修士論文

光学浮上の実現に向けた微小鏡の開発

(Development of Tiny Mirrors for Optical Levitation)

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻
千代田大樹

2021 年 1 月 6 日提出

概要

量子力学は、ミクロな物理現象を記述する理論として確立しており、実験的にも様々な検証がされてきた。一方、マクロな質量スケールに関しては重ね合わせ状態など一部の量子力学的現象は実験的に確かめられていない。これに対して、修正量子論や環境との相互作用によるデコヒーレンスなど様々なモデルが提唱されているが、いずれも実証できていないため、実験的な検証が求められている。検証においては、測定精度が電磁場の量子揺らぎによって決定される標準量子限界に到達することが必要である。

実現可能な巨視的量子系の候補として、レーザー光と機械振動子を組み合わせた機械光学系が近年注目されている。機械光学系において、これまで ng スケールまでは標準量子限界に到達した例があるが、mg 以上のスケールになると懸架系からの熱雑音が障害となって、到達が困難になる。そこで、光輻射圧によって鏡を支持することで懸架系からの熱雑音を回避する、光学浮上が提案されている。これまで、浮上鏡を上下 2 つの光共振器で挟むサンドイッチ型光学浮上が研究されてきており、その力学的安定性を実証することに成功している。しかし、光学浮上の条件を満たす質量 mg 程度の鏡を作成することに未だ成功していない。具体的には、浮上鏡は高反射率を持った凸面鏡である必要があるが、質量 mg 程度の微小な凸面鏡に高反射率のためのコーティングを施すと、そのコーティングのストレスで鏡が割れてしまう。

本研究では、そのような微小鏡の開発に向けて、2 つの可能性を模索する。1 つ目は、平面鏡に高反射率コーティングをし、コーティングのストレスによって曲率をつける方法である。2 つ目は、誘電体に周期的構造を作るフォトニック結晶である。フォトニック結晶は周期的構造を作ることで高反射率を実現させ、さらにその周期的構造を局所的に変化させることによって曲率をつけることができる。前者については、薄型石英鏡に高反射率コーティングをしたもの 2 枚について、光共振器を組んで曲率と反射率を測定した。本研究の測定精度の範囲では曲率は確認されず、今後より強いストレスを加えて曲率をつけていくことが求められる。反射率に関しては設計値通りであった。後者のフォトニック結晶については、高反射率が実現する原理を議論するとともに、数値計算による反射率の値のシミュレーションを行った。また、実際に作成したフォトニック結晶について、フォトディテクターにより反射光量を求め、シミュレーション結果との比較を行った。

目次

記号・略語一覧

記号

i	虚数単位 $i = \sqrt{-1}$
π	円周率 $\pi = 3.1415926535\cdots$
c	光速度 $c = 299792458$ m/s
g	重力加速度 $g == 9.80665\mathrm{m/s^2}$
$\hbar$	Dirac 定数 $\hbar = 1.054571800(13) \times 10^{-34}\mathrm{Js}$
ω_L	レーザー光の角周波数
ν_L	レーザー光の周波数
L	共振器長
$\mathcal{F}$	共振器のフィネス
ζ_0	共振器の Gouy 位相
κ	共振器の線幅
ϵ_0	真空の誘電率 $\epsilon_0 = 8.8541878128(13) \times 10^{-12}$ $\mathrm{Fm^{-1}}$
μ_0	真空の透磁率 $\mu_0 = 1.25663706212(19) \times 10^{-6}$ $\mathrm{NA^{-2}}$

略語

FSR	Free Spectral Range
FWHM	Full Width Half Medium
TMS	Transverse Mode Spacing
PD	Photo Detector
PZT	Piezoelectric Transducer
SQL	Standard Quantum Limit

Chapter 1
序論

1.1 研究の背景

量子力学は、原子レベルの微視的な物理現象を記述する理論として確立されているが、原理的には巨視的な質量スケールにおいても同様の法則が成り立つはずである。しかし、一部の量子力学的現象について、未だに巨視的な質量スケールにおいて実験的観測がされていないものがある。例えば、重ね合わせ状態については最大で 10^{-23}kg 程度の分子までしか観測されていない [1,2]。その原因として、環境との相互作用によるデコヒーレンス [3] や修正量子論 [4]、コペンハーゲン解釈 [5] などが提唱されているが、どれも実験的な検証には至っていない。そのため、幅広い質量スケールにおいて量子力学を検証して知見を得ることが必要である。

そのような巨視的な量子力学を検証するために、光と機械振動子の結合系である機械光学系 (Optomechanics) を用いる方法が注目を集めている。この機械光学系によって巨視的量子力学を検証するためには、測定精度が標準量子限界 [6] に到達していることが必要条件である。標準量子限界とは、レーザー光の量子揺らぎによる測定精度の限界のことであり、つまり、古典雑音を抑えて量子雑音より小さくしなければならないということを意味する。現在までに、μg 以下の質量スケールにおいては、標準量子限界への到達に成功している [7–10] が、それより大きい質量スケールになると、古典雑音、特にワイヤーなどの懸架系による熱雑音が量子雑音を上回ってしまい、標準量子限界に到達することができていない [11–14]。そこで、懸架系による熱雑音を低減する手段として光学浮上が挙げられる。光学浮上は、レーザー光の輻射圧によって機械振動子である鏡を浮上させるものであり、懸架系を使わないため熱雑音を抑えることができる。光学浮上には、鏡の下側から 3 本のレーザー光を照射する三脚型光学浮上 [15] と、鏡の上下から 2 本のレーザー光を照射するサンドイッチ型光学浮上 [16] の 2 種類があり、現在は後者のサンドイッチ型光学浮上によって mg スケールでの標準量子限界への到達を目指している。これまでに、浮上鏡を先端に取り付けたねじれ振り子による実験によって、浮上鏡の全ての自由度に対して安定性が保証されることが示された [17,19–21]。

ただし、この光学浮上が安定であるためには、浮上鏡は高反射率を持った凸面鏡である必要があるが、質量 mg 程度の微小鏡で条件を満たす高反射率凸面鏡を作成することは困難であり、未だ作成に成功していない。本研究では、光学浮上に必要な条件を満たす微小鏡を作成するために、2 つの開発方法を検証した。一つは、高反射率コーティングをする際のストレスを利用して曲率をつける方法であ理、もう一つは、高誘電率をもつ基盤に周期的な構造を作るフォトニック結晶である。

1.2 本論文の構成

第 2 章では巨視的量子力学を検証する上で必要となる概念である、標準量子限界について述べるとともに、障害となる雑音について述べる。第 3 章ではサンドウィッチ型光学浮上の概要と先行研究の結果を説明する。また、それに先立って基本原理となる光共振器について述べる。第 4 章では、フォトニック結晶によって高反射率が実現する仕組みについて、数値計算によるシミュレーションを交えて議論する。第 5 章では、作成した薄型石英鏡及びフォトニック結晶の評価をする実験手法について述べ、第 6 章ではその結果及び考察を述べる。第 7 章では本論文のまとめと今後の展望を述べる。

補遺では、本論文の補足として Gaussian ビーム光学、光学バネ及びフォトニック結晶のシミュレーションにおける数値計算手法についてまとめる。

Chapter 2
巨視的量子力学

　前章で述べたように、重ね合わせ状態など一部の量子現象は、巨視的な系において実験的に観測されておらず、この理由については様々な解釈がある。例えば、「巨視的な系は環境と孤立させることが難しく、古典的な雑音に埋もれてしまうため観測できていないだけである」とする解釈 [23] や、「巨視的な系においては現在の量子力学は適応されず、修正する必要がある」とする解釈 [24] などがあり、それらを実験的に検証するためには、巨視的量子系の実現が必要である。
　そのためこの章ではまず、量子揺らぎに起因する測定精度の限界である標準量子限界について述べ、次に機械光学系において標準量子限界への到達を目指す際に、障害となる雑音について述べる。

2.1　標準量子限界

　一般的な間接測定系において、標準量子限界の表式を導出する。

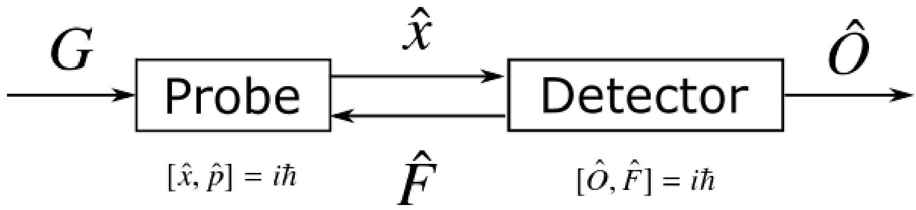

図 2.1: 間接測定

　量子力学における間接測定 [25] のモデルとして、図 2.1 のように検出器がプローブの位置 $\hat{x}$ を測定する場合を考える。測定によってプローブには力 $\hat{F}$ が加わり、検出器の出力 $\hat{O}$ には、信号と量子揺らぎによるノイズ $\hat{Z}$ が含まれているとする。G はプローブに働く古典的な外力である。このとき、検出器の出力は次のように表される。

$$\hat{O}(t) = \hat{x}_0(t) + \hat{Z}(t) + \int_{-\infty}^{t} dt' \chi(t-t')[\hat{F}(t') + G(t')] \tag{2.1}$$

$\hat{x}_0$ は、検出器が存在しない時のプローブの位置の時間発展であり、χ はプローブの外力に対する応答関数である。このとき、異なる時刻での $\hat{x}_0$ の交換関係は、

$$[\hat{x}_0(t), \hat{x}_0(t')] = -i\hbar\chi(t-t') \tag{2.2}$$

となる。また、$\hat{O}$ の測定自体は系に新しい雑音を与えないので

$$[\hat{O}(t), \hat{O}(t')] = 0 \tag{2.3}$$

である。ここで $\hat{Z}$ と $\hat{F}$ について、パラメータ ϵ を用いて以下のようにスケーリングできると仮定する。

$$\hat{Z}(t) \to \epsilon \hat{Z}(t) \tag{2.4}$$

$$\hat{F}(t) \to \frac{1}{\epsilon}\hat{F}(t) \tag{2.5}$$

$\hat{Z}$ と $\hat{F}$ は検出器の演算子であるため、プローブの位置演算子 $\hat{x}_0$ とパラメータによらず交換することから

$$[\hat{Z}(t), \hat{Z}(t')] = [\hat{F}(t), \hat{F}(t')] = 0 \tag{2.6}$$

$$[\hat{Z}(t), \hat{F}(t')] = i\hbar\delta(t-t') \tag{2.7}$$

が導かれる。角周波数を ω としてこれをフーリエ空間に移すと、

$$[\hat{Z}(\omega), \hat{Z}(\omega')] = [\hat{F}(\omega), \hat{F}(\omega')] = 0 \tag{2.8}$$

$$[\hat{Z}(\omega), \hat{F}(\omega')] = 2\pi i\hbar\delta(\omega-\omega') \tag{2.9}$$

となる。

ここで、状態 $|0\rangle$ に対して、片側クロスパワースペクトル密度 $S_{XY}(\omega)$ を以下の定義に従って導入する。

$$\frac{1}{4}S_{XY}(\omega)\delta(\omega-\omega') = \frac{1}{2\pi}\langle 0|\hat{X}(\omega)\hat{Y}^\dagger(\omega') + \hat{Y}^\dagger(\omega)\hat{X}(\omega')|0\rangle \tag{2.10}$$

すると、$\hat{x}$ の雑音スペクトルは次のように書くことができる。

$$S_{xx}(\omega) = S_{ZZ}(\omega) + 2\Re[\chi(\Omega)S_{ZF}(\Omega)] + |\chi(\Omega)|^2 S_{FF}(\Omega) \tag{2.11}$$

ここで、Kennerd-Robertson の不確定性関係より、

$$S_{ZZ}(\omega)S_{FF}(\omega) - |S_{ZF}(\omega)|^2 \geq \hbar^2 \tag{2.12}$$

従って、$\hat{Z}$ と $\hat{F}$ の間に相関がないと仮定して、$S_{ZF}(\omega) = 0$ だとすると、

$$S_{xx}(\omega) \geq 2|\chi(\omega)|\sqrt{S_{ZZ}(\omega)S_{FF}(\omega)} \geq 2\hbar|\chi(\omega)| \tag{2.13}$$

という制限が与えられる。この制限が標準量子限界 (Standard Quantum Limit: SQL) であり、

$$S_{xx}^{SQL} = 2\hbar|\chi(\omega)| \tag{2.14}$$

と書くことができる。

2.1.1 機械光学系

レーザー光で機械的振動を制御する機械光学系においては、後述する散射雑音と輻射圧雑音という 2 つの量子雑音によって標準量子限界が決定される。散射雑音はレーザーパワーに反比例して増

加し、複写圧雑音はレーザーパワーに比例して増加するため、トレードオフの関係にある。機械振動子は自由質点と考えることができるため、自由質点の応答関数

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{m\omega^2} \tag{2.15}$$

を用いて、SQL は

$$S_{xx}^{SQL} = \frac{2\hbar}{m\omega^2} \tag{2.16}$$

と表される。

図 2.2 はレーザーパワーを変化させた時の量子雑音と標準量子限界である。標準量子限界が、測定感度の下限になっていることがわかる。

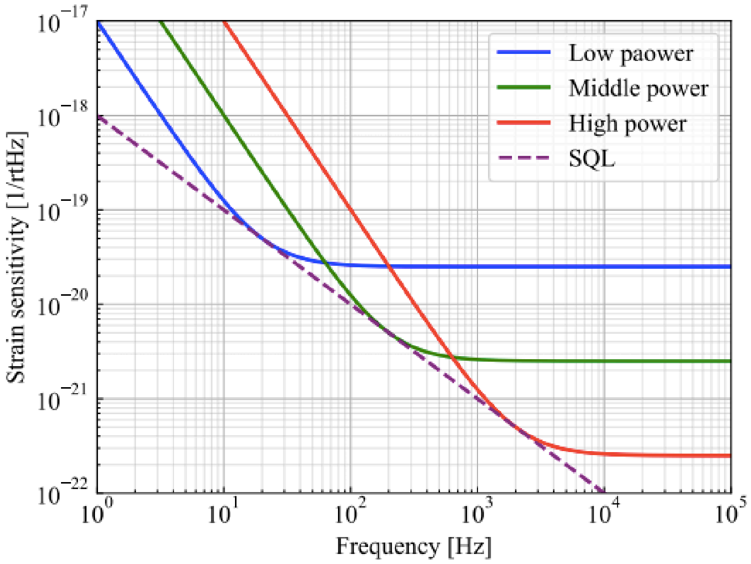

図 2.2: 機械光学系における量子雑音（[20] より引用)。レーザーパワーを変えても測定感度は標準量子限界より上がらないことがわかる。

2.2 雑音

測定精度を SQL に到達させて、巨視的量子力学の振る舞いを観察するには、以下で述べる古典雑音を全て量子雑音より小さくすることが必要である。この節では機械光学系における古典雑音と量子雑音について説明する。

2.2.1 古典雑音

古典雑音は主に次の 5 種類から成る。

地面振動雑音

地面の振動によって共振器を構成する鏡が揺れると、共振器長が変化する。共振器長の変化は鏡の位置の変化と区別できないため雑音となり、この雑音を地面振動雑音という。

残留ガス雑音

実験環境をポンプで真空にした場合でも、実際には多少のガスが残留する。この残留ガスは鏡と衝突するため共振器長が変化し、同様に鏡の変化と区別できないため雑音となり、これを残留ガス雑音と呼ぶ。

レーザー強度雑音

レーザー強度の変動によって鏡に働く光輻射圧が変化し、鏡が揺れることによって同様に雑音となる。これをレーザー強度雑音と呼ぶ。

レーザー周波数雑音

レーザーの周波数が変動すると、その周波数変動と共振器長変動は区別できないため雑音となり、これをレーザー周波数雑音と呼ぶ。

熱雑音

熱浴に接している物体は弾性体として熱振動しており、それによって生じる雑音を熱雑音と呼ぶ。k_{B} を Boltzmann 定数、温度を T とすると、振り子のように調和振動子で記述できる系において、力の熱雑音スペクトル及び位置の熱雑音スペクトルはそれぞれ次のように表されることが分かっている [18]。

$$\delta f(\omega) = \sqrt{4k_{\mathrm{B}}T\frac{m\omega_0^2\phi(\omega)}{\omega}} \tag{2.17}$$

$$\delta x(\omega) = \sqrt{4k_{\mathrm{B}}Tm\omega\frac{\omega_0^2\phi(\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^4\phi(\omega)^2}} \tag{2.18}$$

ただし、$m, \omega_0, \phi(\omega)$ はそれぞれ振り子の質量、共振角周波数、損失角である。損失角のモデルには調和振動子の Q 値を用いて viscous damping モデル $\phi(\omega) = \omega/(\omega_0 Q)$ や structure damping モデル $\phi(\omega) = 1/Q$ などがあるが、いずれにしても熱雑音を低減するには温度を下げる、もしくは高い Q 値の素材を用いることが必要である。

他にも、鏡の基材やコーティングに対しても熱雑音が生じる。

2.2.2 量子雑音

光学実験においては、Heisenberg の不確定性原理に由来して、光子数の量子揺らぎが存在するため、これによって次の 2 種類の雑音が現れる。

散射雑音

検出器に入るレーザー光の光子数が量子的に揺らぐことによる雑音

輻射圧雑音

鏡に衝突するレーザー光の光子数が量子的に揺らぐことによって、光輻射圧が揺らぎ、鏡が揺れることによる雑音

2.3 光学浮上の動機

mg 程度の機械振動子によって SQL への到達を目指す際、前節で述べた雑音の中でも特に懸架系からの熱雑音の寄与が大きく、この熱雑音を十分に低減するには例えば鏡の質量が 5mg の場合は 10^7 程度の Q 値が求められる。そのような細線の開発としてカーボンナノチューブを用いたもの [17] などがあるが、未だ 10^7 程度の Q 値は達成できていない。そこで、図 2.3 のように光の輻射圧で鏡を宙に浮かす光学浮上によって、懸架系からの雑音を大幅に減らす方法が研究されている。

図 2.3: 光学浮上 ([21] より引用)

Chapter 3
光学浮上

3.1 光共振器の基礎

この節では光学浮上の際、及び浮上鏡の反射率と曲率を測定する際に用いる光共振器について議論する。

3.1.1 Fabry-Pérot 共振器

図 3.1 のように 2 枚の鏡が向かい合った構成の共振器を Fabry-Pérot 共振器という。光の入射側の鏡ををフロントミラーと呼ぶことにし、電場振幅の反射率と透過率をそれぞれ $r_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}$ とする。同様に反対側の鏡をエンドミラーと呼ぶことにし、反射率と透過率をそれぞれと $r_{\mathrm{E}}, t_{\mathrm{E}}$ とする。

図 3.1: Fabry-Pérot 共振器

入射光の複素電場振幅を

$$E_{\mathrm{in}}(t) = E_0 e^{i\omega_L t} \tag{3.1}$$

とすると、反射光の電場振幅は、共振器内を n 回往復する光を考えることにより、

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{r}} &= E_{\mathrm{in}}(-r_{\mathrm{F}}) + E_{\mathrm{in}} t_{\mathrm{F}}^2 r_{\mathrm{E}} e^{-i\phi} \sum_{n=1}^{\infty} (r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\phi})^{n-1} \\ &= E_{\mathrm{in}} \left(-r_{\mathrm{F}} + \frac{t_{\mathrm{F}}^2 r_{\mathrm{E}} e^{-i\phi}}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\phi}} \right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

となる。ここで ϕ は光が共振器を往復する際の位相変化であり、共振器長を L とすると

$$\phi = \frac{2L\omega_L}{c} \tag{3.3}$$

である。同様に、透過光の電場振幅は

$$E_{\mathrm{t}} = E_{\mathrm{in}} t_{\mathrm{F}} t_{\mathrm{E}} e^{-i\phi/2} \sum_{n=0}^{\infty} (r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\phi})^n \tag{3.4}$$

$$= E_{\mathrm{in}} \frac{t_{\mathrm{F}} t_{\mathrm{E}} e^{-i\phi/2}}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\phi}} \tag{3.5}$$

となる。よって、入射光の強度を P_{in} とすると、反射光、透過光の強度はそれぞれ

$$P_{\mathrm{r}} = |E_{\mathrm{in}}(t)|^2 = \frac{[(t_{\mathrm{F}}^2 + r_{\mathrm{F}}^2) r_{\mathrm{E}} - r_{\mathrm{F}}]^2 + 4 r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} (t_{\mathrm{F}}^2 + r_{\mathrm{F}}^2) \sin^2(\phi/2)}{(1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}})^2 + 4 r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} \sin^2(\phi/2)} P_{\mathrm{in}} \tag{3.6}$$

$$P_{\mathrm{t}} = |E_{\mathrm{t}}(t)|^2 = \frac{(t_{\mathrm{F}} t_{\mathrm{E}})^2}{(1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}})^2 + 4 r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} \sin^2(\phi/2)} P_{\mathrm{in}} \tag{3.7}$$

であるから、共振条件、つまり透過光強度が最大になるための条件は、m を自然数として

$$\phi = 2\pi m \tag{3.8}$$

となる。

3.1.2 曲率と反射率の測定

式 (3.7) を用いて、横軸を位相 ϕ、縦軸を強度透過率 $|P_{\mathrm{t}}/P_{\mathrm{in}}|^2$ でプロットしたものが図 3.2 である。

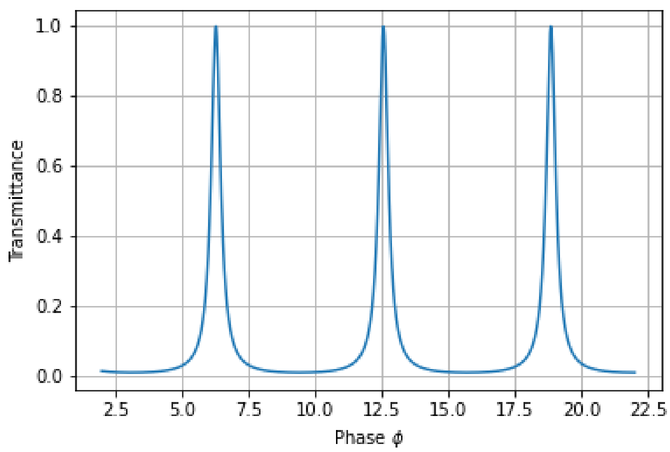

図 3.2: $r_{\mathrm{F}} = r_{\mathrm{E}} = 0.9$ の Fabry-Pérot 共振器において、入射光の位相 ϕ を変化させた時の強度透過率。

透過光強度は周期的に変化していることがわかり、この周期をフリースペクトラルレンジ (FSR) という。共振器長を固定すると、FSR は

$$\nu_{\mathrm{FSR}} = \frac{\omega_{\mathrm{FSR}}}{2\pi} = \frac{c}{2L} \tag{3.9}$$

である。

また、透過光強度ピークの半値全幅 ν_{FWHM} は

$$\frac{1}{1+\frac{4r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}}{(1-r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}})^2}\sin^2\left(\frac{\pi L\nu_{\mathrm{FWHM}}}{c}\right)}=\frac{1}{2} \tag{3.10}$$

を解くことで求まる。ここで $\nu_{\mathrm{FWHM}} \ll \nu_{\mathrm{FSR}}$ のとき、sin の展開をすることで

$$\nu_{\mathrm{FWHM}} \simeq \frac{c(1-r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}})}{2\pi L\sqrt{r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}}} \tag{3.11}$$

となる。ν_{FSR} と ν_{FWHM} の比をフィネスといい、共振の鋭さを表す。

$$\mathcal{F}=\frac{\nu_{\mathrm{FSR}}}{\nu_{\mathrm{FWHM}}} \simeq \frac{\pi\sqrt{r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}}}{1-r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}} \tag{3.12}$$

よってこのフィネスを測定することによって、鏡の反射率を測定することができる。

次に、Hermite-Gaussian モード（補遺 A 参照）の共振条件は式 (3.8) を書き換えて、

$$\frac{2L}{c}\nu_L = m_0+(l+m+1)\frac{\zeta_0}{\pi} \tag{3.13}$$

と表されることが分かっている [22]。ここで、ζ_0 は Gouy 位相といい、鏡の曲率半径 R_i と共振器長 L で決定される g ファクター

$$g_i = 1-\frac{L}{R_i} \quad (i=\mathrm{F},\mathrm{E}) \tag{3.14}$$

を用いて、

$$\zeta_0 = \arccos\sqrt{g_{\mathrm{F}}g_{\mathrm{E}}} \tag{3.15}$$

と表されるものである。ただし、鏡の曲率半径は共振器に対して外側に凸の時に正とする。式 (3.13) の共振条件において、隣り合うモード間の周波数間隔を横モード間隔 (TMS) といい、

$$\frac{2L}{c}\nu_{\mathrm{TMS}} = \frac{\zeta_0}{\pi} \tag{3.16}$$

であるから、

$$\zeta_0 = \frac{2L\pi}{c}\nu_{\mathrm{TMS}} = \pi\frac{\nu_{\mathrm{TMS}}}{\nu_{\mathrm{FSR}}} \tag{3.17}$$

となる。したがって、TMS と FSR の比を測定することで Gouy 位相が求まり、これによって、鏡の曲率を測定することができる。

3.2 サンドイッチ型光学浮上

この節では輻射圧を受けて浮上している鏡が力学的に安定になる条件について議論し、図 2.3 のように浮上鏡を上下で挟むサンドイッチ型光学浮上によって、安定的な光学浮上が実現することを示す。

3.2.1 理論的検証

図 3.3 のように鉛直上向きに z 軸をとり、浮上鏡の質量と曲率をそれぞれ m, R とする。一つの浮上鏡に対して複数の固定鏡によって共振器が組まれている状況を考え、i 番目の共振器の共振器長を L_i、固定鏡の曲率を R_i とする。ここで、曲率中心間距離を

$$a_i \equiv s_i(R + R_i - L_i) \tag{3.18}$$

で定義する。s_i は浮上鏡が上にあるとき $+1$、下にあるとき -1 となる量である。

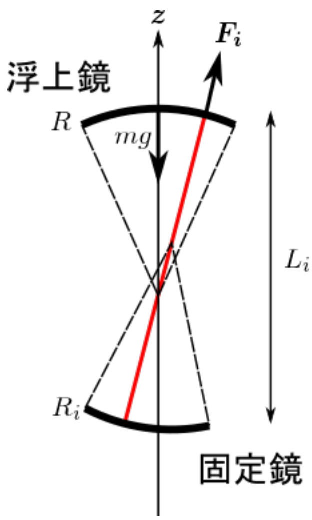

図 3.3: 光学浮上の概念図。

浮上鏡の安定位置からの x, y, z 軸周りの角度の微小変位をそれぞれ $d\alpha, d\beta, d\gamma$ とし、重心と角度の微小変位

$$d\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \quad d\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} d\alpha \\ d\beta \\ d\gamma \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

についてそれぞれ、復元力 $d\boldsymbol{F}$ 及び復元トルク $d\boldsymbol{N}$ を考えて

$$\begin{pmatrix} d\boldsymbol{F} \\ d\boldsymbol{N} \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} d\boldsymbol{r} \\ d\boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

と表されたとする。ここで K はばね定数行列と呼ばれるものであり、鏡が力学的に安定になるためには、K の固有値が全て正になることが必要である。系が z 軸周りで回転対称性を持つときは、ばね定数行列は以下のように表されることがわかっている [17]

$$K = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 & -Rw & 0 \\ 0 & w & 0 & Rw & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Rw & 0 & R^2w - mgR & 0 & 0 \\ -Rw & 0 & 0 & 0 & R^2w - mgR & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

サンドイッチ型光学浮上のように、浮上鏡の中心にのみ光を当てる場合 w, v は

$$w = \sum_i \frac{F_i}{a_i}, \quad v = \sum_i K_i^{\mathrm{opt}} \tag{3.22}$$

と表される量である。ここで F_i は輻射圧によって浮上鏡に与えられる力であり、K_i^{opt} は光学ばね定数（補遺 B 参照）である。

この行列の固有値が全て正になるための条件は、

$$v > 0,\ w > 0,\ R < 0 \tag{3.23}$$

と計算することができる。$R < 0$ は浮上鏡が下に凸でなければならないことを示す。また、共振器が光学的に安定であるためには、

$$0 < \left(1 - \frac{L_i}{R}\right)\left(1 - \frac{L_i}{R_i}\right) < 1 \tag{3.24}$$

でなければいけないことが分かっている [26]。固定鏡が下側にある共振器がこの条件を満たすとき、$a_i < 0$ となるため、$w > 0$ を満たすことができない。一方、固定鏡が上側にある共振器の場合は $a_i > 0$ となるため、上下二つの共振器からなるサンドイッチ型構成にすることによって、全体として $w > 0$ を実現させることができる。

3.2.2 ねじれ振り子による実験的検証

理論的に提案されているサンドイッチ型光学浮上は、標準量子限界への到達を目指して浮上鏡の質量 0.2mg というパラメータ設計である [16] が、実験的にこの設計の光学浮上の安定性を検証しようとすると、浮上鏡が小さすぎて壊れやすく扱いにくい他、水平方向の変位を読み出す機構を付加することが困難である。そこで光学浮上の実験的検証においては、ねじれ振り子を用いた実験的検証方法が提案された [17]。

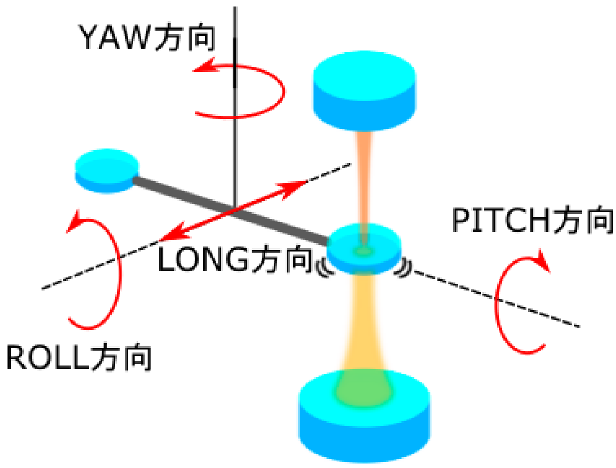

図 3.4: ねじれ振り子と座標系の定義。

図 3.4 のように、ねじれ振り子を上からワイヤーで吊るし先端に浮上鏡を取り付ける。微小振動を仮定すると、YAW 方向は浮上鏡の水平方向と、ROLL 方向は浮上鏡の鉛直方向とそれぞれ一致し、各自由度についてねじれ振り子は以下のような共振周波数をもつ。

$$f_{\mathrm{YAW}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi n a^4}{2 l I_{\mathrm{YAW}}}} \tag{3.25}$$

$$f_{\mathrm{ROLL}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{I_{\mathrm{ROLL}}}} \tag{3.26}$$

$$f_{\mathrm{PITCH}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{I_{\mathrm{PITCH}}}} \tag{3.27}$$

$$f_{\mathrm{LONG}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{3.28}$$

l, n, a はそれぞれワイヤーの長さ、半径、剛性率であり、$I_{\mathrm{YAW}}, I_{\mathrm{ROLL}}, I_{\mathrm{PICTH}}$ はそれぞれの方向における慣性モーメントである。m は鏡の質量、d は重心と懸架点の距離である。

浮上鏡に加わる復元力は共振周波数の 2 乗に比例する。したがってそれぞれの自由度において、

$$(\text{ねじれ振り子単体での共振周波数}) < (\text{光共振器で光を当てた場合の共振周波数}) \tag{3.29}$$

となることが確認できれば、光共振器による復元力が確認できたことになり、光学浮上の安定性を実験的に検証することができる。このような原理のもと、何度かセットアップが改良され [19,20]、最終的に全自由度の安定性の検証に成功した [21]。

図 3.5 は測定された YAW 方向（浮上鏡の水平方向）の共振周波数の変化である。光共振器により復元力が働き、YAW 方向の共振周波数が 37.4 ± 0.5 mHz から 41.1 ± 0.7 mHz に変化している。

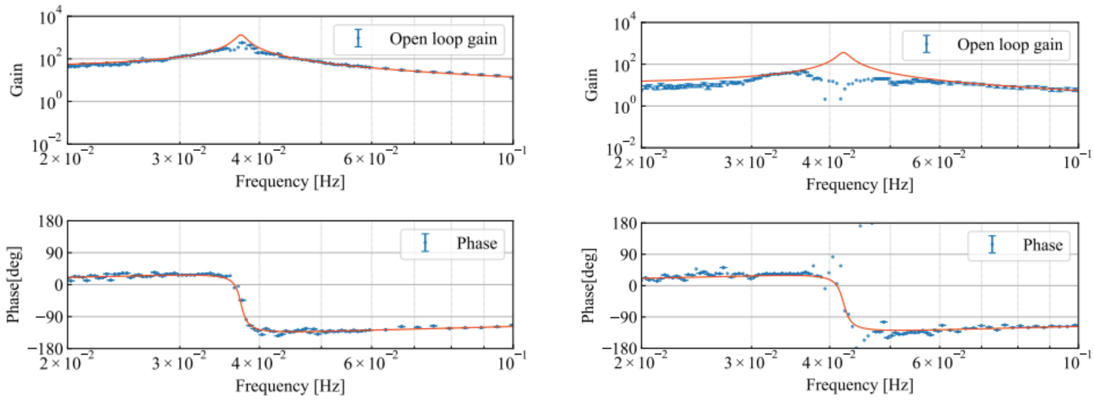

図 3.5: [21] によって測定された YAW 方向の共振周波数。左がねじれ振り子単体の場合であり、右が光共振器で光を当てた場合である。

3.3 浮上鏡の反射率に対する要求値

3.2.1 節で、サンドイッチ型光学浮上が力学的に安定であるためには、浮上鏡が凸面鏡である必要があることを述べた。この節では反射率についての条件を議論する。

仮に浮上鏡が、厚さ 0.1 mm、直径 3 mm の溶融石英でできているとすると、質量はおよそ 1.6 mg に相当する。まずはこの質量で光学浮上に必要な条件を満たす浮上鏡の作成を目指す。共振器内の

光、入射光のパワーをそれぞれ P_{circ}、P_{in}、共振器の透過率を T とすると、この浮上鏡が光の輻射圧で支えられるための条件は、

$$mg \simeq \frac{2P_{\mathrm{circ}}}{c} = \frac{2P_{\mathrm{in}}}{cT} \tag{3.30}$$

となる。$P_{\mathrm{in}} = 1$ W と仮定すると、

$$T = 4.25 \times 10^{-4} \tag{3.31}$$

であるから、少なくとも浮上鏡の反射率は

$$r > 99.95\% \tag{3.32}$$

でなければならないことがわかる。この反射率を実現するため、これまで、曲率のついた微小鏡に高反射率コーティングをして作成していたが、図 3.6 のようにコーティングによるストレスで鏡が割れてしまっていた。

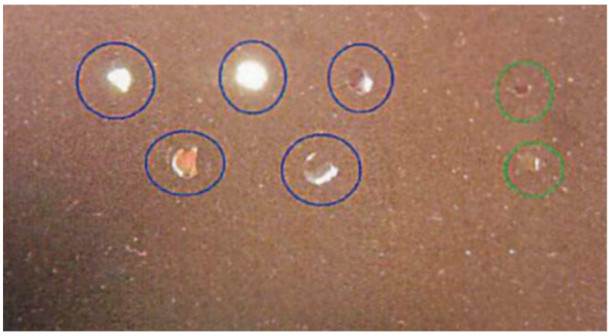

図 3.6: これまでに作成した浮上鏡。コーティングのストレスで鏡が割れてしまっている。([34] より引用)

そこで次の二つの手法によって、曲率付き高反射率微小鏡の実現を目指す。

1. 平面鏡にコーティングする。その際コーティングのストレスを利用して曲率をつける。
2. 誘電体に周期構造を作るフォトニック結晶によって、高反射率を実現する。さらにその周期構造を局所的に変化させることで曲率をつける。詳しい原理は次の章で述べる。

Chapter 4
フォトニック結晶

誘電体に一定間隔で穴を開けるなどして周期的構造を作ったものをフォトニック結晶という。フォトニック結晶は反射鏡の他に光学フィルター [27] やレーザー [28] など様々な用途で使うことができる。この章では特に、フォトニック結晶によって高反射率が実現する仕組みについて説明する。

4.1 混合誘電体媒体中の電磁場

フォトニック結晶にレーザー光が入射する場合を議論するためには、場所によって異なった誘電率を持った媒体において、電磁場がどのように振る舞うのかを考えなければならない。このような媒体を混合誘電体媒体という。

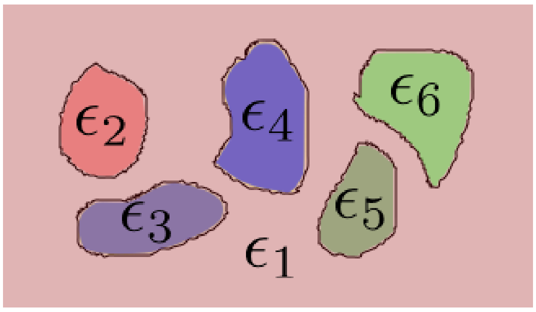

図 4.1: 混合誘電体媒体。場所によって異なる誘電率を持つ。

この章では、電荷と電流を持たない場合のマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = 0 \tag{4.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) - \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = 0 \tag{4.2}$$

から出発し、混合誘電体媒体中の電磁場を考える。一般的には $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)$ は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ の多項式で表されるが、電場が十分に小さい場合には真空の誘電率 ϵ_0 と比誘電率 $\epsilon(\boldsymbol{r})$ を用いて

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \tag{4.3}$$

と線形に近似できる。また、多くの誘電体において比透磁率は 1 となるため、真空の透磁率 μ_0 を用いて

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{4.4}$$

と近似することができる。電場と磁場の時間依存部分を

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}, \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t} \tag{4.5}$$

と分けてマクスウェル方程式に代入すると、

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - i\omega\mu_0 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{4.6}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) + i\omega\epsilon_0(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{4.7}$$

が得られる。この 2 式から $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を消去すると、以下のマスター方程式が得られる。

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon(\boldsymbol{r})} \nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \right) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{4.8}$$

この式を、

$$\hat{\Theta}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{4.9}$$

$$\hat{\Theta} \equiv \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon(\boldsymbol{r})} \nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \right) \tag{4.10}$$

と表すことで、マスター方程式は固有値問題に帰着することができる。ここで、内積を

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \equiv \int d^3\boldsymbol{r} \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{4.11}$$

で定義すると、

$$(\boldsymbol{A}, \hat{\Theta}\boldsymbol{B}) = \int d^3\boldsymbol{r} \boldsymbol{A}^* \cdot \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \boldsymbol{B} \right) \tag{4.12}$$

$$= \int d^3\boldsymbol{r} (\nabla \times \boldsymbol{A})^* \cdot \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \boldsymbol{B} \tag{4.13}$$

$$= \int d^3\boldsymbol{r} \left[\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \boldsymbol{A} \right) \right]^* \cdot \boldsymbol{B} \tag{4.14}$$

$$= (\hat{\Theta}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \tag{4.15}$$

であるから、$\hat{\Theta}$ はエルミート演算子となる。エルミート演算子の固有値問題が満たす性質の例としては、以下のようなものがある。

1. 固有値は実数となる。
2. 異なる固有値 ω に属する解 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は直交する。すなわち、固有値と固有関数の組をそれぞれ $(\omega_1, \boldsymbol{H}_1)$, $(\omega_2, \boldsymbol{H}_2)$ とすると、

$$\omega_1 \neq \omega_2 \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2) = 0 \tag{4.16}$$

   が成り立つ。
3. 演算子 $\hat{A}$ が $\hat{\Theta}$ と交換関係

$$[\hat{A}, \hat{\Theta}] = 0 \tag{4.17}$$

   にあるとき、マスター方程式の解 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は $\hat{A}$ の固有関数になる。

$$\hat{A}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \alpha\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{4.18}$$

4.2　対称性とモード分類

前節では、混合誘電体媒体中の磁場が式 (4.9) で表されるマスター方程式の固有関数として決定され、角周波数 ω はマスター方程式の固有値となることをみた。この固有関数と固有値の組 $(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}), \omega)$ をモードと呼ぶ。もし誘電体の空間的配置に何らかの対称性がある場合、波数 $\boldsymbol{k}$ によってモードを分類することができる。

4.2.1　鏡面対称性

図 4.2 のように、ある面の両側で誘電体が対称に配置されている場合を考える。

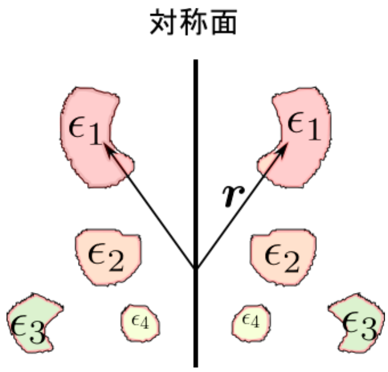

図 4.2: 系が鏡面対称性を持つ場合。

このとき、対称面と垂直な座標成分を反転させる操作を $\hat{P}$ と表すと、系の対称性から

$$\hat{P}^{-1}\hat{\Theta}\hat{P} = \hat{\Theta} \tag{4.19}$$

が成り立つ。よって $[\hat{P}, \hat{\Theta}] = 0$ となるから、モードは $\hat{P}$ の固有関数になる。

$$\hat{P}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = p\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{4.20}$$

ここで、$\hat{P}^2 = 1$ であるから、$p = \pm 1$ でなければならず、結局この反転操作に対して

$$\hat{P}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \pm\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{4.21}$$

となることがわかる。$+1$ のものを even と呼び、-1 のものを odd と呼ぶ。まとめると、系が鏡面対称性を持つとき、その対称面に対してモードを even と odd に分類することができる。

4.2.2　連続的並進対称性

系が z 軸方向に連続的並進対称性を持つとする。z 軸方向に d だけ並進移動する並進演算子を、波数 k を用いて $\hat{T}_{d\hat{\boldsymbol{z}}} = e^{-ikd}$ とする。同様の議論で $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は $\hat{T}_{d\hat{\boldsymbol{z}}}$ の固有関数となり、

$$\hat{T}_{d\hat{\boldsymbol{z}}}e^{ikz} = e^{ik(z-d)} = (e^{-ikd})e^{ikz} \tag{4.22}$$

なので、$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の z 軸方向依存性は e^{ikz} になることがわかる。同様に、もし系が一様誘電体であった場合、全方向に対して連続的並進対称性を持つので、解は $\boldsymbol{r}$ に依存しない $\boldsymbol{H}_0$ を用いて次のような平面波で表すことができる。

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{4.23}$$

この場合、固有値 ω は式 (4.9) を解くことによって

$$\omega(\boldsymbol{k}) = c|\boldsymbol{k}|/\sqrt{\epsilon} \tag{4.24}$$

という分散関係で表されることがわかる。

4.2.3 離散的並進対称性

図 4.3 のように、誘電体が y 軸方向に対して離散的並進対称性をもつ場合を考える。

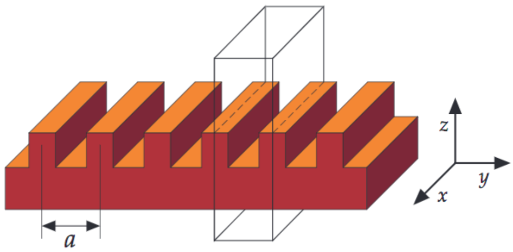

図 4.3: y 軸方向に長さ a の周期構造をもつ誘電体。x 軸方向には無限に伸びているとし、z 軸方向には有限の厚さを持つとする。([29] より引用)

l を任意の整数としたとき、$e^{ik_y y}$ は同様に並進演算子

$$\hat{T}_{\boldsymbol{R}} = e^{-ik_y la} \tag{4.25}$$

の固有関数になる。ここで、整数 m、$b = 2\pi/a$ に対して

$$k_y \ \rightarrow \ k_y + mb \tag{4.26}$$

としても、$\hat{T}_{\boldsymbol{R}}$ の固有値は変化しないから、x 軸方向の連続的並進対称性と合わせて、$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の一般解は次のように表すことができる。

$$\boldsymbol{H}_{k_x,k_y}(\boldsymbol{r}) = e^{ik_x x} \sum_m \boldsymbol{c}_{k_y,m}(z) e^{i(k_y+mb)y} \tag{4.27}$$

$$= e^{ik_x x} \cdot e^{ik_y y} \sum_m \boldsymbol{c}_{k_y,m}(z) e^{imby} \tag{4.28}$$

$$= e^{ik_x x} \cdot e^{ik_y y} \cdot \boldsymbol{u}(y,z) \tag{4.29}$$

ここで、$\boldsymbol{u}$ は y 軸方向に関しての周期関数、

$$\boldsymbol{u}(y + la, z) = \boldsymbol{u}(y, z) \tag{4.30}$$

である。また k_y については周期性から、

$$-\pi/a < k_y \leq \pi/a \tag{4.31}$$

の範囲のみ考えればよく、この範囲のことをブリルアンゾーンと呼ぶ。

より一般的に、単位格子ベクトル $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ を用いて、

$$\boldsymbol{R} = l\boldsymbol{a}_1 + m\boldsymbol{a}_2 + n\boldsymbol{a}_3 \quad (l, m, n \text{ は整数}) \tag{4.32}$$

なる並進移動のもとで系が不変であるとき、式 (4.9) の解は

$$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) \tag{4.33}$$

$$u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{R}) \tag{4.34}$$

と書くことができる。これをブロッホの定理という。ただし波数 $\boldsymbol{k}$ は、$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$ を満たす逆格子ベクトル $\boldsymbol{b}_i$ を用いて

$$\boldsymbol{k} = k_1\boldsymbol{b}_1 + k_2\boldsymbol{b}_2 + k_3\boldsymbol{b}_3 \tag{4.35}$$

と表せる。また、この場合も周期性からブリルアンゾーン $|k_i| \leq 1/2$ だけを考えれば良い。

4.3 バンド構造

波数 $\boldsymbol{k}$ に属するモードがどのような固有値 $\omega(\boldsymbol{k})$ をとるかを表したものをバンド構造という。この章では特にフォトニック結晶における対称性によってバンド構造がどのように表されるかについて議論する。

4.3.1 index-guided モード

図 4.4 のように、z 軸方向に有限の厚さを持った誘電体が xy 平面上に配置されている場合を考える。

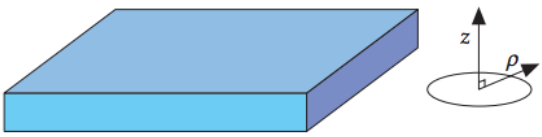

図 4.4: z 軸方向に有限の厚さを持った誘電体。([29] より引用)

$\boldsymbol{\rho} = (x, y)$, $\boldsymbol{k} = k_x\hat{\boldsymbol{x}} + k_y\hat{\boldsymbol{y}}$ とすると、$\boldsymbol{\rho}$ 方向に対して連続的並進対称性をもつため、解は関数 $\boldsymbol{h}(z)$ を用いて次のように表すことができる。

$$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{h}(z) \tag{4.36}$$

z 軸方向に関しては対称性が破れているため、$\boldsymbol{h}(z)$ の形は決定することができない。式 (4.36) を式 (4.9) に代入し、数値的に解いた結果が図 4.5 である。横軸と縦軸はそれぞれ、$k = |\boldsymbol{k}|$ と ω をスケール因子 a で規格化したものを表す。

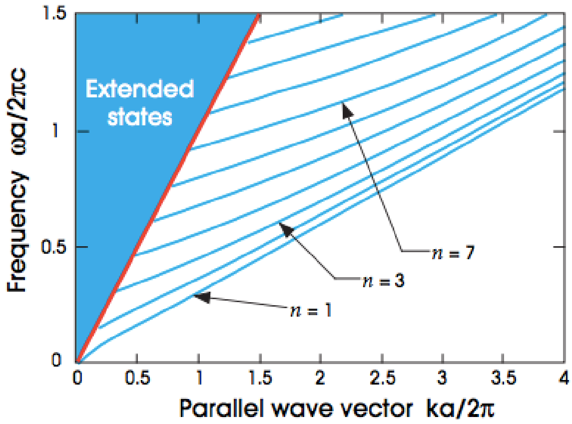

図 4.5: 図 4.4 のバンド構造。([29] より引用)

n は band number と呼ばれ、周波数 ω の小さい順に $n = 1, 2, \cdots$ と番号がつけられる。

板から十分に離れたところでは、系は z 軸方向にも連続的並進対称性を持つとみなすことができるので、z 軸方向の波数を $k_\perp$ とすると

$$\omega = c\sqrt{k^2 + k_\perp^2} \tag{4.37}$$

と表すことができる。この式をみると光線 $\omega = ck$ より上の領域ではどの ω に対しても $k_\perp$ が存在するので、連続的な解になる。これを放射モードという。逆に光線より下の領域 $\omega < ck$ では、

$$k_\perp = i\sqrt{k^2 - \omega^2/c^2} \tag{4.38}$$

となるので、減衰する解になり、光は平板の中に閉じ込められることを意味する。これを index-guided mode という。図 4.5 を見るとわかるように、一般的に index-guided mode は離散的な解になる。

4.3.2 規約ブリルアンゾーン

式 (4.33) を式 (4.9) に代入して整理すると

$$\hat{\Theta}_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\right)^2 \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) \tag{4.39}$$

$$\hat{\Theta}_{\boldsymbol{k}} \equiv (i\boldsymbol{k} + \nabla) \times \frac{1}{\epsilon(\boldsymbol{r})}(i\boldsymbol{k} + \nabla)\times \tag{4.40}$$

が得られる。したがってフォトニック結晶においては、式 (4.39) をもとにブリルアンゾーン内の波数 $\boldsymbol{k}$ と角周波数 $\omega(\boldsymbol{k})$ の関係を求めれば良い。この関係を表したものをフォトニックバンド構造という。

例として図 4.6 のように、xy 平面上において正方格子型に周期構造がある場合を考える。ベクトル場を軸 $\hat{\boldsymbol{n}}$ の周りに α だけ回転させる演算子を $\mathcal{R}(\hat{\boldsymbol{n}}, \alpha)$ とすると、系が $\mathcal{R}$ によって不変であるとき、固有値 $\omega(\boldsymbol{k})$ について、

$$\omega(\mathcal{R}\boldsymbol{k}) = \omega(\boldsymbol{k}) \tag{4.41}$$

が成り立つことがわかっている [29]。つまり、回転対称性によって波数をさらに分類することができる。このようにして全ての対称性を考慮し、これ以上分類できないところまで分類された波数空間の最小単位を規約ブリルアンゾーンという。バンド構造を考えるときは、この規約ブリルアンゾーン内でのバンド構造を考えれば良い。正方格子型のフォトニック結晶の規約ブリルアンゾーンは図 4.6 の右の青い領域のようになる。対称点ごとに一般的に記号が決まっており、正方格子型の場合は Γ, X, M がそれぞれ波数空間上の中心点、辺の中心、角を表す。

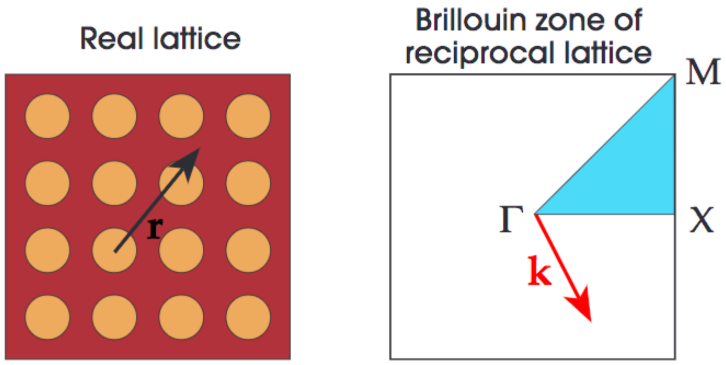

図 4.6: 2 次元正方格子型フォトニック結晶。左の図はフォトニック結晶の周期構造を図で表したものであり、右の図は波数空間内のブリルアンゾーン及び対称点を表す。([29] より引用)

旧 Rsoft 社の光学シミュレーションソフトウェア、BandSOLVE を用いてこのようなフォトニック結晶のバンド構造を、平面波展開法（補遺 C 参照）によって計算する。図 4.7 のように、厚さ 0.22 μm の Si 基盤に周期 0.835 μm で半径 0.295 μm の穴が空いている結晶を考える。表示されているのは有限個の周期構造だが、シミュレーションをする際は x, y, z 軸全方向に関して周期的境界条件が設定される。

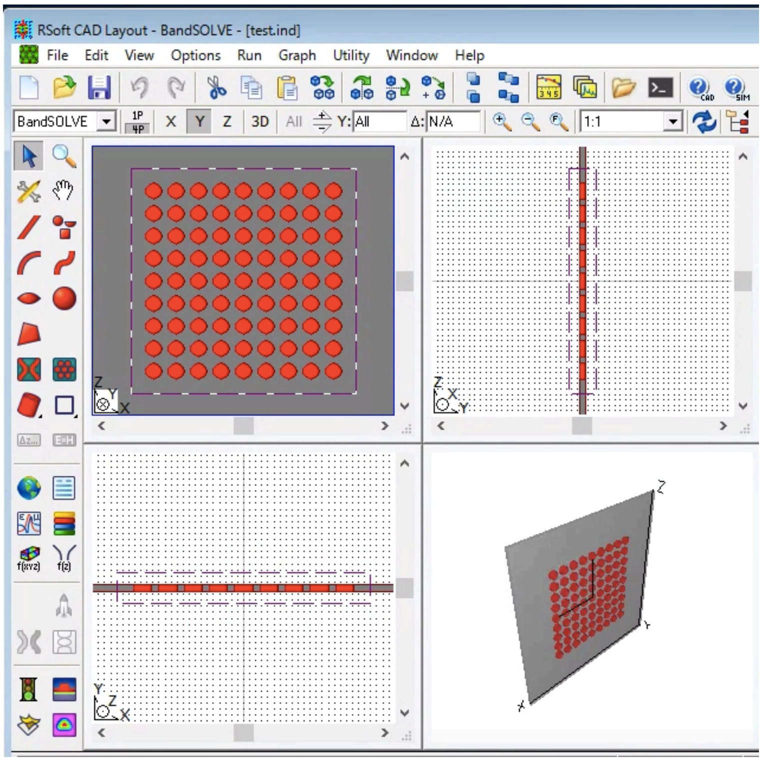

図 4.7: シミュレーションソフト、BandSOLVE の CAD 作成画面。この画面でフォトニック結晶構造を作成する。

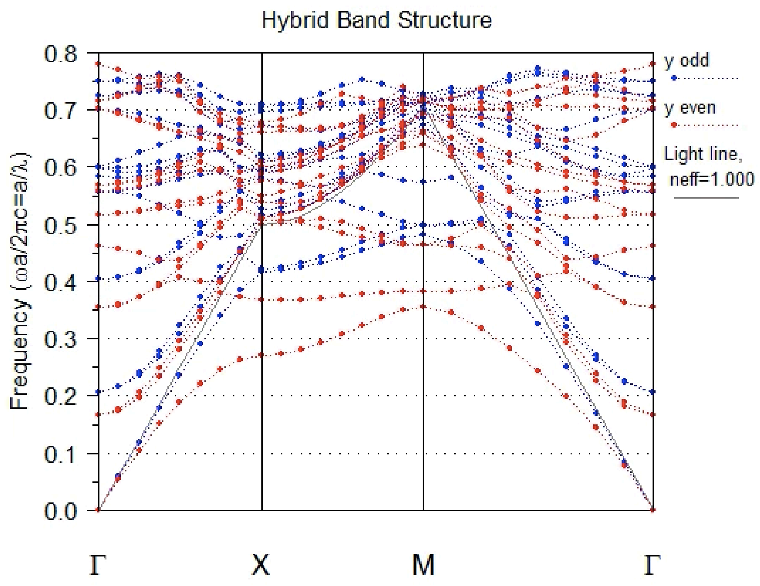

図 4.8: 2 次元正方格子型フォトニック結晶のバンド構造。平面波展開法によって even と odd それぞれバンドナンバー 16 まで計算した。横軸は規約ブリルアンゾーン内での波数を表し、対称点が記号で示されている。縦軸は周波数を周期 $a = 0.835$ で規格化したものである。黒い実践は光線を表す。

シミュレーションを実行すると、図 4.8 が得られる。xz 平面を対称面とする鏡面対称性をもつため、4.2.1 節で見たように、モードを even と odd に分類することができる。ただし、平面波展開法によってモードを求めたため、index-guided mode ではないダミーモード（放射モード）が含まれている。

4.4 guided resonance

以上のような、誘電体に周期構造を作ったフォトニック結晶を使って、高い反射率を実現する鏡を作ることができる。実現の方法にはいくつかあり、バンドギャップを利用するもの [30] や、index-guided mode と入射光が干渉して強め合うことで高反射率が実現される guided resonance [31] がある。本研究では guided resonance を利用したフォトニック反射鏡を作成したため、後者について議論する。

例として、図 4.7 のフォトニック結晶に、光が y 軸方向垂直に入射する場合を考える。このバンド構造上の点に対応する周波数の光が入射したとき、フォトニック結晶によって励起される index-guided mode と直接の入射光が干渉する。光を強めあう干渉を constructive な干渉、弱め合う干渉を destructive な干渉といい、このどちらかが起こる。図 4.9 は、Rsoft のソフトウェア DiffractMOD による反射率のシミュレーション結果である。constructive な干渉が起きている点で高反射率が、destructive な干渉が起きている点で低反射率が実現されている。

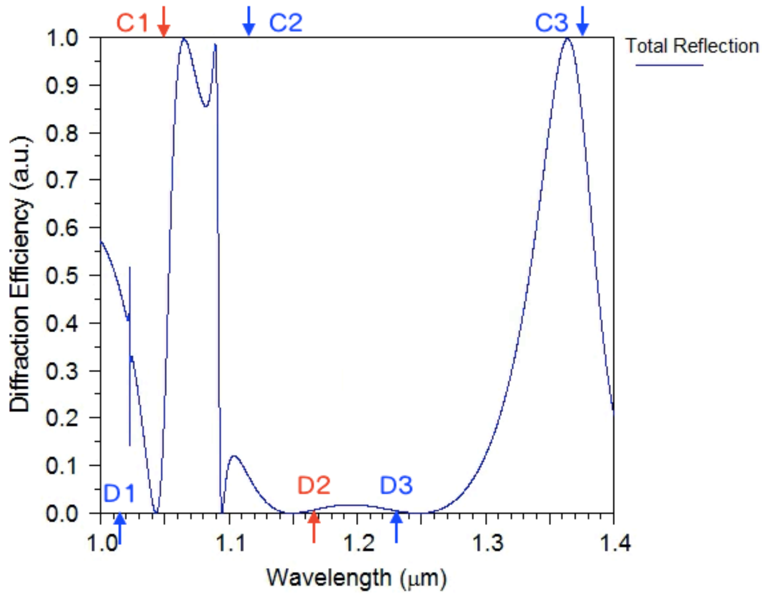

図 4.9: DiffractMOD での反射率シミュレーション。C1〜C3、D1〜D3 はそれぞれ、図 4.11 の Γ 点上の値に対応している。

モードの even と odd の分類をパリティと呼ぶとすると、干渉は次の法則によってできることがわかっている [31, 32]。

- それぞれのパリティについてバンドナンバーの低い順に見ていくと、constructive な干渉をするバンドと、destructive な干渉をするバンドが交互に繰り返される
- 高反射率ピークまたは低反射率ピークは 2 つの干渉点の中間地点に現れる
- 同一パリティでバンドが偶数縮退している場合、constructive な干渉と destructive な干渉の効果が打ち消される

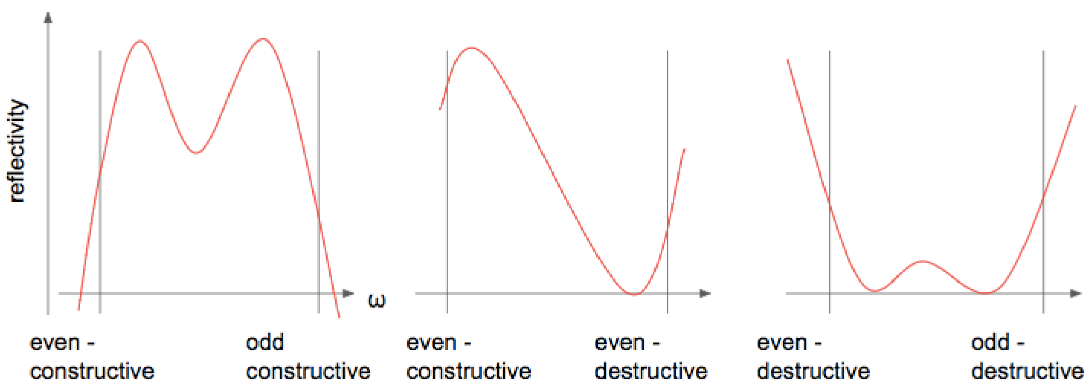

図 4.10: 干渉のパターンの例。

図 4.8 のバンド構造を、有限差分時間領域 (FDTD) 法を用いて計算したのが図 4.11 である。BandSOLVE に実装されている FDTD 法ではパリティを判定することはできないが、y 軸方向に吸収境界条件を設定することができるため、index-guided mode を正しく計算することができる。

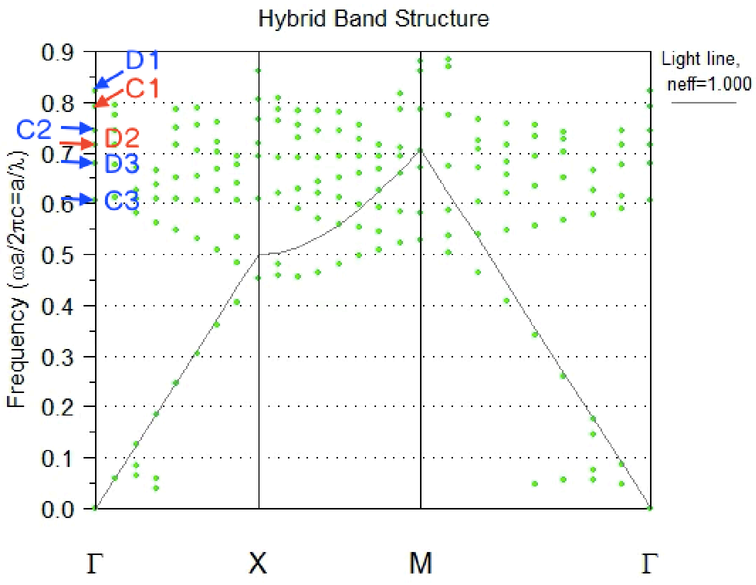

図 4.11: FDTD 法によるバンド構造。

Γ 点上の点に対応する波長を図 4.9 上に矢印で表している。図 4.8 の Γ 点と対応させることで even と odd を分類し、odd のバンドを青、even のバンドを赤で表している。さらに上の法則に則って、constructive な干渉が起きる点を C1〜C3、destructive な干渉が起きる点を D1〜D3 でそれぞれ表している。これと図 4.9 を比べると、およそ上の法則にしたがって高反射率ピーク、低反射率ピークができていることがわかる。

一方、図 4.12 は周期構造を作らない平板の場合のバンド構造である。この場合、even と odd どちらに関しても、全ての Γ 点で偶数縮退しているため guided-resonance は起こらない。

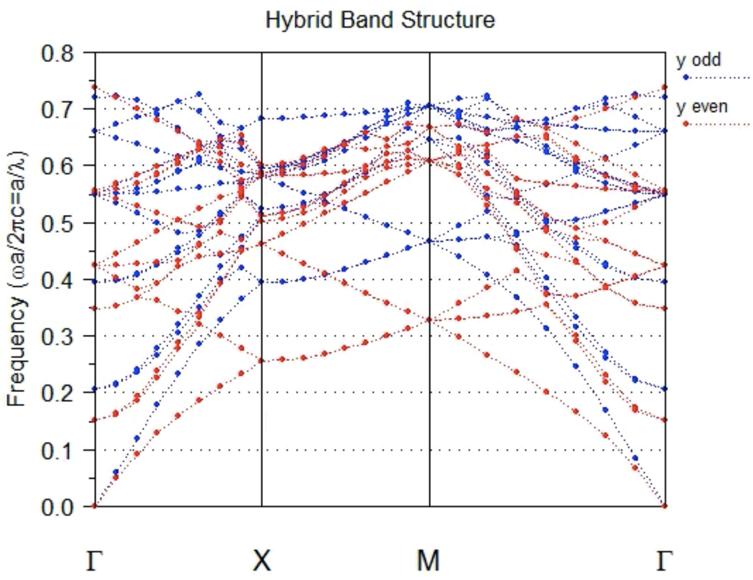

図 4.12: 周期構造を作らない場合のバンド構造。ただし、平面波展開法で計算を行ったためダミーモードが含まれている。

図 4.13 は穴半径を 0（周期構造を作らない場合）から大きくしていった時の、Γ 点でのバンド構造の変化の例である。周期構造を作って連続的対称性を破ることによって縮退が解け、これによって guided-resonance が起こるようになる。

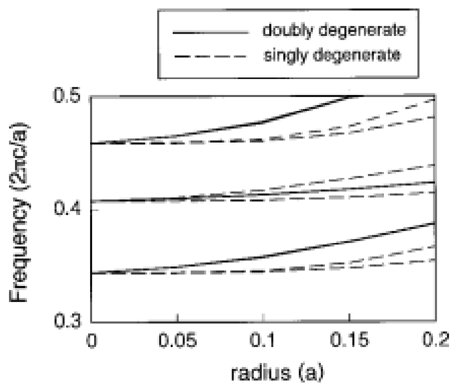

図 4.13: 縮退が解ける様子 ([32] より引用)

4.5 BOX 層付きフォトニック結晶

本研究で作成したフォトニック結晶は図 4.14 のように、Si 基盤、BOX 層（SiO2）、結晶部分（Si）の 3 つの層からなっている。厚さはそれぞれ Si 基盤が 375 μm、BOX 層が 3 μm、結晶部分

が 0.22 μm であり、この結晶部分に周期 0.635 μm で穴を空ける。ここでは穴半径が 0.29 μm の場合についてシミュレーションを行う。

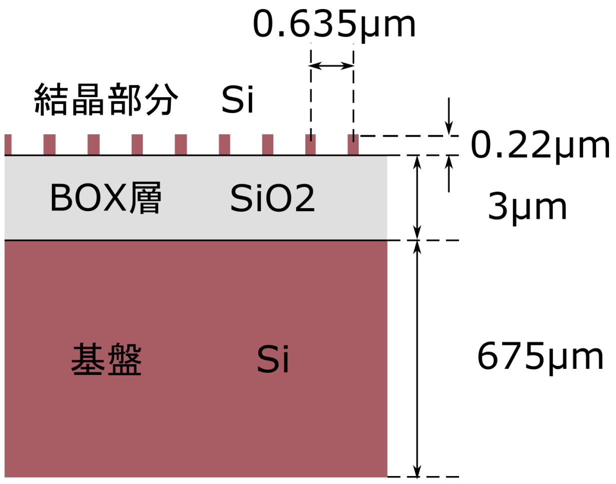

図 4.14: フォトニック結晶の断面図

図 4.15, 図 4.16 はそれぞれ、このフォトニック結晶のバンド構造と反射率のシミュレーション結果である。BOX 層があることによって鏡面対称性が破れるため、パリティの分類はない。上と同様に constructive な干渉が起きる点を C1、C2 で、destructive な干渉が起きる点を D1〜D4 で表しており、図 4.16 上で対応する波長を示している。

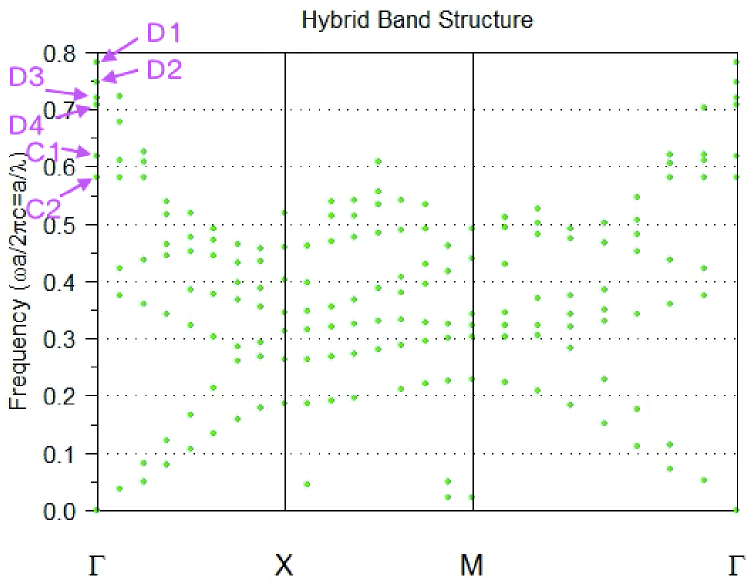

図 4.15: BOX 層つきフォトニック結晶のバンド構造。FDTD 法によりシミュレーションを行った。

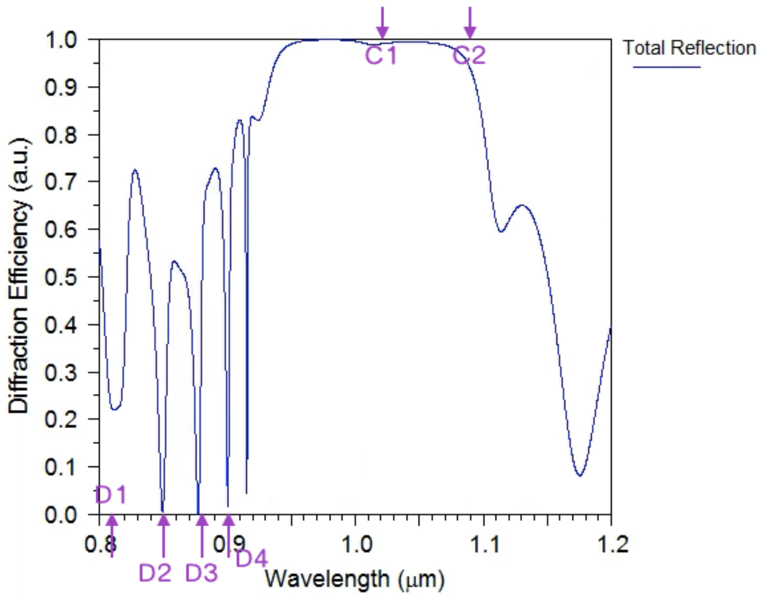

図 4.16: 入射光波長を変化させたときの反射率の変化。バンド構造の Γ 点と反射率ピークの位置がおよそ一致していることがわかる。

4.6 曲率付きフォトニック結晶

本研究では詳しく扱わないが、穴半径を局所的に変化させることで、高反射率を維持しながらフォトニック結晶に曲率をつけることができる [33]。図 4.17 右は周期の長さを変化させた時の、反射率と位相の変化である。高反射率が実現する範囲で周期の長さを変化させることによって、位相をコントロールし、曲率をつけることができる。

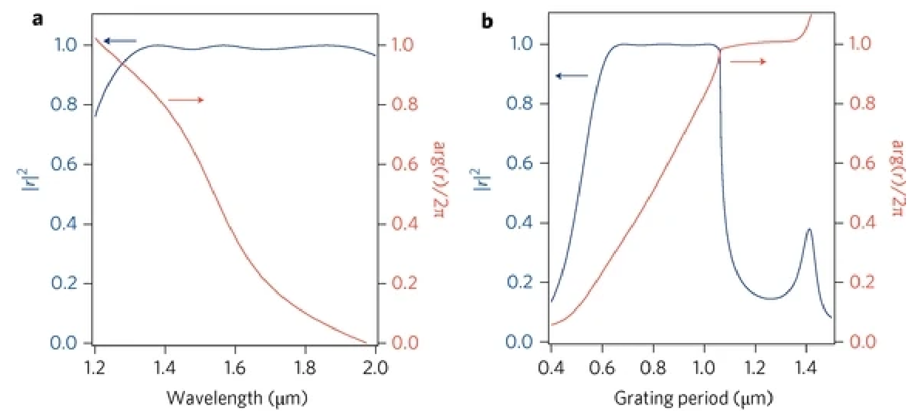

図 4.17: 波長をを変化させた時の反射率と位相の変化（左）と、周期の長さを変化させた時の反射率と位相の変化（右）。青線が反射率の変化を表し、赤線が位相の変化を表す。([33] より引用)

Chapter 5
鏡の特性評価実験

5.1　目的

3.3 節で見たように、サンドウィッチ型光学浮上における全自由度の安定性を理論的及び実験的に示すことに成功しているものの、条件を満たす質量 mg 程度の浮上鏡の作成には成功していない。

本研究の目的は、光学浮上に必要な条件を満たす微小鏡を作成するために、高反射率コーティングストレスによる曲率付きミラー及びフォトニック結晶という 2 つの手法を開発することにある。前者については、作成された薄型石英鏡の曲率と反射率を評価し、それを元にコーティングストレス強度を変えたものを作成して、再度評価するプロセスを繰り返すことにより最終的に条件を満たす微小鏡の作成を目指す。後者については、まずは周期構造を作ることで平面鏡として高反射率が実現するかどうかを検証し、のちに位相コントロールによって曲率を与える手法を開発する。

5.2　目標

前節で述べたように、本研究では薄型石英鏡及びフォトニック結晶の開発を行う。本研究の目標を以下のように設定する。

- Mark Optics 社によって作成された基材を、Laboratoire des Matériaux Avancés 社がコーティングして曲率を付けた薄型石英鏡 2 枚について評価する。評価方法は Fabry-Pérot 共振器を作成することによって、透過光の TMS と FSR の比から曲率を、フィネスから反射率を求めることで行う。
- 東京大学の岩本研究室によって作成された、穴半径を何通りかに変えたフォトニック結晶について反射率を評価する。PD の出力から反射率を求め、穴半径を変化させた場合のシミュレーション結果と比較する。

5.3　実験方法

5.3.1　測定の手順

本研究では、反射率と曲率が既に分かっている鏡（リファレンスミラーと呼ぶことにする。）を基準として、薄型石英鏡の曲率と反射率、及びフォトニック結晶の反射率を測定する。リファレン

スミラーには Lattice Electro Optics 社の BS-1064-R99.2-UF-MPC-0525-100 を使用する（以下、MPC-0525-100 とする)。手順として、まずはリファレンスミラーの反射率と曲率を測定する。

リファレンスミラーの測定

リファレンスミラーの曲率と反射率を求めるために、次の 2 つの Fabry-Pérot 共振器を組んで測定を行う。

1. フロントミラー: MPC-0525-100
   エンドミラー: BS-1064-R99-0-UF-0525

2. フロントミラー: MPC-0525-100
   エンドミラー: BS-1064-R99.2-UF-MPC-0525-30

BS-1064-R99-0-UF-0525 は同じく Lattice Electro Optics 社の平面鏡である。図 5.1 のように共振器を組んで、レーザーの周波数をファンクションジェネレータにより三角派で変調させて PD で透過光を測定することにより、MPC-0525-100 の曲率を求めることができる。

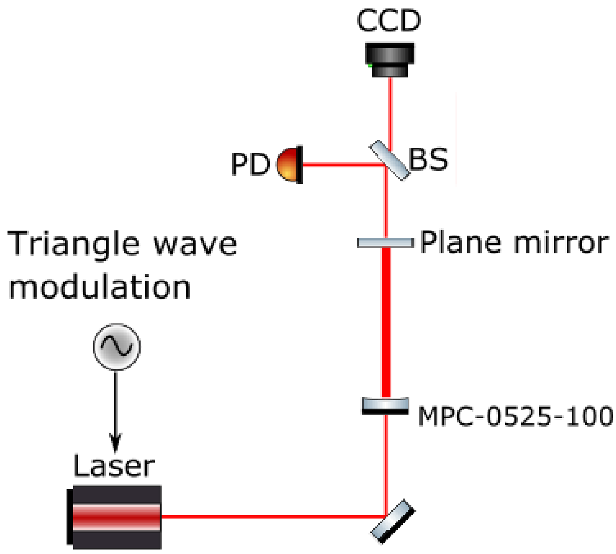

図 5.1: MPC-0525-100 の曲率測定のためのセットアップ

次に、Lattice Electro Optics 社の BS-1064-R99.2-UF-MPC-0525-30（以下 MPC-0525-30 とする。）をエンドミラーとして共振器を組む。

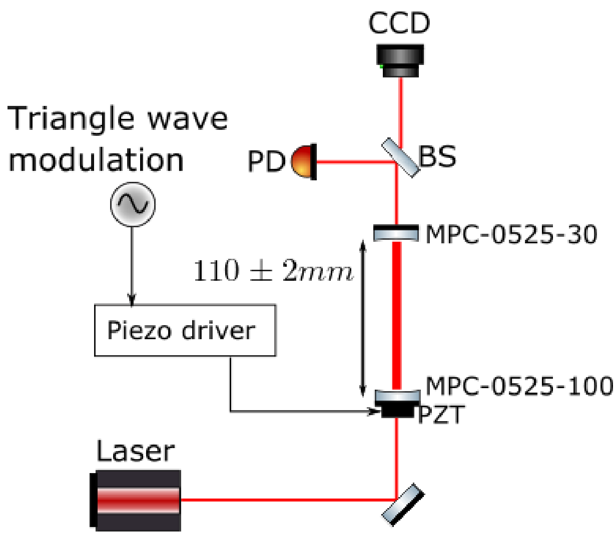

図 5.2: MPC-0525-100 の反射率測定のためのセットアップ

MPC-0525-30 は MPC-0525-100 と反射率の設計値が同じであるため、共振器のフィネスを求めることによって式 (3.11) からリファレンスミラーの反射率を測定することができる。ただし、周波数変調で十分な大きさの変調が得られなかったため、この測定以降は MPC-0525-100 にピエゾ素子を取り付けて三角波を入力し、共振器長を変化させることで測定を行った。

Mark Optics ミラーの測定

リファレンスミラーである MPC-0525-100 の曲率と反射率を測定できたら、エンドミラーを測定したい薄型石英鏡にして測定を行う。PBS を挟んで 1/4 波長板と 1/2 波長板を置くことで p 偏光と s 偏光それぞれにおける反射率を測定した。

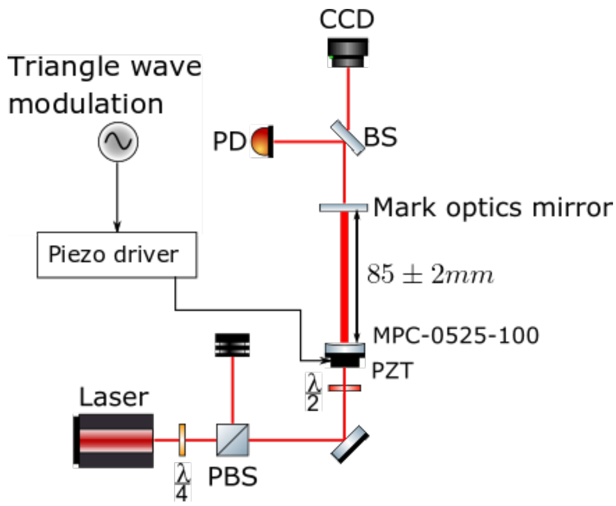

図 5.3: Mark optics ミラー測定のセットアップ

フォトニック結晶の測定

フォトニック結晶については、反射光と透過光ともにレーザー光の形状がガウシアンにならなず、共振させることが難しかったため、PD を用いて反射率の測定を行った。フォトニック結晶は入射方向によって反射率が変化してしまうため、垂直入射で測定できるようにビームスプリッタを用いて図 5.4 のようなセットアップを組んだ。PD で測定されるパワーを、リファレンスミラーを同じ位置においた時のパワーと比べることによって反射率を測定する。

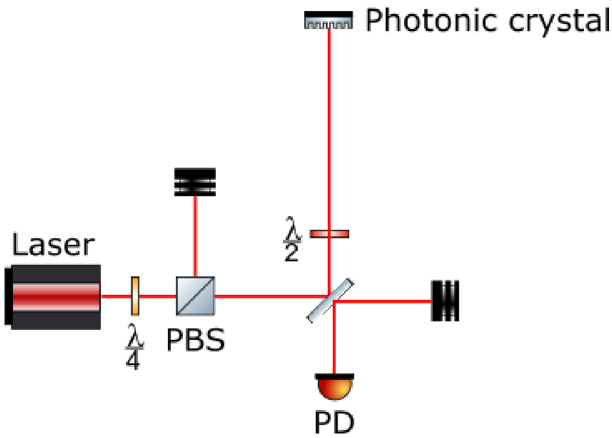

図 5.4: フォトニック結晶ミラー測定のセットアップ

5.3.2 実験器具

レーザー

NKT Photonics 製のファイバーレーザー、Koheras BasiK Y10 を使用した。波長は 1064nm で最大出力は 14mW である。リファレンス用ミラー測定の際、レーザー周波数の変調を用いているが、変調効率を測定すると、

$$A = 0.852 \pm 0.006 \text{ GHz/V} \tag{5.1}$$

となった。

図 5.5: NKT Photonics 製ファイバーレーザー

コリメータの位置を 0 として、ビームプロファイルを行った結果は図 5.6 のようになった。

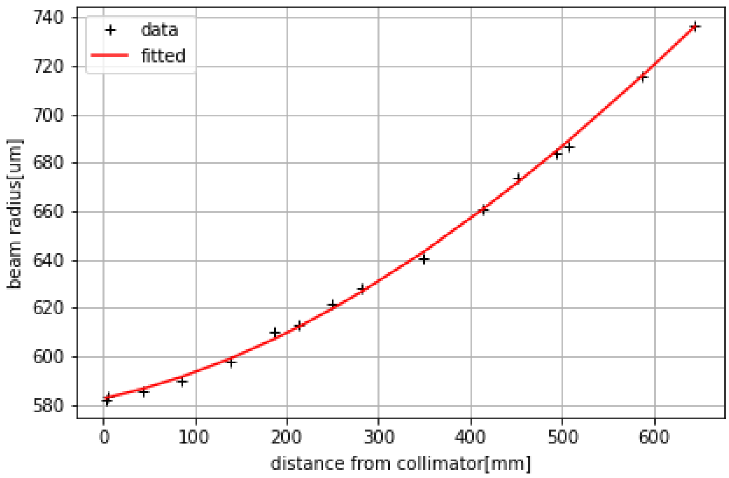

図 5.6: レーザー光のビームプロファイル

点は測定点、線はガウシアンビームでフィッティングした結果である。これにより、レーザー光のウエスト半径とウエスト位置はそれぞれ、-134.2 mm, 577.2 μm と求まった。

フォトディテクター

フォトディテクターのキャリブレーション（入射光パワーに対する電圧出力）は図 5.7 のようになり、フィッティングの結果、センサ効率は 0.46 V/mW となった。

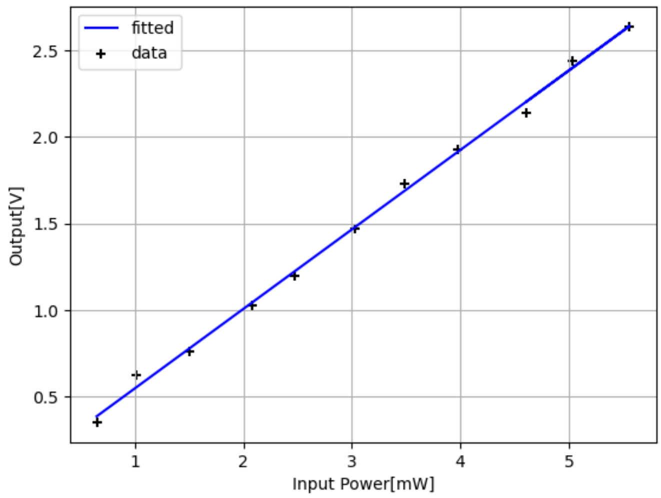

図 5.7: PD のキャリブレーション

ピエゾ素子

レーザー周波数変調では、十分な変調が得られないため、MPC-0525-100 の曲率測定以外は鏡にピエゾ素子を取り付けて三角波を入力することによって、共振器長を変動させて測定を行った。ピエゾ素子には、THOR LABS 製の Piezo Ring Chip を、ピエゾドライバには同じく THOR LABS 製の 3 チャンネル開ループピエゾコントローラを用いた。

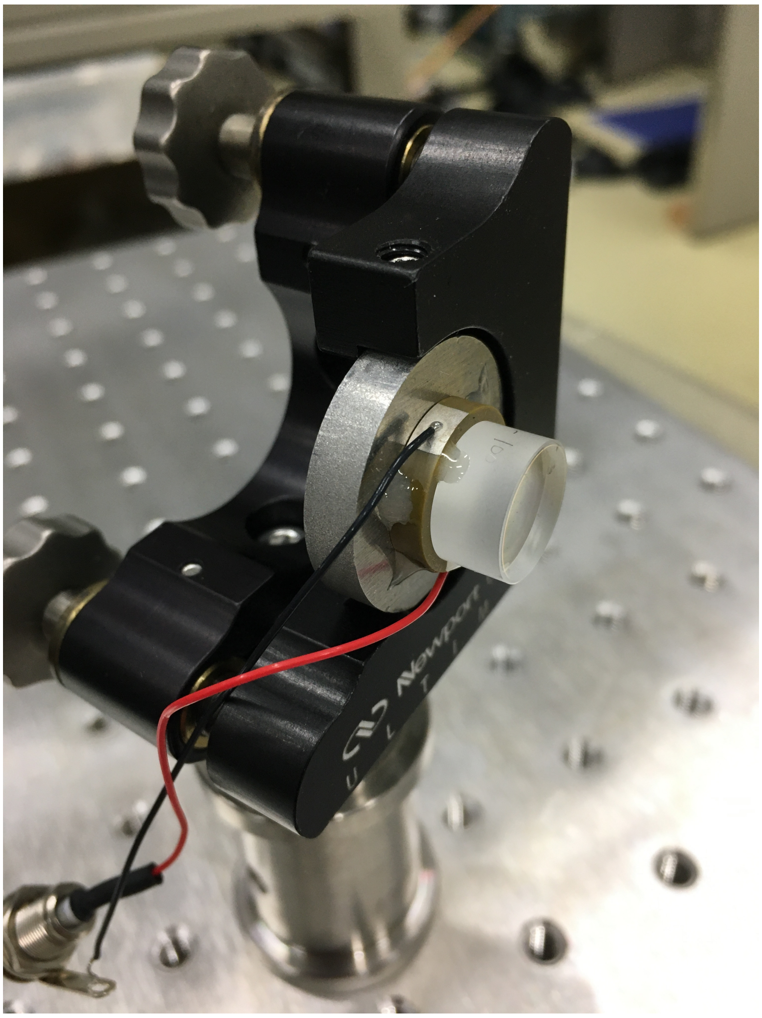

図 5.8: MPC-0525-100 とピエゾ素子をアラルダイトで接着した。

この素子に電圧を加えた時の応答は図 5.9 のようになる。

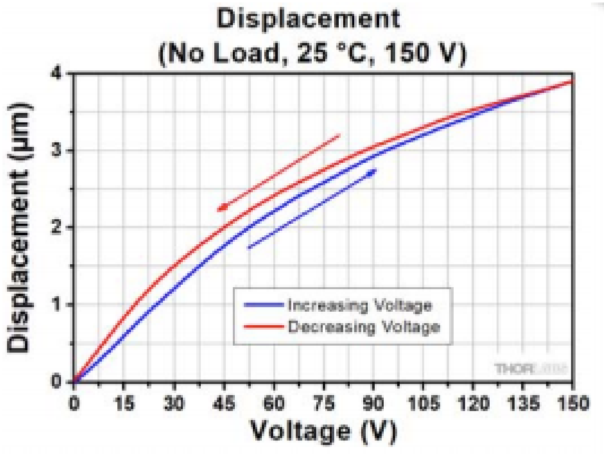

図 5.9: ピエゾ素子の電圧応答 ([35] より引用)

上りの方が線形に近い曲線になっているため、測定は全て三角波の上りのデータを使った。

LEO ミラー

前の節で述べたように、Lattice Electro Optics (LEO) 製のハーフインチミラーを 3 つ用いた。

- BS-1064-R99-0-UF-0525：反射率 99%に設計された平面鏡
- BS-1064-R99.2-UF-MPC-0525-100：反射率 99.2%、曲率 100mm に設計された片側凹ミラー
- BS-1064-R99.2-UF-MPC-0525-30：反射率 99.2%、曲率 30mm に設計された片側凹ミラー

フォトニック結晶

図 4.14 で見たように、厚さ 375 μm の Si 基盤、3 μm の BOX 層、0.22 μm の結晶部分の 3 層からなる。この結晶部分に周期 635um で穴が空いている。作成されたフォトニック結晶は、写真のように 6 つの測定対象部分と 3 つのリファレンス部分からなる。

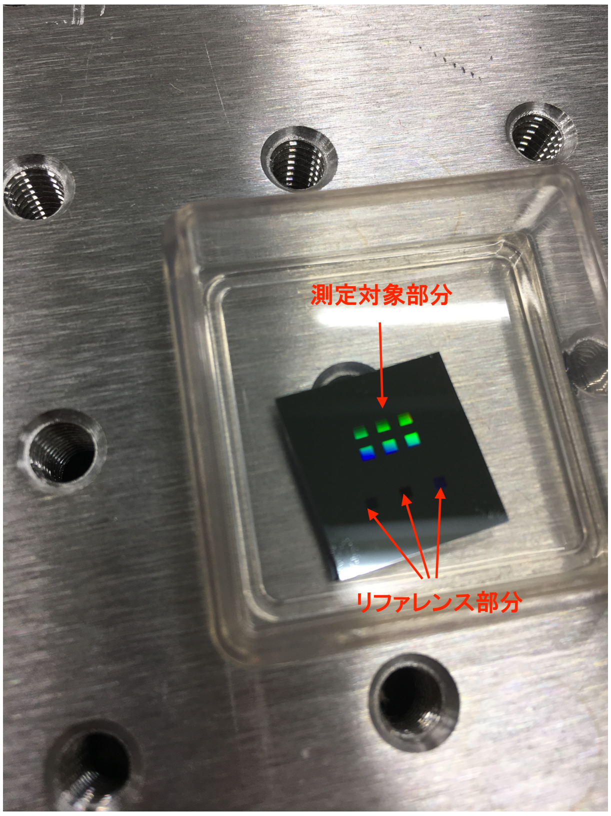

図 5.10: フォトニック結晶。1 mm × 1 mm の領域に、穴半径を変化させた結晶部分が作成されている。

6 つの測定対象部分は穴半径を変化させていて、その半径の実測値は図 5.11 のようになる。このようなサンプルがそれぞれ 2 種類ずつ、合計 4 つあり、EB20201106-A と EB20201106-B は 0.237 μm から 0.3015 μm、EB20200911-B と EB20200911-C は 0.2935 μm から 0.3175 μm の間でそれぞれ穴半径を変化させている。ただし、EB20200911-B と EB20200911-C の穴半径 0.3175 μm の結晶部分は、隣接する穴と接続してしまっている。

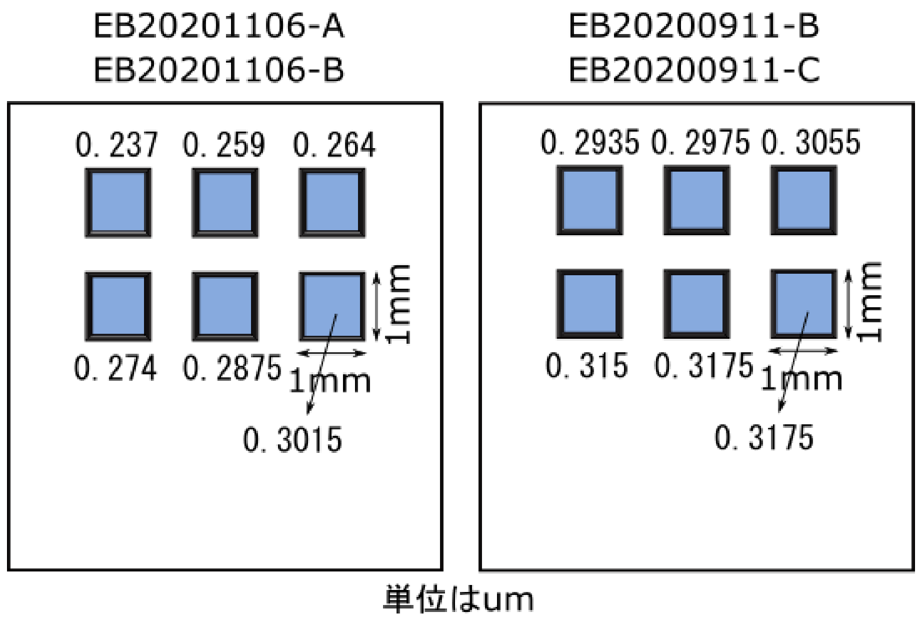

図 5.11: 作成されたフォトニック結晶の規格。

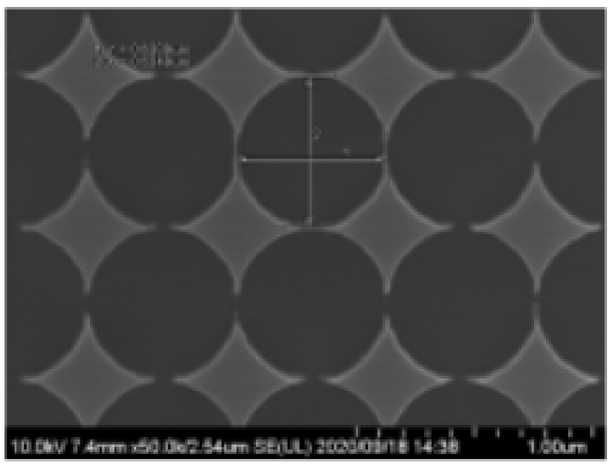

図 5.12: 穴半径 0.3175 μm の結晶部分の様子。隣接する穴と接続している。([36] より引用。)

薄型石英鏡

基材は Mark Optics 社によって作成された、直径 25.4 ± 0.2 mm、厚さ 0.100 ± 0.025 mm、型番 WF1000X00431090 の鏡である。コーティングは LMA (Laboratoire des Matériaux Avancés) によって片面に行われ、反射率 90% 以上に設計されている。

Chapter 6
実験結果と考察

本研究では、光学浮上に向けた微小鏡の候補として、薄型石英鏡とフォトニック結晶の 2 種類について評価を行った。まずはそれらを測定するためのリファレンスミラーについて、曲率と反射率を測定したものをまとめる。その次に薄型石英鏡について、Fabry-Pérot 共振器での測定結果から曲率と反射率を計算する。最後に、フォトニック結晶についてリファレンスミラーとの比較から反射率を求め、旧 Rsoft 社のソフトウェア MOST でのシミュレーション結果と比較する。

6.1 リファレンスミラーの測定

図 5.1 のセットアップにおいて PD の出力と周波数変調信号をプロットしたものが図 6.1 である。

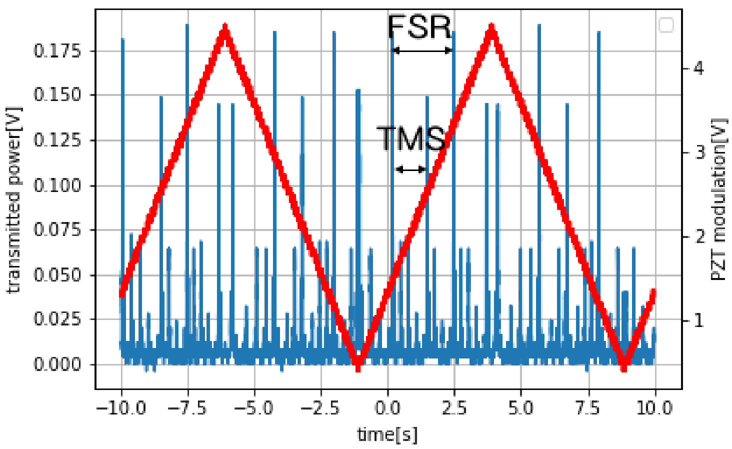

図 6.1: レーザー光の周波数を三角波で変調させた時の、透過光の変化の様子。青線が透過光、赤線が変調信号である。

式 (5.1) の周波数変調効率の値を利用して、式 (3.9) から共振器長を求めると

$$L = 96.8 \pm 0.9 \text{ mm} \tag{6.1}$$

となった。共振器長としてはこの値を用いる。

各周期について FSR と TMS の比をとって式 (3.17) から Gouy 位相を求めた。これによって MPC-0525-100 の曲率を計算すると、

$$R_F = 99 \pm 1\ \mathrm{mm} \tag{6.2}$$

となった。

次に図 5.2 のセットアップで同様の測定を行った結果が図 6.2 である。

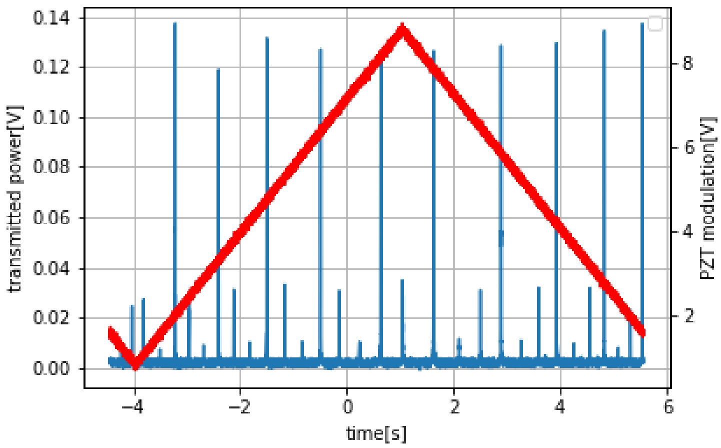

図 6.2: フロントミラーを MPC-0525-100、エンドミラーを MPC-0525-30 にして共振させ、共振器長を変化させた時の透過光の様子（青線）。赤線はピエゾドライバに入力した三角派。

同様に FSR と TMS の比を取って曲率を求めると

$$R_E = 31 \pm 6\ \mathrm{mm} \tag{6.3}$$

となり設計値とおよそ一致することがわかる。

反射率を求めるために、各 00 モードのピークについてローレンチアン

$$f(x) = A\frac{d^2}{(x-x_0)^2 + d^2} \tag{6.4}$$

で 12 点に渡ってフィッティングした。ここで x_0 はピークの中心点、d はピークの半値半幅を表す。半値全幅と FSR の比から共振器のフィネスを求めると

$$\mathcal{F} = 280 \pm 10 \tag{6.5}$$

となった。2 つの鏡の反射率が等しいと仮定すると反射率は式 (3.11) により、

$$r_{\mathrm{F}} = 99.44 \pm 0.02\% \tag{6.6}$$

となる。

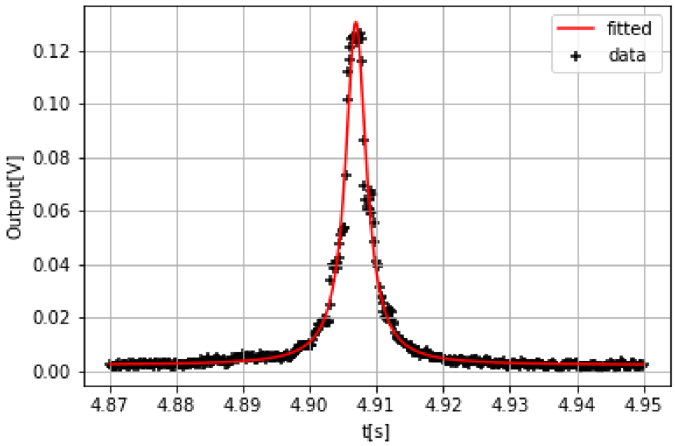

図 6.3: ローレンチアンによるフィッティング。

6.2 薄型石英鏡の測定

以上の測定によってリファレンスミラーの曲率と反射率を求めることができたので、これを用いて 2 枚の薄型石英鏡の曲率と反射率を決定することができる。図 5.3 のようにセットアップを組み、共振器長を測定すると

$$L = 85 \pm 2 \text{ mm} \tag{6.7}$$

となった。同様に PZT により共振器長を変動させて、透過光を測定した結果が図 6.4 である。

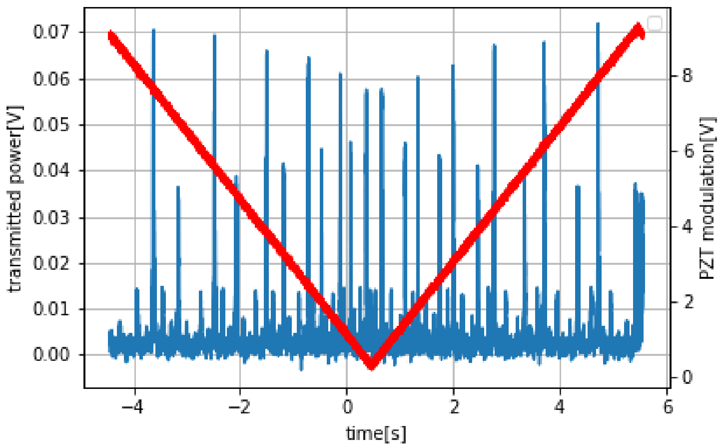

図 6.4: 薄型石英鏡の測定結果。

FSR と TMS の比から曲率を、フィネスから反射率を求めた結果、以下の表のようになった。

	曲率	反射率 (s 偏光)	反射率 (p 偏光)
1 枚目	490^{2500}_{260} mm	$95.7 \pm 0.1\%$	$95.9 \pm 0.3\%$
2 枚目	400^{1200}_{230} mm	$94.2 \pm 0.3\%$	$93.9 \pm 0.4\%$

表 6.1: 薄型石英鏡の曲率と反射率測定結果

この共振器のパラメータ設計は曲率が -30 mm 程度のものを正確に測定するためのものであったが、実際の曲率はこれよりも大きい（平面鏡に近い）値となったため誤差が大きくなっている。この測定精度の範囲では 2 枚とも凸向きに曲率は確認できず、平面鏡だと言える。

反射率に関しては設計値の通り、90%以上が実現されている。

6.3 フォトニック結晶

図 5.4 のセットアップによって s 偏光と p 偏光それぞれにおいて反射光量を測定し、フォトニック結晶を MPC-0525-100 に置き換えた時の反射光量と比較することでフォトニック結晶の反射率を測定した結果、図 6.5 のようになった。シミュレーション結果と比べて反射率が大幅に低下しているサンプルもあるが、穴半径 0.2935 μm〜0.3055 μm の 4 つのサンプルにおいて、約 95% 程度の反射率を実現できていることがわかる。

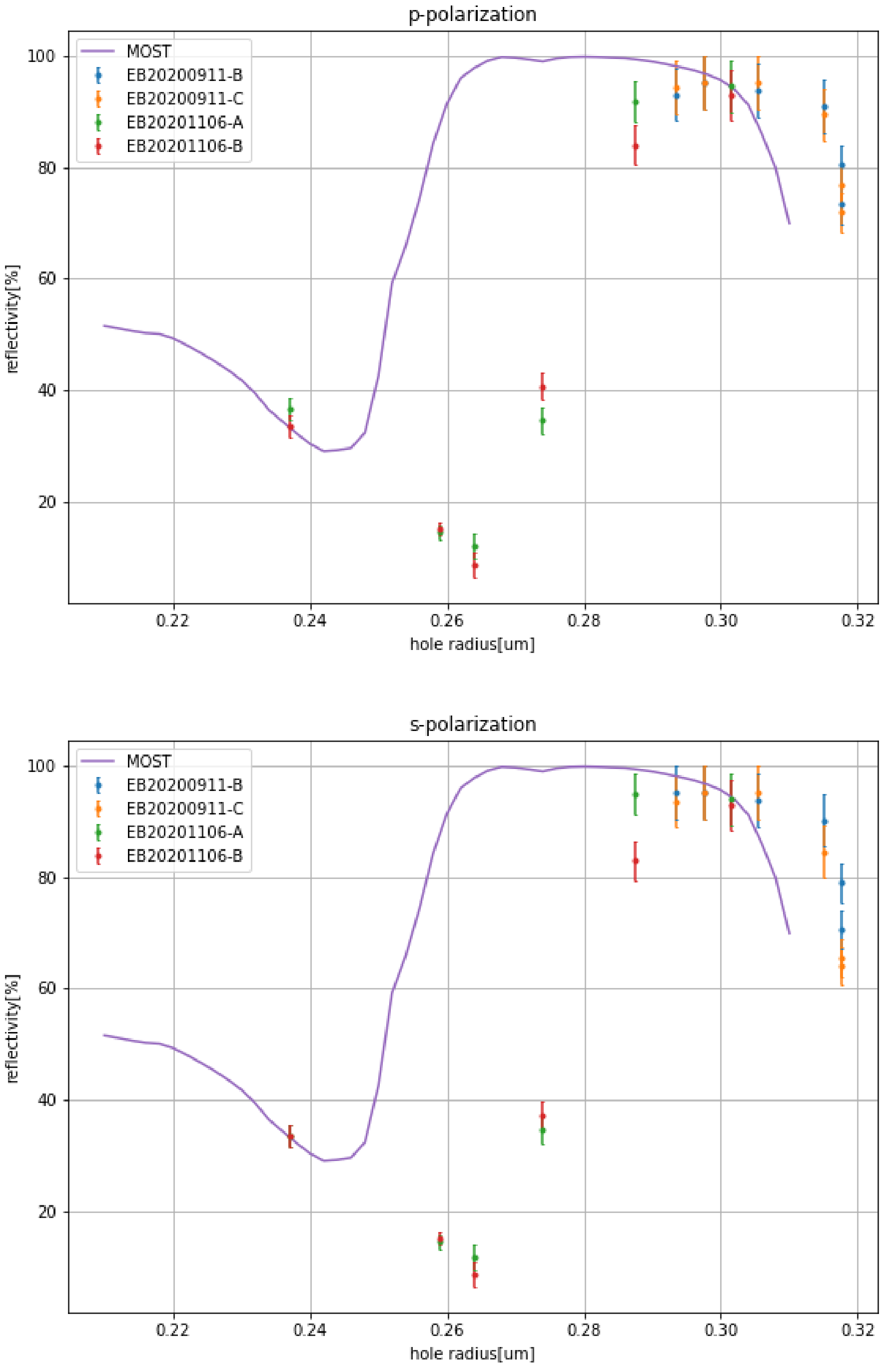

図 6.5: 穴半径を変えた時の反射率の変化。実線は MOST による反射率シミュレーションをプロットしたものである。

Chapter 7
結論と今後の展望

7.1 結論

サンドイッチ型光学浮上の実現に向けて、曲率のついた質量 mg 程度の高反射率微小鏡の作成を目指している。本研究ではそのような微小鏡を作成する手法として、コーティングのストレスで曲率をつける方法及びフォトニック結晶の開発を行った。実際に作成したサンプルについて反射率や曲率を評価した結果を、以下にまとめる。

- 薄型石英鏡に関しては、現在の測定精度の範囲では曲率は確認されなかった。反射率は設計値の通り 90%以上となった。
- フォトニック結晶に関しては、周期 0.635 μm、穴半径 0.2935 μm〜0.3055 μm の結晶において、95%程度の反射率を実現することができた。

7.2 今後の展望

薄型石英鏡については、コーティングの精度をあげて反射率を向上させるとともに、より強いストレスをかけて曲率をつけたものを作成し評価する。また測定に関して、共振器を真空槽の中に入れることによって雑音を減らし、測定精度の向上を目指す。フォトニック結晶についても作成の精度をあげて反射率を向上させるとともに、反射光をガウシアンに近づけて共振器によって反射率及び曲率を測定できるように改善を行う。また、局所的な非周期構造によって曲率をつける可能性を模索する。

補遺 A
Gaussian ビーム光学

z 軸方向に進むレーザー光の表式を考える。波動方程式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{A.1}$$

の解の形として、振幅部分 $\psi(\boldsymbol{r})$ と z 軸方向に進行する平面波 $e^{i\omega(t-z/c)}$ に分離した

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \psi(\boldsymbol{r})e^{i\omega(t-z/c)} \tag{A.2}$$

を考える。$\psi(\boldsymbol{r})$ の z 軸方向の変化は十分に小さく、

$$\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right| \ll \frac{\omega}{c}\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right| \tag{A.3}$$

と近似できるとすると、式 (A.1) は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2i\frac{\omega}{c}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\psi(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{A.4}$$

となる。この解は

$$U_{lm}(\boldsymbol{r}) = U_l(x,z)U_m(y,z)\exp[-ikz + i(l+m+1)\zeta(z)] \quad (l, m \text{ は非負整数}) \tag{A.5}$$

である。$U_l(x,z), U_m(y,z)$ はそれぞれ x 軸方向、y 軸方向の電場振幅の分布を表しており、具体的には

$$U_l(x,z) = \left(\frac{2}{\pi w^2(z)}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{1}{2^l l!}}H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right)\exp\left[-\left(\frac{x}{w(z)}\right)^2 - i\frac{kx^2}{2R(z)}\right] \tag{A.6}$$

と表される。H_l は Hermite 多項式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \tag{A.7}$$

である。その他、各記号はそれぞれ

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \text{波数} \tag{A.8}$$

$$w_0 \quad \text{ビームウエスト半径} \tag{A.9}$$

$$z_0 = \frac{k\omega_0^2}{2} \quad \text{Rayleigh レンジ} \tag{A.10}$$

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad \text{ビーム半径} \tag{A.11}$$

$$R(z) = z\left[1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right] \quad \text{波面の曲率半径} \tag{A.12}$$

$$\zeta(z) = \arctan\frac{z}{z_0} \quad \text{Gouy 位相} \tag{A.13}$$

である。このような Hermite 多項式と Gaussian の積で表される解を Hermite-Gaussian モードという。

$(l,m)=(0,0)$, $(l,m)\neq(0,0)$ の Hermite-Gaussian モードをそれぞれ基本モード、高次モードという。レーザー光源から出た光は理想的には基本モードだけからなるが、実際には高次モードが含まれる他、共振器のミスアライメントなどがあると高次モードの影響が大きくなるため、考慮に入れる必要がある。

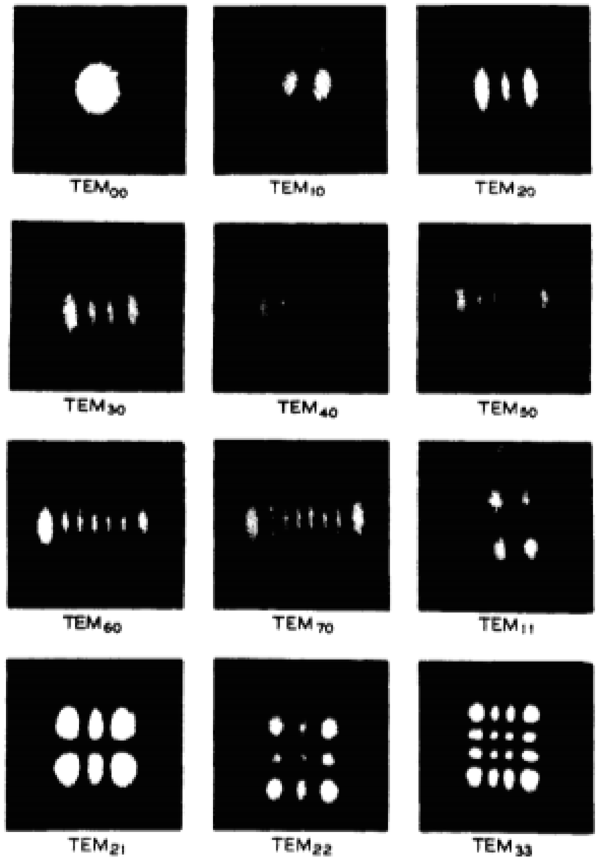

図 A.1: Hermite-Gaussian モードの空間分布の様子 ([26] より引用)。TEM_{lm} が (l,m) モードを表す。

補遺 B
光学ばね

共振器長が共振点 L_0 から $\delta x(t)$ だけ変動している場合を考える。

$$L(t) = L_0 + \delta x(t) \tag{B.1}$$

この時、共振器を構成する鏡への光輻射圧は、光バネという振る舞いをする。光が往復する間に進む位相が、共振器長の変動によって共振点 ϕ_0 から

$$\phi(t) = \phi_0 + \delta\phi(t) \tag{B.2}$$

と変動したとすると、共振器内の電場 E_{circ} は式 (3.2) と同様に共振器内の光の往復を考えることで、

$$E_{\mathrm{circ}} = t_{\mathrm{F}} E_{\mathrm{in}} \left(r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\phi(t-L_0/c)} + r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\phi(t-L_0/c)} r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\phi(t-3L_0/c)} + \cdots \right) \tag{B.3}$$

$$= t_{\mathrm{F}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\phi_0} \right)^n \exp\left[-i \sum_{m=1}^{n} \delta\phi \left(t - \frac{2m-1}{c} L_0 \right) \right] E_{\mathrm{in}} \tag{B.4}$$

$$\simeq t_{\mathrm{F}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\phi_0} \right)^n \left[1 - i \sum_{m=1}^{n} \delta\phi \left(t - \frac{2m-1}{c} L_0 \right) \right] E_{\mathrm{in}} \tag{B.5}$$

となる。電場についても、

$$E_{\mathrm{circ}}(t) = E_{\mathrm{circ0}} + \delta E_{\mathrm{circ}}(t) \tag{B.6}$$

と変動成分を定義すると、

$$\delta E_{\mathrm{circ}}(t) = -i t_{\mathrm{F}} E_{\mathrm{in}} t_{\mathrm{F}} \sum_{n=0}^{\infty} (r_F r_E e^{-i\phi_0})^n \sum_{m=1}^{n} \delta\phi \left(t - \frac{2m-1}{c} L_0 L_0 \right) \tag{B.7}$$

となる。これを周波数空間へフーリエ変換し、$\theta = L_0\omega/c$ とおくと、

$$\delta E_{\mathrm{circ}}(\omega) \simeq -\frac{i E_{\mathrm{circ0}}}{1 - r_E r_F e^{-i(\phi_0+\theta)}} \delta\phi(\omega) \tag{B.8}$$

ただし、$\phi_0 \ll 1$, $\theta \ll 1$, $r_{\mathrm{E}}, r_{\mathrm{F}} \simeq 1$ と仮定した。ここで、detuning Δ と、cavity decay rate κ を

$$\kappa \equiv \pi\nu_{\mathrm{FWHM}}, \quad \Delta \equiv \omega_L - \omega \tag{B.9}$$

とすると、

$$\delta E_{\mathrm{circ}}(\omega) \simeq -\frac{\omega_L E_{\mathrm{circ0}}}{L_0} \frac{1}{\Delta + \omega - i\kappa} \delta x(\omega) \tag{B.10}$$

となる。共振器内パワー $P_{\rm circ}(\omega) \propto E_{\rm circ}(\omega)$ の変動は

$$\delta P_{circ}(\omega) \tag{B.11}$$
$$= E^*_{\rm circ0}\delta E_{\rm circ}(\omega) + E_{\rm circ0}\delta E^*_{\rm circ}(\omega) \tag{B.12}$$
$$= -\frac{P_{\rm circ}\omega_L}{L_0}\left[\frac{\Delta+\omega}{(\Delta+\omega)^2+\kappa^2} + \frac{\Delta-\omega}{(\Delta-\omega)^2+\kappa^2} + i\left(\frac{\kappa}{(\Delta+\omega)^2+\kappa^2} + \frac{\kappa}{(\Delta-\omega)^2+\kappa^2}\right)\right]\delta x(\omega) \tag{B.13}$$

で表すことができる。鏡の受ける輻射圧は $F = 2P_{\rm circ}/c$ であるから、複素ばね定数を

$$K(\omega) \equiv -\frac{\delta F(\omega)}{\delta x(\omega)} \equiv K^{opt}(\omega) + im\omega\Gamma^{opt}(\omega) \tag{B.14}$$

と定義すると、実部と虚部はそれぞれ

$$K^{\rm opt} \simeq \frac{8\omega_L t_{\rm F}^2}{c^2}\left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^3 \frac{\Delta/\kappa}{[1+(\Delta/\kappa)^2]^2}P_{\rm in}, \tag{B.15}$$
$$\Gamma^{\rm opt} \simeq -\frac{16\omega_L t_{\rm F}^2}{\kappa m c^2}\left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^3 \frac{\Delta/\kappa}{[1+(\Delta/\kappa)^2]^3}P_{\rm in} \tag{B.16}$$

と表すことができる。ただし、低周波 ($\omega \ll \sqrt{\kappa^2+\Delta^2}$) での近似を行った。$K^{\rm opt}$ と $\Gamma^{\rm opt}$ はそれぞれ光バネのバネ定数と damping rate (減衰率) を表しており、図 B.1 のように振る舞う。

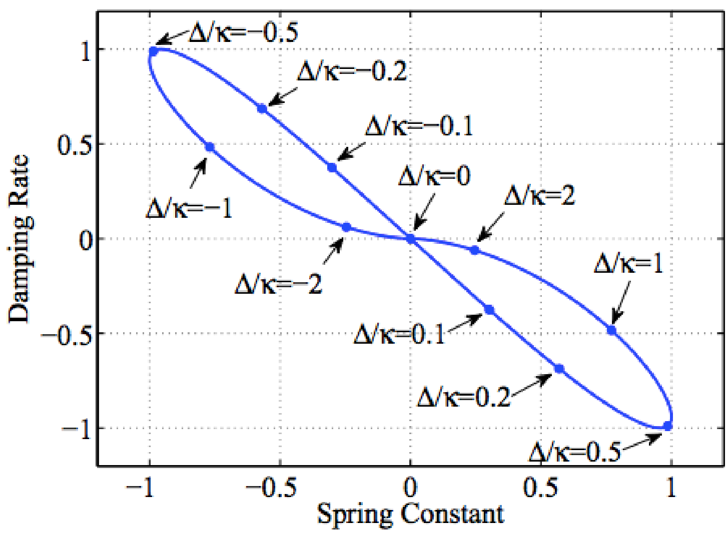

図 B.1: Δ/κ を変化させた時の $K^{\rm opt}$ と $\Gamma^{\rm opt}$ の振る舞い。([17] より引用)

補遺 C
フォトニックバンド構造の数値計算

C.1　平面波展開法

式 (4.40) を用いて、次のエネルギー汎関数を定義する。

$$E[\boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r})] \equiv \frac{(\boldsymbol{u_k}, \hat{\Theta}_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{u_k})}{(\boldsymbol{u_k}, \boldsymbol{u_k})} \tag{C.1}$$

このとき、変分 $\delta \boldsymbol{u_k}$ に対して $E[\boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r})]$ の変分は次のように表される。

$$\delta E[\boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r})] \equiv E[\boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r}) + \delta \boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r})] - E[\boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r})] \tag{C.2}$$

$$\simeq \frac{(\delta \boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})) + (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}), \delta \boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r}))}{2} \tag{C.3}$$

ただし

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{2}{(\boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r}))} \left(\hat{\Theta}_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r}) - E[\boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r})] \boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r}) \right) \tag{C.4}$$

である。よってエネルギー汎関数が極小値をとるとき、任意の $\delta \boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r})$ に対して $\delta E[\boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r})] = 0$ となるから、

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\Theta}_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r}) = E[\boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r})] \boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r}) \tag{C.5}$$

となる。よって $\boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r})$ はマスター方程式の解となるから、式 (4.39) の固有値 ω を最小化する $\boldsymbol{u_k}$ を数値計算で求めるには、エネルギー汎関数を最小化する $\boldsymbol{u_k}$ を見つければ良い。また、次のバンドとしては $\boldsymbol{u_k}$ と直交する空間の中からエネルギー汎関数が最小になるものを解とする。計算方法としては、逆格子ベクトル $\boldsymbol{G}$ を用いて $\boldsymbol{u_k}$ を次のようにフーリエ展開する。

$$\boldsymbol{u_k}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{c_G}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{C.6}$$

これにより、$\boldsymbol{c_G}$ を求める行列問題に帰着させる。

C.2　有限差分時間領域 (FDTD) 法

例として、マクスウェル方程式のうち

$$\frac{\partial H_x(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu(\boldsymbol{r})} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \tag{C.7}$$

$$\frac{\partial E_y(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon(\boldsymbol{r})} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \tag{C.8}$$

を解くことを考える。時間を Δt ごとに区切り、n ステップ目において時刻 $t = n\Delta t$ での電場 $\boldsymbol{E}^n$ と時刻 $t = (n+1/2)\Delta t$ での磁場 $\boldsymbol{H}^{n+1/2}$ を数値計算する。さらに図 C.1 のような直方体を考え、空間座標を離散化して (i,j,k) で表す。このようにすると、マクスウェル方程式は次のような漸化式で表すことができる。

$$H_{x(i,j,k)}^{n+1/2} = H_{x(i,j,k)}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta z}\left(E_{y(i,j,k)}^{n} - E_{y(i,j,k-1)}^{n}\right) - \frac{\Delta t}{\mu \Delta y}\left(E_{z(i,j,k)}^{n} - E_{z(i,j-1,k)}^{n}\right) \tag{C.9}$$

$$E_{x(i,j,k)}^{n+1} = E_{x(i,j,k)}^{n} + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta y}\left(H_{z(i,j+1,k)}^{n+1/2} - H_{z(i,j,k)}^{n+1/2}\right) - \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta z}\left(H_{y(i,j,k+1)}^{n+1/2} - H_{y(i,j,k)}^{n+1/2}\right) \tag{C.10}$$

このような電磁場の数値計算方法を有限差分時間領域 (FDTD) 法という。

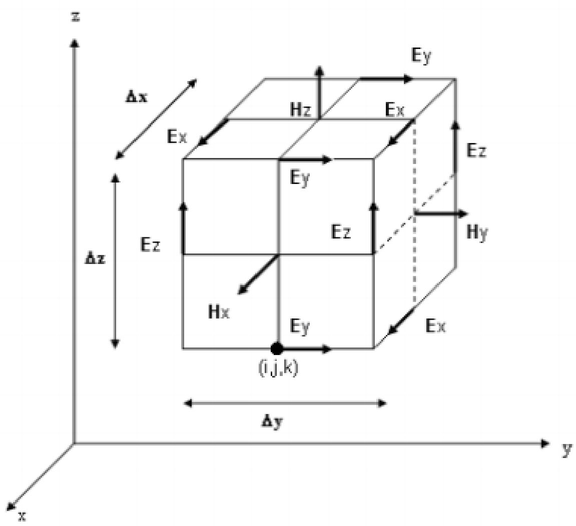

図 C.1: FDTD 法で用いる $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ の直方体。([37] より引用)

バンド構造の計算においては、このようにして得られた電磁場を周波数空間へフーリエ変換し、適切な閾値を設定することによって、ピークとして現れる点を解 ω として記録する。

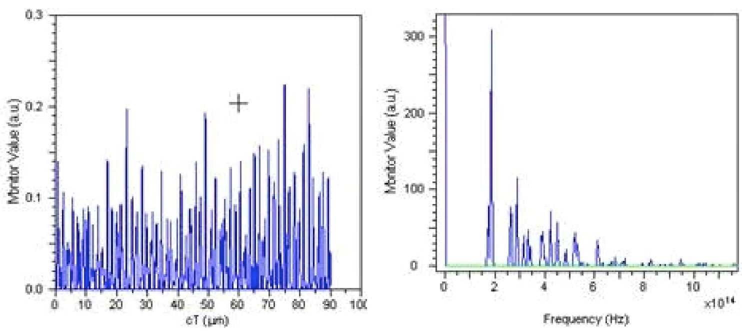

図 C.2: FDTD 法によって得られた解 (左) と、その周波数空間へのフーリエ変換 (右) の例

また、フォトニック結晶における index-guided mode のような、結晶中に閉じ込められるモードを FDTD 法で正しく計算するには、結晶と空気の境界について吸収境界条件を設定する必要があ

る。吸収境界条件には Mur の吸収境界条件 [38] と Berenger の Perfect Matched Layer (PML) [39] の 2 種類があり、シミュレーションソフト BandSOLVE では PML が使われている。

参考文献

[1] M. Arndt and K. Hornberger, *Testing the limits of quantum mechanical superpositions, Nature Physics* **10** (2014) 271-277.

[2] Y. Fein, P. Geyer, P. Zwick, F. Kiaka, S. Pedalino, M. Mayor et al., *Quantum superposition of molecules beyond 25 kDa, Nature Physics* **15** (2019) 1-4.

[3] W. H. Zurek, *Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical, Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 715-775.

[4] A. Bassi, K. Lochan, S. Satin, T. P. Singh and H. Ulbricht, *Models of wave-function collapse, underlying theories, and experimental tests, Rev. Mod. Phys.* **85** (2013) 471-527.

[5] N. Bohr, *The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory, Nature(London)* **121** (1928) 580-590.

[6] V. B. Braginsky, V. B. Braginsky and F. Y. Khalili, *Quantum measurement.* Cambridge University Press, 1995.

[7] J. Chan, T. P. M. Alegre, A. H. Safavi-Naeini, J. T. Hill, A. Krause, S. Grblacher et al., *Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state*, Nature(London) **478** (2011) 89-92.

[8] J. Teufel, T. Donner, D. Li, J. Harlow, M. Allman, K. Cicak et al., *Sideband Cooling of Micromechanical Motion to the Quantum Ground State, Nature(London)* **475** (2011) 35963.

[9] R. W. Peterson, T. P. Purdy, N. S. Kampel, R. W. Andrews, P.-L. Yu, K. W. Lehnert et al., *Laser Cooling of a Micromechanical Membrane to the Quantum Backaction Limit, Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 063601.

[10] M. Rossi, D. Mason, J. Chen, Y. Tsaturyan and A. Schliesser, *Measurement-based quantum control of mechanical motion, Nature(London)* **563** (2018) 53-58.

[11] M. Bawaj, C. Biancofiore, M. Bonaldi, F. Bonfigli, A. Borrielli, G. Di Giuseppe et al., *Probing deformed commutators with macroscopic harmonic oscillators, Nature Communications* **6** (2015) 7503.

[12] N. Matsumoto, K. Komori, Y. Michimura, G. Hayase, Y. Aso and K. Tsubono, *5-mg suspended mirror driven by measurement-induced backaction, Phys. Rev. A* **92** (2015) 033825.

[13] A. R. Neben, T. P. Bodiya, C. Wipf, E. Oelker, T. Corbitt and N. Mavalvala, *Structural thermal noise in gram-scale mirror oscillators, New Journal of Physics* **14** (2012) 115008.

[14] LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION AND VIRGO COLLABORATION collaboration, *GW150914: The Advanced LIGO Detectors in the Era of First Discoveries, Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 131103.

[15] G. Guccione, M. Hosseini, S. Adlong, M. T. Johnsson, J. Hope, B. C. Buchler et al., *Scattering-Free Optical Levitation of a Cavity Mirror, Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 183001.

[16] Y. Michimura, Y. Kuwahara, T. Ushiba, N. Matsumoto and M. Ando, *Optical levitation of a mirror for reaching the standard quantum limit, Opt. Express* **25** (2017) 13799-13806.

[17] 桑原祐也, 巨視的量子現象の観測に向けた光輻射圧による鏡の支持方法の開発, 修士論文, 東京大学, 2016.

[18] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健 編著, 重力波をとらえる, 京都大学学術出版会

[19] 和田祥太郎, 巨視的量子力学の検証に向けた光輻射圧による浮上手法の開発, 修士論文, 東京大学, 2018.

[20] 川崎拓也, 巨視的量子系の実現に向けた鏡の光学浮上方法の研究, 修士論文, 東京大学, 2018.

[21] 喜多直紀, 巨視的量子系の観測に向けた光学浮上法の安定性検証, 修士論文, 東京大学, 2020.

[22] 道村唯太, 光共振器基礎, 東京大学, 2012.

[23] W. H. Zurek, *Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical, Reviews of modern physics* **75** (2003) 715.

[24] A. Bassi, K. Lochan, S. Satin, T. P. Singh and H. Ulbricht, *Models of wave-function collapse, underlying theories, and experimental tests, Reviews of Modern Physics* **85** (2013) 471.

[25] S. L. Danilishin and F. Y. Khalili, *Quantum measurement theory in gravitational-wave detectors, Living Reviews in Relativity* **15** (2012) 5.

[26] E.Siegman, LASERS.

[27] Lin CC, Lu ZL, Shi SY, Jin G, Prather DW. *Experimentally demonstrated filters based on guided resonance of photonic-crystal films. Appl Phys Lett* **87** (2005) 091102.

[28] Yang WJ, Adair Gerke S, Wei Ng K, Rao Y, Chase C et al. *Laser optomechanics. Sci Rep* **5** (2015) 13700.

[29] John D. Joannopoulos, Steven G. Johnson, Joshua N. Winn, and Robert D. Meade, *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light second edition*

[30] S Rowson, A Chelnokov, C Cuisin and J-M Lourtioz, *Two-dimensional photonic bandgap reflectors for free-propagating beams in the mid-infrared* **1** (1999) 483-489.

[31] S. Boutami, B. Ben Bakir, X. Letartre, J. L. Leclercq, P. Viktorovitch, *Photonic crystal slab mirrors for an ultimate vertical and lateral confinement of light in vertical Fabry Perot cavities* **6989** (2008) 199-212.

[32] Fan, Shanhui and Joannopoulos, J. D., *Analysis of guided resonances in photonic crystal slabs* **65** (2002) 235112.

[33] Fattal, D., Li, J., Peng, Z. et al. *Flat dielectric grating reflectors with focusing abilities. Nature Photon* **4** (2010) 466470.

[34] シグマ光機, 誘多膜凸面ミラー製作結果報告

[35] PA44M3KW - Piezo Ring Chip, 150 V, 3.9 m Displacement, 15.0 mm OD, 9.0 mm ID, 3.2 mm Long, Pre-Attached Wires, spec sheet

[36] 岩本研究室, 20200918 光学浮上のフォトニック結晶作製 (ishida)

[37] K.S. Yee, *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media* IEEE Trans. Antennas Propagat., AP-14, **302** (1966)

[38] G. Mur, *Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations, in IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* **EMC-23** (1981) 377-382.

[39] J. P. Berenger, *A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves, Journal of Computational Physics* **114** (1994) 185-200.

謝辞

本研究を行うにあたり、多くの方にお世話になりました。

まずはじめに、指導教員である安東正樹准教授には研究の進め方や進路のことなど、様々な相談に乗っていただきました。特に私の場合は就職活動との兼ね合いや、新型コロナウィルス下での研究活動など変則的なことが多い中、常に私たちが快適かつ自発的に研究活動を行えるよう、環境を整えてくださいました。迷惑をかけることも多かったですが、常に優しくサポートしてくださいました。2 年間、有意義な研究生活があったのは安東准教授のおかげです。本当に感謝しています。

道村唯太助教は、サンドウィッチ型光学浮上の提案者であり、常に相談に乗っていただきながら今回の実験を進めていました。非常に多くのプロジェクトに携わっていて忙しい中でも、私の実験で行き詰まった時には常に優しく相談に乗ってくださいました。道村助教の下で研究を行うことができて本当によかったと思っています。ありがとうございました。

その他、研究室のメンバーにも大変お世話になりました。有冨尚紀氏は重力波望遠鏡の実験について、いつも面白い研究内容を研究室内に共有してくださいました。武田紘樹氏は光速不変性の検証実験について、共同で実験しながら丁寧に教えてくださいました。同じ高校の出身ということもあり、話も弾んで非常に楽しい時間でした。黄靖斌氏は熱雑音について、非常に勉強になる内容をセミナーで共有してくださいました。川崎拓也氏はサンドウィッチ型光学浮上について研究しており、実験について分からないことがあった時、いつも相談に乗っていただきました。高野哲氏には非常にお世話になりました。特に私が実験の始めたてで分からないことが多かった時に、氏自身の実験で忙しいにもかかわらず、基礎的なことから一つずつ丁寧に教えてくださいました。スムーズに実験を進めることができたのは氏のおかげです。大島由佳氏はアクシオン探査の研究について学会にも修士一年から多数参加しており、研究に対する積極的な姿勢を非常に尊敬しています。藤本拓希氏は機械学習を取り入れた研究が非常に面白く、個人的に興味のある手法でもあるので、今後を楽しみにしています。

また、フォトニック結晶の作成を行うにあたって、東京大学の岩本研究室にも非常にお世話になりました。岩本敏教授は、シミュレーションソフトをリモートで使える環境を手配してくださっただけではなく、フォトニック反射鏡の原理について非常に多くのアドバイスをいただきました。助手の石田悟己氏には実際に描画ソフトでフォトニック結晶を作成していただきました。何かあったらすぐに対応していただき、非常にスムーズに実験を進めることができました。本当にありがとうございます。

最後に、家族、友人、その他多くの方々に心より感謝申し上げます。