nu_c} = \frac{L_{FSR}}{\Delta L_c} \\ &= \frac{\pi\sqrt{r_1r_2}}{1-r_1r_2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

これは鏡の反射率だけで定義されている。フィネスは光共振器のQ値とは

$$Q = \omega \frac{\tau_s}{2} = \omega \left(\frac{LF}{\pi c} \right) = \frac{2LF}{\lambda} \quad (4.15)$$

の関係がある。ここで τ_s はストレージタイムと呼ばれる量で、この時間たつと反射光強度が $1/e$ 、透過光強度が $1/e^2$ になる。つまりフィネスは光共振器中での反射回数を表す量である。

共振状態

透過光の伝達関数において、周波数が n を整数として $\omega = n\omega_{FSR} + \omega_F$ であり、 $\omega_F \ll \omega_{FSR}$ という共振状態では $n\omega_{FSR} \rightarrow 0$ 、 $e^{i\omega L/c} \cong 1 + i\omega_F L/c$ とでき

$$\begin{aligned} a(\omega_F) &= \frac{t_1 t_2}{1-r_1 r_2} \frac{1}{1 + i \frac{1+r_1 r_2}{1-r_1 r_2} \frac{\omega_F L}{c}} \\ &= \frac{t_1 t_2}{1-r_1 r_2} \frac{1}{1 + i \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{1-r_1 r_2} \frac{L}{c} 2\omega_F} \\ &= \frac{t_1 t_2}{1-r_1 r_2} \frac{1}{1 + i \left(\frac{2\omega_F}{\Delta\omega_c} \right)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

となる。これは *LowPassFilter* であることを示している。つまり Fabry-Perot cavity は低周波ほど透過させることがわかる。

同様にして反射光の伝達関数も

$$b(\omega_F) = \frac{i \left(\frac{2\omega_F}{\Delta\omega_c} \right)}{1 + i \left(\frac{2\omega_F}{\Delta\omega_c} \right)} \quad (\text{但し } r_1 = r_2) \quad (4.17)$$

となり、これは *HighPassFilter* であることを示している。

4.1.2 ガウシアンビームとモードマッチング

ガウシアンビーム

レーザー光は、スカラー場 $u(t, x, y, z)$ に対する波動方程式

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (4.18)$$

の単色平面波解であると考えられる [5]。 z 方向に進む波 $u = \psi(x, y, z) \exp i(\omega t - kz)$ を考え、 ψ の z 方向の変化が穏やかであると仮定すると、

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \psi = 0 \quad (4.19)$$

を得る。この方程式の解として xy 平面内の強度分布がガウシアンになっているものがあり、それは z の依存性をもったパラメーターにより

$$\psi = \exp \left[-i \left(P(z) + \frac{k}{2q(z)} (x^2 + y^2) \right) \right] \quad (4.20)$$

と表すことができる。これを式 (4.19) に代入すると、

$$\frac{d}{dz} P = -\frac{i}{q} \quad (4.21)$$

$$\frac{d}{dz} q = 1 \quad (4.22)$$

を得る。ここで $q(z)$ について

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{1}{X} \quad (4.23)$$

と表現しなおせば、 xy 面内での電界は z 軸からの距離 r を用いて

$$\psi = \exp \left[-i \left(P(z) + \frac{k}{2R} r^2 \right) - \frac{kr^2}{2X} \right] \quad (4.24)$$

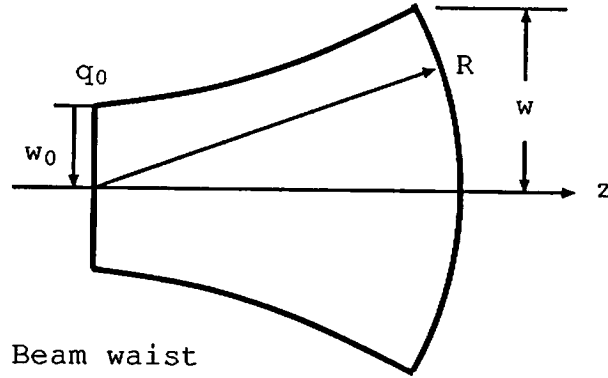


図 4.2: ガウスビームとパラメーター

と書き改められる。ここで $R(z)$ を波面の曲率半径、 $X(z) = \pi w^2 / \lambda$ を電界が $1/e$ となるスポット距離と考えれば、

$$\exp\left(-\frac{kr^2}{2X}\right) = \exp\left(-\frac{r^2}{w(z)^2}\right) \quad (4.25)$$

となり、これはまさしくガウス分布となる。これは図 4.2 に対応しており、 q_0 はビームウエストでのビーム径 w_0 によってあらわされる量であり、ここで $z = 0$ ととる。

$$q_0 = i \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (4.26)$$

以上のことから曲率半径とビーム径は、波面の進行方向 z の関数として

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad (4.27)$$

$$w(z)^2 = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] \quad (4.28)$$

と表される。

モードマッチング

図 4.3 のように、曲率半径 R の 2 枚の球面鏡からなる Fabry-Perot cavity にガウシアンビームを入射させることを考える。このとき cavity 内のビームウエストの位置が、レンズの焦点距離によって作られるビームウエストの位置と一致していなければならない。このことより以下のように論を進める。

焦点距離 f をもつレンズをはさんでの両側のビームウエストでの純虚数パラメーター q_1 、 q_2 は式 (4.29) の関係を持っている。

$$\frac{1}{q_2 - d_2} = \frac{1}{q_1 - d_1} - \frac{1}{f} \quad (4.29)$$

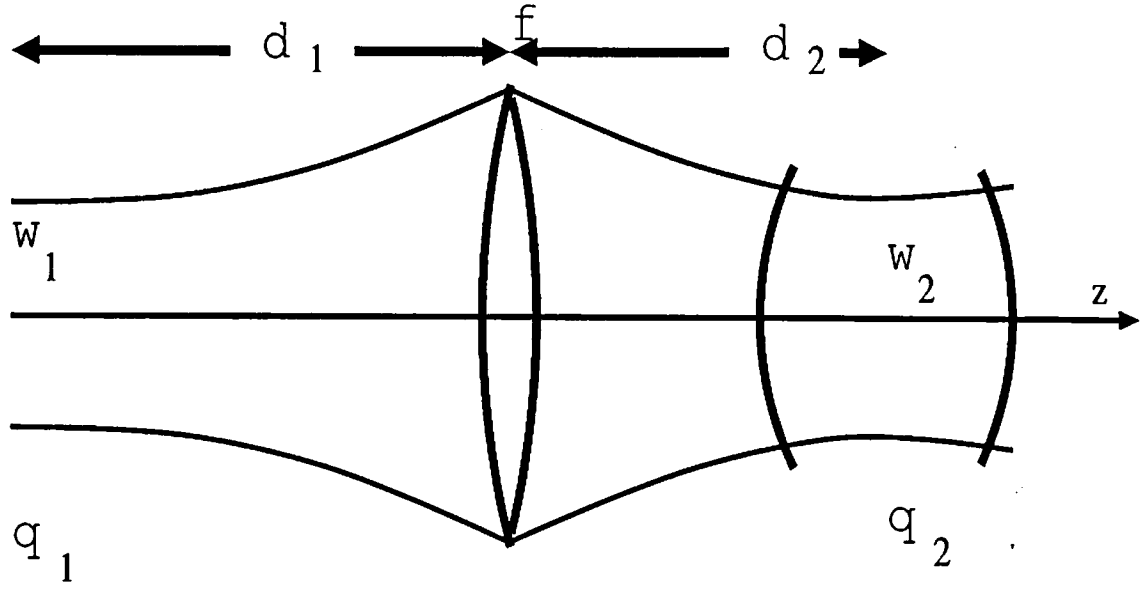


図 4.3: モードマッチング

曲率半径 R 、cavity 長 d の二枚の鏡からなる Fabry-Perot cavity は、 $R = 2f'$ のレンズをもつ系と考えられるから、鏡の位置でのビームパラメーター q'_1 、 q'_2 は焦点距離 f' を用いて

$$\frac{1}{q'_2} = \frac{1}{q'_1 + d} - \frac{1}{f'} \quad (4.30)$$

と表される。これと式 (4.27)、(4.28) より

$$\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} = \frac{\pi w^2}{\lambda R} \quad (4.31)$$

$$R = 2f' \quad (4.32)$$

$$z = \frac{d}{2} \quad (4.33)$$

となり、cavity のビームウエストでのパラメーターが導き出せる。

$$\frac{\pi w_2^2}{\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{d(2R - d)} \quad (4.34)$$

この結果と式 (4.29) から得られる関係

$$(d_1 - f)(d_2 - f) = f^2 - f_0^2 \quad (f_0^2 = \frac{\pi^2 w_1^2 w_2^2}{\lambda^2}) \quad (4.35)$$

$$\frac{d_1 - f}{d_2 - f} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{w_1^2}{w_2^2} \quad (4.36)$$

より、レンズをはさんだ両側のビームウエストまでの距離が判明する。

$$d_1 = f \pm \frac{w_1}{w_2} \sqrt{f^2 - f_0^2} \quad (4.37)$$

$$d_2 = f \pm \frac{w_2}{w_1} \sqrt{f^2 - f_0^2} \quad (4.38)$$

この計算より光学系を設計する。

4.2 変調と復調

共振器長の変化やレーザー光の周波数雑音の検出には、位相変調光を用いた安定化法 (*Pound-Drever* 法) を使う [1]。この方法によってレーザー光源の安定化や重力波の検出ができる。

4.2.1 位相変調光を用いた変位の検出

位相雑音 (周波数ゆらぎ) の検出

レーザー光に位相雑音が存在するとき、位相変調をかけた光を Fabry-Perot cavity に入射させると、その応答は以下ようになる [7]。

変調周波数 ω_m 、変調指数 m で位相変調をかけた光に位相雑音 $\phi(t)$ がのっているとき cavity への入射光は

$$E_i(t) = E_0 \exp[i(\omega_0 t + m \sin \omega_m t + \phi(t))] \quad (4.39)$$

となる。位相雑音は 0 のまわりでの単振動におきかえて

$$\phi(t) = \phi_F e^{i\omega_F t} + \phi_F^* e^{-i\omega_F t} \quad (4.40)$$

とする。 $\phi_F \ll 1$ として ϕ_F の一次までの近似で入射光をベッセル関数を使って表現すると、

$$E_i(t) = E_0 e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) e^{in\omega_m t} (1 + i\phi_F e^{i\omega_F t} + i\phi_F^* e^{-i\omega_F t}) \quad (4.41)$$

とできるので、これをフーリエ変換した後、反射光の振幅を求めると、

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i[\omega] = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) & \left\{ \delta(\omega_0 + n\omega_m - \omega) + i\phi_F \delta(\omega_0 + n\omega_m + \omega_F - \omega) \right. \\ & \left. + i\phi_F^* \delta(\omega_0 + n\omega_m - \omega_F - \omega) \right\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} E_r(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} b(\omega) \tilde{E}_i[\omega] e^{i\omega t} d\omega \\ &= E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \left[b(\omega_0 + n\omega_m) + i\phi_F b(\omega_0 + n\omega_m + \omega_F) e^{i\omega_F t} \right. \\ & \quad \left. + i\phi_F^* b(\omega_0 + n\omega_m - \omega_F) e^{-i\omega_F t} \right] e^{i(\omega_0 + n\omega_m)t} \end{aligned} \quad (4.43)$$

となる。ここで m は小さいとして $n = 0, \pm 1$ の項のみ考慮して、レーザー光の周波数が共振器のフリースペクトラルレンジの整数倍で共振器の半値全幅より十分大きいと仮定すれば、 $b(\omega)$ の性質から反射光は

$$\begin{aligned} \frac{E_r(t)}{E_0 e^{i\omega t}} &= J_0(m) \left[b(0) + i\phi_F b(\omega_F) e^{i\omega_F t} + i\phi_F^* b(-\omega_F) e^{-i\omega_F t} \right] \\ &\quad + 2iJ_1(m) \sin \omega_F t \left[1 + i\phi_F e^{\omega_F t} + i\phi_F^* e^{-i\omega_F t} \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

と表される。 $|\phi_F| \ll 1$ として 2 次以上を無視すれば、反射光強度は

$$\frac{I_r(t)}{I_0} = \frac{I_r^{(0)}}{I_0} + \frac{I_r^{(1)}}{I_0} \sin \omega_m t + \frac{I_r^{(2)}}{I_0} \cos 2\omega_m t \quad (4.45)$$

$$\frac{I_r^{(0)}}{I_0} = J_0^2(m) b^2(0) + 2J_1^2(m) \quad (4.46)$$

$$\frac{I_r^{(1)}}{I_0} = 4J_0(m)J_1(m) \left[\phi_F \left\{ b(\omega_F) - b(0) \right\} e^{i\omega_F t} + \phi_F^* \left\{ b(-\omega_F) - b(0) \right\} e^{-i\omega_F t} \right] \quad (4.47)$$

$$\frac{I_r^{(2)}}{I_0} = -2J_1^2(m) \quad (4.48)$$

となる。ここではレーザー光源の強度 $I_0 = |E_0 e^{i\omega_0 t}|^2$ で規格化しておく。この反射光を $\sin \omega_m t$ で復調すると、入射光の周波数と Fabry-Perot 共振器の共振周波数の差が誤差信号として得られることになる。これをレーザー光源の発振周波数調整機構に帰還してやれば、共振器を周波数基準とした周波数安定化を行なうことができる。

実際に誤差信号として得られる値を見積もると、雑音の周波数 ω_F が ω_{FSR} に比べて十分に小さく $e^{-i\omega_F \frac{2L}{c}} \approx 1 - i\omega_F \frac{2L}{c}$ とでき、鏡が高反射率で $r_1 = r_2$; $r_1 r_2 \approx 1$ が成り立っており、 $1 - r_1 r_2 = \frac{L}{c} \sqrt{r_1 r_2} \Delta\omega_c$ とできることから

$$\begin{aligned} b(\omega_F) - b(0) &\cong \frac{r_2 t_1^2}{1 - r_1 r_2} \frac{i\omega_F \frac{2L}{c}}{1 - r_1 r_2 + i r_1 r_2 \omega_F \frac{2L}{c}} \\ &\cong \frac{c t_1^2}{L \Delta\omega_c^2} 2i\omega_F \left[1 + \left(\frac{2\omega_F}{\Delta\omega_c} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta_F} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\tan \theta_F = -\frac{2\omega_F}{\Delta\omega_c} \quad (4.50)$$

となるので、モードマッチングが完璧で $TEM_{00} mode$ 以外の高次モードに相当する光電流が流れないとすれば、全受光電流 I_0 に対して誤差信号は

$$I_r^{(1)} = \frac{8c t_1^2}{L \Delta\omega_c^2} J_0(m) J_1(m) I_0 \dot{\phi} \left(t + \frac{\theta_F}{\omega_F} \right) \left[1 + \left(\frac{2\omega_F}{\Delta\omega_c} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (4.51)$$

ここで瞬時角周波数雑音 $\dot{\phi}(t)$ は位相雑音 $\phi(t)$ と

$$\dot{\phi}(t) = \omega_F \phi \left(t + \frac{\pi}{2\omega_F} \right) \quad (4.52)$$

の関係にあるので、 $\omega_F \ll \Delta\omega_c$ では式(4.51)は

$$I_r^{(1)} = \frac{8ct_1^2}{L\Delta\omega_c^2} J_0(m)J_1(m)I_0\dot{\phi}(t) \quad (4.53)$$

となり、周波数雑音に比例した信号が得られる。また逆に $\omega_F \gg \Delta\omega_c$ では

$$I_r^{(1)} = \frac{4ct_1^2}{L\Delta\omega_c} J_0(m)J_1(m)I_0\phi(t) \quad (4.54)$$

となり、位相雑音に比例した信号が得られる。共振器長が $1m$ より小さい通常の Fabry-Perot cavity では半値全幅は MHz 以上であるから式(4.53) の場合があてはまる。

共振器長変位の検出

今度は周波数安定化の施されたレーザー光が共振器長の変化している Fabry-Perot cavity に入射している場合を考える。実際にトランスデューサーとして Fabry-Perot cavity が数 cm の共振器長でディスクアンテナに取り付けられているとする。

Fabry-Perot cavity に周波数雑音などのない位相変調光が入射するとき、入射光はベッセル関数を使って展開し、

$$\begin{aligned} E_i(t) &= E_0 e^{i(\omega_0 t + m \sin \omega_m t)} \\ &= E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) e^{i(\omega_0 + n\omega_m)t} \end{aligned}$$

となる。共振器長が変化していない場合、反射光振幅はその伝達関数によって

$$E_r(t) = E_0 e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) b(\omega_0 + n\omega_m) e^{in\omega_m t} \quad (4.55)$$

と表される。ここで改めて反射光の伝達関数 $b(\omega)$ を $\theta \equiv \omega L/c$ の関数として見直すと、反射光振幅は

$$E_r(t) = E_0 e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) b(\theta_0 + n\theta_m) e^{in\omega_m t} \quad (4.56)$$

となる。重力波の到来によって励起される共振型アンテナの振動は、その周波数 ω_{Reso} について、共振器長が短い Fabry-Perot cavity の Storage time τ_s と $\omega_{Reso}\tau_s \ll 1$ の関係が成り立つほどゆっくりであるから（共振器内での光の滞在時間が短い）、共振器長の微小な変位振動は DC のずれと同一視してよい [10]。つまり

$$L = L_0 + \delta L \longrightarrow \theta = \theta_0 + \delta\theta$$

と変換され、 $\omega_m \delta L/c$ が非常に小さいことより

$$E_r(t) = E_0 e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) b(\theta_0 + n\theta_m + \delta\theta) e^{in\omega_m t} \quad (4.57)$$

とできる。さらに変調度が弱く、変調指数 m が $m < 1$ で、Fabry-Perot cavity が共振状態にある場合反射光振幅は

$$E_r(t) = E_0 e^{i\omega_0 t} [J_0(m)b(\delta\theta) + J_1(m)\{b(\theta_m + \delta\theta)e^{i\omega_m t} - b(-\theta_m + \delta\theta)e^{-i\omega_m t}\}] \quad (4.58)$$

となる。変位が小さいので Taylor 展開の一次までをとって式 (4.58) を展開すると、

$$\begin{aligned} b(\delta\theta) &\cong b(0) + \delta\theta \left. \frac{\partial b}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} \\ &= r_1 - \frac{r_2 t_1^2}{1 - r_1 r_2} + i \frac{2r_2 t_1^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \delta\theta \\ &= r_1 - t_1^2 \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \frac{F}{\pi} + 2i \frac{t_1^2}{r_1} \left(\frac{F}{\pi} \right)^2 \delta\theta \\ &\equiv b(0) + i\beta_0 \delta\theta \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} b(\theta_m + \delta\theta) &\cong b(\theta_m) + \delta\theta \left. \frac{\partial b}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_m} \\ &= r_1 - \frac{r_2 t_1^2 e^{-2i\theta_m}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\theta_m}} + i \frac{2r_2 t_1^2 e^{-2i\theta_m}}{(1 - r_1 r_2 e^{-2i\theta_m})^2} \delta\theta \\ &\equiv b(\theta_m) + i\beta_m \delta\theta \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_r(t)}{E_0 e^{i\omega_0 t}} &\cong J_0(m) \{b(0) + i\beta_0 \delta\theta\} \\ &\quad + J_1(m) \left[\{b(\theta_m) + i\beta_m \delta\theta\} e^{i\omega_m t} - \{b^*(\theta_m) + i\beta_m^* \delta\theta\} e^{-i\omega_m t} \right] \\ &= J_0(m) \{b(0) + i\beta_0 \delta\theta\} \\ &\quad + 2J_1(m) [i\text{Im}[b(\theta_m)e^{i\omega_m t}] - \text{Im}[\beta_m e^{i\omega_m t}]\delta\theta] \end{aligned} \quad (4.61)$$

となる。この結果より反射光強度を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{I_r}{I_0} &= J_0^2(m)b^2(0) + 2J_1^2(m) \{ |b(\theta_m)|^2 - \text{Re}[b^2(\theta_m)e^{2i\omega_m t}] \} \\ &\quad - 4J_0(m)J_1(m) \{ b(0)\text{Im}[\beta_m e^{i\omega_m t}] - \beta_0 \text{Im}[b(\theta_m)e^{i\omega_m t}] \} \delta\theta \end{aligned} \quad (4.62)$$

の式が得られる。変調周波数成分に着目すると、完全に対称で、損失のない共振器の場合 $b(0) = 0$ であるから、

$$I_r^{(1)} = 4J_0(m)J_1(m)\beta_0 \text{Im}[b(\theta_m)e^{i\omega_m t}] \delta\theta \quad (4.63)$$

さらに $\omega_m \tau_s \ll 1$ なら $b(\theta_m) \cong b(0) + i\beta_0 \theta_m$ とできるので、誤差信号は

$$I_r^{(1)} = 16J_0(m)J_1(m) \frac{t_1^4}{r_1^4 r_2^2} \left(\frac{F}{\pi} \right)^4 \theta_m \delta\theta \quad (4.64)$$

となり、変位に比例した量として取り出すことができる。

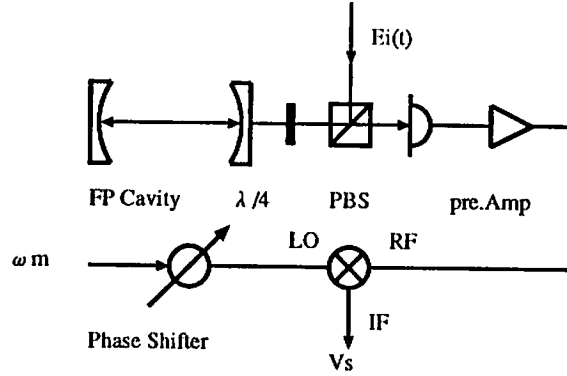


図 4.4: 復調と誤差信号

4.2.2 復調

位相変調をかけた入射光に対する光共振器の反射光には誤差信号がのっているが、これを正確に検出するためには、共振器が共振状態になっていなければならない。共振状態は誤差信号を復調して、サーボ系によって帰還してやることで作り出すことができる。実際にはフォトデテクターで検出した信号のうちの変調周波数成分を、変調周波数と同じ周波数の発振器からの交流信号をミキサーによってかけ合わせることで、変調周波数より低い周波数の信号を誤差信号 V_s として取り出している [2, 9]。この復調の手順を模式的に描くと、図 4.4 のようになっている。

次にこの誤差信号を得るための復調について解析的に示すと以下のようなになる [3]。

周波数雑音や位相変位、共振器長の変化などの信号は位相情報として反射光の変調周波数成分に載ってくるので、これを復調してやればよい。実際にこの検出信号を

$$\frac{\omega L}{c} \equiv \phi \quad (4.65)$$

$$\frac{\omega_m L}{c} \equiv \phi_m \quad (4.66)$$

$$\Delta\phi = \frac{\Delta\omega L}{c} + \frac{\omega\Delta L}{c} \quad (4.67)$$

という周波数や共振器長の変化を一つの変数としたもので表現すると、反射光出力は

$$b(\phi) = r_1 \frac{(1-C)(1-R) + 2(C+R)\sin^2\phi + 2i(C-R)\sin\phi\cos\phi}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\phi} \quad (4.68)$$

$$C \equiv \frac{r_2}{r_1}(r_1^2 + t_1^2) \quad (4.69)$$

$$R \equiv r_1 r_2 \quad (4.70)$$

として

$$J_0(m)J_1(m)I_0[b^*(\phi)b(\phi + \phi_m) - b(\phi)b^*(\phi - \phi_m)]e^{i\omega_m t} + c.c.$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \left\{ \text{Re}[B(\phi)] + \text{Im}[B(\phi)] \right\} e^{i\omega_m t} + \text{c.c.} \\
&= 2J_0(m)J_1(m)I_0 \left[\text{Re}[b^*(\phi)b(\phi + \phi_m) - b(\phi)b^*(\phi - \phi_m)] \cos \omega_m t \right. \\
&\quad \left. - \text{Im}[b^*(\phi)b(\phi + \phi_m) - b(\phi)b^*(\phi - \phi_m)] \sin \omega_m t \right] \quad (4.71)
\end{aligned}$$

となる。この結果より、 $\omega_m t$ の値によって出力される信号が大きく変化することがわかる。完全に対称で、損失がなくフィネスが 3000 で共振器長が 1cm の Fabry-Perot cavity の誤差信号を ϕ の関数として $[-2\phi_m, 2\phi_m]$ の範囲において、 $\omega_m t$ を 0 から $5\pi/6$ まで $\pi/6$ ずつ変化させて描くとそれは図 4.6 のようになる（ここで ϕ の変化は周波数もしくは共振器長の掃引に対応している）。この図をみてもわかるとおり、共振状態、つまり ϕ が 0 付近にあるとき雑音や共振器長の変位を最も敏感に検出するためには、位相 ϕ の変化に対して誤差信号が大きく変化する $\omega_m t = \pi/2$ のときが最適である。つまり出力が位相の掃引に対して

$$I_r^{(1)} = -2J_0(m)J_1(m)I_0 \text{Im}[b^*(\phi)b(\phi + \phi_m) - b(\phi)b^*(\phi - \phi_m)]' \quad (4.72)$$

の式で表される状態が得られていればよいことになる。この状態を作り出すのが Phase Shifter の役目である。

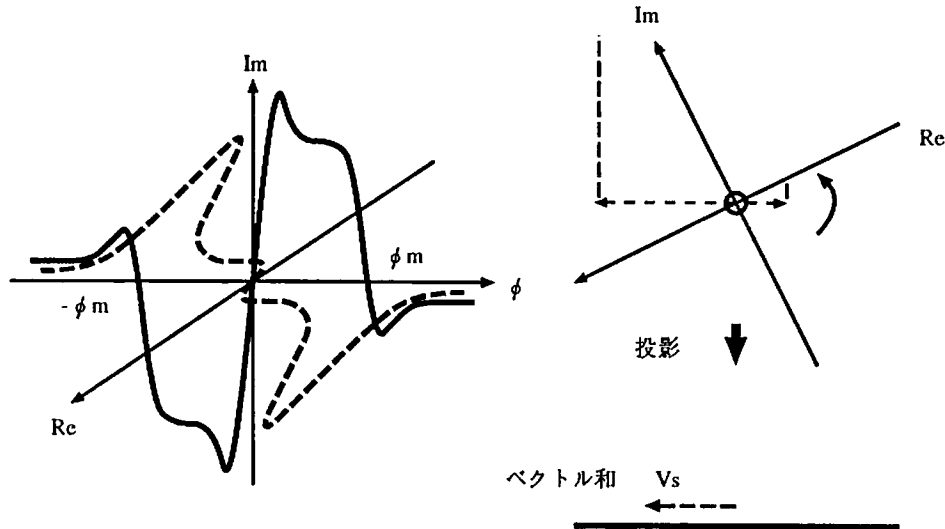


図 4.5: 位相空間内で表現した誤差信号

あらためて式 (4.71) に着目すると、これは位相空間内で図 4.5 のようになる。つまり位相が $\pi/2$ だけずれている 2 成分の信号が存在しており、誤差信号は ϕ の軸を回転させて投影面に射影した 2 成分のベクトルの和となっているのである。Phase Shifter は ϕ の軸を回転させる働きをし、Re の成分が射影方向と平行となり Im の成分のみが出力されるように、変調周波数をもった正弦波の位相をずらしてミキサーに入力しているのである。

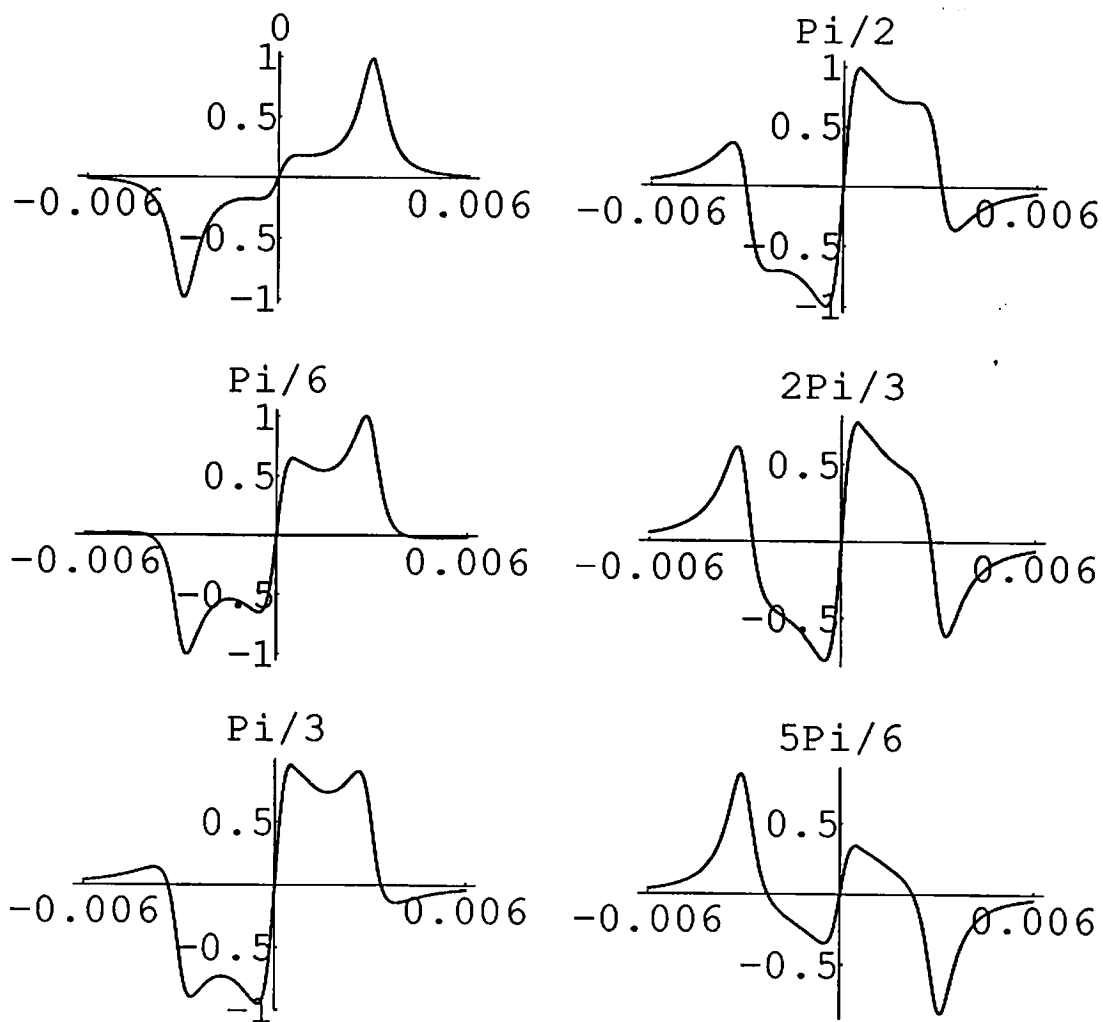


図 4.6: 誤差信号の位相依存性

第 5 章

共鳴振動検出のための高感度トランス デューサーの開発

現時点において共振型検出器は液体ヘリウム温度にまで冷却された第 2 世代タイプのものが稼働している。液体ヘリウム温度への冷却は、低雑音と感度の向上をもたらしたが、低温のため整備に手間がかかり、また長期間の運転が困難である。常温で同程度の感度を達成することは、整備の簡略化と長期間に渡る安定した観測を保証するものである。これが高感度 Fabry-Perot 干渉計型トランスデューサー開発の要因である。

さて実際にトランスデューサーとしてアンテナ本体に装着する前に、どのような形でシステムを構成すれば高感度が得られるか、低雑音にできるかを調べなければならない。そのためにはまずアンテナに装着するものと同じ構造の Fabry-Perot 共振器を試作して、観測する重力波の周波数帯域での雑音測定を行ない、どのような問題点があるか調べる必要がある。本章では検出器作動に向けて必要なシステムを構築するために、He-Ne Laser を用いて大型アンテナのトランスデューサーと同じ固定鏡と吊った鏡の構造を持つ Fabry-Perot cavity により得られた結果について言及する。

5.1 システムの構成

アンテナ本体に装着する予定である。Fabry-Perot 型トランスデューサーの概要を図 5.1 に示す。光源の Laser としてハイパワーの Nd:YAG Laser (波長は 1064nm、出力は 50mW) を使用する。その Laser 光を Faraday Isolater に通し、EOM (ポッケルスセル) によって 15MHz の位相変調をかけて、真空タンク内の Fabry-Perot cavity に入射させるものである。

真空タンク内に光を導入するのに光ファイバーを使用し、2 枚の鏡 M1、M2 でアライメント調整を行なう。焦点距離 f のレンズは Fabry-Perot cavity と $TEM_{00}mode$ にモードマッチングするよう配置されている。誤差信号 v_s は共振器長の変位を表すと同時に、Fabry-Perot cavity が共振状態 (反射光強度が Minimum) となるようにその信号は振り子のアクチュエーターに帰還されている。アクチュエーターは振り子に装着した磁石とコイル及びそのドライバからなっている。

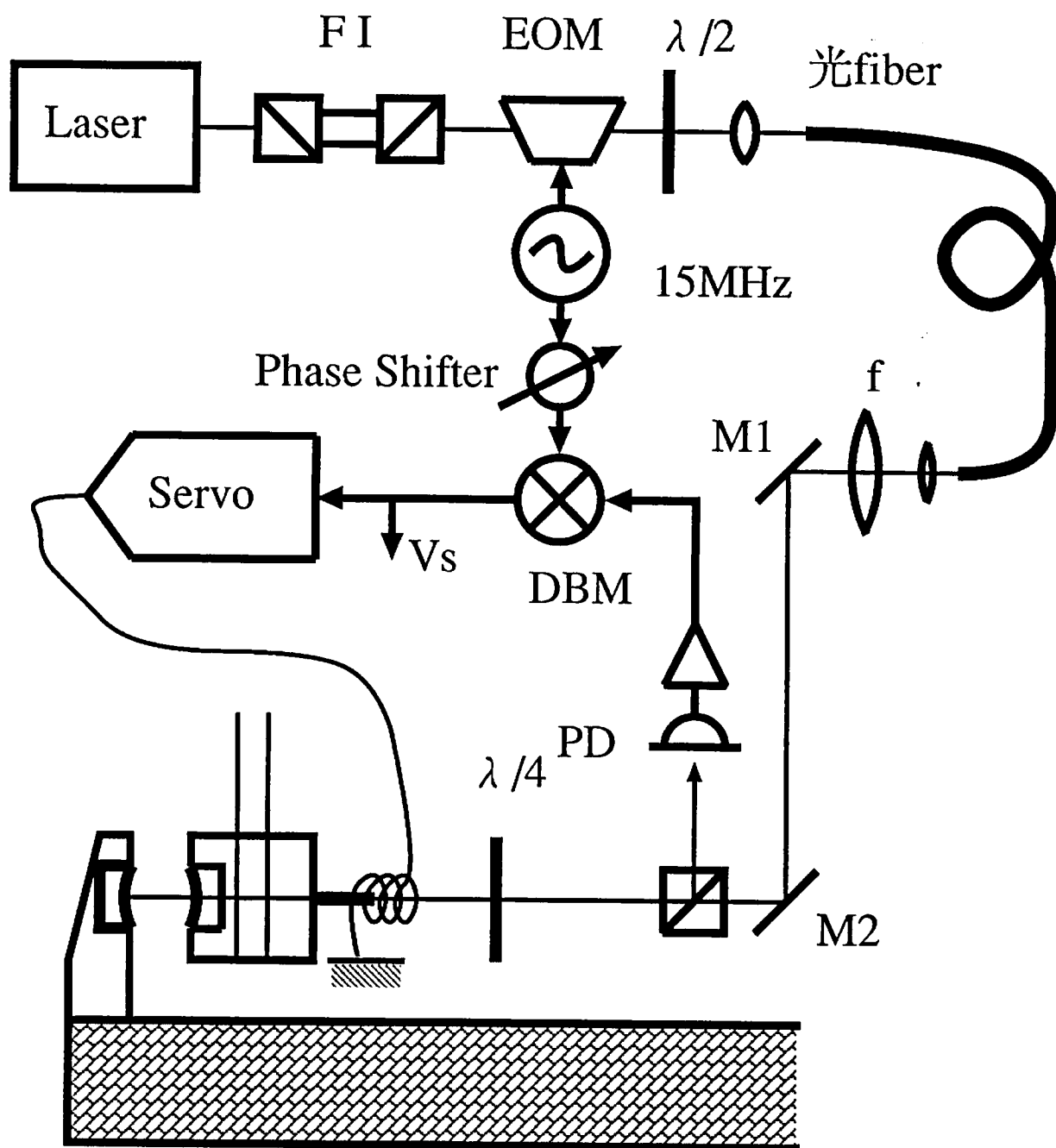


図 5.1: Fabry-Perot トランスデューサー

5.1.1 He-Ne Laser による予備実験

固定鏡と振り子の Fabry-Perot cavity

大型アンテナにトランスデューサーを設置するために、同じ構造の Fabry-Perot cavity を実験室内の光学定盤上に設置し、He-Ne laser を使用してこの固定鏡と振り子からなる Fabry-Perot cavity で実験を行ない、アンテナのトランスデューサーを効率よく組み上げるためのデータ収集を行なった。図 5.2 に実験系を示す。

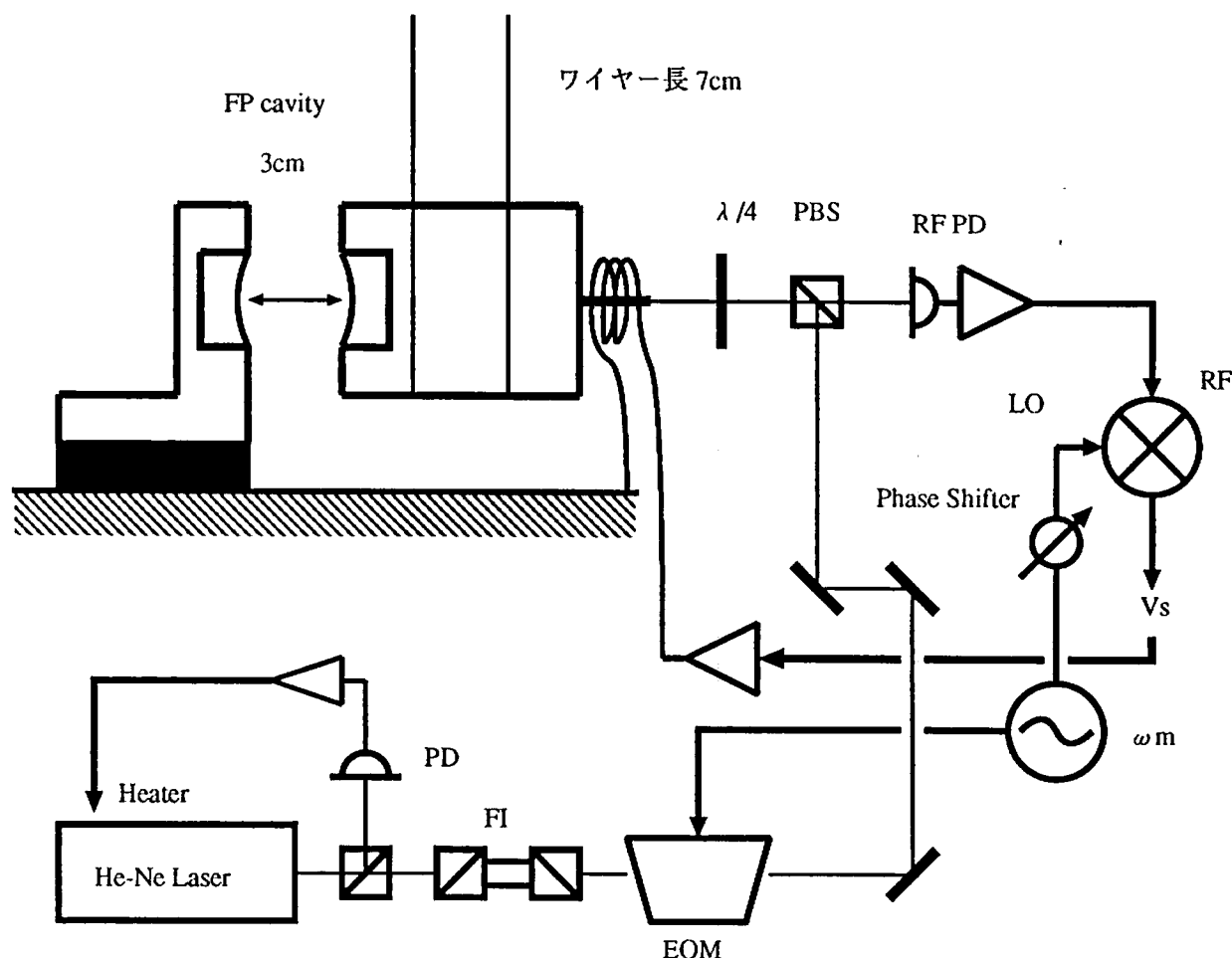


図 5.2: He-Ne Laser を用いた固定鏡と振り子のよび実験

光共振器の基線長は 3cm で、光学定盤の上に曲率半径 50cm のミラーを固定し、振り子は 7cm のワイヤー 4 本で吊ってある。この He-Ne Laser は出力は約 1mW で、そのうち $870\mu\text{W}$ が P 偏光で $53\mu\text{W}$ の S 偏光の光が出力されている。EOM は 15MHz の位相変調をかけられるポッケルスセルで、 $4V_{p-p}$ の振幅でドライヴしている。

レーザーの Heater へのフィードバックはレーザー光強度の安定化のためで、S 偏光を偏光ビームスプリッターで取り出して、その強度が一定となるようにレーザー管に巻き付け

であるヒーター線に電流を流し、温度調整をおこなうものである [8]。そうして強度を安定化した光に 15MHz の位相変調をかけて共振器に入射させるシステムである。Fabry-Perot cavity の反射光出力としては変調周波数成分と DC 成分（反射光の全強度）を取り出している。変調周波数成分はミキサーにかけた後、誤差信号として測定し、Fabry-Perot cavity を共振状態に保つためアクチュエ이터（コイルドライバ）にフィードバックさせている。

振り子のダンピングと共振状態へのロック

Fabry-Perot cavity の応答や特性を調べるためには、この光共振器を共振状態にロックすることが必要である。この共振状態を得るためには共振器長が変化しないことが条件で、ここで振り子に注目すると、その揺れがとまっていなければならない。しかし、振り子の共振周波数を ω_0 、質量を m としてその伝達関数が式 (5.1)、図 5.3 によって表されることからわかるとおり

$$x(\omega) = \frac{f}{m\omega_0^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + i\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (5.1)$$

振り子はその共振周波数付近では支点の微かな振動も非常に大きく増幅して振れるので、

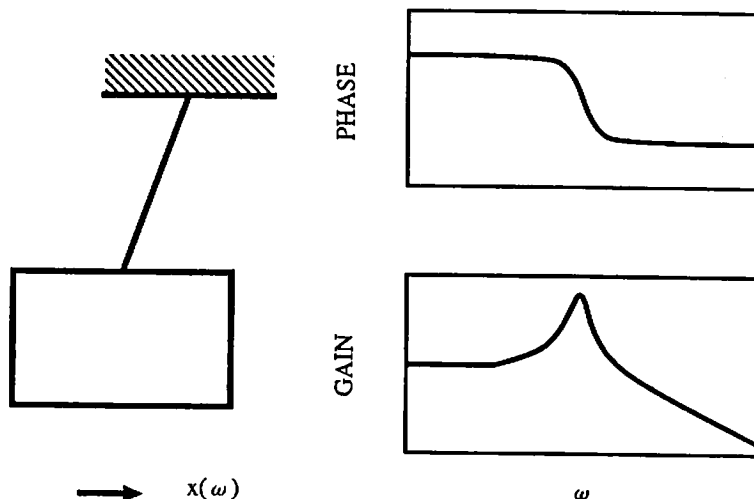


図 5.3: 振り子の伝達関数

共振周波数近傍の低周波ではこの揺れを押えるダンピングをかけてやらなければ、cavity の共振状態を作てやることはできない。よってダンピングをかけるためにフォトセンサーを使った Local Control を行なう。その模式図を図 5.4 に示す。

これは反射型の Photo Interrupter (NJL5142ELA: 新日本無線) を使用した、位置制御のフィードバックシステムである。Photo Interrupter とは発光ダイオードと受光素子が一体となったトランジスタで、振り子にその光をあて振り子の端面で反射された光の出力をサーボ回路でフィードバックして振り子の速度成分を打ち消し、その出力が一定となるよ

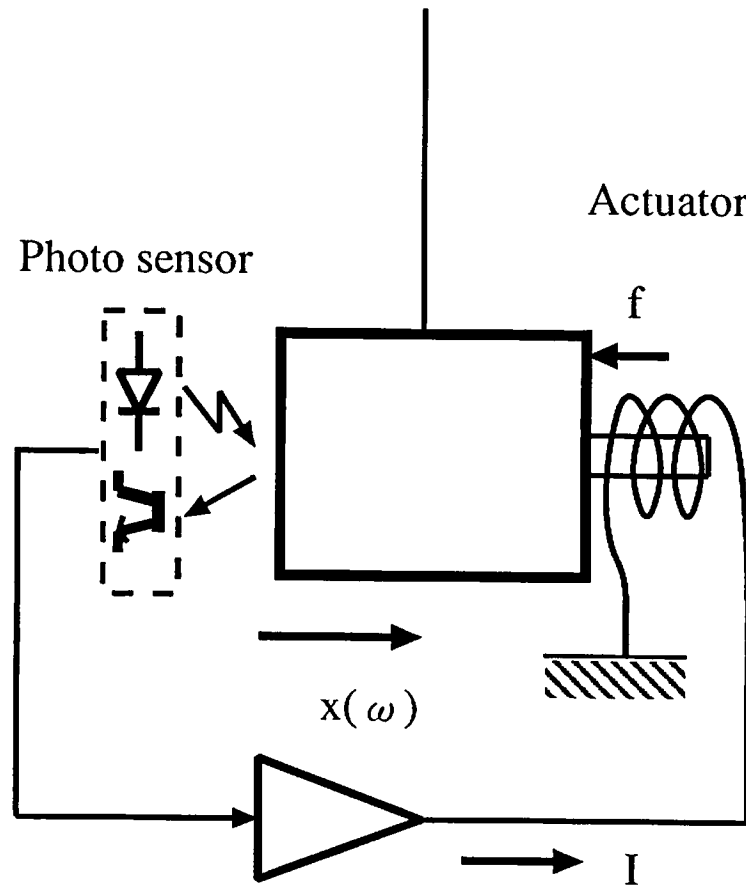


図 5.4: フォトセンサーによるダンピング

うにコントロールするものである。数学的には振り子及びサーボの伝達関数がそれぞれ

$$(-m\omega^2 + i\gamma\omega + k)x(\omega) = f(\omega) \quad (5.2)$$

$$G(\omega) = -\alpha i\omega\tau \quad (5.3)$$

と表現できるので（但しサーボについては低周波数において）、フィードバックの力が $f(\omega) = \kappa G(\omega)x(\omega)$ と働くことから

$$\begin{aligned} \left(-\omega^2 + i\frac{\gamma + \kappa'\tau}{m}\omega + \frac{k}{m}\right)x(\omega) &= 0 \\ \left(-\omega^2 + i\frac{\omega_0}{Q}\omega + \omega_0^2\right)x(\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.5)$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{m}(\gamma + \kappa'\tau) \quad (5.6)$$

の減衰振動の方程式に振りが従うことがわかる。特にフィードバックの力は $Q=1/2$ となるように働くので、振動は $\exp[-\omega_0 t]$ で減衰するのみ (critical damping) となる。

次は Fabry-Perot cavity を共振状態にロックすることであるが、これには誤差信号をサーボによって振りにフィードバックすることによって行なう。振りの伝達関数においてそのゲインは高い周波数では ω^2 で減少し、位相は -180° 付近となっている。オープンループで周波数が unity gain frequency の時、位相が 180° 以上にまわっているとそのサーボ系は発振を始めるので、位相を少しもどしてやり、unity gain frequency で位相が 180° 以上遅れないようなサーボ回路でフィードバックをかけなければならない。そのためのサーボ回路の伝達関数を図 5.5 に示す。

これは 100Hz から数 kHz の間で位相を戻すような伝達関数であり、unity gain frequency をこの周波数帯域にもってくれば発振しない条件を満たすことができる。この条件の下で Fabry-Perot cavity を共振状態にロックするためには、さらに低い周波数で十分に高いフィードバックゲインをもっていなければならない。しかしながら振りの特性として低周波に向かって周波数の自乗でゲインがあがっているの、サーボ回路であえて高いゲインをとらなくても十分にロックすることが可能である。また 10kHz 以上での伝達関数の乱れはノッチフィルターによるもので、これは振りの内部共振による発振を抑えるためのものである。

Open Loop 伝達関数

前述の条件を満たすと Fabry-Perot cavity を共振状態にロックすることができ、サーボ系を含むシステムのオープンループ伝達関数が測定できる。これは図 5.6 に示されているダイアグラムの伝達関数の積 $H * F * G$ を表している。

図 5.7 に測定したオープンループ伝達関数を示す。100Hz 以下は振りの共振周波数に近づくため、雑音による振動が大き過ぎ、結果ダイナミックレンジが足りなくなり共振状態を保てないので測定できなかった。

unity gain frequency は 500Hz で位相余有は 40° であった。図をよく見るとその形はサーボと振りの伝達関数を掛け合わせたものであることがわかるので、共振器長の変化から誤差信号の出力への伝達関数は周波数に関係なくフラット（単なる比例係数）であることがわかる。このことは共振状態では、共振器長の変位 δL と誤差信号 V_s の関係は $V_s \propto \delta L$ であるという前章の議論と一致している。

さらにこの結果より振りの伝達関数を求めることができる。 $H(\omega)$ が単なる係数とできることから、 $G(\omega)$ より $F(\omega)$ を計算から導くと、それは図 5.8 のようになった。図をみると、約 20kHz から最初の振りの機械的な内部共振が見え出しているが、5kHz まではきれいな振りの伝達関数の形をとっている。

ところでこのサーボ系のフィードバックループの諸量の関係は

$$\begin{aligned} y &= H \{ \delta L - F(Gy + y_n) \} \\ &= H\delta L - HFGy - HFy_n \\ y &= \frac{H\delta L - HFy_n}{1 + HFG} \end{aligned} \quad (5.7)$$

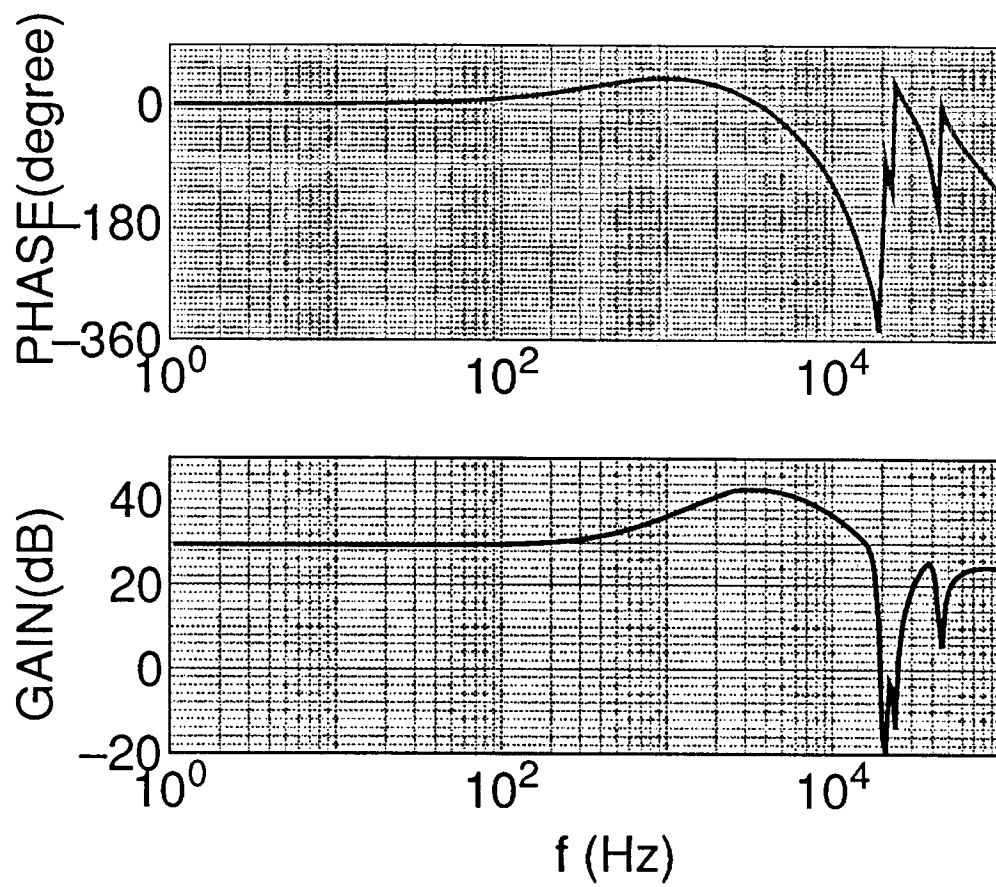


図 5.5: サーボ回路の伝達関数

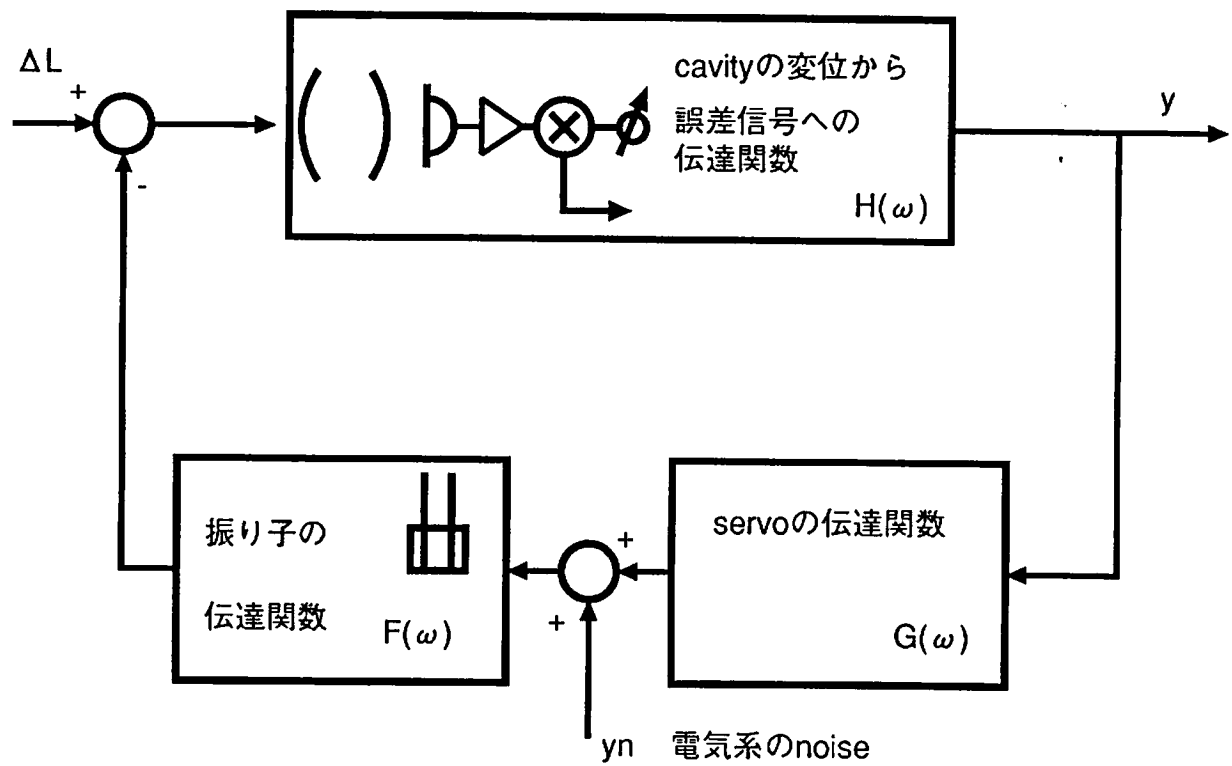


図 5.6: 測定系のブロックダイアグラム

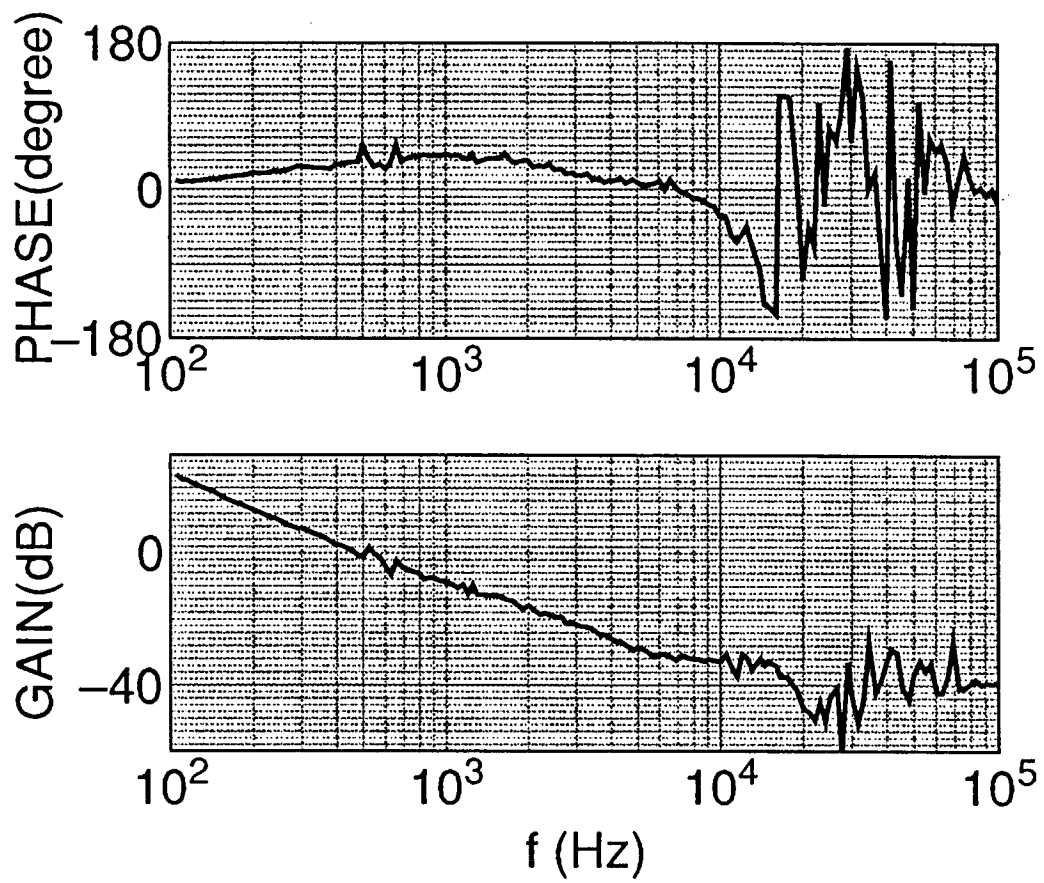


図 5.7: オープンループ伝達関数

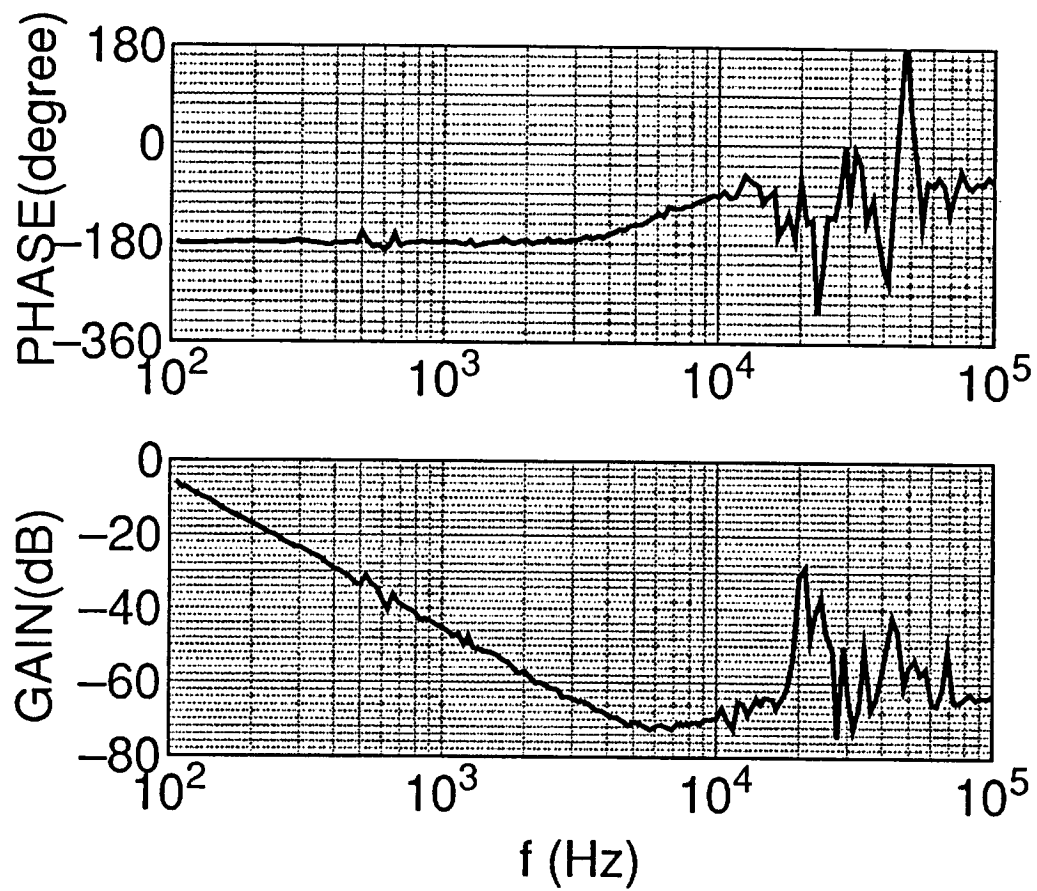


図 5.8: 振り子の伝達関数

となっている。ここで δL は共振器長の変位及びそれと等価な周波数雑音や強度雑音などで、 y は誤差信号、 y_n はサーボ回路を含む電気系の雑音である。共振状態では H はただの係数とみることができるので、 $H * F * G$ が十分大きいところでは共振器長の変位はオープンループゲイン分の1倍されて信号として出力される。逆に言うと、オープンループゲインが1より小さい周波数領域ではcavityの基線長の変位がそのまま出力されると考えて良いので、観測する共振型アンテナの周波数が1.2kHzであることから、unity gain frequencyが1kHz以下になるようにサーボ系を設定すれば誤差信号を変位の信号として、変換することなく使える。

伝達関数 $H(\omega)$ は 1.64×10^7 V/mであることが、振り子のある振幅で振動させて、その時の誤差信号の値から直線フィットして得られている。振り子の振動振幅はこの振り子でマイケルソン干渉計を組むことでわかる。

雑音測定

共振状態にロックして、誤差信号のパワースペクトラムを測定した。その結果を図5.9に示す。この時ダンピングのフィードバックは共振状態が得られたと同時に切るようにして、雑音源とならないようにする。

測定した環境は東京大学理学部1号館地下の6号室である。騒音などは遮断していないので、1kHz以下の低い周波数領域においてはそもそも雑音レベルが高いことがわかる。また630Hzの共振が大きく、その倍数振動もはっきりと測定されている。これは固定鏡もしくは振り子とアクチュエ이터を構成する機械的な共振と考えられるが、1kHz以上の観測帯域に非常に悪影響を与えており、実際に大型アンテナの場合はパラメーターや周囲の環境がちがうので同じことはあてはまらないが、こういった共振は絶対に除去しなければならない。そうしない限り1.2kHz付近の周波数帯の振動を検出するのは不可能である。

10kHz以上になると雑音レベルも格段に減少するが、振り子のmassの機械的な内部共振などは全て押えきれぬわけではなく、高いピークとして測定されている。ここで実際に振り子の内部共振を見積もってみる。

振り子はしんちゅう製でそのヤング率と密度は、 $E = 10.06 \times 10^{10}$ N/m²、 $\rho = 8.53$ g/cm³であるから、その内部共振の共振周波数は m を正の整数として

$$\begin{aligned} f_m &= m \frac{v}{2L} = m \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \\ &\cong m \times 24.5 \times 10^3 \text{ kHz} \end{aligned}$$

となる。計算では最初の基本振動が24.5kHzに現れるが、15kHzで大きな共振が見え出しており、ほかにも種々の原因による共振が数多く存在している。これらの共振による発振を抑えるためにノッチフィルターが21kHz、23kHzと順に高い周波数の機械的な共振を打ち消しているが、雑音レベルは高いままである。

Shot Noiseは変位雑音に換算して 5.1×10^{-16} m/ $\sqrt{\text{Hz}}$ であり、Shot Noiseがみえるほどに測定感度をあげるためには、雑音の除去や外乱防止など数多くの処置をしなければならないことがわかる。Shot Noiseの測定方法は文献[7]に従った。

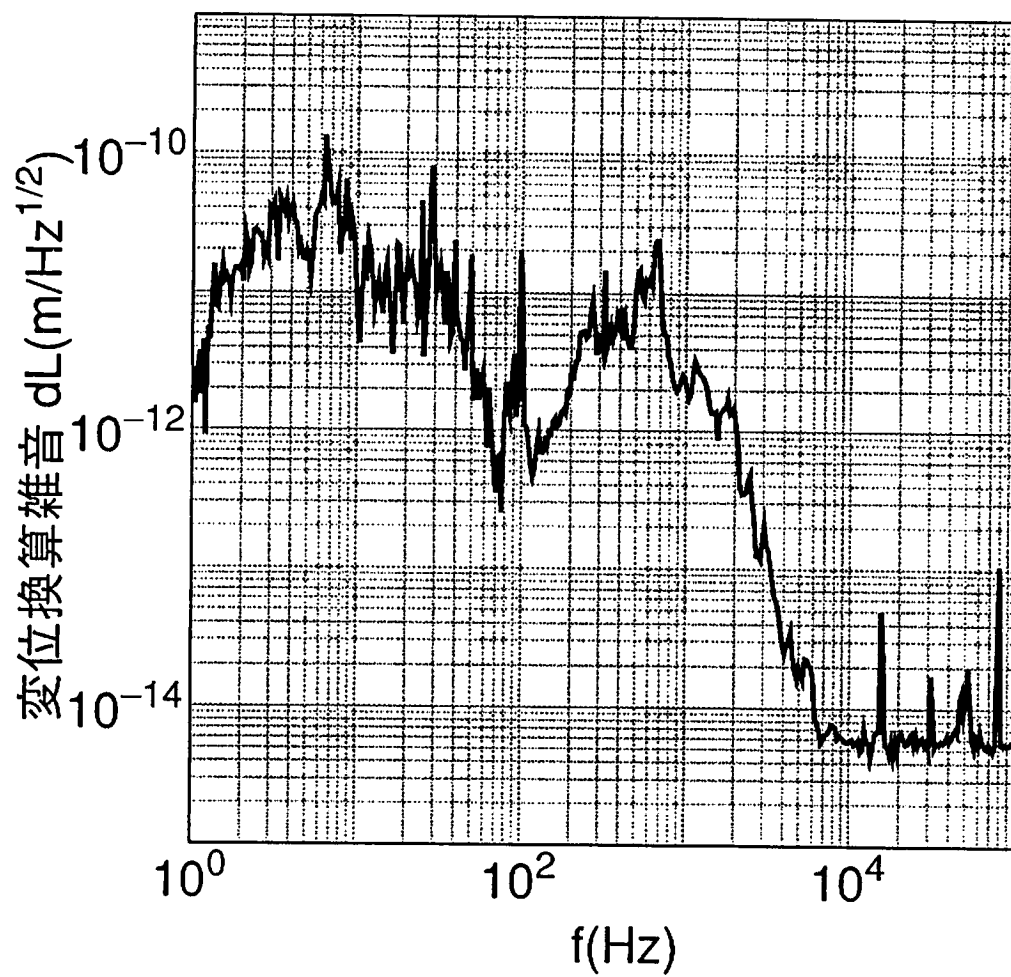
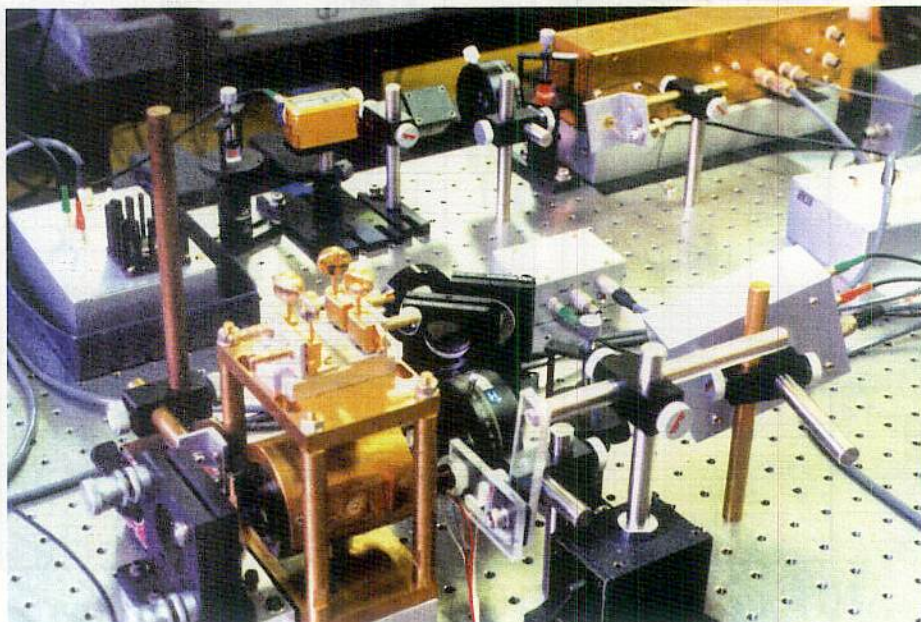


図 5.9: 雑音測定：誤差信号のパワースペクトラム

本節の最後として He-Ne Laser による予備実験の実験系の写真を掲載しておく。



第 6 章

まとめ

直径 2m、厚さ 20cm のディスクタイプ共振型重力波検出器開発にむけて以下の実験を行った。

- 熱雑音を上げないようにする目的で、アンテナ本体の Q 値を損なわない製造方法を探すための比較実験を小型の試作品で行なった。
- 固定鏡と振り子の Fabry-Perot cavity を使った振動変位検出装置（トランスデューサー）の特性評価の予備実験を He-Ne Laser を用いて行なった。

それぞれの要件に対して次の結果を得た。

- ディスクの支持は中心不動点での溶接固定がよく、四重極振動の振動面に欠損のない形を採用する。これより大型アンテナを製造した結果、 Q 値として 3.2×10^5 の値を得た。
- Local Control によるダンピングと、誤差信号によるサーボ系を組むことができ、unity gain frequency として 500Hz、位相余有 40° を得、雑音測定よりシステムとしての機械的な共振が観測周波数である 1.2kHz 付近に悪影響を与える可能性があることがわかった。

AppendixA

静電型トランスデューサー

静電型トランスデューサーは振動するアンテナ端面と固定された極板からなっている。しかし厳密に考えると極板自身も減衰のある調和振動子とみることができるので、ディスクの振動に呼応してコンデンサー内に働く力が極板にも働く。このことは極板間隔が極板が固定されていると考える時と異なった変化をし、出力電圧にもその影響があるとみななければならない。実際のところこのことが測定に対してどの程度影響を与えるかをあらかじめ調べておかなければならない。

結論から先に述べると、緩和時間の測定において、減衰のほかにそれに影響を与えるような共振などの大きな信号は検出されなかったので、極板は固定されたものと考えてよいことがわかっている。以下そのことを計算で示してみる。

A.1 機械系と電気系の結合

アンテナおよび極板からなるトランスデューサーの部分を調和振動子で描くと図 A.1 となる。ディスクと極板の位置の変位や電荷、電圧の変化はそれぞれ平衡位置プラス変化した量で表し、 $X = X_0 + x$ 、 $Y = Y_0 + y$ 、 $Q = Q_0 + q$ 、 $V = V_0 + v$ とする。これらの値と振動子のパラメーターよりラグランジアンを表すと、

$$\begin{aligned} \text{運動エネルギー} & \quad \frac{1}{2}m_1\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{Y}^2 \\ \text{ポテンシャルエネルギー} & \quad \frac{1}{2}k_1X^2 + \frac{1}{2}k_2Y^2 + \frac{Q^2}{2C} \\ \text{散逸 (W)} & \quad \frac{1}{2}c_1\dot{X}^2 + \frac{1}{2}c_2\dot{Y}^2 + \frac{1}{2}R\dot{Q}^2 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} L = & \quad \frac{1}{2}m_1\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{Y}^2 \\ & \quad - \frac{1}{2}k_1X^2 + \frac{1}{2}k_2Y^2 - \frac{Q^2}{2C} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

となる。コンデンサーの容量が $C = \epsilon_0 S / (Y - X)$ であることに注意して、ディスク、極板、電気系にそれぞれ $F = (f, 0, V_0)$ の力が働いていると考えれば、運動方程式が一般座標 a に

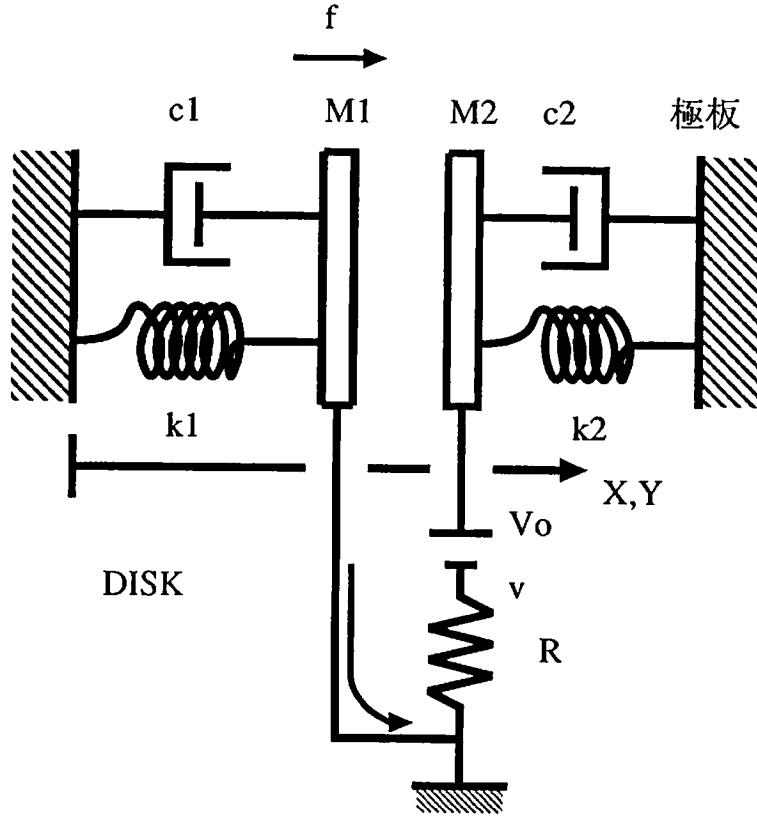


図 A.1: ディスクと極板：二つの振動子

より

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}} \right) - \frac{\partial L}{\partial a} + \frac{\partial W}{\partial \dot{a}} = F \quad (\text{A.2})$$

という式から得られる。それらは以下のようになり、

$$m_1 \ddot{X} + c_1 \dot{X} + k_1 X - \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} = f \quad (\text{A.3})$$

$$m_2 \ddot{Y} + c_2 \dot{Y} + k_2 Y - \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$R\dot{Q} + \frac{Q}{\epsilon_0 S}(Y - X) = V_0 \quad (\text{A.5})$$

平衡位置からの微小変位であることを考慮して、1次までとると

$$m_1(\ddot{X}_0 + \ddot{x}) + c_1(\dot{X}_0 + \dot{x}) + k_1(X_0 + x) - \frac{Q_0^2 + 2Q_0q}{2\epsilon_0 S} = f \quad (\text{A.6})$$

$$m_2(\ddot{Y}_0 + \ddot{y}) + c_2(\dot{Y}_0 + \dot{y}) + k_2(Y_0 + y) - \frac{Q_0^2 + 2Q_0q}{2\epsilon_0 S} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$R(\dot{q}) + \frac{Q_0 + q}{\epsilon_0 S} (Y_0 + y - X_0 - x) = V_0 \quad (\text{A.8})$$

外力がなく平衡状態にある場合の等式を各式より除けば、微小変位 x 、 y 、 q のみで運動方程式が表現できる。

$$m_1 \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1 x = \frac{Q_0}{\epsilon_0 S} q + f \quad (\text{A.9})$$

$$m_2 \ddot{y} + c_2 \dot{y} + k_2 y = -\frac{Q_0}{\epsilon_0 S} q \quad (\text{A.10})$$

$$R\dot{q} + \frac{q}{C_0} = -\frac{Q_0}{\epsilon_0 S} (y - x) \quad (\text{A.11})$$

ここでトランスデューサーの電場 E は

$$\frac{Q_0}{\epsilon_0 S} = E \quad (\text{A.12})$$

である。 $q(t) \propto e^{j\omega t}$ とすると、減衰振動の状態では

$$m_1 \left(\ddot{x} + \frac{\omega_1}{Q_1} \dot{x} + \omega_1^2 x \right) = E q(t) \quad (\text{A.13})$$

$$m_2 \left(\ddot{y} + \frac{\omega_2}{Q_2} \dot{y} + \omega_2^2 y \right) = -E q(t) \quad (\text{A.14})$$

$$q(t) = -\frac{C_0}{1 + j\omega C_0 R} E (y - x) \quad (\text{A.15})$$

となるので、極板も力を受けてある振幅で振動することになる。この振幅が大きいと出力電圧に影響があるので、どの程度の振幅か求めなければならない。

A.2 極板の振動

トランスデューサーの極板はアルミ合金 5056 の板に絶縁部分を設け、5cm×4cm の電極を接着したものである。極板間の力は極板面に対して垂直に、均等に作用しているから、図 A.2 のように梁の先端（自由端）に集中質量 m の極板がついているものと仮定でき、その質量 m に極板間の力が加わっていると考えて良い。この場合ディスクの振動の減衰に応じて起振力も減少するので、極板をもつ梁の内部摩擦による減衰は考慮しなくてもよい。

ここで ρ 、 A 、 E 、 I はそれぞれ梁の密度、断面積、ヤング率、断面 2 次モーメントであり、集中質量 m に対して $U \sin \omega t$ の力が働いている。この梁の境界条件を考えると、 y 方向の変位 $y(x, t)$ において固定端で、

$$y(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} y(x, t) \Big|_{x=0} = 0 \quad (\text{A.16})$$

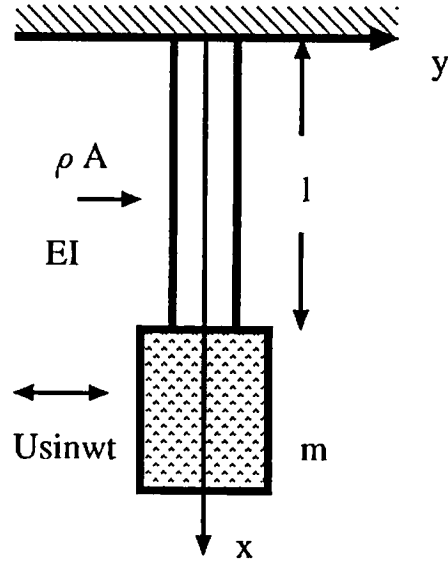


図 A.2: 極板部分の振動

自由端でモーメント 0、起振力と等しいせん断力が生じ、力のつりあいより

$$\left. \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$-EI \left. \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=l} = m\omega^2 y(l, t) + U \sin \omega t - \frac{mg}{l} y(l, t) \quad (\text{A.18})$$

の式が得られる。ここで質量 m による梁の鉛直方向の伸びは無視し、起振力の周波数 ω はディスクの共振周波数とすれば $\omega^2 \gg l/g$ であり、結局重力による効果は考慮する必要がなくなり、これは片持ち梁の曲げ振動となる。よって、断面が一様な梁の運動方程式は

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$a^2 = \frac{EI}{\rho A} \quad (\text{A.20})$$

で、梁の定常振動 $y(x, t) = Y(x) \sin \omega t$ を考えると

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \frac{\omega^2}{a^2} Y = 0 \quad (\text{A.21})$$

であり、 $\sqrt{\omega/a^2} = \lambda$ なる無次元量を導入すると一般解が

$$Y(x) = c_1 \sin \left(\frac{\lambda}{l} x \right) + c_2 \cos \left(\frac{\lambda}{l} x \right) + c_3 \sinh \left(\frac{\lambda}{l} x \right) + c_4 \cosh \left(\frac{\lambda}{l} x \right) \quad (\text{A.22})$$

と書けることから、あらためて自由端に集中質量 m をもつ梁の境界条件

$$y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l, t) = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$-EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l, t) = m\omega^2 y(l, t) + U \sin \omega t \quad (\text{A.25})$$

から、 $y(x, t) = Y(x) \sin \omega t$ の $Y(x)$ の積分定数 c_1 から c_4 を定めれば、 $x = l$ での振幅が求まる。

式 (A.22) において上記の境界条件を満足するためには

$$c_2 + c_4 = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$c_1 + c_3 = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$c_1 \sin \lambda + c_2 \cos \lambda - c_3 \sinh \lambda - c_4 \cosh \lambda = 0 \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} & -EI \left(\frac{\lambda}{l} \right)^3 [-c_1 \cos \lambda + c_2 \sin \lambda + c_3 \cosh \lambda + c_4 \sinh \lambda] \\ & -m\omega^2 [c_1 \sin \lambda + c_2 \cos \lambda + c_3 \sinh \lambda + c_4 \cosh \lambda] = U \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

梁の全質量 M を用いて $(m\omega^2/EI)(l/\lambda)^3 = (m/M)\lambda$ となることから c_2 、 c_4 を消去すれば

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \sin \lambda + \sinh \lambda & \cos \lambda + \cosh \lambda \\ \cos \lambda + \cosh \lambda - \frac{m}{M}\lambda(\sin \lambda - \sinh \lambda) & -\sin \lambda + \sinh \lambda - \frac{m}{M}\lambda(\cos \lambda - \cosh \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{U l^3}{EI \lambda^3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

が得られる。これは連立方程式であるから c_1 から c_4 の定数が求まり、 $x = l$ での振幅は

$$Y(l) = \frac{\sin \lambda \cosh \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda}{1 + \cos \lambda \cosh \lambda + \frac{m}{M}\lambda(\cos \lambda \sinh \lambda - \sin \lambda \cosh \lambda)} \frac{U l^3}{EI \lambda^3} \quad (\text{A.31})$$

となる。この値を実際に見積もると、 $\rho = 2.64 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、 $A = 3.48 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 、 $E = 7.03 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ 、 $I = 0.76 \times 10^{-10} \text{ m}^4$ 、 $m/M = 3.51$ 、 $\omega = 2\pi \times 7900$ を代入して

$$Y(0.03) = -3.9 \times 10^{-9} U$$

が得られる。極板に対する起振力 $-Eq(t)$ を $U \sin \omega t$ とおいたから y の振動を電荷によって表すと

$$y(l, t) = 3.9 \times 10^{-9} Eq(t) \quad (\text{A.32})$$

となる。これを式 (A.11) に代入すると、極板の振動の効果を取り入れた電荷の時間変化の微分方程式が得られる。

$$R\dot{q} + \left(\frac{1}{C_0} + 3.9 \times 10^{-9} E^2 \right) q = Ex \quad (\text{A.33})$$

$E = 1.5 \times 10^4 \text{V/m}$ と $C_0 = 200 \text{pF}$ より $1/C_0 \gg 3.9 \times 10^{-9} E^2$ であるから、極板の振動は出力電圧において無視できることがわかる。

実際に測定した結果よりディスクの端面の変位は 10^{-10}m 以上であることがわかり、コンデンサーの極板間に働く力によって生ずる極板の振動の振幅はこの値よりはるかに小さい。

AppendixB

実験に使用した回路

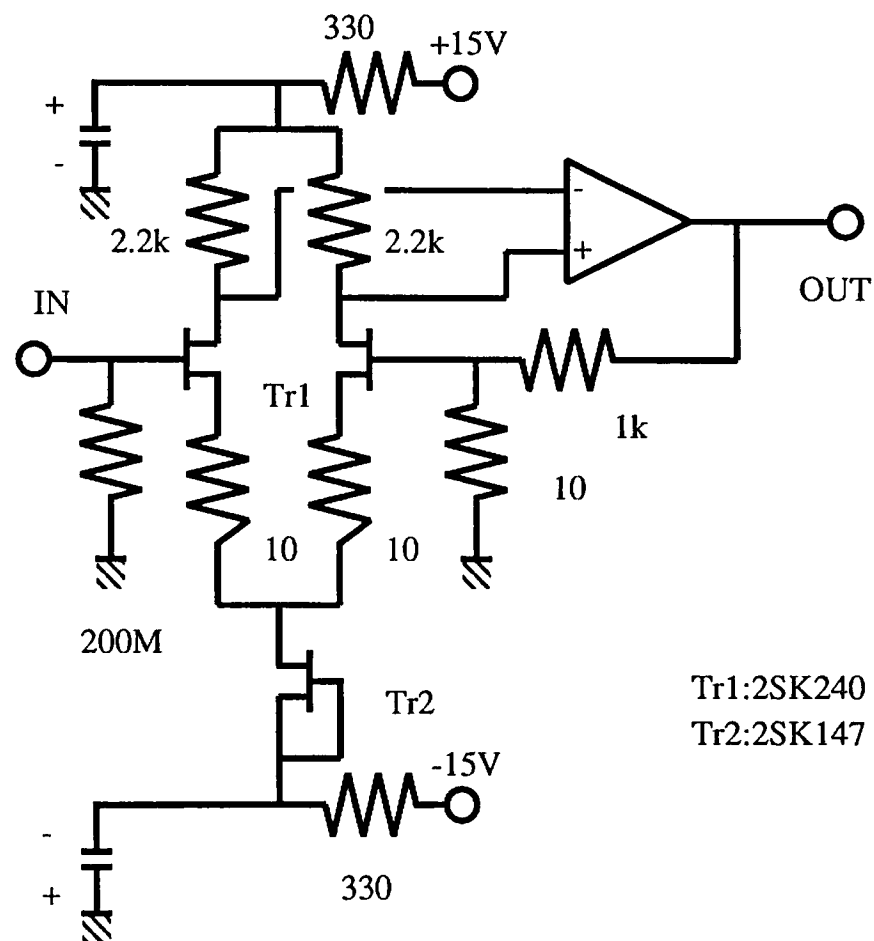


図 B.1: 100 倍 Amp.

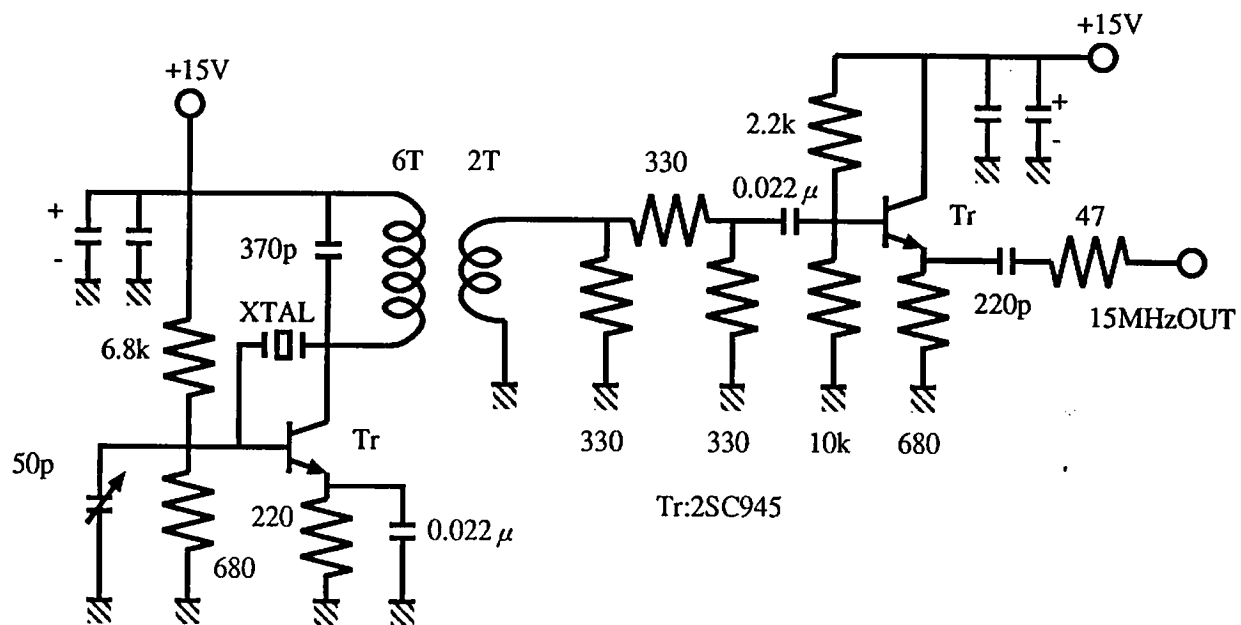


図 B.2: 15MHz 発振器

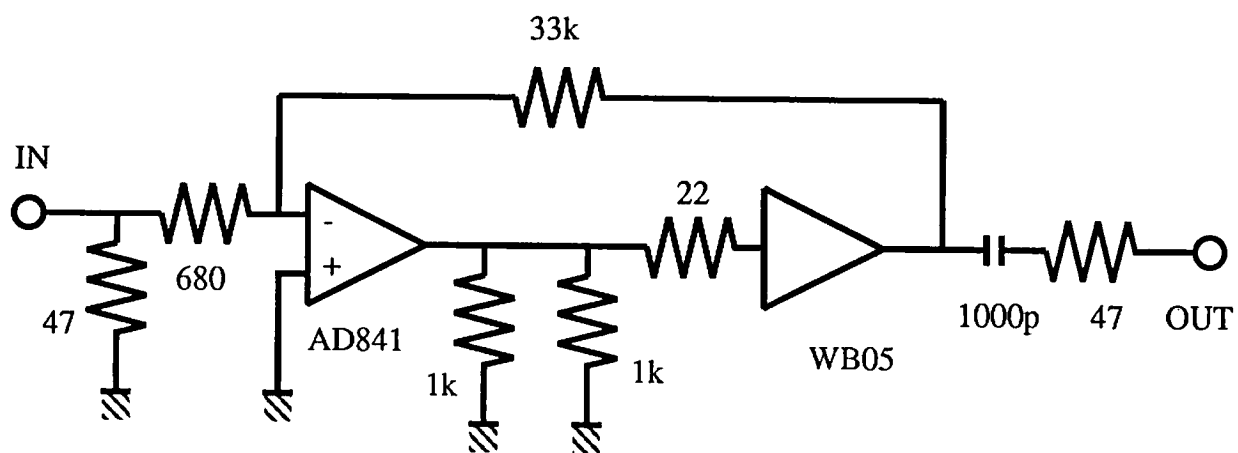


図 B.3: ポッケルスセルドライヴァー

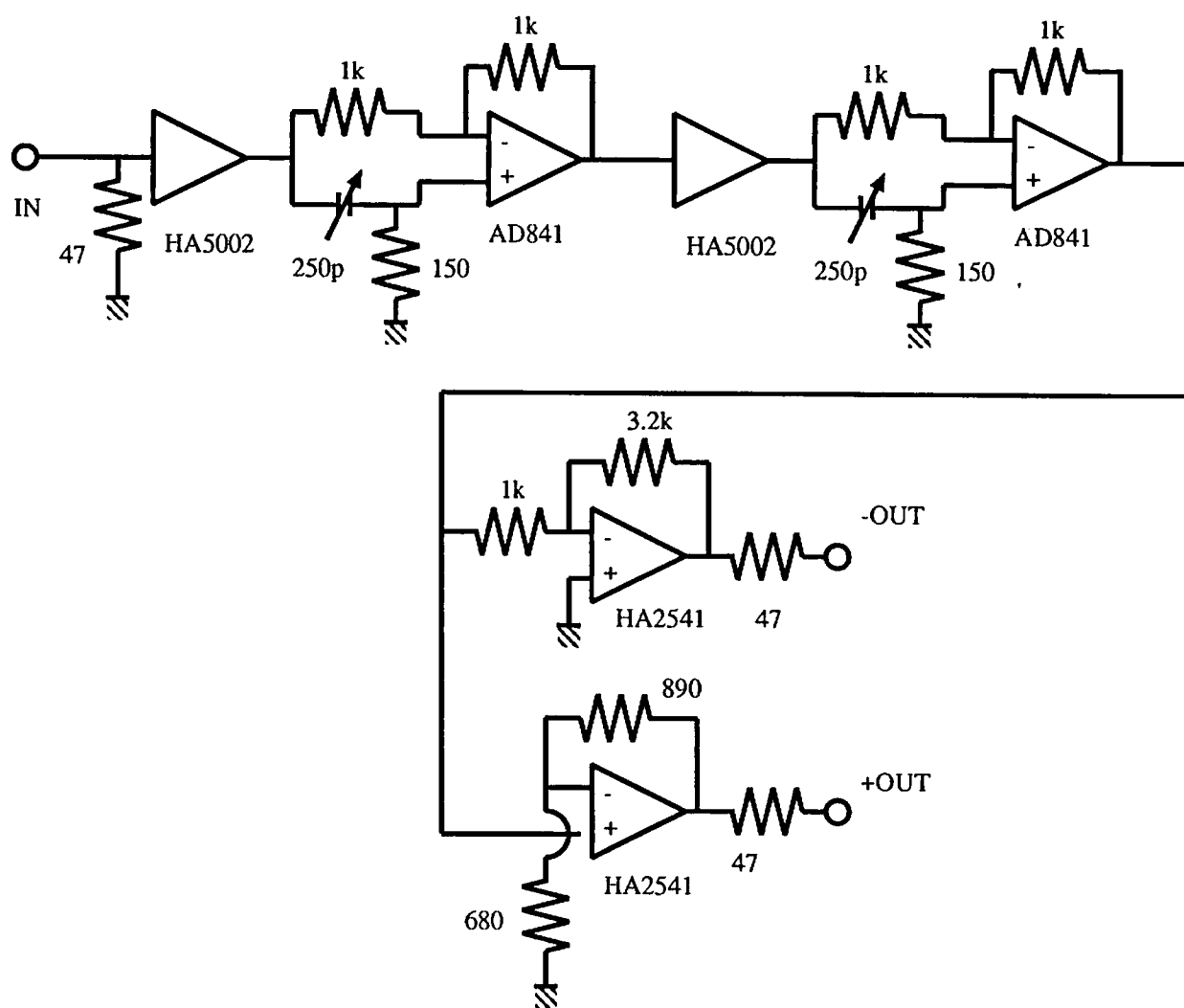


图 B.4: Phase shifter

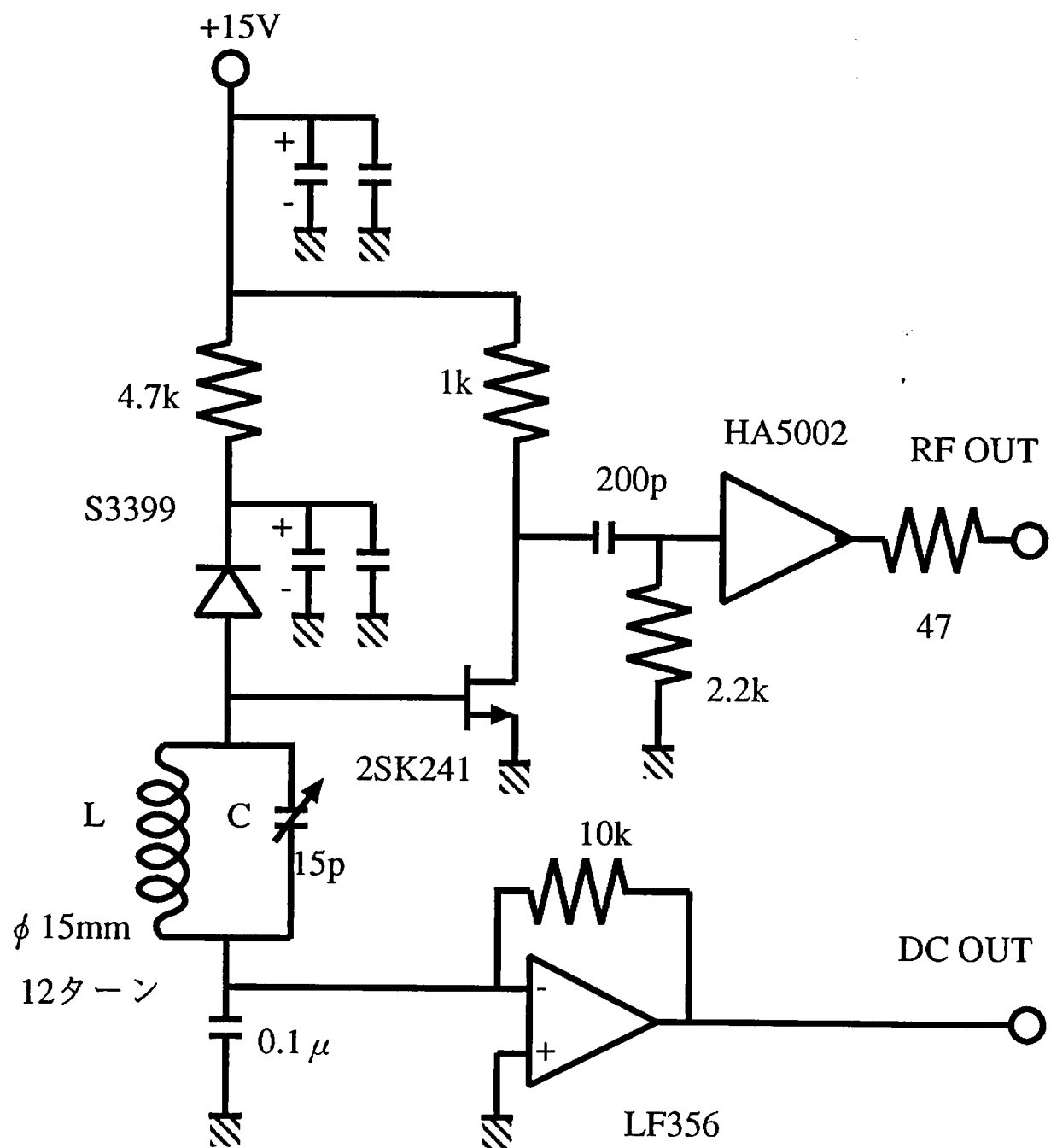
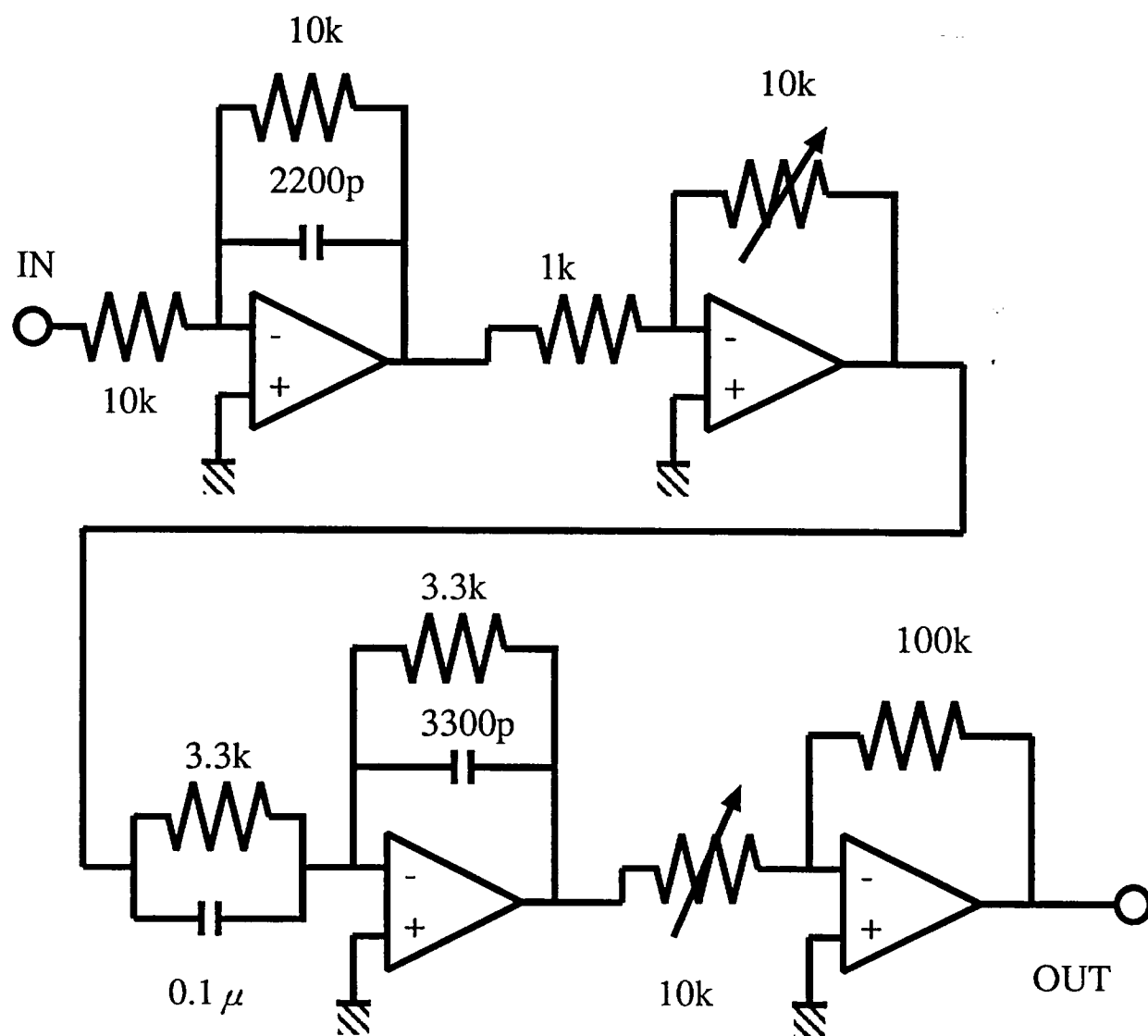


図 B.5: RF detector



op.Amp.はすべてOP27

図 B.6: 振り子ロックのためのサーボ回路

謝辞

本実験を行うに当たって多くの方にお世話になりました。ここで感謝の意を表したいと思います。

指導教官である坪野先生には、多忙にもかかわらず実験全般にわたって指導して頂き、快適な研究環境を与えて下さいました。

助手の三尾氏には研究を進めるべき方向を示してもらい、また多くの助言を頂きました。

博士課程2年の新谷氏、河辺氏、森脇氏には実験について数多くのことを教えてもらい、また私の質問にも丁寧に答えて頂きました。本研究を進めていく上で Fabry-Perot 共振器、位相変調と復調、振り子などについては三氏の修士課程での成果が非常に役立っています。

共振型検出器のプロトタイプを開発した水谷氏には、その研究成果をふくめてお世話になりました。本研究は氏の成果を礎にしています。

佐藤氏の修士課程での研究成果におおいにお世話になっています。He-Ne laser の強度安定化の回路は氏の調整したものをそのまま使用しています。

修士課程2年の白土氏には計算機について御教授頂きました。また、1年の長滝氏とともに有益な助言と議論を交わすことができました。

また共振型検出器の建設計画の担い手である宇宙線研究所の黒田先生、助手の神田氏にもお世話になり、また御迷惑をおかけしました。私が実験に専念できたのも、お二人の御蔭であります。

Bibliography

- [1] R.Drever *et al.*, Appl.Phys.B31(1983)97
- [2] G.C.Bjorklund, Opt.Lett.,5(1980)15.
- [3] G.Bjorklund *et al.*, Appl.Phys.B32(1983)145.
- [4] 平川 浩正：相対論（第2版）共立出版(1986).
- [5] H.Kogelnik and T.Li, Proc.IEEE,54(1996)1312.
- [6] 三尾 典克、大橋正健編：重力波アンテナ技術検討書(1992).
- [7] 森脇 成典：Nd:YAG レーザーの kHz 帯域における周波数安定化(1992).
- [8] 佐藤 寿一：干渉計型重力波検出器における同相雑音低減法の研究(1993).
- [9] A.Shenzle, R.DeVoe and R.Brewer, Phys.Rev.A 25(1982)2606.
- [10] K.Tsubobo, N.Mio and A.Mizutani, Jpn.J.Appl.Phys,30(1991)1326.