

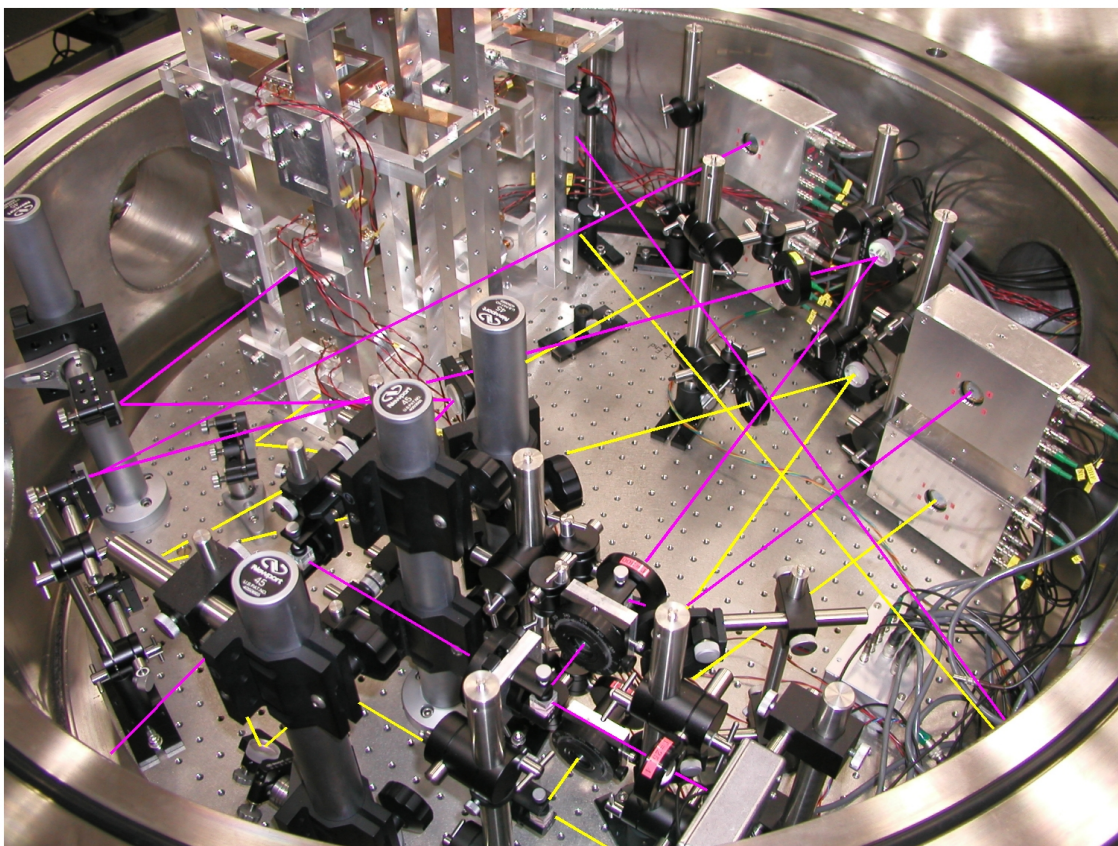
修士論文
補助干渉計による Fabry-Perot 干渉計の安定化

理学系研究科物理学専攻 06040

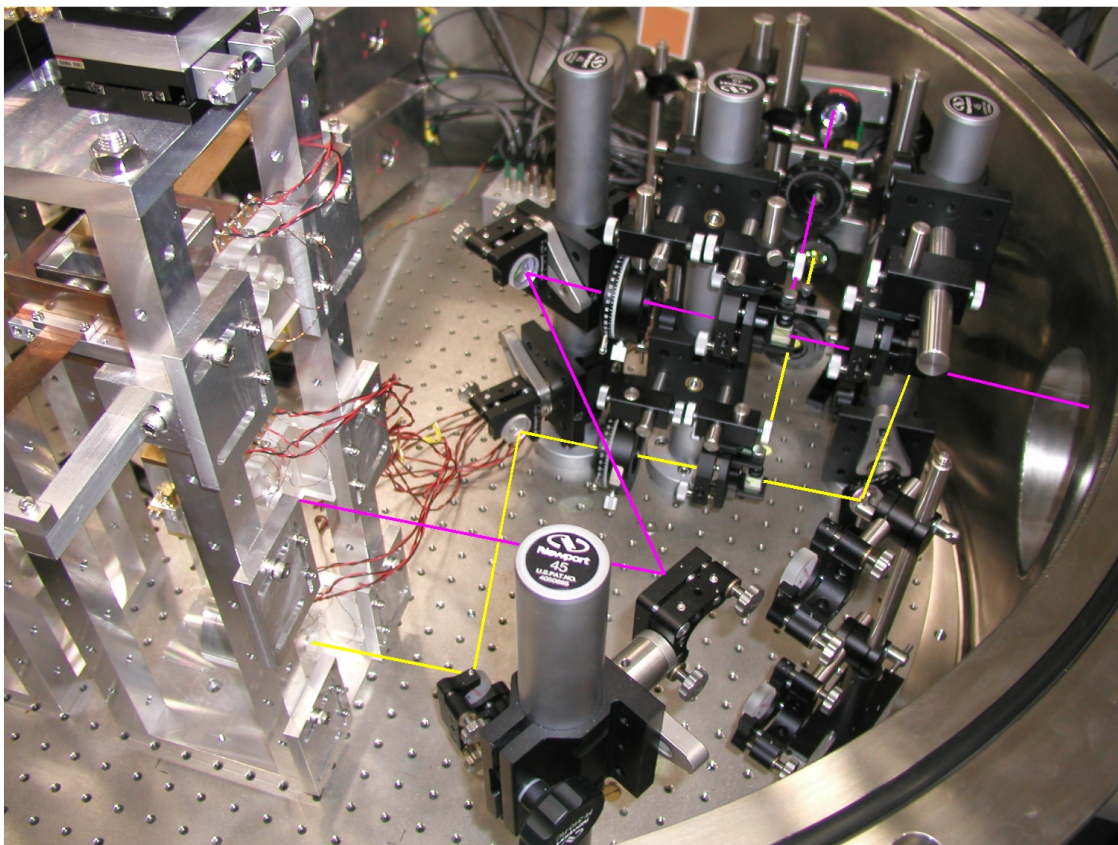
麻生 洋一

2002 年 1 月 9 日

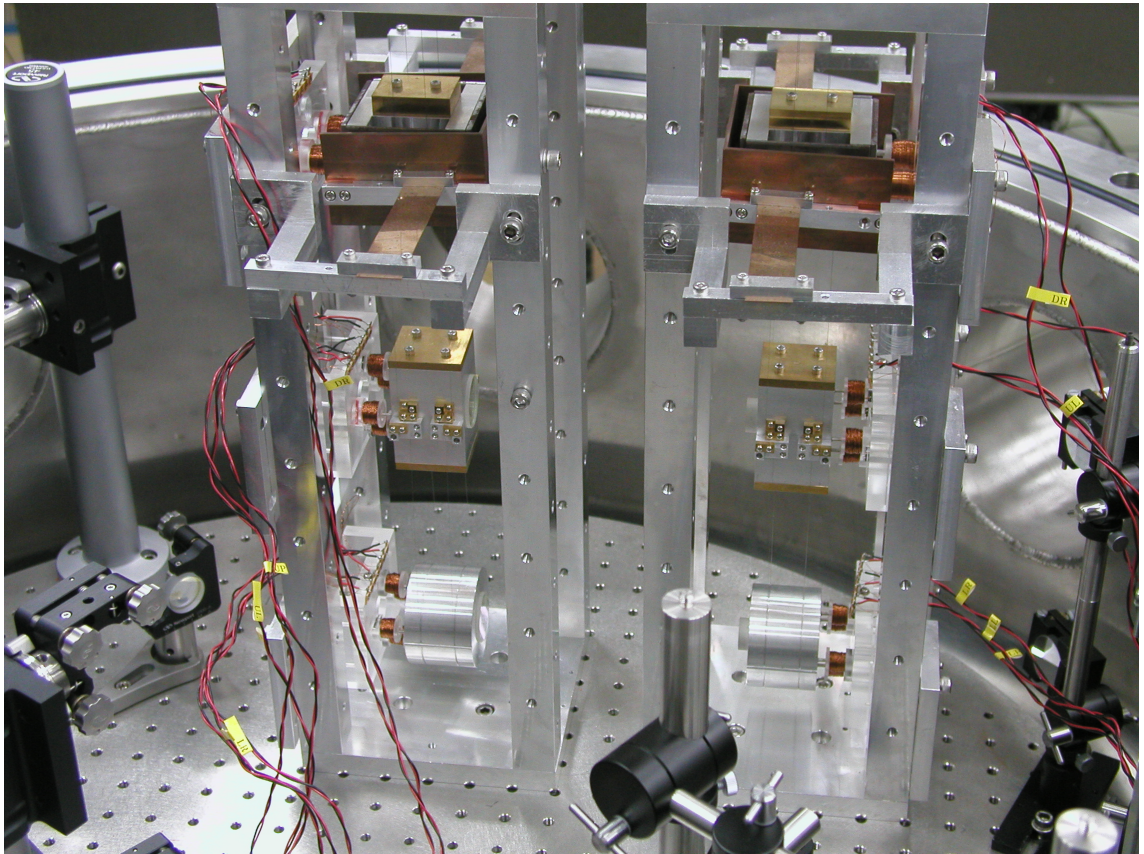
真空タンク内の光学系。ピンクが上段の光。黄色が下段の光。



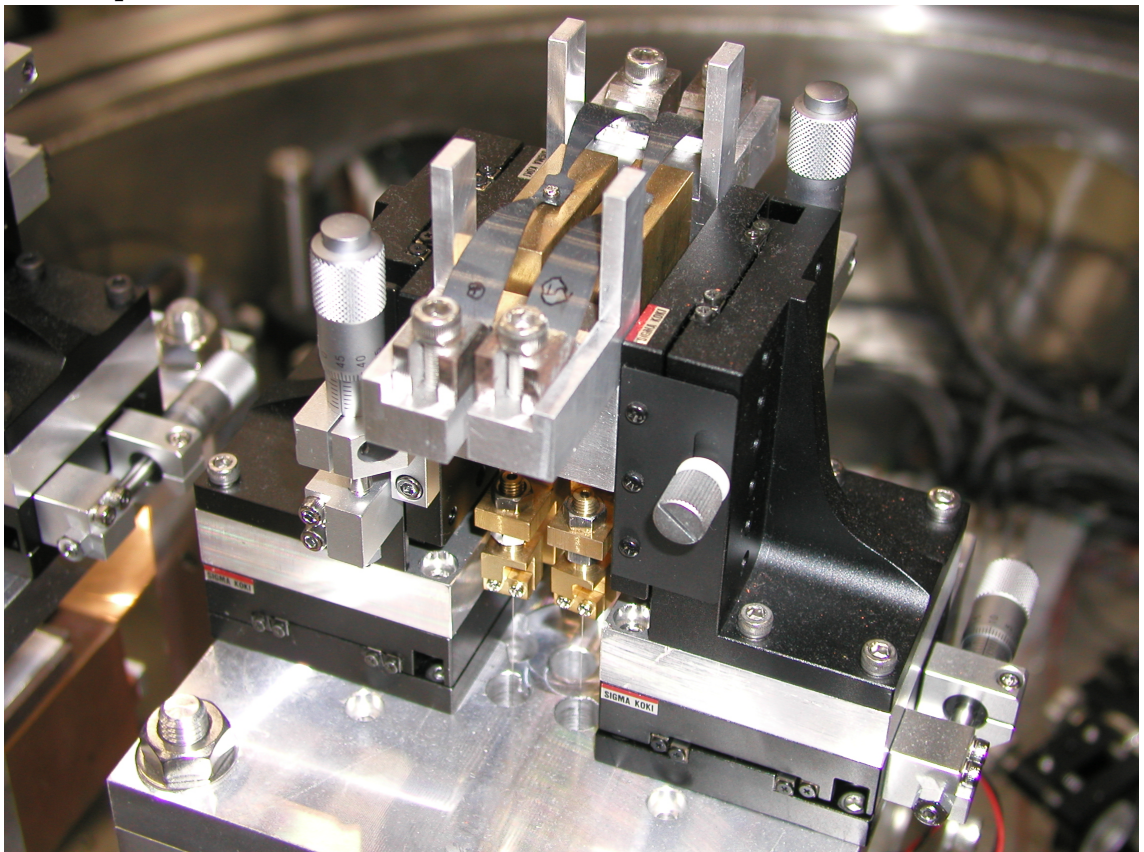
共振器への入射



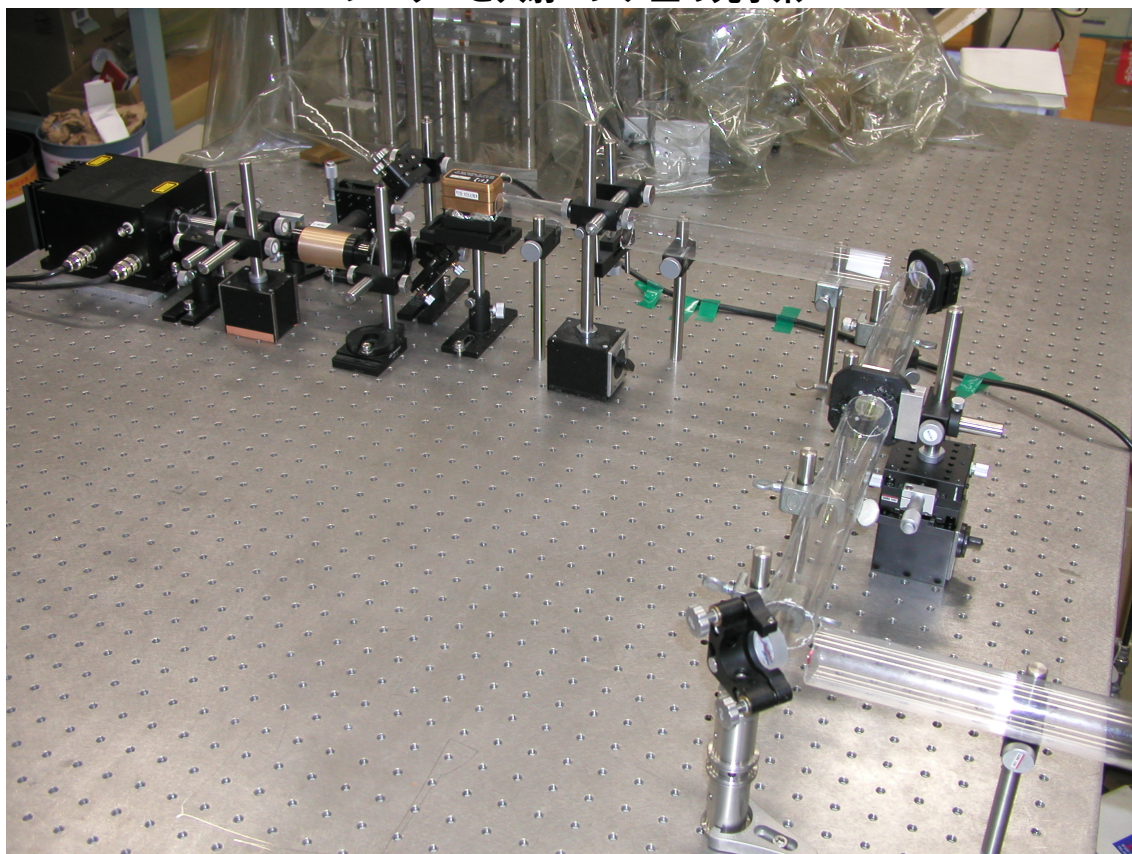
Suspension 全体



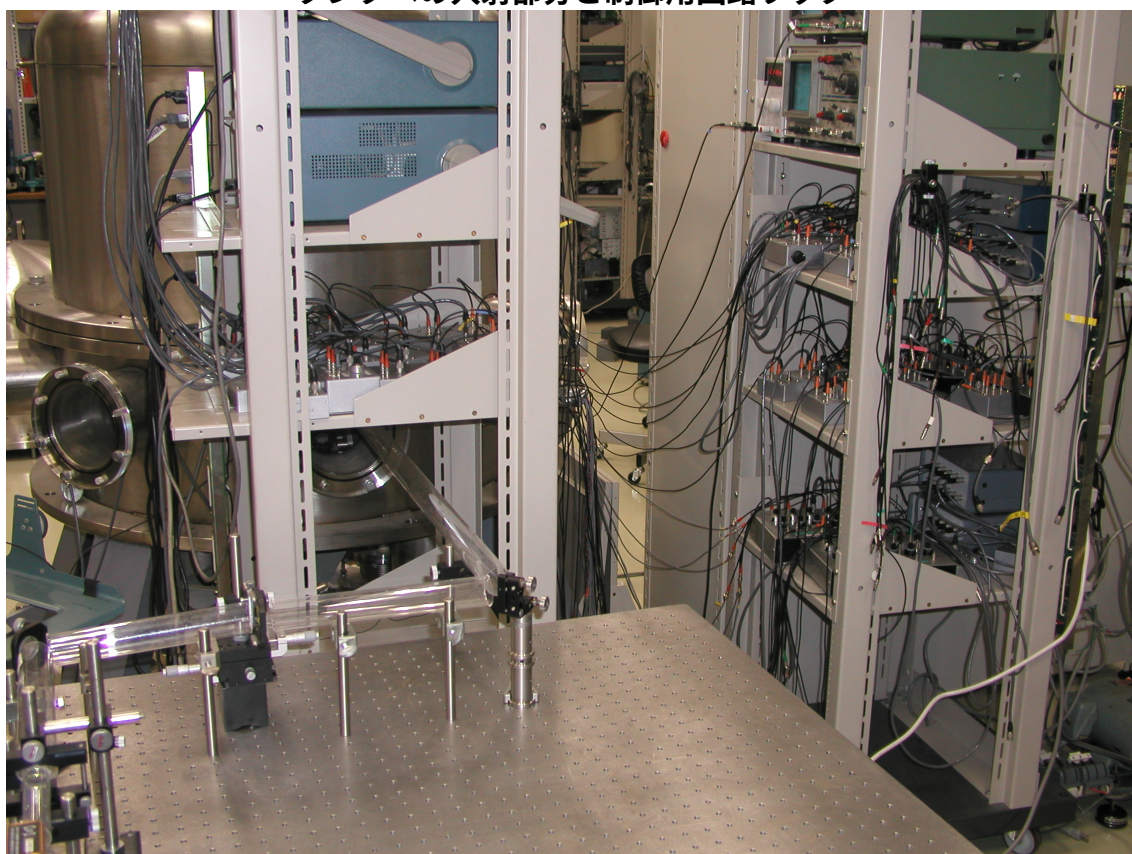
Suspension 上部のステージ。弓形に曲げられている金属板が Mini-GAS



レーザーと入射ベンチ上の光学系



タンクへの入射部分と制御用回路ラック



目次

第 1 章 序	9
第 2 章 重力波天文学	11
2.1 重力波の基本的性質	11
2.1.1 計量テンソルと重力	11
2.1.2 Einstein 方程式の線形近似	12
2.1.3 単色平面重力波	13
2.1.4 自由粒子と重力波の相互作用	14
2.1.5 重力波の偏光	15
2.1.6 重力波の放出	17
2.2 重力波源	17
2.2.1 連星中性子星合体	17
2.2.2 超新星爆発	18
2.2.3 低周波の重力波源	18
2.3 検出方法	19
2.3.1 共振型重力波検出器	19
2.3.2 レーザー干渉計型重力波検出器	20
2.3.3 ドップラートラッキング、パルサータイミング	20
第 3 章 レーザー干渉計型重力波検出器	21
3.1 Michelson 干渉計	21
3.1.1 Michelson 干渉計の重力波に対する応答	22
3.1.2 周波数応答	23
3.2 Fabry-Perot 干渉計	24
3.2.1 Fabry-Perot 干渉計の重力波に対する応答	28
3.3 レーザー干渉計の雑音	29
3.3.1 光の散乱雑音	29
3.3.2 熱雑音	30
3.3.3 地面振動	31
3.3.4 その他の雑音	32
3.4 各国の大型干渉計計画	34

第 4 章	補助干渉計	37
4.1	原理	37
4.2	補助干渉計と次世代干渉計	38
4.2.1	複雑な防振系	38
4.2.2	能動防振	39
4.2.3	アクチュエーターの雑音	40
4.2.4	RSE に伴う高 Finesse 光共振器の利用	40
4.2.5	低温鏡の利用	40
4.3	補助干渉計の限界	41
4.3.1	制御ゲイン	41
4.3.2	縦振動	41
4.3.3	振りの非対称性	41
4.3.4	レーザー周波数の変動	43
4.3.5	建設の手間	44
4.4	地球物理学的応用	45
第 5 章	実験装置	49
5.1	光学系	49
5.1.1	Fabry-Perot 干渉計	51
5.1.2	Mode matching	51
5.1.3	Guoy phase の調整	53
5.2	懸架系	55
5.2.1	ミラーマス	55
5.2.2	ダンピングマス	55
5.2.3	Mini-GAS filter	58
5.2.4	縦横の防振比	59
5.2.5	初期アラインメント	62
5.3	制御系	63
5.3.1	共振器長制御	63
5.3.2	アラインメント制御	63
5.3.3	共振器長信号及びアラインメント信号の較正	66
5.4	真空	68
第 6 章	実験結果と考察	69
6.1	共振器長制御	69
6.1.1	動作	69
6.1.2	変位スペクトル	69
6.1.3	RMS 振幅	71
6.1.4	ダンピングマスから主干渉計への伝達関数	71

6.1.5	地球コア振動に対する感度	74
6.2	アラインメント制御	75
6.2.1	動作	75
6.2.2	傾きスペクトル	75
6.2.3	スペクトル悪化の原因	76
6.2.4	アクチュエーターバランス	78
第 7 章	まとめ	81
7.1	結果	81
7.2	問題点、課題	81
7.3	結論	82
補遺 A	Gaussian beam 光学	83
A.1	基本モード	83
A.2	高次モード	85
A.3	Fabry-Perot 干渉計の固有モード	85
A.3.1	Mode matching	88
補遺 B	Pound-Drever-Hall 法	91
補遺 C	Wave Front Sensor	93
C.1	Hermite Gaussian モードの展開	93
C.2	鏡の傾きとモードの展開	93
C.3	信号	96
C.4	X_1 、 X_2 、 R_1 、 R_2 の値	97
補遺 D	Photo Sensor によるアクチュエーター伝達関数の測定	99
D.1	原理	99
D.2	校正	100
D.3	アクチュエーター伝達関数の測定	100
補遺 E	電気回路	101

第1章 序

この論文では、レーザー干渉計型重力波検出器の高感度化、安定化を目指した技術である補助干渉計について述べる。

重力波とは時空の歪みが光速で伝播していく現象である。これは一般相対性理論における Einstein 方程式の波動解であり、A.Einstein 自身によって 1916 年に導き出された。1970 年代には、J.H.Taylor らによる連星パルサー PSR1913+16 の観測が行われ、その公転周期変化から重力波の存在は間接的に示された。この功績によって Taylor らは 1993 年のノーベル物理学賞を受賞している。しかし重力波と物質の相互作用は微弱であり、その直接検出はいまだになされていない。

重力波直接検出の対象となるのは、激しい質量分布の変化¹を伴う天体現象である。電磁波は電荷分布の変化を反映しているのに対して、重力波は質量分布の変化の情報をもたらしてくれる。またその相互作用の微弱さゆえに、重力波は天体中心部の情報をもたらしてくれる。従って重力波の検出は、電磁波による従来の天文学とは異なる「重力波天文学」の創成を可能にする。つまり重力波の直接検出は、重力理論の検証にとどまらず、天文学・宇宙論の分野において大きな飛躍をもたらす可能性を秘めているのである。

重力波直接検出の試みは 1960 年代に始まった。当初は、巨大な金属塊の機械的共振を利用する共振型重力波検出器が使われた。共振型の検出器では、現在長期間の観測が行われている。1970 年代にはいと、レーザー干渉計を用いた重力波検出器の研究が始められ、現在では重力波検出器の主流となっている。現在世界では TAMA(日本)・LIGO(米国)・VIRGO(伊仏)・GEO(独英)という 4 つの大型レーザー干渉計建設計画が進行中である。また宇宙空間にレーザー干渉計を建設する LISA 計画(欧州)も進行中である。特に日本の TAMA は現在世界最高感度のレーザー干渉計型重力波検出器であり、長期安定観測が可能な唯一の大型干渉計である。現在の TAMA の感度では、銀河系内における連星中性子星合体からの重力波を捕らえることができる。また、TAMA より大型の LIGO などが本格的に動き出せば、さらに広い範囲の天体現象を捕らえることができる。しかしこれらのイベントは発生する確率が極めて低く、年数回程度のイベントレートを得るにはさらに観測可能範囲を広げなければならない。そのためにはより高感度な次世代干渉計の建設が必須である。日本では TAMA の成功を受けて、低温で TAMA より大型のレーザー干渉計を建設する計画(LCGT 計画)が進められている。また米国の LIGO においても、次世代計画である LIGO II の議論が始まっている。

次世代干渉計においては、低温鏡の使用や複雑な防振系の使用など新しい技術の導入が計画されているが、これらの新しい技術がもたらす問題点も多い。本論文で議論する補助干渉計は、

¹厳密には質量分布の四重極モーメントが変化しなければならない。2.1.6 節参照

次世代干渉計で予想される問題点を複合的に解決する技術である。補助干渉計とは、干渉計を構成する鏡の懸架点鏡を取り付け、もう一つの干渉計を構成したものである。この補助干渉計の信号を用いて補助干渉計を制御することにより、そこから懸架された主干渉計が安定化される。この安定化によって、次世代干渉計で予想される様々な問題が解決されるのである。

本論文の構成は以下の通りである。まず次章で、重力波の一般論・発生源・天文学的応用について述べる。3章では、レーザー干渉計型重力波検出器の原理・雑音・現在の大型計画などについて述べる。4章では、補助干渉計の原理・利点・性能限界について述べる。また、補助干渉計の基本動作を確認するための実験を行ったので、5章ではその実験装置について述べる。6章ではその実験装置を使って得られた結果を示し、その解析・問題点の分析を行い、7章で結果をまとめる。実験に必要な技術で本論の流れから外れるものは補遺にまとめた。

第2章 重力波天文学

この章ではまず、Einstein 方程式の線形近似によって重力波が従う波動方程式を導く。次にその発生について述べる。その後、重力波を放出すると考えられている天体現象について述べる。最後に、現在までに提案されている重力波の直接検出方法を列挙する。

2.1 重力波の基本的性質

2.1.1 計量テンソルと重力

一般相対性理論において時空の構造を決めるのは計量テンソル $g_{\mu\nu}$ である¹。時空の2点間の世界間隔は計量テンソルを用いて、

$$\Delta s^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (2.1)$$

と書ける。ここで $\{\Delta x^\mu\}$ は2点間の座標の差である。

計量テンソルが分かると、重力以外の力を受けない粒子が時空上で辿る世界線——測地線を求めることができる。測地線は次の方程式で決められる。

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.2)$$

ここで τ は粒子の固有時間。 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ は Christoffel 記号であり、 $g_{\mu\nu}$ を用いて、

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (2.3)$$

である。式 (2.2) の両辺に粒子の質量 m をかけると、これは重力場中を運動する粒子の運動方程式とみなすことができる。そしてその右辺、

$$-m \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.4)$$

は粒子に働く重力を表す。よって $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ は重力場の強さを表すと言えるが、それは式 (2.3) のように $g_{\mu\nu}$ の座標による偏微分で表された。従って計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は重力ポテンシャルであるといえることができる。

¹以後添字に関して、ギリシア文字は $\{0, 1, 2, 3\}$ をとり、ローマ文字は $\{1, 2, 3\}$ をとるとする。

2.1.2 Einstein 方程式の線形近似

重力波とは、重力ポテンシャル $g_{\mu\nu}$ の変動が時空上を波として伝播していく現象である。では $g_{\mu\nu}$ はどのような方程式に従うのであろうか。それは Einstein 方程式と呼ばれ、次のような形をしている。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

ここで $R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソルであり、Riemann 曲率テンソル $R^\lambda_{\mu\rho\nu}$ を λ, ρ について縮約したものである。また R はスカラー曲率であり、Ricci テンソルを縮約したものである。

$$R^\lambda_{\mu\rho\nu} = \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\rho}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\rho} \quad \text{:Riemann テンソル} \quad (2.6)$$

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \quad \text{:Ricci テンソル} \quad (2.7)$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad \text{:スカラー曲率} \quad (2.8)$$

さらに $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルと呼ばれ、重力場の源を表す。 G は万有引力定数、 c は光速である。

ここで式 (2.5) の波動解を導きたいのだが、式 (2.5) は $g_{\mu\nu}$ に関する高次の非線型偏微分方程式である。従ってこれを解くのは容易ではない。そこで次のように線形近似をする。

今時空は平坦 (Minkowski 的) だとし、そこに微小な摂動が加わったと考える。そのとき計量テンソルは、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

と書ける。ここで $\eta_{\mu\nu}$ は Minkowski 時空の計量テンソルで、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

である。また、 $h_{\mu\nu}$ は微小な摂動成分であり、重力波そのものを表す。ここで式 (2.9) を式 (2.5) に代入して、 $h_{\mu\nu}$ の 1 次までで近似していく。なお、 $h_{\mu\nu}$ の 1 次近似において添字の上げ下げは、 $\eta_{\mu\nu}$ を使って行えば良い。

上の近似の元で Christoffel 記号は、

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (2.11)$$

これを用いて Riemann テンソルは、

$$R^\lambda_{\mu\rho\nu} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial^2 h_{\alpha\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\rho} + \frac{\partial^2 h_{\mu\rho}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\rho}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) \quad (2.12)$$

よって Ricci テンソルは、

$$R_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h^\lambda{}_\nu}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 h_\mu{}^\lambda}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) \quad (2.13)$$

ただし、 $h = h^\lambda{}_\lambda$ である。

スカラー曲率は、

$$R \simeq \frac{\partial^2 h^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_\alpha \partial x^\alpha} \quad (2.14)$$

となる。

これらを式 (2.5) に代入すると、

$$\frac{\partial^2 h^\lambda{}_\nu}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 h_\mu{}^\lambda}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \eta_{\lambda\rho} \left(\frac{\partial^2 h^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_\alpha \partial x^\alpha} \right) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \\ \frac{\partial \bar{h}^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

という座標条件を課す (Lorentz gauge)。すると式 (2.15) は、

$$\frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x_\alpha} = \square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

という簡単な式になる。真空中では $T_{\mu\nu} = 0$ でなので、

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.18)$$

これは波動方程式であり、 $h_{\mu\nu}$ が波動として時空を伝わっていくことを示している。

2.1.3 単色平面重力波

式 (2.18) の単色平面波解を考える。

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (2.19)$$

これを式 (2.16) 及び式 (2.18) に代入すると、

$$A^{\mu\alpha} k_\alpha = 0 \quad (2.20)$$

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \quad (2.21)$$

という条件が得られる。ここで式 (2.20) は重力波が横波であることを示している。また、式 (2.21) は重力波が光速で伝播することを示している。

式 (2.16) で Lorentz Gauge を課したが、まだ微小座標変換の自由度が残っている。そこで次のような条件を課す (Transverse Traceless gauge)、

$$A_{\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (2.22)$$

$$A_{\mu\nu}U^{\nu} = 0 \quad (2.23)$$

ここで U^{ν} は任意の時間的ベクトルである。式 (2.22) は $A_{\mu\nu}$ のトレースが 0 であることという条件である。また式 (2.23) は重力波が横波として観測できるような座標系が存在するという条件である。

ここで、 $U^{\nu} = \delta_0^{\nu}$ とすると、式 (2.22) より、

$$A_{\mu\nu}\delta_0^{\nu} = A_{\mu 0} = 0 \quad (2.24)$$

さらに角振動数 ω の重力波が z 軸方向に進んでいるとすると、

$$k_{\alpha} = \{\omega, 0, 0, \omega/c\} \quad (2.25)$$

よって式 (2.20) より、

$$A^{\mu\alpha}k_{\alpha} = A^{\mu 0}k_0 + A^{\mu 3}k_3 = A^{\mu 3}\omega/c = 0 \quad (2.26)$$

$$\therefore A_{\mu 3} = 0 \quad (2.27)$$

よって、トレースレスで対称な $A_{\mu\nu}$ は、

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{+} & h_{\times} & 0 \\ 0 & h_{\times} & -h_{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{となる。} \quad (2.28)$$

h_{+} と $h_{\times}$ が最終的に重力波が持つ 2 つの自由度である。

2.1.4 自由粒子と重力波の相互作用

Back Ground Minkowski 時空上で静止している自由粒子に働く重力波の効果を考える。静止している粒子では、

$$\frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \{1, 0, 0, 0\} \quad (2.29)$$

なので²、式 (2.2) から粒子に働く力は、

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} &= -\Gamma_{00}^\lambda \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial \bar{h}_{\alpha 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial \bar{h}_{\alpha 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial \bar{h}_{00}}{\partial x^\alpha} \right) \\ &= 0\end{aligned}\tag{2.30}$$

となる。これは粒子に何の力も働かないことを意味する。つまり TT-gauge とは、自由粒子に働く重力波の効果が打ち消されるように座標が変化するような gauge であると言える。

座標系に依らずに重力波の効果を見るため、2 点間の世界間隔がどう変化するかを見てみる。Back Ground Minkowski 時空で $(0, 0, 0, 0)$ と $(0, \epsilon, 0, 0)$ にある 2 つの粒子を考える。重力波が到来しても、TT-gauge ではどちらも座標値を保つ。しかし、計量テンソルは変化する。よって 2 粒子間の固有距離 δl は、

$$\begin{aligned}\delta l &= \int |ds^2|^{1/2} = \int |g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|^{1/2} \\ &= \int_0^\epsilon |g_{11}|^{1/2} dx \simeq |g_{11}|^{1/2} \epsilon = \left(1 + \frac{1}{2} \bar{h}_{11} \right) \epsilon\end{aligned}\tag{2.31}$$

というように変化する。つまり、重力波は自由粒子間の固有距離を変化させる。

2.1.5 重力波の偏光

重力の本質は潮汐力である。そこで重力波の潮汐効果を視覚的に確認するために、円周上に並んだ質点群を考える。そして円の中心に置かれた質点と円周上の質点の固有距離の変化を考える。

これらの質点群に z 方向へ進む重力波が入射したとする。まず、 h_+ 偏光の重力波が入射した場合 ($h_\times = 0$) を考える。円の中心にある質点と $(\epsilon \cos \theta, \epsilon \sin \theta)$ にある質点の間の固有距離は、式 (2.31) と同様にして、

$$\delta l \simeq \left(1 + \frac{1}{2} h_+ \cos 2\theta \right) \epsilon\tag{2.32}$$

である。

$h_\times$ の偏光が入射した場合は同様に、

$$\delta l \simeq \left(1 + \frac{1}{2} h_\times \sin 2\theta \right) \epsilon\tag{2.33}$$

である。これらのモードの形を図示すると、図 2.1 のようになる。これより重力波は、ある方向が縮むときそれと直交する方向が伸びるという潮汐効果を及ぼすことが良く分かる。また、2 つのモードは互いに 45° ずれた形になっている。

²ここでは $c = 1$ とする、幾何単位系を用いる。

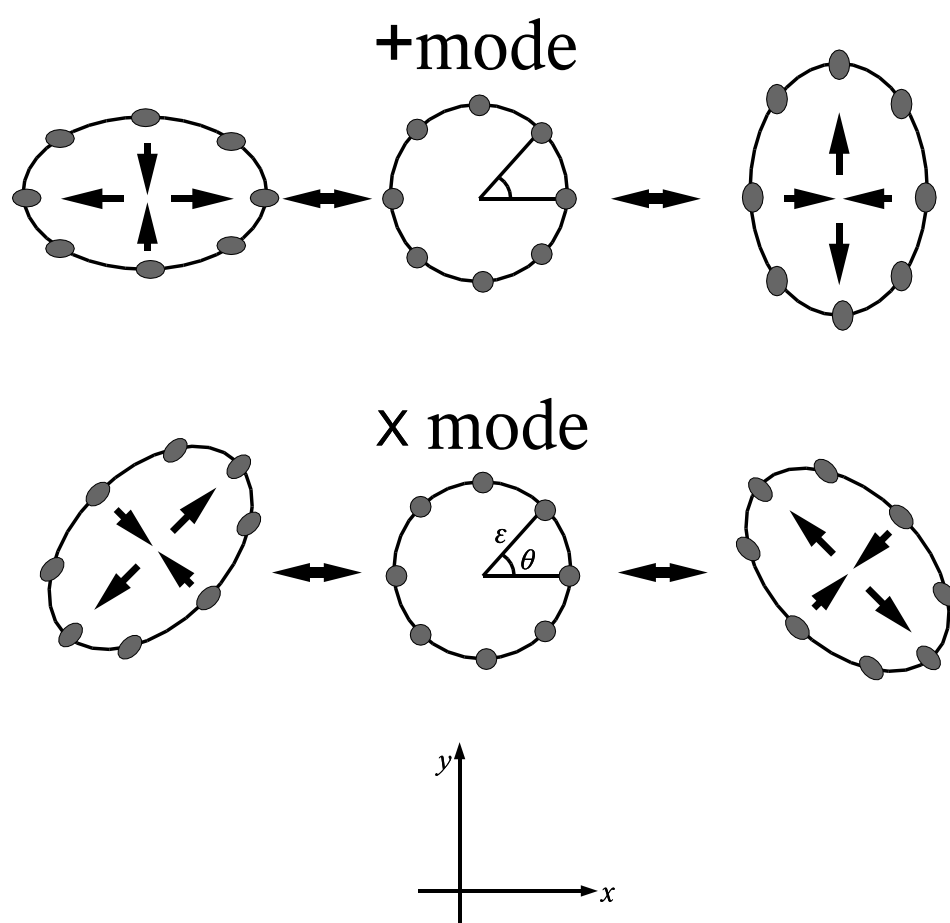


図 2.1: 重力波の偏光。+mode は h_+ のみの場合を表し、 $\times$ mode は h_x のみの場合を表す。

2.1.6 重力波の放出

重力波の発生を考えるには、式 (2.17) を解かなければならない。この解は電磁場の場合と同様に、遅延ポテンシャルを用いて書くことができる。

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^0, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}\left(x^0 - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}'\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (2.34)$$

$T_{\mu\nu} \neq 0$ である領域が十分小さく、さらに観測者がそこから十分離れている場合、

$$\bar{h}_{ij}(x) = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{Q}_{ij}(t') \quad (2.35)$$

と近似できる。ここで、 $r \equiv |\vec{x} - \vec{x}'|$ 、 $t' \equiv t - r/c$ 、 Q_{ij} は質量の 4 重極モーメントで、

$$Q_{ij}(t') = \int \rho(\vec{x}', t') \left(x'_i x'_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x'^n x'^j \right) d^3x' \quad (2.36)$$

である。またこの重力波源から、単位時間に放射される重力波のエネルギーは、

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \ddot{Q}_{ij}^2 \quad (2.37)$$

と表される。重力場では、重心が原点に来るような座標をとれば常に双極子モーメントが 0 になる。従って電磁波のような双極子放射は存在せず、重力波の放出には質量分布の四重極モーメントが変化する必要がある。

2.2 重力波源

直接検出可能なエネルギーをもつ重力波を放出する現象としては、激しい天体現象が最も有望である。以下では、現在重力波直接検出のターゲットと考えられている重力波源について概観する。

2.2.1 連星中性子星合体

中性子星やブラックホールなどの重くてコンパクトな天体が連星を成していると重力波を放出して軌道運動エネルギーを失っていく。そしてついには合体をするのだが、その際強力な重力波を放出する。

この現象の大きな特徴は、放出される重力波の波形が予想できるということである。合体の直前までの波形は、Post-Newtonian 近似を用いて解析的に求められている。波形が分かっていると、Matched Filter という方法を用いてノイズの中から効率よく重力波の信号を拾い出すことができる。また合体の瞬間は Post-Newtonian 近似では計算できないため、数値シミュレーションが行われている。

また、理論的な予想と、実験的に得られた重力波の波形を比べることにより、様々な情報を引き出すことができる。例えば重力波の振幅から連星系の質量や距離が分かる。これはハッブル定数の新しい決定方法となりうる。また合体する直前の軌道半径から星の半径が求まり、これと星の質量から中性子星内部の状態方程式を決定できるという提案もある [6]。さらに中性子星が合体後にブラックホールを形成し、形成されたブラックホールの準固有振動が観測されるかも知れない。そしてこれらの観測から Brans-Dicke パラメータの決定など、一般相対性理論の検証が行える可能性も指摘されている。

現在までに、電磁波パルサーの観測から 5 つの連星中性子星が見つまっている。またこのうち 3 つは今から宇宙年齢以内に合体するようなパラメーターを持っている。これらのことから我々の銀河では、数万年に 1 回程度の割合で連星中性子星合体が起っていると見積もられている。さらに銀河系外に目を向けると、LIGOII の観測可能距離 (約 350Mpc) の範囲内で 1 年間に 2-300 回程度の合体が起きると見積もられている [5]。

2.2.2 超新星爆発

超新星爆発において重力崩壊するコアに非対称性が存在すれば、重力波が放出され则认为られている。しかし超新星爆発からの重力波はバースト的なものであり、波形の予測が難しい。そのため連星中性子星合体の場合のような Matched Filter は使えない。現在、バースト波を検出するための様々なデータ解析手法が開発されている。

超新星爆発からの重力波は検出が難しい反面、その発生率は連星中性子星合体に比べて大きい。そこで、銀河系内で超新星爆発が発生すれば重力波が検出できる可能性は大きい。その際見積もられる重力波の振幅は $h \sim 10^{-20}$ 程度である。

2.2.3 低周波の重力波源

連星

通常の連星は非常に低周波の重力波を放出している。これらの連星は多数あるため、その重ね合わせとして stochastic な重力波が存在していると考えられる。これらは 0.1mHz 以下で、 $h \sim 10^{-20}$ 程度の重力波を放出していると考えられている。

宇宙論的重力波源

宇宙開闢時にはインフレーションや相転移に伴って重力波が放出されたと考えられている。電磁波による観測では、宇宙の晴れ上り (ビッグバン後約 50 万年) 以前の情報を得ることはできないが、重力波は晴れ上り以前でも散乱を受けないため、宇宙開闢 10^{-22} 秒後の情報をもたらしてくれる。例えば QCD 相転移に伴う重力波は 10^{-8}Hz で $h \sim 10^{-17}$ という計算がある。

2.3 検出方法

現在までに提案されている重力波の検出方法には以下のようなものがある。

2.3.1 共振型重力波検出器

弾性体に重力波が入射すると潮汐力が加えられる。この潮汐力による弾性振動モードの励起を読み取り、重力波の到来を検出するのが共振型重力波検出器である。これは、1960年代にメリーランド大学の J. Weber 教授によって考案された、最も歴史の古い重力波検出器である。

弾性体の振動を独立な振動モードで展開し、そのうちの一つを考えれば次の方程式に従う。

$$\mu \left(\ddot{\xi} + \frac{\omega_0}{Q_0} \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi \right) = f_{\text{GR}}(t) \quad (2.38)$$

ここで μ は弾性振動モードの換算質量。 ω_0, Q_0 はそれぞれ共振周波数および Q 値である。 $f_{\text{GR}}(t)$ は、考えているモードに重力波が及ぼす力である。長さ l の円柱の軸方向伸縮モードの場合、

$$f_{\text{GR}}(t) = \frac{2l\mu}{\pi^2} \ddot{h}_+ \quad (2.39)$$

である。

式 (2.38) は散逸を持つ調和振動子に強制振動力が加わった場合の運動方程式と同じである。式 (2.38) に式 (2.39) を代入し、両辺の Fourier 変換をとって伝達関数を求めると、

$$\tilde{\xi}(\omega) = - \frac{2l\omega^2 \tilde{h}_+(\omega)}{\pi^2 \left(\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega\omega_0}{Q_0} \right)} \quad (2.40)$$

ここで $\sim$ は Fourier 変換を表す。式 (2.40) で $\omega = \omega_0$ とすると、

$$\tilde{\xi} = \frac{2il}{\pi^2} Q_0 \tilde{h}_+ \quad (2.41)$$

となる。つまり共振周波数付近では重力波の振幅が約 Q_0 倍される。これは式 (2.40) が共振周波数付近で鋭いピークを持っているからであり、逆に共振周波数以外においてこの検出器はほとんど感度を持たない。感度の良い帯域が狭いということは共振型重力波検出器の欠点の一つである。

この方法の感度を制限するのは、弾性体の熱振動及び、変位を読み取るトランスデューサーの雑音である。これらの雑音を下げるために、弾性体を極低温まで冷却したり、トランスデューサーに SQUID 等の高感度な物を使用する努力がなされている。また弾性体としては重さ数トンのアルミニウムが使われることが多い。

そのほかに、共振型重力波検出器の弾性体として地球や月などの天体を利用する方法も提案されている。

2.3.2 レーザー干渉計型重力波検出器

現在主流となっている検出方法である。その基本原理は、離れた場所にある2つの自由質点間の距離を干渉計を用いて測るというものである。干渉計を構成する鏡は振り子で懸架され、振り子の共振周波数よりも十分高い周波数では自由質点と見なせる。このような鏡で Michelson 干渉計 (図 3.1) を作り、そこに重力波が入射したとすると、鏡は一方の腕が縮み、もう一方の腕は伸びるような力を受ける。Michelson 干渉計は、腕の長さの差動変動を干渉縞の変化として出力するので、これを読み取れば重力波の到来が分かる。

この方法の特徴は広い帯域にわたって感度が高いことである。そのため、重力波の波形を捕らえることができる。また、干渉計を宇宙空間に建設する計画も進んでおり、これは超低周波の重力波をターゲットとしている。なお、この方法の詳細は次章で述べる。

2.3.3 ドップラート ラッキング、パルサータイミング

ドップラート ラッキングとは地球とスペースクラフトの間に電磁波を往復させ、そこを通過する重力波によるドップラーシフトを検出するというものである。この方法は、発射する電磁波の周波数安定度によって感度が制限され、現在のところ $h \sim 10^{-15}$ 程度が限界である。しかし非常に低周波まで感度を持っているという特徴がある。

パルサータイミングは、パルサーのパルス到着時間が重力波によって揺らぐ効果を観測する方法である。ドップラート ラッキングよりさらに低周波の重力波に関する情報が得られ、宇宙創生時の宇宙背景重力波や宇宙ひも等からの重力波がターゲットとされる。

第3章 レーザー干渉計型重力波検出器

この節では現在主流になっている、レーザー干渉計型重力波検出器について詳しく述べる。

3.1 Michelson 干渉計

図 3.1は、レーザー干渉計型重力波検出器の基本である、Michelson 干渉計である。

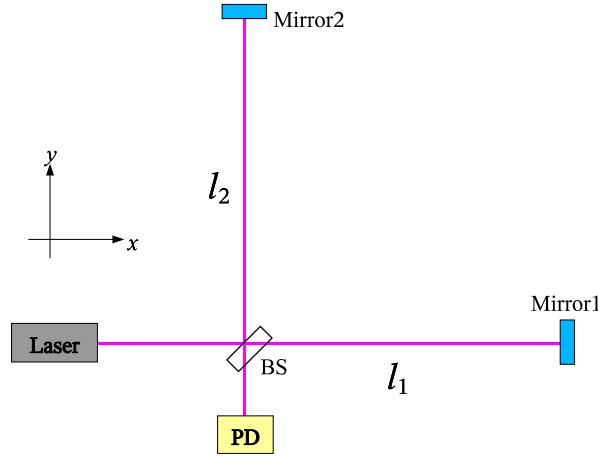


図 3.1: Michelson 干渉計

レーザーから出力された光を、

$$E_{\text{in}} = E_0 e^{i\Omega t} \quad (3.1)$$

とする。この光はビームスプリッター (BS) によって2つに分けられ、それぞれ Mirror1 および Mirror2で反射される。鏡で反射された光はビームスプリッター上で再結合する。Mirror1 との間を往復するときに受ける位相変化を ϕ_1 、Mirror2 との間を往復するときの位相変化を ϕ_2 とすると、再結合して Photo Detector (PD) に入射する光は、

$$E_{\text{PD}} = E_1 e^{i(\Omega t - \phi_1)} - E_2 e^{i(\Omega t - \phi_2)} \quad (3.2)$$

と書ける。ここで、 E_1 、 E_2 はそれぞれ Mirror1、Mirror2 から返ってくる光の振幅であるが、鏡の反射率などに非対称性があると $E_1 \neq E_2$ となる。理想的な場合は $E_1 = E_2 = \frac{1}{2} E_0$ である。パ

ワーを計算すると、

$$\begin{aligned} P_{PD} &= |E_{PD}|^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \\ &= \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} + \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ただし、

$$\begin{aligned} P_{\max} &\equiv (E_1 + E_2)^2 \\ P_{\min} &\equiv (E_1 - E_2)^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

である。位相差 $\phi_1 - \phi_2$ によって、PD に入る光のパワーが余弦関数的に変化することが分かる。従って Michelson 干渉計はこの位相差を検出する装置であると言える。 $P_{\max}$ は式 (3.3) で $\phi_1 - \phi_2 = 0$ とおいたときの P_{PD} で、Photo Detector に入る最大の光パワーである。 $P_{\min}$ は $\phi_1 - \phi_2 = \pi$ の場合にあたり、PhotoDetector に入る最小のパワーである。これらを用いて、

$$K = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{P_{\max} + P_{\min}} \quad (3.5)$$

によって、Visibility(or Contrast)を定義する。これは、干渉縞の明瞭度を表す指標である。

3.1.1 Michelson 干渉計の重力波に対する応答

Michelson 干渉計に鉛直方向から重力波が入射したとする。座標は TT-gauge で考え、簡単のために偏光は+偏光のみだとする。4次元線素は、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1+h) dx^2 + (1-h) dy^2 + dz^2 \quad (3.6)$$

となる。光は $ds^2 = 0$ の世界線上を進むので、 x 軸上を進む光では、

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{c}{\sqrt{1+h}} \simeq \pm \left(1 - \frac{1}{2}h\right) c \quad (3.7)$$

である。ここで正の符号は x 軸正の向きに進む光を、負の符号は x 軸負の向きに進む光を表す。

dx を BS と Mirror1 の間を往復する経路で積分すると、

$$\int dx = 2l_1 = c \int_{t-\tau_1}^t \left\{ 1 - \frac{1}{2}h(t') \right\} dt' \quad (3.8)$$

より、

$$\tau_1 = \frac{2l_1}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\tau_1}^t h(t') dt' \doteq \frac{2l_1}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-2l_1/c}^t h(t') dt' \quad (3.9)$$

ここで τ_1 は光が往復するのに要する時間である。また $h \ll 1$ より、積分範囲のなかの τ_1 は $2l_1/c$ とできる。したがって1往復する間の位相変化は、

$$\phi_1 = \Omega \tau_1 = \frac{2l_1 \Omega}{c} + \frac{\Omega}{2} \int_{t-2l_1/c}^t h(t') dt' \quad (3.10)$$

である。 y 軸方向の光も同様にして、

$$\phi_2 = \frac{2l_2\Omega}{c} - \frac{\Omega}{2} \int_{t-2l_2/c}^t h(t') dt' \quad (3.11)$$

となる。 $l_1 \simeq l_2 \simeq l$ 、 $l_- = l_1 - l_2$ とすると、

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{2l_-\Omega}{c} + \delta\phi_{\text{GW}} \quad (3.12)$$

$$\delta\phi_{\text{GW}} = \Omega \int_{t-2l/c}^t h(t') dt' \quad (3.13)$$

である。式 (3.13) は重力波による位相差の変化を表している。この位相差を Michelson 干渉計で読み取れば重力波の到来を知ることができるわけである。

3.1.2 周波数応答

Michelson 干渉計の重力波に対する周波数応答を考える。 $h(t)$ を Fourier 変換して、

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.14)$$

これを用いて、

$$\begin{aligned} \delta\phi_{\text{GW}} &= \Omega \int_{t-2l/c}^t \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t'} d\omega dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{l\omega}{c}\right) e^{-il\omega/c} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{MI}}(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる。 H_{MI} が Michelson 干渉計の重力波に対する周波数応答関数であり、

$$H_{\text{MI}}(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{l\omega}{c}\right) e^{-il\omega/c} \quad (3.16)$$

である。 $|H_{\text{MI}}|$ が最大になるのは、

$$\frac{l\omega}{c} = \frac{\pi}{2} \quad (3.17)$$

のときである。これは、光が一往復する間に重力波の位相がちょうど反転するような場合に最も感度が高いことを示している。この式から、ターゲットの周波数に対して最適な基線長 l を決めることができる。1kHz の重力波に対して最適な l は約 75km である。これ以上基線長を長くしても、逆に感度が下がってしまう。しかし 75km という基線長は現実的に実現不可能である。そこで、Michelson 干渉計の腕に Fabry-Perot 干渉計を置いて実効的な基線長を稼ぐということが行われる (図 3.2)。このような光学配置は Fabry-Perot-Michelson 干渉計と呼ばれ、現在建設中の大型干渉計は全てこの方式を採用している。次節では Fabry-Perot 干渉計について述べる。

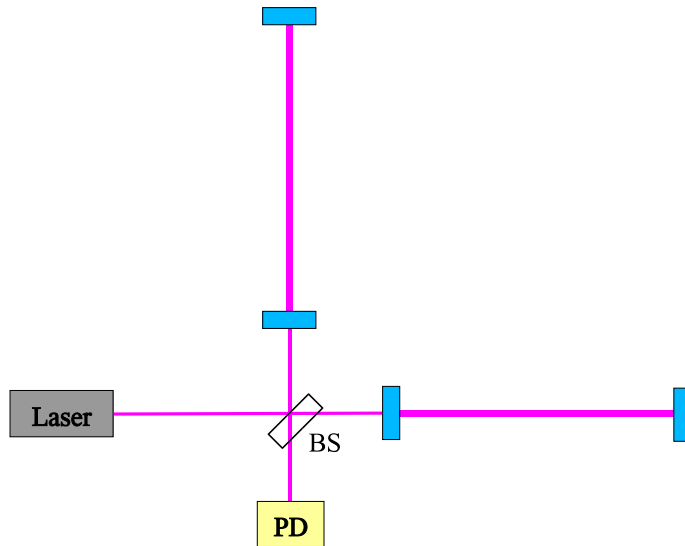


図 3.2: Fabry-Perot-Michelson 干渉計

3.2 Fabry-Perot 干渉計

Fabry-Perot 干渉計¹とは、図 3.3 のように 2 枚の鏡を向かい合わせた装置である。Front Mirror に入射された光は、2 枚の鏡の間を 何度も反射されて往復する。そして一部の光は入射された方向へ反射され、一部の光は透過する。

反射される光の振幅は、

$$\begin{aligned}
 E_r &= E_i r_1 + E_i t_1^2 (-r_2) e^{-2i\delta} + E_i t_1^2 (-r_2) (-r_1) (-r_2) \left(e^{-2i\delta}\right)^2 + \dots \\
 &= E_i r_1 + E_i t_1^2 (-r_2) e^{-2i\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(r_1 r_2 e^{-2i\delta}\right)^n \\
 &= E_i \left(r_1 - \frac{t_1^2 r_2 e^{-2i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\delta}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

ここで、 $\delta = L\Omega/c$ は光が L だけ進むときの位相変化である。また r_1, r_2 は振幅反射率、 t_1, t_2 は振幅透過率である。

¹Fabry-Perot 干渉計には Fabry-Perot 共振器という呼び方もある。2 つの名前はどちらを使っても良いのだが、私の個人的な基準として、「Front mirror で直接反射される光と一旦干渉計内に入ってから元の方角に戻ってくる光が干渉する」という描像では干渉計という言葉を使い、「光を共振させて溜める」という意味では共振器という言葉を使うのが良いと思う。また、2 枚の鏡の間の距離を指す言葉として「共振器長」は良いが、「干渉計長」という言葉はどうもしっくり来ないというように語感の良し悪しで使い分ける場合もある。従ってこの論文の中では 2 つの名前を両方使っている。しかし指しているものは同一であるので混乱しないように注意されたい。

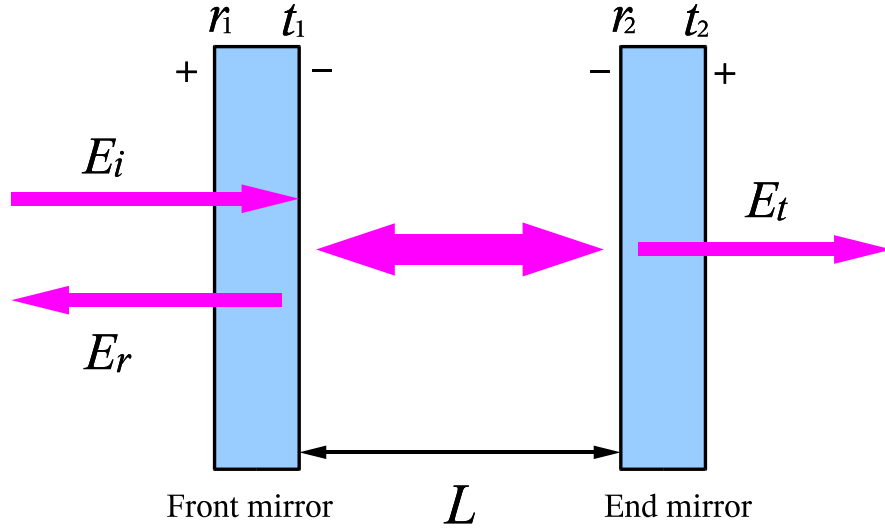


図 3.3: Fabry-Perot 干渉計

また透過光の振幅は、

$$\begin{aligned}
 E_t &= E_i t_1 t_2 e^{-i\delta} + E_i t_1 (-r_2) (-r_1) t_2 e^{-3i\delta} + E_i t_1 (-r_2)^2 (-r_1)^2 t_2 e^{-5i\delta} + \dots \\
 &= E_i t_1 t_2 e^{-i\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(r_1 r_2 e^{-2i\delta} \right)^n \\
 &= E_i \frac{t_1 t_2 e^{i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\delta}}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

である。よって、干渉計の振幅反射率 r_{cav} および透過率 t_{cav} は、

$$r_{\text{cav}}(\delta) = r_1 - \frac{t_1^2 r_2 e^{-2i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\delta}} \tag{3.20}$$

$$t_{\text{cav}}(\delta) = \frac{t_1 t_2 e^{i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\delta}} \tag{3.21}$$

となる。

我々が Photo Detector で検出できるのは、光のパワーである。振幅の 2 乗からパワーを計算すると、反射光強度は、

$$P_r = |E_r|^2 = \frac{\left\{ (t_1^2 + r_1^2) r_2 - r_1 \right\}^2 + 4 r_1 r_2 (r_1^2 + t_1^2) \sin^2 \delta}{(1 - r_1 r_2)^2 \{1 + F \sin^2 \delta\}} |E_i|^2 \tag{3.22}$$

透過光強度は、

$$P_r = |E_t|^2 = \frac{t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{1}{1 + F \sin^2 \delta} |E_i|^2 \quad (3.23)$$

ただしここで、

$$F \equiv \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \quad (3.24)$$

である。透過光強度を δ の関数として描くと、図 3.4 のようになる。これから分かる通り、透過

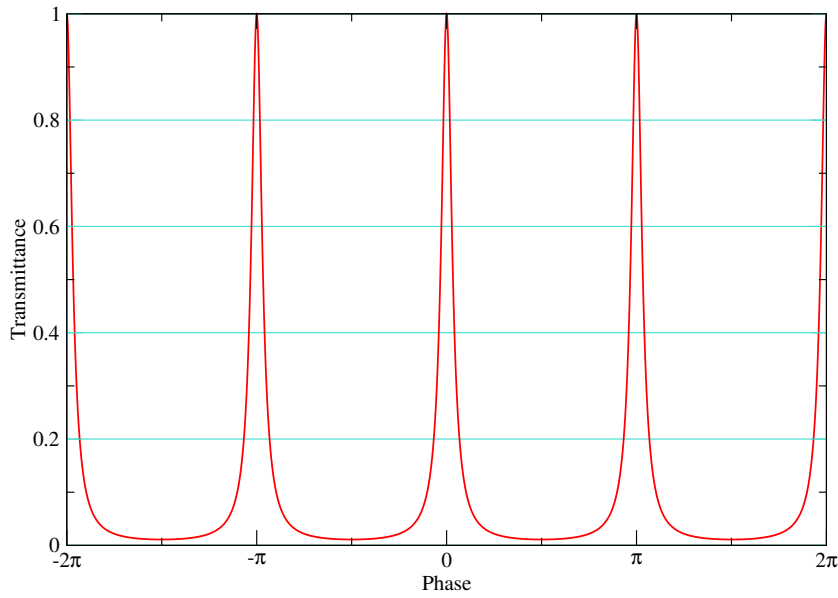


図 3.4: Fabry-Perot 干渉計の透過光強度

光強度は $\delta = n\pi$ に鋭いピークを持っている。この、透過光が最大になっている状態を共振していると呼ぶ。今、 L は変化しないとすると、レーザーの周波数が、

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{L\Omega}{c} = n\pi \\ \therefore \Omega &= \frac{n\pi c}{L} \end{aligned} \quad (3.25)$$

のとき共振することになる。共振する周波数の差を Free Spectral Range(FSR) と呼び、

$$f_{\text{FSR}} = \frac{c}{2L} \quad (3.26)$$

である。

次に透過光強度ピークの半値全幅を求める。半値全幅を f_{FWHM} とすると、 $r_1 \simeq r_2$ のとき式 (3.23) から、

$$\frac{1}{1 + F \sin^2(\pi L f_{\text{FWHM}}/c)} = \frac{1}{2} \quad (3.27)$$

ここで $f_{\text{FWHM}} \ll f_{\text{FSR}}$ のとき、 $\sin$ の中身は微小なので展開して、

$$f_{\text{FWHM}} = \frac{c}{\pi \sqrt{F} L} = \frac{(1 - r_1 r_2) c}{2\pi L \sqrt{r_1 r_2}} \quad (3.28)$$

共振の鋭さを表す指標として、 f_{FSR} と f_{FWHM} の比をとる。これは Finesse と呼ばれる。

$$\mathcal{F} = \frac{f_{\text{FWHM}}}{f_{\text{FSR}}} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \quad (3.29)$$

図 3.5 は共振付近における反射光の位相変化を示している。これから分かる通り、Fabry-Perot 干渉計はその共振付近で反射光の位相が劇的に変化する。これは、入射された光が共振器内で何度も折り返され、位相変化が増幅されたためだと考えることができる。また、Fabry-Perot 干渉計を用いた重力波検出器ではこの位相の変化を利用するため、常に Fabry-Perot 干渉計を共振状態に保っていなければならない。

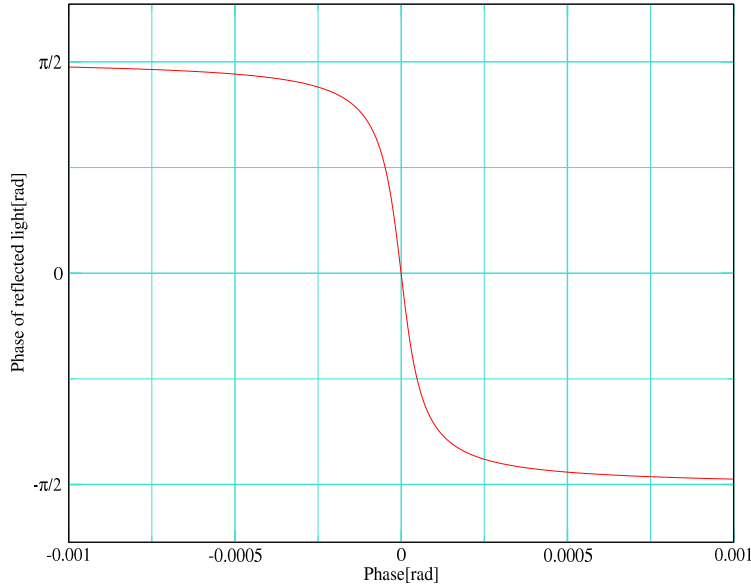


図 3.5: Fabry-Perot 干渉計反射光の位相変化:横軸は δ

3.2.1 Fabry-Perot 干渉計の重力波に対する応答

Fabry-Perot 干渉計の重力波に対する応答を求める。干渉計は x 軸に沿って設置されているとする。また干渉計内を n 回往復するのにかかる時間を τ_n とする。Michelson 干渉計の場合と同様に、干渉計内を n 回往復する経路で積分すると、

$$\int_{t-\tau_n}^t \left\{ 1 - \frac{1}{2} h(t') \right\} dt' \simeq \frac{2Ln}{c} \quad (3.30)$$

これより、

$$\tau_n \simeq \frac{2Ln}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-2Ln/c}^t h(t') dt' \quad (3.31)$$

さらに式 (3.14) の Fourier 変換を代入して、

$$\tau_n \simeq \frac{2Ln}{c} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) \frac{1 - e^{-2iL\omega n/c}}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega \quad (3.32)$$

である。式 (3.18) より、

$$E_r = E_i \left(r_1 - t_1^2 r_2 \sum_{n=1}^{\infty} r_1^{n-1} r_2^{n-1} \right) e^{-2i\delta n} \quad (3.33)$$

であるが、ここで $2\delta n = \Omega \tau_n$ を代入して h の 1 次まで計算すると、

$$\frac{E_r}{E_i} \simeq r_1 - \frac{t_1^2 r_2 e^{-2i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\delta}} + \frac{t_1^2 r_2 e^{-2i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\delta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega}{2\omega} h(\omega) \frac{1 - e^{-2iL\omega/c}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\delta} e^{-2iL\omega/c}} e^{i\omega t} d\omega \quad (3.34)$$

ここで干渉計とレーザーは共振していると考え、 $\delta = n\pi$ なので、

$$\frac{E_r}{E_i} \simeq \frac{r_1 - (r_1^2 + t_1^2) r_2}{1 - r_1 r_2} \left\{ 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{FP}}(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\} \quad (3.35)$$

$$H_{\text{FP}}(\omega) = \frac{\alpha_c \Omega}{\omega} \frac{\sin(\omega L/c)}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\omega L/c}} e^{-iL\omega/c} \quad (3.36)$$

$$\alpha_c = \frac{t_1^2 r_2}{r_1 - (r_1^2 + t_1^2) r_2} \quad (3.37)$$

となる。 H_{FP} が Fabry-Perot 干渉計の重力波に対する周波数応答関数である。ここで、 H_{FP} の絶対値をとると、

$$|H_{\text{FP}}| = \frac{\alpha_c \Omega}{\omega (1 - r_1 r_2)} \frac{|\sin(\omega L/c)|}{\sqrt{1 + F \sin^2(\omega L/c)}} \quad (3.38)$$

さらに $\omega L/c \ll 1$ の場合を考えると、

$$\begin{aligned} |H_{\text{FP}}| &\simeq \frac{\alpha_c \Omega}{\omega (1 - r_1 r_2)} \frac{\omega L}{c \sqrt{1 + (\sqrt{F} L \omega / c)^2}} \\ &= \frac{\alpha_c \Omega L}{c (1 - r_1 r_2)} \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\tau = \frac{\sqrt{F}L}{c} = \frac{2L}{\pi c} \mathcal{F} \quad (3.40)$$

従って、Fabry-Perot 干渉計の周波数応答関数は 1 次のローパス特性を持っている。 τ はその時定数であり、光が共振器の中に滞在する平均時間を表す。 $\mathcal{F}$ は τ と式 (3.40) のような関係にあることから、光の平均折り返し回数を表すと考えられる。

3.3 レーザー干渉計の雑音

重力波による微弱な計量の変化を捕らえるレーザー干渉計は、ありとあらゆる雑音の影響を受ける。実際に重力波を検出するためには、これらの雑音を取り除かなければならない。この節ではレーザー干渉計における原理的な雑音について概説する。

3.3.1 光の散乱雑音

光は光子の集まりであり、その数は量子論的に揺らぐ。定常的な光が入射したときに Photo Detector に流れる電流を I_P とすると、散乱雑音のパワースペクトルは、

$$\langle i_N^2 \rangle = 2eI_P \quad (3.41)$$

より、

$$i_N^2 = \sqrt{2eI_P} \quad (3.42)$$

である。ここで Michelson 干渉計の場合を考える。

$$\phi_1 - \phi_2 = \Phi_0 + \delta\phi \quad (3.43)$$

とおいて、式 (3.3) を使うと、Photo Detector に流れる電流の変化は、

$$\delta I_P = -\frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \sin(\Phi_0) \delta\phi \quad (3.44)$$

ただしここで、 $I_{\max}$ 等は、対応するパワー ($P_{\max}$ 等) が Photo Detector に入射したときに流れる電流である。これが式 (3.42) の散乱雑音と等しくなるような $\delta\phi_{\min}$ が、検出できる最小の位相である。よって、

$$\delta\phi_{\min} = \frac{2\sqrt{2eI_{\text{dc}}}}{I_{\max} - I_{\min}} \frac{1}{\sin \Phi_0} \quad (3.45)$$

$$I_{\text{dc}} = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2} + \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \cos \Phi_0 \quad (3.46)$$

ここで、Visibility が良くて、 $I_{\min} = 0$ の場合を考えると、

$$\delta\phi_{\min} = \sqrt{\frac{2e}{I_{\max}}} \frac{1}{\sin(\Phi_0/2)} \quad (3.47)$$

これは、 $\Phi_0 = \pi$ のとき最小になる。このとき I_{dc} は最小であり、ダークフリンジと呼ばれる。散射雑音の影響を最小にするために、干渉計は常にダークフリンジに保たれるように制御される。またそのために、図 3.1 で、PD が置いてある場所を、Dark port と呼ぶ。逆にレーザーに光が返っていく方向は、Bright port と呼ばれる。

式 (3.47) からわかるように、散射雑音は I_{max} の平方根に反比例する。Photo Detector の量子効率を η 、入射レーザーパワーを P とすると、

$$I_{max} = e \frac{\eta P}{\hbar \Omega} \quad (3.48)$$

なので、ダークフリンジでの散射雑音は、

$$\delta\phi_{min} = \sqrt{\frac{2\hbar\Omega}{\eta P}} \quad (3.49)$$

従って、散射雑音はレーザーのパワーを上げれば低減されることが分かる。

例えば、帯域 1kHz で $h = 10^{-21}$ の重力波を検出できる感度を得るには、波長 $1\mu\text{m}$ のレーザーで 1kW もの出力が必要である。このような高出力かつ安定なレーザーを実現するのは今のところ難しい。そこで、干渉計からレーザーに戻っていく光を鏡で打ち返して、干渉計にはいる実効的なレーザーパワーを増幅する方法がとられる (Power Recycling)。

3.3.2 熱雑音

干渉計は有限温度の熱浴に接しているため、その構成部品は常に熱振動をしている。鏡や、suspension の熱振動は干渉計の光路長を変化させ、雑音となる。

熱雑音は揺動散逸定理によって系の損失と関連づけられる。したがって、損失の性質によって熱雑音の形も異なる。良く用いられる損失のモデルとして、速度に比例した減衰力が働く viscous damping モデルがある。このモデルにおいて振動子の熱雑音は、

$$\langle x(\omega)^2 \rangle \simeq \frac{4k_B T}{m\omega_0^3 Q} \quad (\omega \ll \omega_0) \quad (3.50)$$

$$\langle x(\omega)^2 \rangle \simeq \frac{4\omega_0 k_B T}{m\omega^4 Q} \quad (\omega \gg \omega_0) \quad (3.51)$$

と書ける。ここで k_B は Boltzman 定数、 T は温度、 m は換算質量、 ω_0 は共振周波数である。 Q は Q 値と呼ばれ、系の損失が少なければ少ないほど大きな値になる。上式から分かる通り、熱雑音を減らすためには温度 T を下げるか、 Q を上げれば良いことが分かる。

様々な実験によると、物質の内部損失は周波数に依存せずほぼ一定であるというモデルの妥当性が高い。このようなモデルは structure damping モデルと呼ばれ、この場合熱雑音は、

$$\langle x(\omega)^2 \rangle \simeq \frac{4k_B T}{\omega} \frac{\phi(\omega)}{m\omega_0^2} \quad (\omega \ll \omega_0) \quad (3.52)$$

$$\langle x(\omega)^2 \rangle \simeq \frac{4k_B T}{\omega} \frac{\omega_0^2 \phi(\omega)}{m\omega^4} \quad (\omega \gg \omega_0) \quad (3.53)$$

となる。ここで、 $\phi(\omega)$ は損失を表す複素バネ定数で、共振周波数で $Q = 1/\phi(\omega_0)$ の関係がある。したがって、やはり低温化および高い Q 値の実現が熱雑音低減の方法となる。

現在世界中で高い Q 値を実現するような鏡・suspension の材料が研究されている。また、日本の次世代計画である LCGT 計画は鏡を低温にすることを目標に掲げており、低温干渉計のための研究が進められている。

3.3.3 地面振動

干渉計が設置される地面は、地震がなくても常に振動している。そのスペクトルはだいたい次のような形をしている。

$$x_{\text{seis}} = 10^{-7} \left(\frac{1\text{Hz}}{f} \right)^2 \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (3.54)$$

この地面振動が鏡に直接伝わると当然雑音となる。従って振動の伝達を阻止する防振装置が必要である。干渉計における防振装置の基本は振り子である。いま、質量 m のおもりを長さ l のワイヤーで吊った振り子を考える。振り子の懸架点の変位を X 、おもりの変位を x とすると運動方程式は、

$$m \left\{ \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} (\dot{x} - \dot{X}) + \omega_0^2 (x - X) \right\} \quad (3.55)$$

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{g}{l}} \quad g: \text{重力加速度} \quad (3.56)$$

である。これを Fourier 変換して X から x への伝達関数を求めると、

$$H(\omega) = \frac{\omega_0^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q}} \quad (3.57)$$

である。これを見ると、 $\omega_0 \ll \omega$ では、周波数の 2 乗に反比例して伝達関数が小さくなっていく。従って振動が伝わりにくくなり、防振効果を持つことがわかる。実際の干渉計では高い防振比を得るために、多段の振り子を用いる。

振り子によって防振することができるのは鏡の水平方向の変動だけである。しかし、レーザーが鏡の中心に当たっていなかったり (ミスセンタリング)、鏡が傾いていたりすると、垂直方向や鏡の回転方向の振動が干渉計の雑音として現れてしまう。そこで、縦方向や回転方向に対する防振装置も必要である。縦方向や Pitch 方向の防振には、バネが用いられる。特に 5.2.3 節で説明する GAS filter 等の小型で低い共振周波数を持つものが開発されている。Yaw 方向回転の防振としては、鏡を吊るワイヤーを 1 本にすることが有効である。

防振装置として今まで説明してきたものは、全て機械的な共振を利用した受動的な防振装置であった。しかし、受動的な防振装置はその共振周波数以下では防振性能を持たない。低周波まで

防振性能を持つ装置としては、Feedback 制御による能動防振装置がある。これは、センサーで鏡（または懸架系の構成要素）の変位を読み取り、その変位を打ち消すようにアクチュエーターで鏡を動かすというものである。本論文の主題である補助干渉計は、能動防振装置の一種である。

3.3.4 その他の雑音

レーザーの周波数雑音

レーザーの周波数変動は、干渉計の腕の長さが変化することと等価である。ただしその変化は 2 本の腕に同相で効くため、本来打ち消し合うはずである。しかし現実には 2 本の腕に非対称性が存在するため、完全には打ち消し合わず信号に漏れてくる。従って周波数の安定化は必須である。Fabry-Perot-Michelson 型の干渉計では、2 つの腕の同相信号をレーザーの周波数安定化に使う。

残留ガスの影響

レーザーの通り道にある空気が揺らぐと屈折率が変化する。これは光路長の変化を引き起こし、雑音となる。そのため干渉計は全て高真空中に配置される。

制御による雑音

3.2節で述べたように、Fabry-Perot 干渉計を重力波検出のために用いるには、常に共振状態を保つように制御する必要がある。また、3.3.1節で述べたように、散射雑音を抑えるために Michelson 干渉計は dark fringe に保たなければならない。従って干渉計型重力波の動作に制御は不可欠なものである。

制御をするためには鏡をアクチュエーターで動かす必要がある。しかし、アクチュエーターを駆動する電気回路に雑音が存在すると、観測帯域において逆に鏡を動かしてしまい、雑音となる。弱いアクチュエーターを使えばこの雑音を低減することができるが、その場合制御が安定にかけられなくなってしまう。

ここで、アクチュエーター雑音の大きさを見積るために簡単な計算を試みる。まず地面振動のモデルとして、次のようなものを考える。

$$x_{\text{seis}} = \begin{cases} \left(\frac{10^{-7}}{f^2} \right) \text{m}/\sqrt{\text{Hz}} & f \geq 0.1\text{Hz} \\ 10^{-7} \text{m}/\sqrt{\text{Hz}} & f < 0.1\text{Hz} \end{cases} \quad (3.58)$$

これを用いて鏡の RMS 振幅を計算する。鏡の RMS 振幅を決めるのは、鏡を吊る振り子の共振周波数以下の振動なので、上式を 1Hz まで積分すると²鏡の RMS 振幅は約 $1\mu\text{m}$ となる³。従って、鏡を制御するアクチュエーターは DC 付近で鏡を $1\mu\text{m}$ 動かすことができないとなければならない。

²鏡を吊る振り子の共振周波数を 1Hz だと仮定している。

³厳密には防振系の伝達特性を考えて計算しなければならない。特に振り子の共振周波数付近では、鏡が大きく揺

今、アクチュエーターの駆動回路は $\pm 15\text{V}$ の電源で動いているとする。すると DC 付近で 30V の入力振幅に対して、鏡を $1\mu\text{m}$ 動かさなければならないので、

$$k_{\text{DC}} = \frac{10^{-6}\text{m}}{30\text{V}} = 3.3 \times 10^{-8}\text{m/V} \quad (3.59)$$

となる。ここで、 k_{DC} は、DC 付近でのアクチュエーターの駆動効率である。

さて、鏡は振り子に吊られているため、振り子の共振周波数以上でアクチュエーターの駆動効率は f^2 に反比例して落ちていく。従って 100Hz におけるアクチュエーターの駆動効率は、 $k_{100} = k_{\text{DC}}/100^2 = 3.3 \times 10^{-12}\text{m/V}$ である。また、アクチュエーターの駆動回路の雑音としては、 $1\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ を仮定する。これは 100Ω 抵抗の熱雑音のレベルであり、これ以上雑音を下げるのはほぼ不可能である。以上のことから、 100Hz においてアクチュエーターから鏡に導入される雑音は、

$$x_{\text{act}} = 3.3 \times 10^{-20}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (3.60)$$

となる。これは基線長 3km の干渉計の場合、歪み量で $h = 10^{-23}$ となり、次世代干渉計が目指す感度と同じレベルである。しかも上の議論では安全ファクターに関しては考慮されておらず、現実にはもっと雑音レベルが上がると予想される。従ってアクチュエーターの雑音は深刻な問題である。

上記議論から分かる通り、アクチュエーターの雑音を下げるためには、鏡の RMS 振幅を小さくすることが有効である⁴。本論文で議論する補助干渉計は、鏡の RMS 振幅を下げることで、この問題に対する一つの解決策を提供する (4.2.3 節参照)。

輻射圧揺らぎ

干渉計の鏡に当たる光子は鏡に運動量を与える。従って鏡に当たる光子の数が揺らぐと鏡が揺らされ、雑音になる。またこの雑音は光パワーの平方根に比例する。散乱雑音は光パワーの平方根に反比例していたので、2つの雑音の兼ね合いで最適な光パワーが存在することになる。実はこれは、量子力学的不確定性が巨視的な系に現れてきている例である。すなわち、位置決定の精度を上げるために (散乱雑音を下げるために) 光のパワーを上げると、輻射圧揺らぎによる鏡の運動量不確定性が上がってしまうわけである。これは、位置と運動量という正準共役な関係にある2つの量の間の不確定性関係に由来する。

標準量子限界

前述の通り、自由粒子の位置決定には量子力学的な不確定性が伴う。そこで、その限界を不確定性原理から導いてみる。

れるので、RMS 振幅が増大する。しかし、共振周波数ではアクチュエーターの駆動効率も増大するので、ここでは2つの効果がキャンセルすると考えている。

⁴アクチュエーター駆動回路の電源電圧を上げるという方法もある。しかし、この方法で改善できたとしても一桁程度である。

今、 $t = 0$ で運動量 $p(0)$ を持つ質量 m の粒子の運動を考える。粒子の位置を x とすると、

$$x(t) = \frac{p(0)}{m}t + x(0) \quad (3.61)$$

ここで、不確定性関係、

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.62)$$

を用いて、時刻 t における不確定性を計算すると、

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(t)^2 \rangle &= \frac{\langle \Delta p(0)^2 \rangle}{m^2} t^2 + \langle \Delta x(0)^2 \rangle \\ &\geq 2 \sqrt{\frac{\langle \Delta p(0)^2 \rangle}{m^2} t^2 \langle \Delta x(0)^2 \rangle} \geq \frac{\hbar t}{m} \end{aligned} \quad (3.63)$$

等号が成立するのは

$$\Delta x(0) = \sqrt{\frac{\hbar t}{2m}} \quad (3.64)$$

のときであり、これを自由粒子の標準量子限界と呼ぶ。しかし、これはレーザー干渉計の絶対的な限界ではない。実際、運動量の不確定性を増大させることによって、位置を任意の精度で決めることができるという、量子非破壊計測 (QND) に関する研究がなされている [16, 17, 18]。

3.4 各国の大型干渉計計画

現在世界各国では4つの大型レーザー干渉計プロジェクトが進められている。アメリカでは、LIGO(Laser Interferometer Gravitational wave Observatory) と呼ばれる計画が進行中であり、ワシントン州とルイジアナ州に基線長 4km の干渉計を2台建設している [7]。現在、技術テストのための試運転を繰り返しており、近々科学的な解析を目的としたデータ取得を行う予定である。

フランスとイタリアは共同で VIRGO プロジェクトを推進している。こちらは、イタリアのピサ郊外に 3km の干渉計を建設中である [8]。この計画では、超低周波防振装置が開発され、導入される。

ドイツと英国の共同プロジェクトは GEO と呼ばれ、600m の基線長を持つ [9]。この計画では、デュアルリサイクリングと呼ばれる進んだ光学配置をとる。

日本の TAMA 計画は、東京三鷹の国立天文台内に基線長 300m の干渉計を建設した。規模こそ小さいが世界他計画に先駆けて本格的なデータ取得を開始し、現在世界最高感度の干渉計型重力波検出器である [10]。

さらに、干渉計を宇宙に建設するという LISA 計画 (欧州) も進められている。これは太陽周回軌道にのせた3つの衛星により、アーム長 500 万 km という巨大な干渉計を作る計画である。これにより、超低周波の重力波を捕らえることができると期待されている。

本格的な重力波天文学を開始するにはただ重力波を捕らえるだけでなく、たくさんの現象を S/N 良く観測できなければならない。現在建設中の大型干渉計の予定感度では、運良く大きな

重力波を放出する天体現象が発生すれば重力波を捕らえることができるが、定常的に重力波イベントを捕らえるためにはまだ感度が足りない。イベント数を増やす方法は、感度を向上させてより遠くのイベントまで観測できるようにすることである。従って、更なる感度向上を目指した次世代干渉計計画が世界中で検討されている。日本では、TAMA の成功に基づいて次世代干渉計を神岡鉱山の地下に建設する LCGT 計画が議論されている。

第4章 補助干渉計

この章ではこの論文の主題である補助干渉計について述べる。まず基本原理を紹介し、次にそれが重力波検出器の高感度化にどのようにつながるのかを説明する。その後、補助干渉計の性能を制限する各種要因について論じる。最後に補助干渉計の重力波検出以外への応用として、地球のコア振動検出について述べる。

4.1 原理

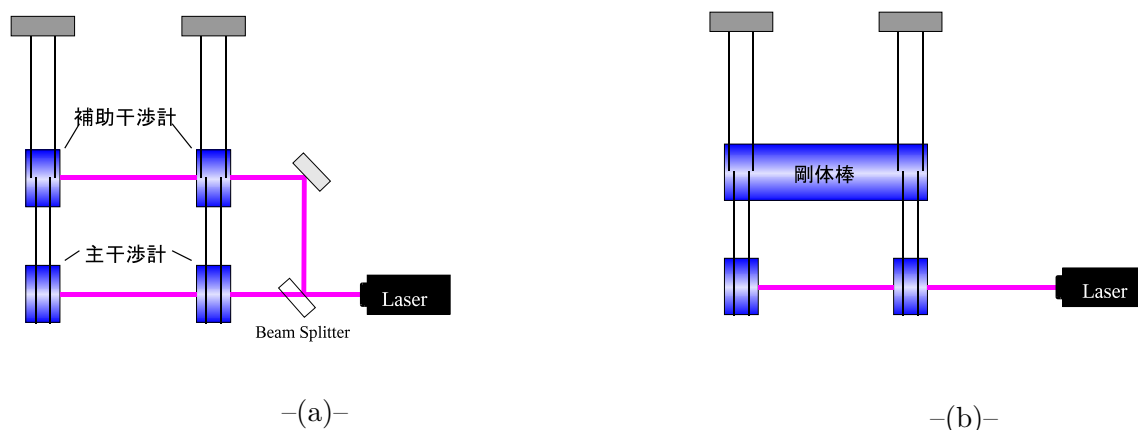


図 4.1: 補助干渉計の概念図

図 4.1は補助干渉計の概念図である。この図は Fabry-Perot 光干渉計の例である。つまり Fabry-Perot-Michelson 型干渉計の片腕だと考えれば良い。図 4.1(a) では、まず補助干渉計と呼ばれる Fabry-Perot 干渉計が振り子として吊られている。そしてその補助干渉計を構成する鏡から、さらにもう一つの Fabry-Perot 干渉計が吊られている。下段の干渉計が、重力波を捕らえるために使われる主干渉計である。二つの干渉計には一つのレーザーの光をビームスプリッターで二つに分けて入射する。このような構成にする利点は、補助干渉計を制御することによって主干渉計に伝わる外乱を抑えることができるということである。外乱を抑え込むメカニズムは以下の通りである。

補助干渉計を制御して干渉状態に保った時、制御の利得が無限大であれば、レーザーの波長を基準にして補助干渉計の長さは全く変動しないことになる。従って補助干渉計は仮想的な一本の剛体棒と見なすことができる (図 4.1(b))。ところで干渉計は通常真空中におかれるため、鏡

への外乱はほぼ全てワイヤーを通して伝わってくる。地面振動などの外乱がワイヤーを伝わってくる途中に剛体棒があると、剛体棒の両端を吊すワイヤーの差動変動(剛体を伸縮させるような変動)は剛体棒によって抑えられてしまう。また同相変動(剛体が全体として動くような変動)は干渉計の長さには影響を与えないので、ここでは考えなくてよい。従って補助干渉を制御すると、主干渉計には外乱が伝わらないことになる。理想的な場合には、補助干渉計さえ制御すれば主干渉計は制御しなくても良いということになる。

ちなみに補助干渉計を制御して仮想的な剛体棒と見す代わりに、現実の剛体棒を吊して、そこから主干渉計を吊っても良い。しかし、大型干渉計では腕の長さが数 km に達する。このような大きさの剛体棒を使うのは現実的ではない。

補助干渉計は主干渉計に伝わる地面振動などの外乱を抑制するが、重力波の効果を打ち消すことはない。なぜならば、地上に置かれた干渉計型重力波検出器がターゲットとする数十 Hz 以上の帯域において、補助干渉計と主干渉計は独立であると見なせるからである。独立であるとみなせる理由は、主干渉計が補助干渉計から振り子で懸架されており、振り子の伝達関数とその共振周波数(1Hz 程度)より十分高い周波数で非常に小さくなるからである。重力波は、主干渉計に直接力を及ぼすので、主干渉計と補助干渉計が独立とみなせる周波数帯では、補助干渉計によって打ち消されることはない。しかし、地面振動などの外乱は全て補助干渉計を経由して伝わってくるので、補助干渉計が制御されている全周波数帯で補助干渉計によって抑え込まれる。よって、補助干渉計は重力波の効果を打ち消すこと無く外乱のみを抑えることができるわけである。

ただし主干渉計を懸架する振り子の共振周波数(f_0)以下においては、上の議論は成り立たない。到来した重力波の波長が補助干渉計と主干渉計の間隔に比べて十分長いとき(通常はこの条件を満たしている)、重力波は補助干渉計および主干渉計を全く同様に伸縮させる。しかし補助干渉計は制御がかけられているので、重力波の潮汐力に抵抗して長さが変化しない。そして f_0 以下の周波数において主干渉計は補助干渉計と一緒に動くため、主干渉計に対する重力波の効果は打ち消されてしまう。もっともこの周波数帯は検出器の観測帯域ではないため、重力波の効果が打ち消されても問題ない。

4.2 補助干渉計と次世代干渉計

現在設計が議論されている次世代干渉計では、様々な新しい技術の導入が提案されている。しかし、新しい技術の導入は新たな問題点も同時に導入することがある。以下では、次世代干渉計において導入が予定される新技術とその導入に伴う問題点、そしてその問題を補助干渉計が解決する可能性について述べていく。

4.2.1 複雑な防振系

次世代干渉計においては高い防振比を得るために、多段で複雑な防振系の導入が必須である。しかし、多段の防振系には機械的な共振が多数あり、その共振周波数付近で鏡が大きく揺れて

しまう (RMS 振幅が増大する)。そのため干渉計の動作が不安定になってしまう。また共振周波数付近での大きな揺れは干渉計のコントラスト低下を招き、結果として観測帯域における感度を悪化させてしまうという問題も引き起こす。補助干渉計を用いると、複雑で多段の防振系をシンプルな1段振り子と見なすことができるようになり、これらの問題が解決される。

前節で述べたように、制御がかけられた補助干渉計は一つの剛体棒と見なすことができる。従って主干渉計からみると、防振系は単純な1段振り子である。しかし実際にはこの剛体棒は複雑な多段防振系によって防振されている。つまり防振系全体を、非常に良く防振された剛体棒から懸架された1段振り子と見なすことができる。従って防振性能を維持したまま、主干渉計からみた防振系を単純化することができるのである。これによって、鏡の RMS 振幅を下げることができ、干渉計の動作が安定になる。また、コントラスト低下による観測帯域における感度低下も防ぐことができる。

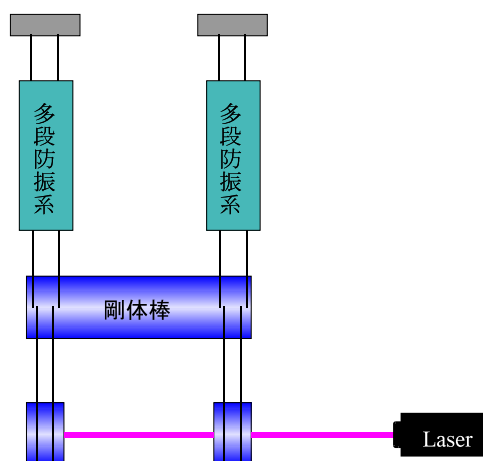


図 4.2: 複雑な多段防振系と補助干渉計

4.2.2 能動防振

補助干渉計は、超高性能能動防振装置と見なすこともできる。一般に能動防振装置には位置センサーや加速度センサーが用いられる。そして、能動防振装置の性能はこれらのセンサーの雑音によって制限される。

位置センサーとは、位置の基準となる参照物を決め、その参照物とセンサーの間の相対的な位置の変化を検出するものである。ここで問題は何を参照にするかということである。従来の能動防振装置で使われていたのは、地面に固定された物体を参照にするセンサーである。しかし、地面に固定された参照物は地面振動によって揺れているため、その振動レベルが能動防振装置の性能限界になってしまう。これは、本当に変動を抑えたい量 (2 枚の鏡の間の距離変動) と

は違う量 (鏡と地面の相対変動) を測って制御をかけているために生じる問題である。

加速度センサーには、参照物の振動という問題は存在しない。なぜなら、加速度センサーとは慣性系に対するセンサーの加速度を検出する装置であり、参照物として利用している慣性系は、外乱の影響を受けないものだからである。しかし、加速度計は低周波で感度が悪化してしまう。これは、同じ振幅の振動であれば、低周波にいくほど加速度が小さくなるからである。したがってやはり、センサーの雑音によって能動防振装置の性能が制限されてしまう。

補助干渉計の場合、センサーによって性能が制限されることはない。これはセンサーとして超高感度位置センサーである、干渉計を用いているからである。干渉計は位置センサーであるが、測っているのは本当に変動を抑えたい量である「2枚の鏡間の距離」そのものであり、参照物の振動という問題は全く存在しない。また、補助干渉計は重力波を検出するための主干渉計と同等の感度を持つため、補助干渉計の雑音によって主干渉計を乱すということはない。したがって、補助干渉計は超低雑音のセンサーを用いた理想的な能動防振装置であると言える。

4.2.3 アクチュエーターの雑音

3.3.4節で述べた通り、鏡の制御に用いるアクチュエーターは雑音源ともなりうる。より弱いアクチュエーターを使ってこの雑音を下げるには、弱いアクチュエーターを用いても干渉計が安定して動作できるように、鏡の RMS 振幅を抑える必要がある。

補助干渉計を用いた場合、地面振動などの外乱が補助干渉計で抑えられるため鏡の RMS 振幅が減少する。従ってより弱いアクチュエータを使うことができ、結果的にアクチュエータの雑音を減少させることができる。

4.2.4 RSEに伴う高 Finesse 光共振器の利用

RSE(Resonant Sideband Extraction) は、LIGO や LCGT 等の次世代干渉計において採用される可能性の高い干渉計の構成である。Fabry-Perot-Michelson 型干渉計の Dark port に鏡を置くことで、腕共振器に Finesse の高いものを使うことができるのが特徴である。これによって腕共振器内での光のパワー増幅度が大きくなるため、同じ散乱雑音レベルを得るために必要な入射光パワーが小さくなる。入射光パワーを下げられると、入射鏡における光の透過損失からくる熱レンズ効果等を緩和することができる。しかし、腕共振器の Finesse が現在 (数百) よりも高く (数万) なるため、そのような共振器を動作点に引き込むのは容易ではない。しかし補助干渉計を用いると、主干渉計の RMS 振幅が抑えられるため、動作点への引き込みが楽になると考えられる。

4.2.5 低温鏡の利用

日本の次世代計画である LCGT 計画では低温鏡の利用が目玉となっている。鏡を低温にすることにより、熱雑音を抑えることができる。しかし、真空中に吊られた鏡を冷やすには何らか

の方法で熱を逃がさなければならない。そのために suspension のどこかにヒートリンクを接続することになる。しかし、このヒートリンクから地面振動や冷凍機の振動が導入されてしまうことが懸念される。ヒートリンクを細くすればそれだけ導入される振動は減るが、そのかわり熱伝導率が下がり、冷却が困難になる。補助干渉計を用いると、ヒートリンクから導入された振動も抑え込むことができるため、ヒートリンクに対する制限が緩和される。

4.3 補助干渉計の限界

ここでは補助干渉計の性能を制限する要素について考える。ここで言う補助干渉計の性能とは、外乱による主干渉計の共振器長変動を、何分の 1 に抑えることができるか、ということである。

4.3.1 制御ゲイン

補助干渉計を制御するとそれは仮想的な剛体棒と見なすことができると述べた。しかし実際の制御ゲインは有限であるため、補助干渉計は完全な剛体にはならない。現実の補助干渉計では制御ゲインを G とすると、外乱によって補助干渉計に与えられる変動が、 $1/(1+G)$ になる。つまり $1/(1+G)$ が補助干渉計の最大性能を決める。従って、補助干渉計の制御ゲインはできるだけ高くする必要がある。

4.3.2 縦振動

次に補助干渉計の性能を制限するのは鏡の縦振動である¹。鏡の縦振動は、レーザー光のミスセンタリングと結合して共振器長の変動として現れる。ビームセンタリングを徹底すればこの効果は減少するが、それでも 0.1% 程度の結合は残ってしまう。よって、地面振動のスペクトル及び suspension の伝達関数が垂直、水平方向とも同じであると仮定すると、縦横結合率 0.1 現実の suspension は縦方向の防振比の方が水平方向に比べて悪いことが多いので、その場合この制限はより厳しくなる。

4.3.3 振り子の非対称性

補助干渉計から懸架される主干渉計は、剛体棒から懸架される一段振り子と見なすことができた。この振り子に非対称性が存在すると同相雑音除去比 (CMRR) が低下し、補助干渉計の性能が低下する。これを振り子の質点モデルで考えてみる。図 4.3 のように、長さ (l)、質量 (m)、

¹Fabry-Perot 干渉計を構成する鏡の縦振動を、干渉計を使って検出する方法は現在までに提案されていない。従って、干渉計の信号を使った制御では鏡の縦振動を抑えることができない。干渉計以外のセンサーを用いた制御は可能であるが、その場合センサーの雑音が問題となる。

ダンピング係数 (Γ) が微妙に違う 2 つの振り子を考える。振り子の運動方程式は、

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{mg}{l}(x_1 - X) - \Gamma\dot{x}_1 \quad (4.1)$$

$$(m + \Delta m)\ddot{x}_2 = -\frac{(m + \Delta m)g}{l + \Delta l}(x_2 - X) - (\Gamma + \Delta\Gamma)\dot{x}_2 \quad (4.2)$$

ここで X は地面の変位、 x_1, x_2 は 2 つのミラーの変位である。これらを Fourier 変換して X から x_1, x_2 への伝達関数を計算すると、

$$H_1(\omega) = \frac{1}{1 + i\frac{l\Gamma}{mg}\omega - \frac{l}{g}\omega^2} \quad (4.3)$$

$$H_2(\omega) = \frac{1}{1 + i\frac{(l+\Delta l)(\Gamma+\Delta\Gamma)}{(m+\Delta m)g}\omega - \frac{l+\Delta l}{g}\omega^2} \quad (4.4)$$

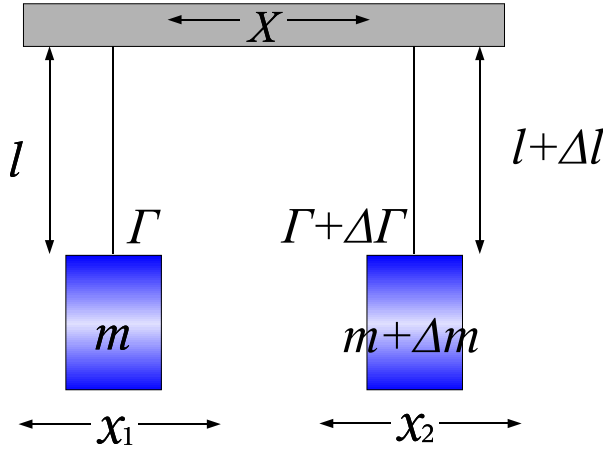


図 4.3: 振り子の非対称性計算のパラメータ定義

これらの伝達関数を用いて CMRR を次のように定義する。

$$\text{CMRR} = 2 \left| \frac{H_1(\omega) - H_2(\omega)}{H_1(\omega) + H_2(\omega)} \right| \quad (4.5)$$

これを、 $\Delta l, \Delta m, \Delta\Gamma$ の 1 次まで計算すると、

$$\text{CMRR} \simeq |H_1(\omega)| \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{g}\right)^2 \omega^4 + \left(\frac{l\Gamma}{mg}\right)^2 \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma} - \frac{\Delta m}{m}\right)^2 \omega^2} \quad (4.6)$$

となる。この式は $\omega \rightarrow \infty$ で $\Delta l/l$ に漸近し、 $\omega \rightarrow 0$ で 0 になる。

図 4.4は、具体的に非対称性を与えて CMRR を計算した例である。振り子のパラメータとしては、 $l=15\text{cm}$ 、 $m=300\text{g}$ $\Gamma=0.1\text{Kg/s}$ を採用した。これは次章以降の実験で用いたものに近い値である。非対称性としては $\Delta l=1\text{mm}$ 、 $\Delta m=-1\text{g}$ 、 $\Delta\Gamma=0.001\text{Kg/s}$ をそれぞれ与えた場合と、その全てを同時に与えた場合について計算した。上の議論通り、振り子の共振周波数以下で CMRR は低周波に行くほど良くなる。また、振り子の共振周波数以上では長さの非対称性の影響が支配的になる。この例ではそれぞれのパラメータに 1%弱の非対称性を与えているが、この場合共振周波数以上では-45dB 程度が補助干渉計の限界性能となる。

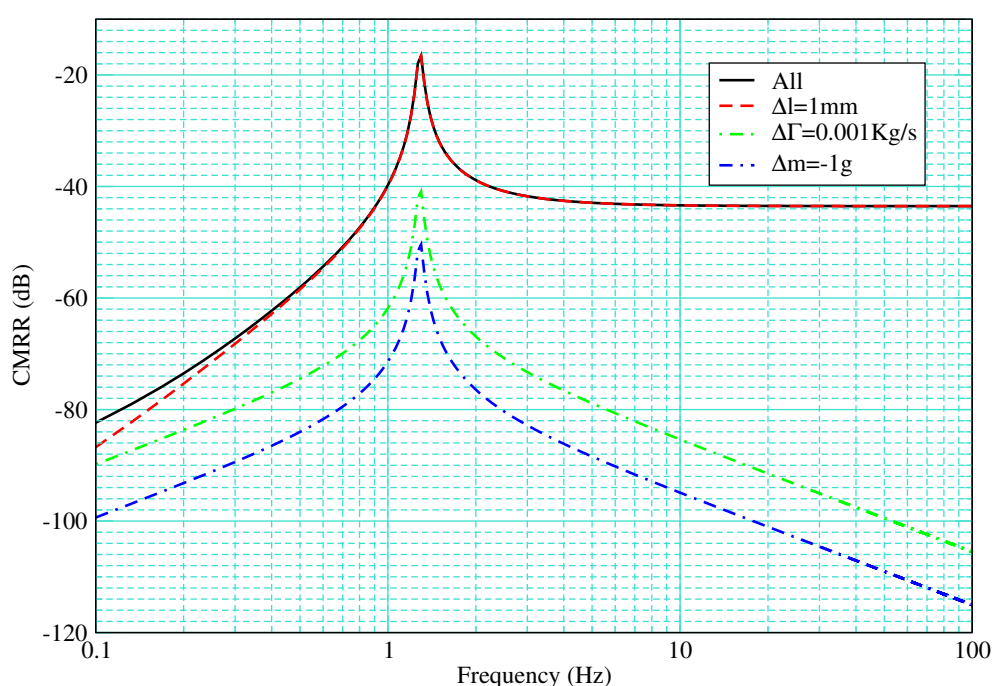


図 4.4: 振り子に非対称性を与えた場合の CMRR

4.3.4 レーザー周波数の変動

補助干渉計はその長さがレーザー光波長の半整数倍になるように制御されている。従って、レーザーの周波数変化、ひいては波長の変化に追従して長さが伸縮することになる。主干渉計も補助干渉計と同じレーザーの光を使うため、共振状態を保つためにはレーザー周波数の変化

に対して補助干渉計と全く同様に伸縮する必要がある。補助干渉計から主干渉計を吊している振り子の共振周波数を f_0 とすると、 f_0 以下の周波数において主干渉計の長さで補助干渉計の長さは同じ変動をする。従ってこの周波数帯ではレーザー周波数変動の影響は補助干渉計によって抑えられ、主干渉計に現れない。しかし振り子の伝達関数は f_0 を境に位相が反転する。よって f_0 より高い周波数では補助干渉計と主干渉計は逆位相で動き、レーザーの周波数雑音を打ち消す効果はなくなる。従って補助干渉計がレーザー周波数変動を抑えることができるのは f_0 以下の周波数帯のみである²。

4.3.5 建設の手間

これは補助干渉計の性能を制限する要因ではないが、問題点ということでここで述べる。

大型干渉計に補助干渉計を導入する場合、光学系が約 2 倍に増え、制御ループの数も 2 倍になる。したがってその建設コスト³が増大する。しかし、4.2 節で述べたように、この方法は様々な問題を複合的に解決する。従って個々の問題を別々に解決するための装置を導入していくのに比べて、全体のコストは低くなる可能性がある。また超高性能能動防振装置という意味では、補助干渉計以外でこれを実現する方法はない。従って建設コストを考えても十分に導入を検討する価値がある。

また干渉計が 2 つになっても、レーザーのパワーを 2 倍にしなければならないわけではない。実際には、補助干渉計に入射する光は主干渉計に入射する光に比べて弱くて良い。なぜならば、補助干渉計に入射される光が弱くなることによって散射雑音が増加し、補助干渉計の雑音レベルが悪化しても、補助干渉計と主干渉計の間は 1 段振り子で防振されているため、その雑音が主干渉計に伝わらないからである。

具体的に見積もってみる。補助干渉計から主干渉計を吊っている振り子の共振周波数が 1Hz だとする。観測帯域を 100Hz とすると、そこでの防振比は 10^{-4} である。つまり、補助干渉計の雑音レベルが主干渉計より 10^4 倍悪化しても、主干渉の雑音レベルには影響を与えないということである。ここで散射雑音は光パワーの平方根に反比例するので、補助干渉計に入射する光パワーは主干渉計に入射する光パワーの $1/10^8$ で良いということになる。

次に、RSE で、主干渉計に高い Finesse のものを使った場合を考える。主干渉計の Finesse が補助干渉計の 100 倍だとする。そのとき、2 つの干渉計に同じ光パワーを入射しても補助干渉計の散射雑音レベルは主干渉計に比べて 100 倍大きい。しかし防振比が 10^{-4} とれているので、さらに 10^2 は倍補助干渉計の雑音レベルを悪化させても良い。そのような散射雑音レベルを実現するには、補助干渉計に入射する光パワーが、主干渉計の $1/10^4$ で良いことになる。

いずれにしても、補助干渉計を導入するためにレーザーパワーを増強する必要はない。

² f_0 より上で補助干渉計の長さ変動が逆相で主干渉計に伝わるということは、周波数雑音を 2 倍に増幅してしまうように見える。これは、 f_0 にごく近い周波数では正しい。しかし、 f_0 より十分上の周波数では振り子の防振効果によって補助干渉計と主干渉計は独立になるので、レーザー周波数雑音を悪化させることはない。

³ 予算的にも、時間的にも

4.4 地球物理学的应用

補助干渉計を重力波の検出ではなく、地球のコア振動の検出に用いるという提案がある [20]。地球のコアが振動すると、地球上の各点における重力場の向きが変動する (図 4.5)。このとき地上に置かれた干渉計の鏡は差動で変動し、共振器の長さが伸縮する。しかし通常の干渉計ではこの変化を地面振動による外乱と区別することができない。補助干渉計を使った場合、重力場の変化が補助干渉計と主干渉計の間に潮汐力を及ぼす (図 4.6(a))。従って、補助干渉計と主干渉計の変位の差を見ることによって重力場の変化を検出することができる。また地球のコア振動で興味ある周波数は主干渉計を吊る振り子の共振周波数よりも十分低い ($10^{-4} \sim 10^{-5} \text{Hz}$) ので、この周波数帯では地面振動は補助干渉計と主干渉計に同じように伝わる。従って、地面振動の影響はは主干渉計と補助干渉計の差動変位には現れない。以上が補助干渉計を用いた地球のコア振動検出の原理である。

ところで現実の装置において補助干渉計には強力な制御がかけられている。この場合どうか考えてみる。制御がかけられた補助干渉計は仮想的な剛体棒と見なすことができた。従って、重力場の変化による変動を受けない。もちろん地面振動の影響もうけない。地球コアが振動したとき、そのような非常に静かなステージから吊られた、主干渉計が重力場の変化によって伸縮する。地面振動の影響は補助干渉計によって取り除かれているので、主干渉計の変化は重力場の変化のみを反映している (図 4.6(b))。よってこの場合、主干渉計の信号のみを見れば地球のコア振動に関する情報が得られることになる。

次に上に述べた補助干渉計に制御をかけた場合と、かけない場合という 2 つの描像の関係をはっきりさせてみる。図 4.7 のように、補助干渉計の鏡の質量を m_1 、主干渉計の鏡の質量を m_2 、それぞれの鏡を吊っているワイヤーの長さを l_1, l_2 とする。また、共振器長の平衡点からのずれを X_1, X_2 とする。考えている周波数は非常に低いので、共振器長の変化は準静的と見なせる。そこで鏡の運動方程式を立てる代わりに Hooke の法則で定式化する。

X_1, X_2 に関する Hooke の法則は、

$$k_1 X_1 = F_d + F_{t1} + k_2 (X_2 - X_1) - G_f X_1 \quad (4.7)$$

$$k_2 (X_2 - X_1) = k_2 (X_1 - X_2) + \gamma F_c + F_{t2} \quad (4.8)$$

と書ける。ここで $k_1 \equiv (m_1 + m_2)g/l_1$ 、 $k_2 \equiv m_2 g/l_2$ であり、バネ係数に相当する。 F_d は、補助干渉計の鏡に加わる外力 (地面振動) の差動成分、 F_c は同相成分。 F_{t1} は重力場の変化が補助干渉計に加わる力、 F_{t2} は重力場の変化が主干渉計に加わる力、 $-G_f X_1$ は制御によるフィードバック力を表す。制御系の Open Loop Gain を G とすれば、 $G_f = k_1 G$ という関係がある。 γ は補助干渉計の同相変動が suspension の非対称性によって主干渉計の差動変動に漏れてくる割合である。上 2 式を少し変形すると、

$$X_1 = \frac{F_s + F_{t1} + k_2 X_2}{k_1 + k_2 + G_f} \quad (4.9)$$

$$X_2 = X_1 + \gamma F_c + F_{t2} \quad (4.10)$$

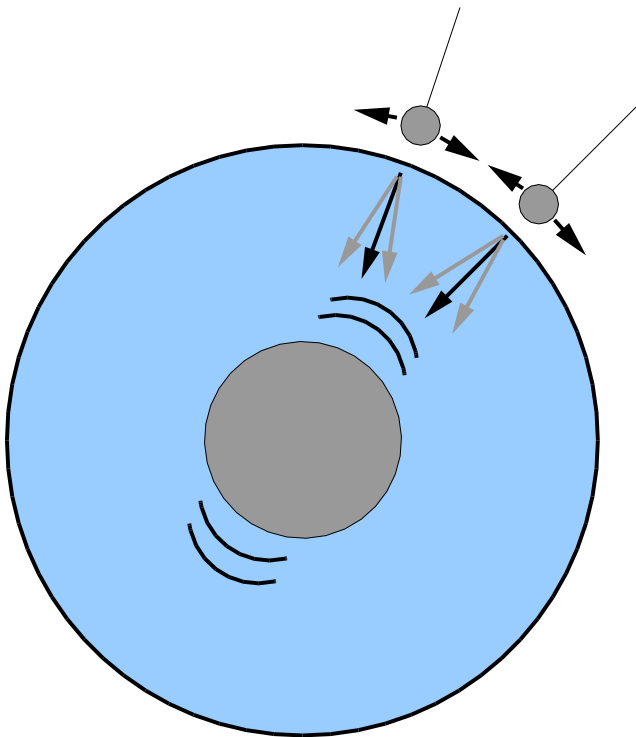


図 4.5: 地球のコア振動

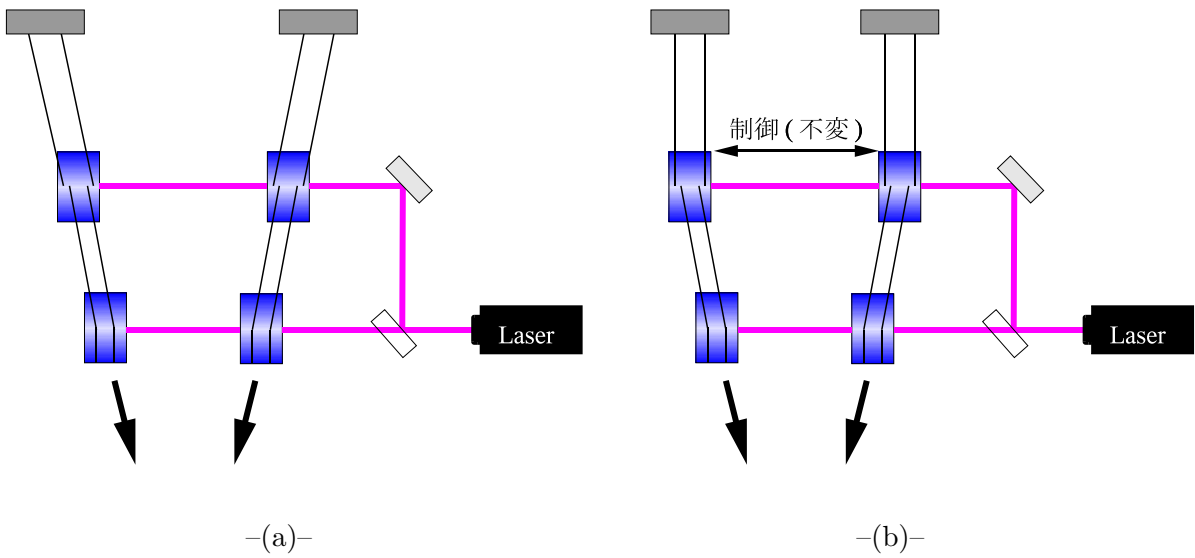


図 4.6: 重力場の変化による補助干渉計と主干渉計の共振器長変化

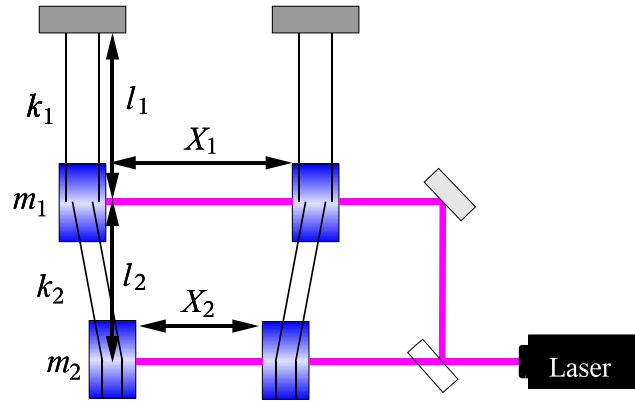


図 4.7: 干渉計のパラメーター

となる。まず、制御をかけない場合を考える。この時 $G_f = 0$ である。よって補助干渉計と主干渉計の差動変動は、

$$X_2 - X_1 = \gamma F_c + F_{t2} \quad (4.11)$$

となる。ここで suspension の対称性が良ければ γ は非常に小さい値なので γF_c は無視できて、

$$X_2 - X_1 \simeq F_{t2} \quad (4.12)$$

これが制御をかけない場合の信号である。

次に補助干渉計に制御をかけた場合を考える。この時 G_f は非常に大きく、 $G_f \rightarrow \infty$ とすると、 $X_1 \rightarrow 0$ 。従って、

$$X_2 = \gamma F_c + F_{t2} \quad (4.13)$$

であり、 $\gamma = 0$ とすると、

$$X_2 = F_{t2} \quad (4.14)$$

これが制御をかけた場合の信号である。2つの方法の違いは、大きな外乱である F_d を取り除くために、引き算をするか制御で抑えるかの違いであり、得られる結果は同じである。

第5章 実験装置

前章で述べた補助干渉計の有用性を確認するために実験を行った。この章では、この実験の構成について述べる。実験装置は図 5.1 のような二段の Fabry-Perot 干渉計である。二段振り子に吊られた補助干渉計から主干渉計が懸架され、全体として三段振り子を構成している。位相変調がかけられたレーザー光は上下二段に分けられ、二つの共振器に入射する。それぞれの共振器からの反射光は偏光ビームスプリッターで反射され、Photo Detector(PD) 及び Quadrant Photo Detector(QPD) で受けられる。PD の出力を利用して Pound-Drever-Hall 法で共振器長の制御を行う。また、QPD の出力を利用して (Wave Front Sensor) 共振器を構成する鏡のアラインメント制御を行う。これらの制御を行うために、鏡にはコイル-マグネットアクチュエーターが取り付けられている。

この実験の目的は、補助干渉計の共振器長及びアラインメントを制御することによって、主干渉計の共振器長及びアラインメントの変動が減少することを確認することである。以下では実験装置の各構成要素について詳しく述べていく。

5.1 光学系

図 5.2 が光学系の配置である。実験で用いたレーザーは、InnoLight 社製 Mephisto500NE という Nd:YAG レーザーで、波長は 1064nm、出力パワーは 500mW である。レーザーは内部的に温度安定化及び強度安定化がかけられている。レーザー直後の $\lambda/2$ 板と偏光ビームスプリッター (PBS) は、レーザーの出力を減衰させるために使われる。波長板を回転させることによって、PBS を透過する光と反射する光¹のパワー比を調節できる。実際、500mW のレーザーはそのままでは使いにくいので 80mW 程度まで減衰させた。

減衰後の光は Optical Isolator に入る。これは、干渉計からの反射光がレーザーに戻り、レーザーが不安定になる (Optical feedback) のを防ぐためである。今回の実験では Optics for Research 社製の Faraday Isolator を用いた。

次に、 $\lambda/2$ 板で偏光軸を調整した後、光は EOM(Electro Optic Modulator: New Focus 社製 Model4003) に入射し、15MHz の位相変調をかけられる。その後二つのモードマッチング用のレンズ ($f=-150\text{mm}$, $f=500\text{mm}$) を経由してレーザー光は真空タンクに入射される。

真空タンク入射直後のビームスプリッターによって、光は上下二段に分けられる。そして PBS2 を透過後、 $\lambda/4$ 板で直線偏光から円偏光へと変換され、それぞれの干渉計へと入射される。干渉計からの反射光は $\lambda/4$ 板によって再び直線偏光に変換される。しかしこのとき、偏光軸は入射

¹その後吸収体に吸収される。

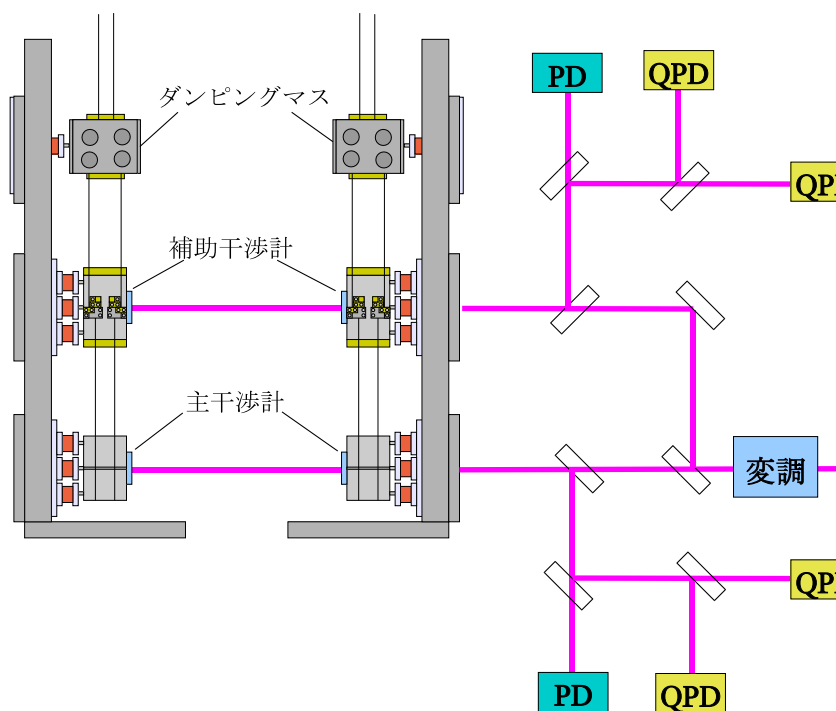


図 5.1: 実験装置の概要

光と比べて 90° 傾いている。従って干渉計の反射光はほぼ全て PBS2 で反射される。PBS2 ではねられた反射光は、 $\lambda/2$ 板と PBS3 の組み合わせによって二つに分割さる。透過光は $f=25\text{mm}$ のレンズで絞られた後に Photo Detector で受けられる。PBS3 で反射された光は、 $\lambda/2$ 板と PBS4 によってまた二分割される。反射光は QPD1 に入射し、透過光は二つのレンズで Guoy phase を調整された後、QPD2 に入射する。

共振器の透過光は、ステアリングミラーで反射されてスクリーンへ投影される。そしてそれを CCD カメラで撮影する。CCD カメラの映像は、共振器がきちんと TEM₀₀ モードに共振しているかどうかをチェックするのに使われる。また、初期アラインメントを合わせる際にも有用である。

5.1.1 Fabry-Perot 干渉計

今回用いた Fabry-Perot 干渉計は、上下段とも同じ物である。具体的には以下のようなパラメータを持つ。

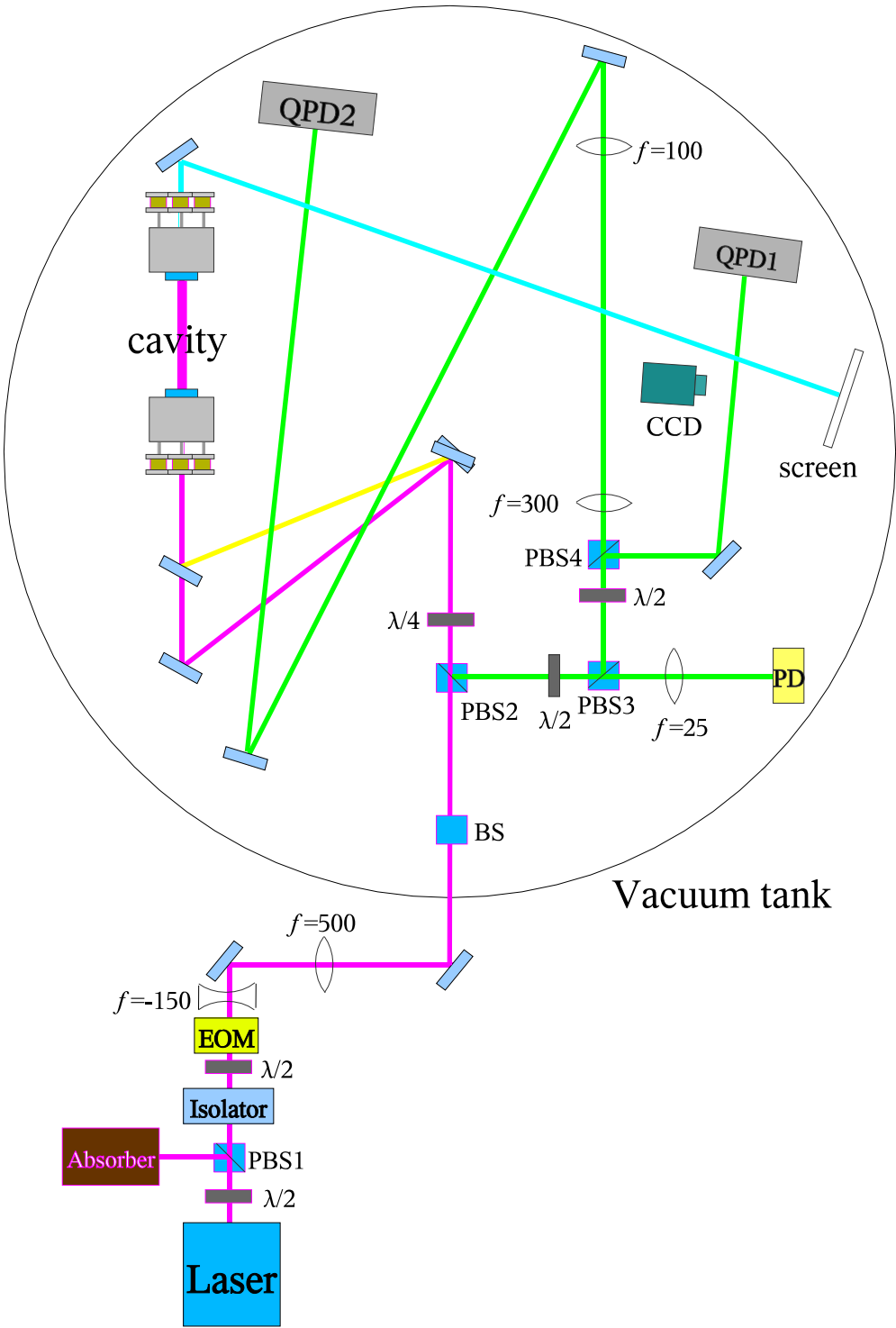
Front mirror 曲率半径	250mm
Front mirror 反射率	99%
End mirror 曲率半径	1000mm
End mirror 反射率	99.5%
Finesse	208
共振器長	150mm
ウエストサイズ	0.205mm
ウエスト位置	Front mirror から End mirror 方向へ 134mm

5.1.2 Mode matching

レーザーから出力された Gaussian ビームは、共振器に共振するようにその形を整形してやらなければならない。これが Mode matching である。具体的には、共振器のウエストに入射光のウエスト位置・サイズを合わせる必要がある。そのために今回は、 $f=-150\text{mm}$ の凹レンズと $f=500\text{mm}$ の凸レンズを組み合わせて用いた。具体的にレンズを置く位置を計算する方法は補遺 A を参照されたい。

図 5.3 はレンズを置く位置と、Mode matching 率の関係を示している。この図から分かる通り、Mode matching 率は 2 つのレンズの間隔に敏感である。また実際には計算された位置にレンズを置いても、レンズの焦点距離や共振器を構成する鏡の曲率半径にカタログ値からの誤差が存在するため、最適な Mode matching 率とはならない。そこで、 $f=500$ のレンズをマイクロメーター付の水平ステージにマウントし、位置を微調整できるようにした。そして共振器を一旦 TEM₀₀ モードにロックした後、透過光強度が最大になるようにステージを動かして Mode matching 率の良いところを探した。

図 5.2: 光学系の配置



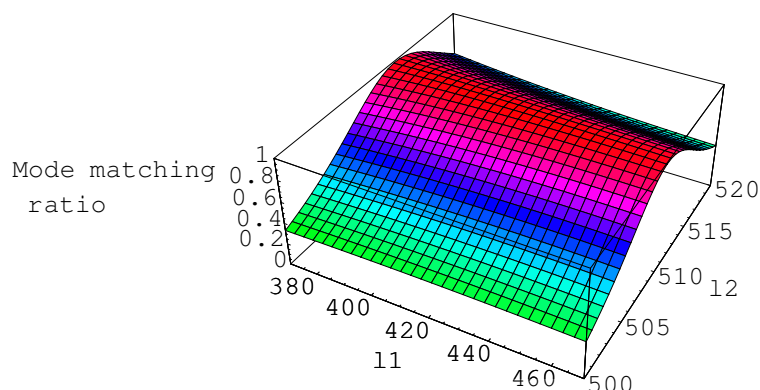


図 5.3: レンズ位置と Mode matching 率。 l_1 はレーザーから $f=-150$ のレンズまでの距離。 l_2 は $f=-150$ のレンズから $f=500$ のレンズまでの距離。距離の単位は mm。

5.1.3 Guoy phase の調整

Wave Front Sensor では、Front mirror と End mirror のアラインメント情報を独立に取り出すために、二つの異なる Guoy phase において分割 Photo Detector で反射光を受ける必要がある。

図 5.4 は式 (C.16) を使って Guoy phase による信号の分離具合を計算したものである。パラメーターには実際の実験装置のものを代入した。この図から、 $\eta=90^\circ$ 付近では Front の信号が大きく、End の信号はほとんど混ざってこないことがわかる。また、 $\eta=330^\circ$ 付近では End の信号が大部分であり、Front の信号は混ざらないことが分かる。したがって、このような Guoy phase の場所に 2 つの QPD を置けば信号が分離しやすいことが分かる。また、QPD はビーム断面を分割して受光するため、ビーム半径がある程度大きい方が望ましい。以上の条件 (Guoy phase とビーム径) を満たすために、レンズを置いて反射光のビームを調整した。

図 5.5(a) は共振器のウエストから離れるにしたがって、反射光の Guoy phase がどのように変化するかを示している。図 5.5(b) は同様にビーム径の変化を示したものである。距離が 1.07m と 1.57m にある縦線はそれぞれ $f=300$ と $f=100$ のレンズの位置を示している。図 5.2 にあるとおり、一つ目の QPD は $f=300$ のレンズの直前で PBS4 によって分けられた光を受けている。従って、 $\eta \sim 90^\circ$ の位置に置かれている。二つ目の QPD はウエストからの距離が 3.5m 付近に置かれており、この位置では $\eta \sim 330^\circ$ である。また、それぞれの QPD の位置でビーム半径は約 1mm 以上ある。よって、Guoy phase とビーム径に関する要求を満たしている。

しかし計算に用いた共振器の反射率・鏡の曲率半径等のパラメータに誤差があり、実際にこの計算通りの信号は得られなかった。実際の実験では二つのミラーからの信号が混合していたので、行列演算によってそれらの信号を分離した。信号分離行列の求め方は 5.3.2 節に述べた。

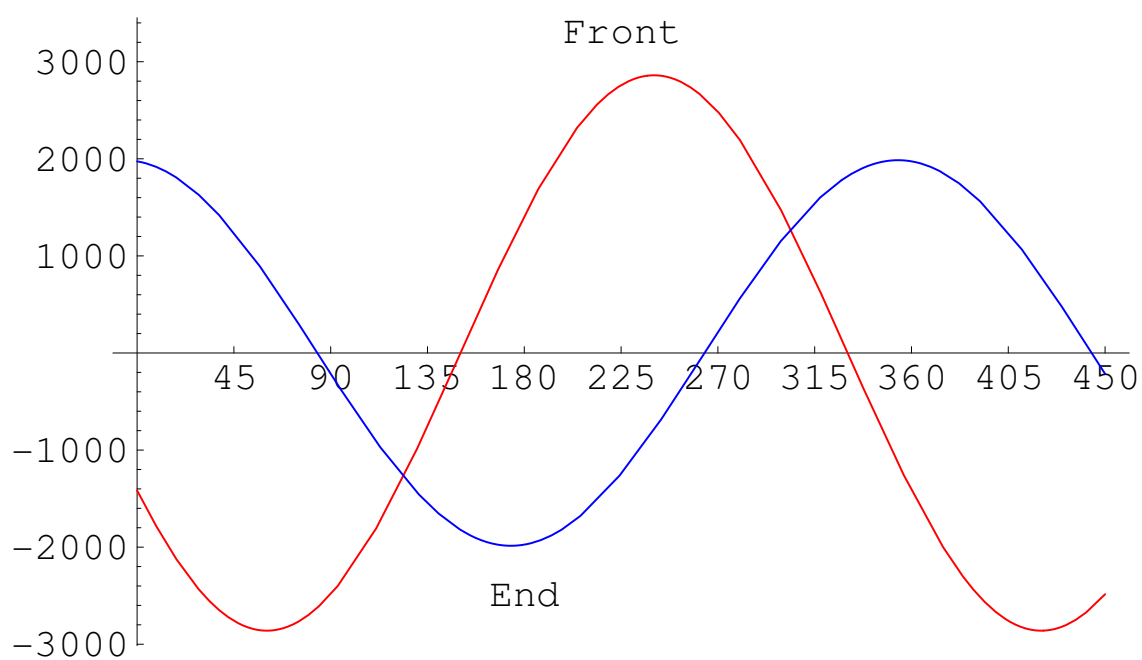


図 5.4: Wave Front Sensor の信号分離:横軸は Guoy phase(deg)、縦軸は信号の大きさで単位は任意。

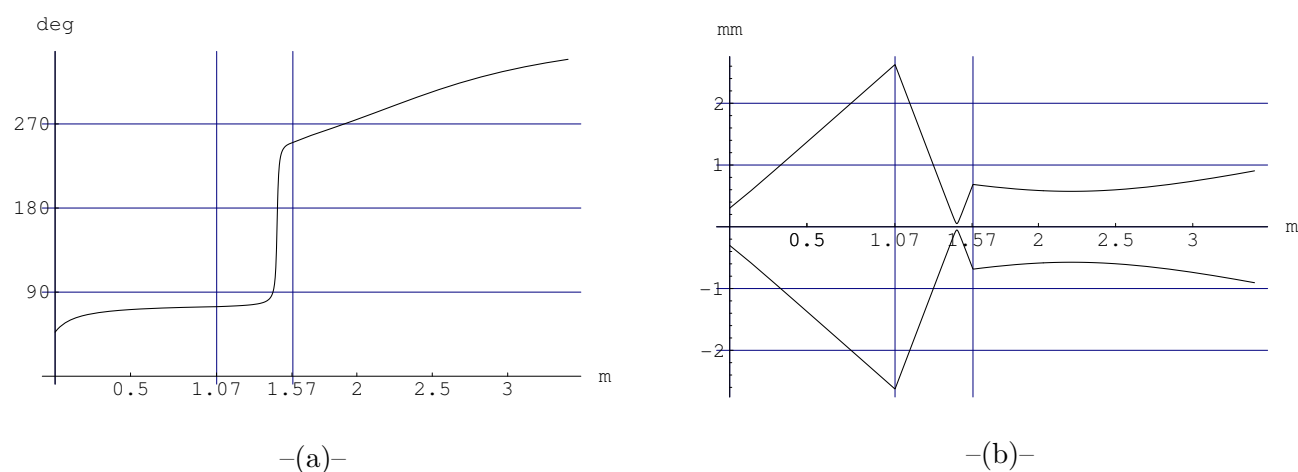


図 5.5: Guoy phase 及びビーム径の変化:横軸は共振器ウエストからの距離。(a) は Guoy phase の変化、(b) はビーム径の変化を表す。

5.2 懸架系

ここでは、共振器を構成する鏡を懸架するための懸架系 (suspension) に関して述べる。懸架系は図 5.6 のような形をしている。フレームの上部にはマイクロメーター付ステージが取り付けられ、水平方向および垂直方向に動かすことができる。これによってミラーを Yaw、Pitch 方向にそれぞれ動かすことができる。最上部には Mini-GAS と呼ばれる縦防振用のバネが取り付けられ、そこから全体が吊られている。suspension は 3 段振り子になっており、一番上はダンピングマス、2 段目・3 段目はミラーマスと呼ばれる。以下、個々の構成要素について説明する。

5.2.1 ミラーマス

鏡を張り付けるマスをミラーマスと呼ぶ。最下段のミラーマスは円筒形をしており、ワイヤーを側面に巻き付けることによって吊られている。このマスの両サイドには直径 1mm のアルミ棒が接着されている。これはワイヤーがマスの重心でマスから離れるようにするためのもので、スタンドオフと呼ばれる。2 段目のミラーマスは直方体である。このマスにおいてワイヤーは金属の板に挟まれてクランプされる。それぞれのミラーマスには 4 つの小型棒磁石が取り付けられている。これらの磁石にコイルを近づけ、コイルに電流を流すことによって磁石とコイルの間に引力または斥力が生じる。従ってコイルに流す電流の量及び向きを変えることによって、マスの水平方向の位置及び Pitch, Yaw 方向の傾きを制御することができる。

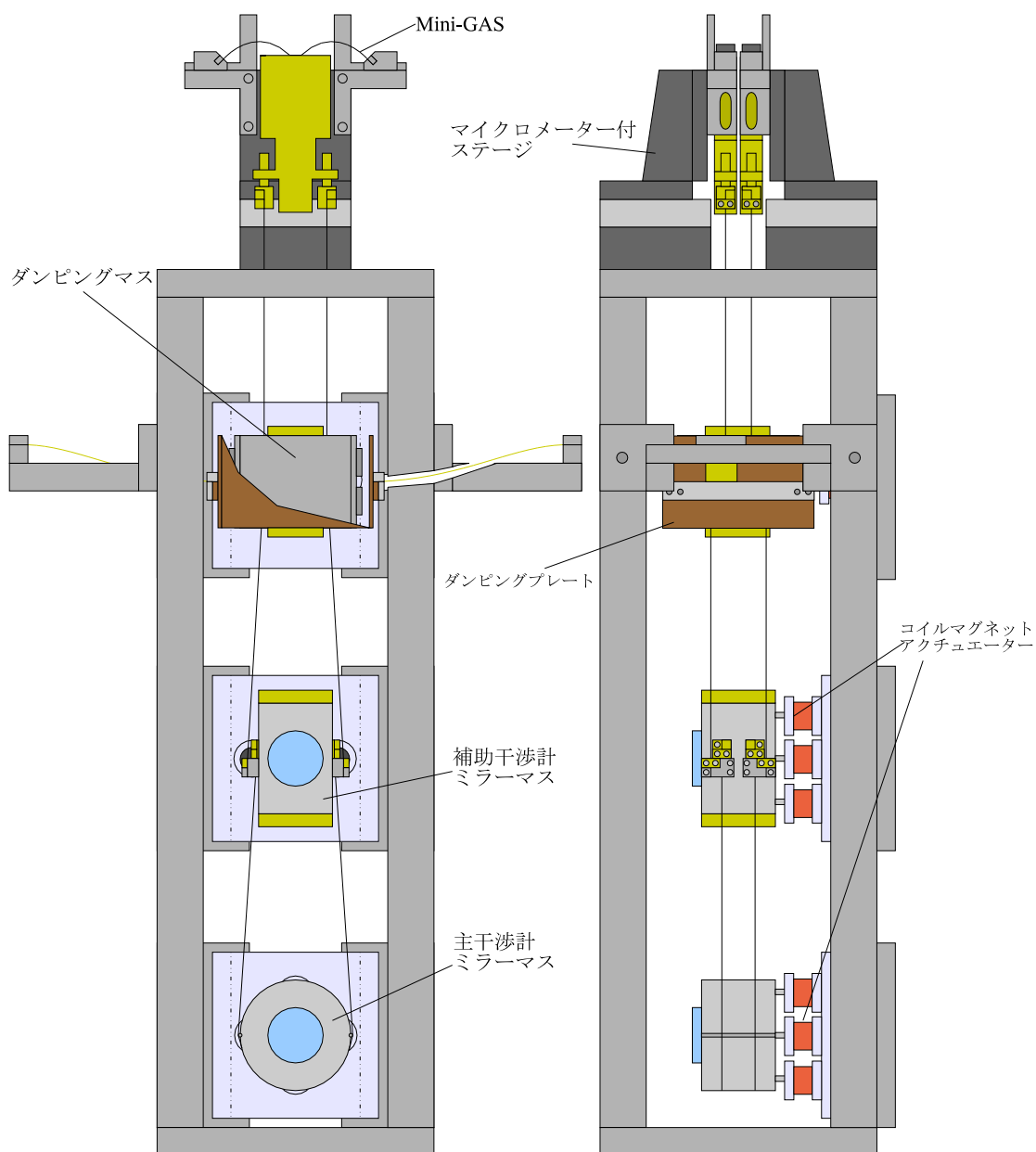
5.2.2 ダンピングマス

一番上の段はダンピングマスと呼ばれ、振り子の大きな揺れを減衰させる役割を持つ。ダンピングマスの本体はアルミ製で、そこにワイヤークランプが取り付けられている (図 5.7)。そしてその外側を厚さ 3mm の鉄製の板で覆い、そこに強力な永久磁石を張り付ける。吊られた状態のダンピングマスにはコの字型をした銅製の板 (ダンピングプレート) が近づけられる。ダンピングマスが動くと、ダンピングプレートを貫く磁束の様子が変化し、ダンピングプレートに渦電流が発生する。この渦電流がジュール熱に変わることによって、ダンピングマスの振動エネルギーが熱エネルギーとして散逸する。そのためダンピングマスの揺れは減衰させられる。

ダンピングプレートは板バネによって防振されている。ダンピングプレートが振動すると、その速度に比例した力がダンピングマスに働き、結果として地面振動を導入してしまうからである。本来ダンピングプレートは、水平・垂直の両方向について防振されるべきであるが、今回は意図的に垂直方向のみ防振した。その理由は 5.2.4 で述べる。

ダンピングマスには二つのアクチュエーター用棒磁石が取り付けられている。これによって、ダンピングマスを水平方向及び Yaw 方向に動かすことが可能である。

図 5.6: 懸架系: 3 段振り子から成り、1 段目には渦電流ダンピングがかけられる。最上部には縦防振用の Mini-GAS が取り付けられる。



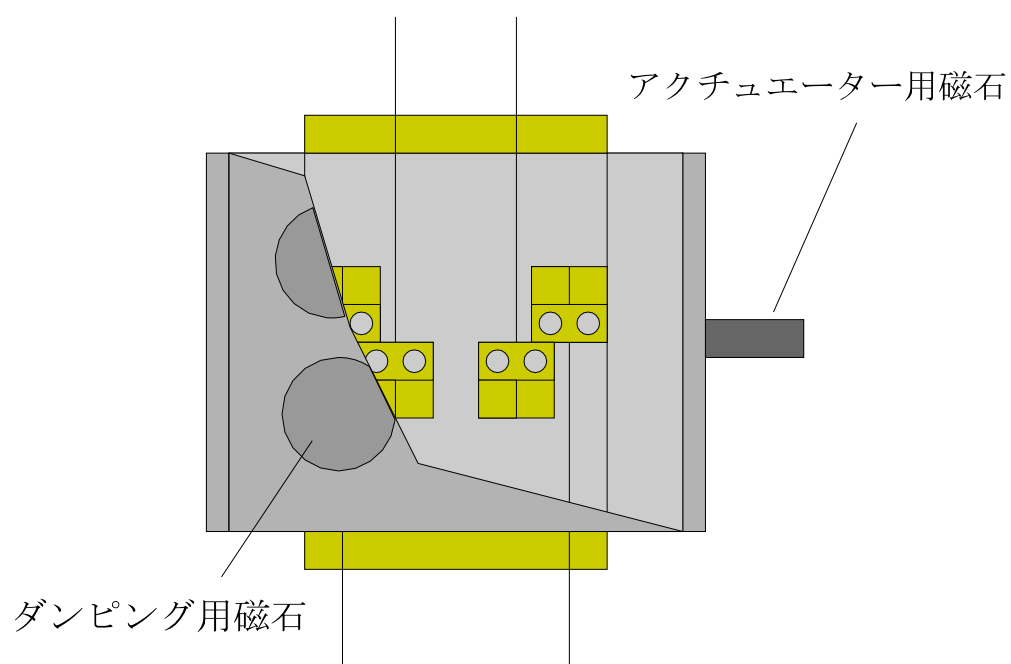


図 5.7: ダンピングマスの構造

5.2.3 Mini-GAS filter

垂直方向の防振のために、Mini-GAS filter と呼ばれるバネを用いた。これは元々Seismic Attenuation System(SAS) と呼ばれる超低周波防振装置用に開発されたものである。図 5.8 のように、両サイドから圧縮することによって反バネ力が生じる。そのため小型にも関わらず非常に低い共振周波数が得られる。

Mini-GAS Filter には低い共振周波数を得るための最適な荷重が存在するので、その下に吊るマスの重さを慎重に調節しなければならない。今回の実験では、二つの Mini-GAS filter で

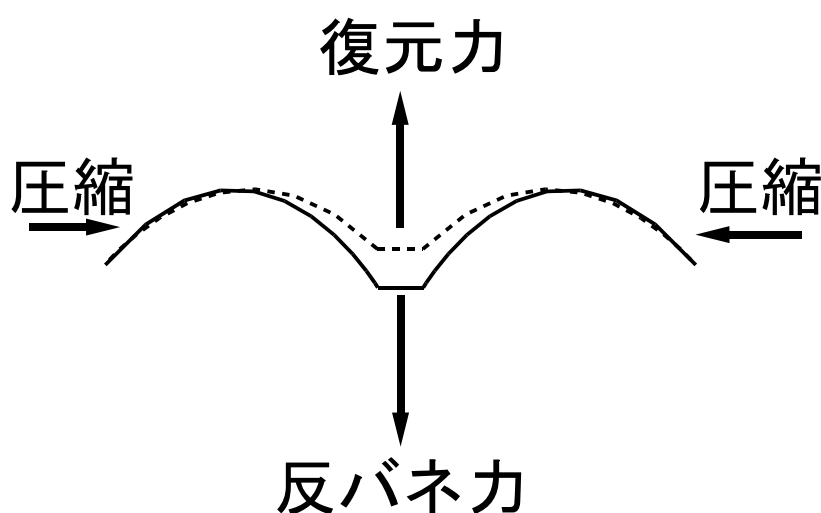


図 5.8: Mini-GAS filter

suspension 全体を吊る。そこでまず、全マスの半分の重さを持つダミーマスを作った。これを一つの Mini-GAS に吊って共振周波数を計る。そしてダミーマスの重さを変えながら最適な荷重を探す。なお Mini-GAS の最適荷重には個体差があるので、多数の Mini-GAS の中から最適荷重に近い 2 つを選び出さなければならない。今回の実験で用いた Mini-GAS は、最適荷重において約 0.8Hz の共振周波数を持つものであった。しかし、振り子の並進方向の共振とカップルすることを避けるために、縦方向の共振周波数は 1.4Hz になるように調節した。Mini-GAS 一つ当りにかけるべき荷重が求まったら、suspension の全重量がその 2 倍となるように、ダンピングマス及び二段目のミラーマスに重量調整用の真鍮板を取り付ける。こうして全荷重の調節が行われる。

5.2.4 縦横の防振比

4.3.2節で述べた通り、レーザー光が鏡の中心に当たっていなかったり、鏡の懸架に非対称性が存在すると垂直方向の振動が共振器長変動の信号として現れてしまう。そこで、主干渉計の鏡にどれだけの縦振動が伝わるのかを見積もらねばならない。そのために、suspension のマスが全て質点で構成されているという近似で運動方程式を立て、垂直方向及び水平方向の伝達特性を計算した。

水平方向に関して運動方程式は次の通り。

$$\begin{cases} m_d \ddot{x}_d &= -k_d (x_d - X) - \Gamma_d (\dot{x}_d - \dot{x}_1) \\ m_G \ddot{x}_G &= -k_{Gh} (x_G - X) - \frac{m_1+m_2+m_3}{l_1} g (x_G - x_1) - \Gamma_G \dot{x}_G \\ m_1 \ddot{x}_1 &= -\frac{m_1+m_2+m_3}{l_1} g (x_1 - x_G) - \frac{m_2+m_3}{l_2} g (x_1 - x_2) - \Gamma_d (\dot{x}_1 - \dot{x}_d) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -\frac{m_2+m_3}{l_2} g (x_2 - x_1) - \frac{m_3}{l_3} g (x_2 - x_3) - \Gamma_2 \dot{x}_2 \\ m_3 \ddot{x}_3 &= -\frac{m_3}{l_3} g (x_3 - x_2) - \Gamma_3 \dot{x}_3 \end{cases} \quad (5.1)$$

ここで、 $x_d, x_G, x_1, x_2, x_3, X$ はそれぞれ、ダンピングプレート、Mini-GAS に取り付けられたワイヤークランプ用のマス (以下クランプマス)、ダンピングマス、上段ミラーマス、下段ミラーマス、suspension 上面、の平衡位置からのずれである。 k_d, k_{Gh} はダンピングプレートを支える板バネ及び Mini-GAS の水平方向のバネ係数、 l_1, l_2, l_3 はワイヤー長、 m_d, m_G, m_1, m_2, m_3 は質量、 $\Gamma_d, \Gamma_G, \Gamma_2, \Gamma_3$ はダンピングの係数、 g は重力加速度である (図 5.9 参照)。特に Γ_d はダンピングプレートとダンピングマスの間に働く渦電流ダンピングの強さを表す。

次に式 (5.1) の両辺を Fourier 変換して、行列の形式にまとめると、

$$H(\omega) \vec{x}(\omega) = \vec{f}(\omega) \quad (5.2)$$

ただし、

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_d(\omega) \\ \tilde{x}_G(\omega) \\ \tilde{x}_1(\omega) \\ \tilde{x}_2(\omega) \\ \tilde{x}_3(\omega) \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} k_d \tilde{X}(\omega) \\ k_{Gh} \tilde{X}(\omega) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

$$H(\omega) = \begin{pmatrix} k_d + i\Gamma_d\omega - m_d\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_G\omega^2 + i\Gamma_G\omega + k_{Gh} + \frac{m_1+m_2+m_3}{l_1}g & 0 & 0 & 0 \\ -i\Gamma_d\omega & -\frac{m_1+m_2+m_3}{l_1}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\Gamma_d\omega & 0 & 0 \\ -\frac{m_1+m_2+m_3}{l_1}g & 0 & 0 \\ -m_1\omega^2 + \frac{m_1+m_2+m_3}{l_1}g + \frac{m_2+m_3}{l_2}g + i\Gamma_d\omega & -\frac{m_3}{l_3}g & 0 \\ -\frac{m_2+m_3}{l_2}g & \frac{m_3}{l_3}g + \frac{m_2+m_3}{l_2}g - m_2\omega^2 + i\Gamma_2\omega & -\frac{m_3}{l_3}g \\ 0 & -\frac{m_3}{l_3}g & -m_3\omega^2 + i\Gamma_3\omega + \frac{m_3}{l_3}g \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

$H(\omega)$ の逆行列 $H^{-1}(\omega)$ を式 (5.2) の両辺に左からかけると、

$$\vec{x}(\omega) = H^{-1}(\omega) \vec{f}(\omega) \quad (5.5)$$

従って、 $H^{-1}(\omega)$ が suspension の伝達関数を表す。

垂直方向の伝達関数についても以下の運動方程式を用いて全く同様に計算することができる。

$$\begin{cases} m_d\ddot{x}_d = -k_{dv}(x_d - X) - \Gamma_d(\dot{x}_d - \dot{x}_1) \\ m_G\ddot{x}_G = -k_G(x_G - X) - k_1(x_G - x_1) - \Gamma_G\dot{x}_G \\ m_1\ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_G) - k_2(x_1 - x_2) - \Gamma_d(\dot{x}_1 - \dot{x}_d) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_2 - x_3) - \Gamma_2\dot{x}_2 \\ m_3\ddot{x}_3 = -k_3(x_3 - x_2) - \Gamma_3\dot{x}_3 \end{cases} \quad (5.6)$$

ここで各変数の意味は水平方向の場合とほぼ同様だが、 $x_1, x_2, \dots$ 等は垂直方向の平衡位置からのずれを表す。また、 $k_{dv}, k_1, \dots$ 等は、板バネやワイヤー等の垂直方向のバネ係数である。

求めた伝達関数に、suspension のパラメータを代入して計算したグラフが図 5.10 である。この図から分かる通り、垂直方向の防振性能が圧倒的に悪い。これはワイヤーの伸縮による垂直方向の共振周波数 (数十 Hz) が、水平方向の共振周波数 (1Hz 付近) にくらべて高いことに起因する。縦振動が共振器長変化に結合する割合を 0.1% と仮定して、垂直方向の伝達関数を 1/1000 にしたものが図 5.10 の vertical/1000 という線である。これと、水平方向の伝達関数 (horizontal) を比較すると、20Hz で交わっている。つまり地面振動が等方的であると仮定すると、20Hz 以上では縦振動による雑音が主干渉計では支配的になるということである。従って 20Hz 以上では補助干渉計の効果を見ることはできない。また、実は縦横カップリング 0.1% というのは非常に厳しい要求である。よって実際にはさらに低い周波数で、縦振動が優勢になると思われる。ちなみにダンピングプレートを垂直方向のみ防振したのには、この辺りの事情を少しでも改善す

るためである。すなわち、水平方向のほうが垂直方向より多くの振動をダンピングプレートから導入されるようにしたわけである。重力波検出器の suspension としてはこの設計は本末転倒である。しかし、今回の実験の目的は絶対的な防振比を稼ぐことではなく、補助干渉計を制御する前後における防振比の改善を見ることである。そして、三段振り子という非常に高い水平防振比を持つ suspension ではその効果を捕らえるのが難しいため、敢えて水平方向の防振比を落とすような設計にしたわけである。

本格的な重力波検出器の suspension では、垂直防振機構 (ここで言う Mini-GAS など) を多段にするなどの対策が必要である。実際、各国で開発されている次世代干渉計用の懸架システムは多段の垂直防振装置を備えている。

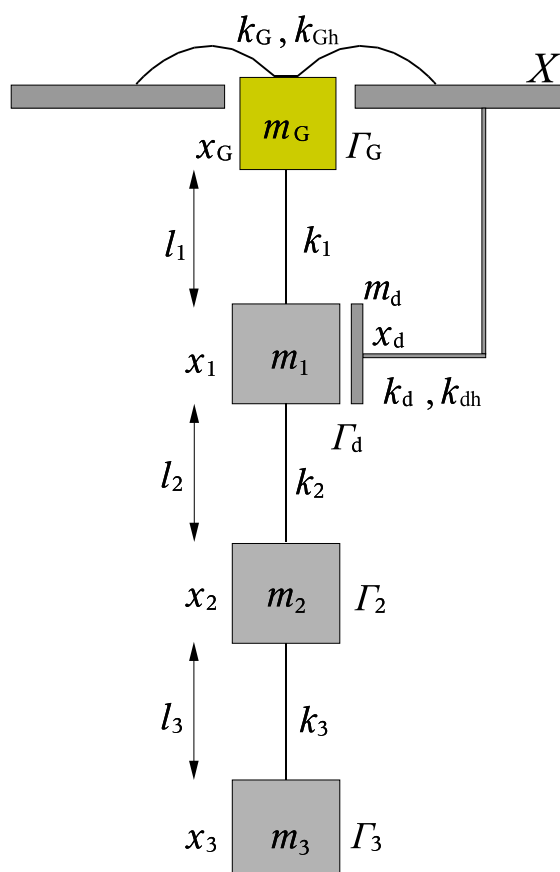


図 5.9: 質点モデルによる suspension 特性の計算

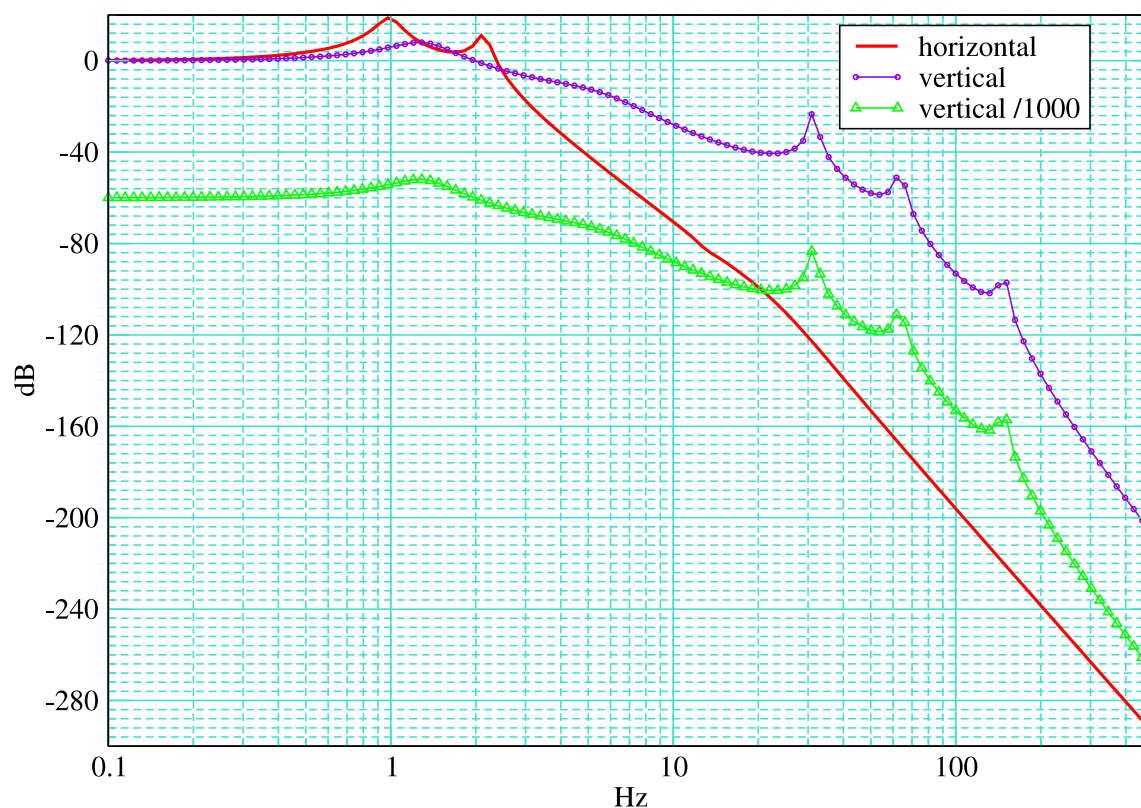


図 5.10: 水平防振と垂直防振の比較

5.2.5 初期アラインメント

共振器を共振状態にするには、共振器の軸と入射光軸が一致しなければならない。そのためには共振器を構成する鏡の傾きを調整すれば良い。しかしこの実験では補助干渉計から主干渉計が吊られているため、一方の鏡を動かすともう一方も動いてしまう。そこで次のような手順で初期アラインメントを調整した。

1. 上段と下段の鏡ができるだけ平行になるように慎重に吊る。
2. 下段の共振器に入射する直前にある二枚の鏡 (ステアリングミラー) を用いて、ビームが

Front mirror と End mirror の中心を通るように調整する。

3. suspension の上部にあるステージを用いて鏡の傾きを変化させ、下段の共振器が TEM₀₀ モードに共振するように調節する。
4. 次に上段の共振器が TEM₀₀ モードに共振するように、上段のステアリングミラーを用いて調節する。

以上で、2つの共振器が共に TEM₀₀ モードに共振するように調整される。

5.3 制御系

5.3.1 共振器長制御

共振器長制御のループは図 5.11 のようになっている。この図は一つの共振器に関してのみ描いてあるが、実際には補助干渉計用と主干渉計用の 2 ループがある。鏡は振り子に吊られているため、コイル・マグネットアクチュエーターから変位への伝達関数は次のようになる。

$$H(\omega) \propto \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q}} \quad (5.7)$$

ここで ω_0 は振り子の共振周波数。 Q は振り子の Q 値である。これは $\omega \rightarrow \infty$ で負の実数に漸近し、位相が 180° 遅れてしまう。一般に Open Loop 伝達関数が 1 になる周波数で位相が -180° 以上遅れていると、制御系が不安定になる。そこで、電気的なフィルタによって Unity Gain 周波数付近の位相を戻してやらなければならない。具体的な回路図は補遺 E にまとめている。図 5.12 は、上下段同時にロックしたときの下段制御系の Open Loop 伝達関数である。これを見ると、Unity Gain 周波数 (1kHz) 付近で位相が戻っていることが分かる。この時の位相余裕は約 50° である。上段共振器の制御系もこれとほぼ同じである。

5.3.2 アラインメント制御

今回の実験では、時間の問題でアラインメント制御は上段共振器の Pitch 方向のみにかけた。また下段にも Wave Front Sensor を入れたが、制御はせずアラインメント変動のモニター用としてのみ使った。

アラインメント制御は図 5.3.2 のような構成になっている。2つの QPD からそれぞれ 2つの信号が得られる (Photo diode の上半面からの信号と下半面からの信号)。それらを復調後、上半面と下半面の信号の差を取り、Matrix 回路に入力する。そして Matrix 回路で Front mirror と End mirror の信号が分離される。信号分離のための行列は次のようにして決める。

2つのミラーからの信号は次のように混合しているとする。

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\theta_F + B\theta_E \\ C\theta_F + D\theta_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_F \\ \theta_E \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

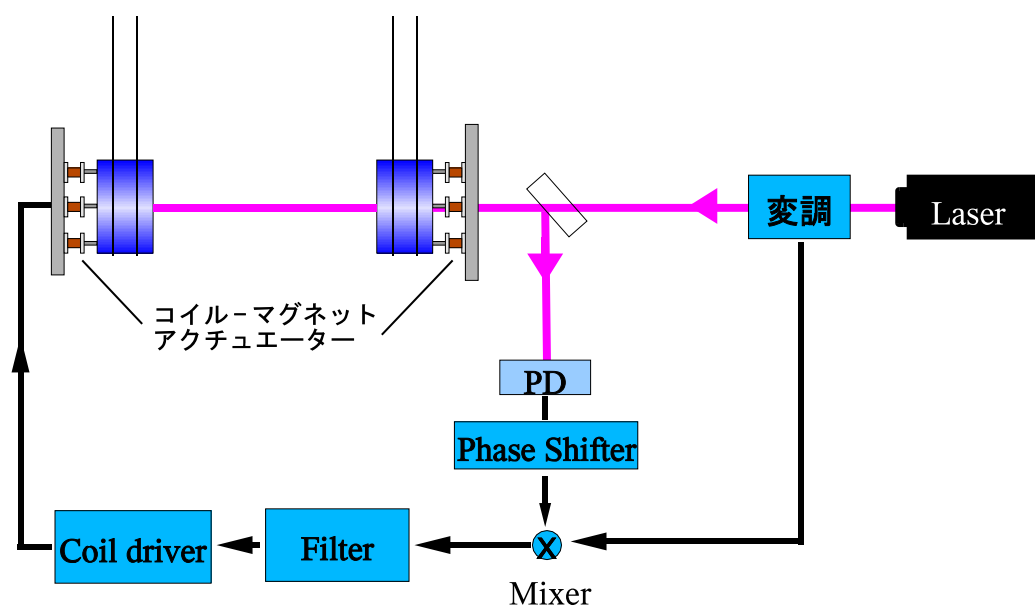


図 5.11: 共振器長制御の構成

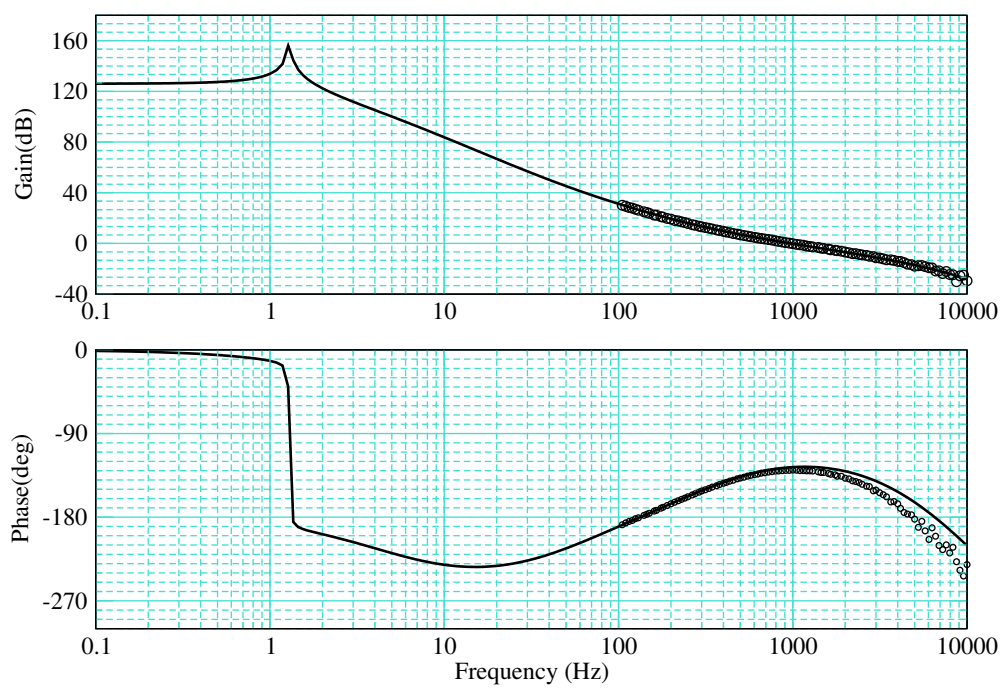


図 5.12: 上下段同時にロックしたときの、下段共振器長制御 Open-Loop 伝達関数: $\circ$ は実測、実線は理論値による fitting

ここで S_1, S_2 は QPD1 及び QPD2 からの信号、 θ_F, θ_E は Front mirror 及び End mirror の傾きを表す。

まず Front mirror のコイルドライバに正弦波を入力し、Front mirror を Pitch 方向に振動させる。そのとき、二つの QPD に現れる信号の大きさを計れば A, C の値が得られる。同様に End mirror を振動させると B, D の値が分かる。最後に $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ の逆行列を求めれば、信号分離のための行列が求まる。

図 5.14 はアラインメント制御の Open-Loop 伝達関数である。Front mirror は Unity Gain 周波数が 6Hz 付近であり、1Hz 付近で Gain は 30dB 程度である。End mirror の Unity Gain 周波数は 1.4Hz 付近であり、Gain は 1Hz 付近でも Gain はほとんどれていない。これは主に 35Hz と 56Hz 付近にある共振が原因である。これが何の共振であるのかは分かっていないが、ワイヤーのバイオリンモードや Mini-GAS の共振が疑わしい。これらの共振は非常に Q 値が高く (数百)、あまり Unity Gain 周波数を上げるとそのピークで Gain が 1 を越えてしまう。従って Unity Gain 周波数をあまり高く設定できなかった。Front Mirror では上記 2 つの共振の付近で位相がうまく戻ってくれたらしく、これらの共振の山で Gain 1 を上回っても発振しなかった。そのため、6Hz 程度まで Unity Gain 周波数を上げることができた。制御をより安定にかけるためには、10Hz 以降により急峻な Low Pass Filter を入れたり、共振の周波数に Notch Filter を入れるなどの工夫が必要である。

5.3.3 共振器長信号及びアラインメント信号の較正

共振器長

共振器長変動の信号は Pound-Drever-Hall 法の誤差信号として現れる。これを実際の共振器長の変動量に直すには次のようにする。図 5.15 のように共振器長変動から Pound-Drever-Hall 法の誤差信号までの伝達関数を C 、電気系の伝達関数を E 、アクチュエーターの伝達関数を A 、とすると、

$$Y = C(X - AEY) \quad (5.9)$$

である。これを X について解くと、

$$X = \frac{1 + CEA}{C}Y = AE \frac{1 + CEA}{CEA}Y = A \frac{1 + G}{G}EY \quad (5.10)$$

ここで $G \equiv CEA$ であり、これはこの制御系の Open Loop 伝達関数である。よって、共振器長の変動を知るためには、 A, G, EY を知れば良い。 G はサーボアナライザを使って簡単に求めることができる。 EY はアクチュエーターへフィードバックする電圧であり、測定結果として得られるものである。 A は、Photo sensor を用いて実測した (補遺 D)。ちなみに制御ゲインが十分大きい場合 $\frac{1+G}{G}$ はほぼ 1 であり、 $X \simeq AEY$ である。

アラインメント

アラインメントに関して、主干渉計には制御をかけない。そこで次のようにして較正をする。

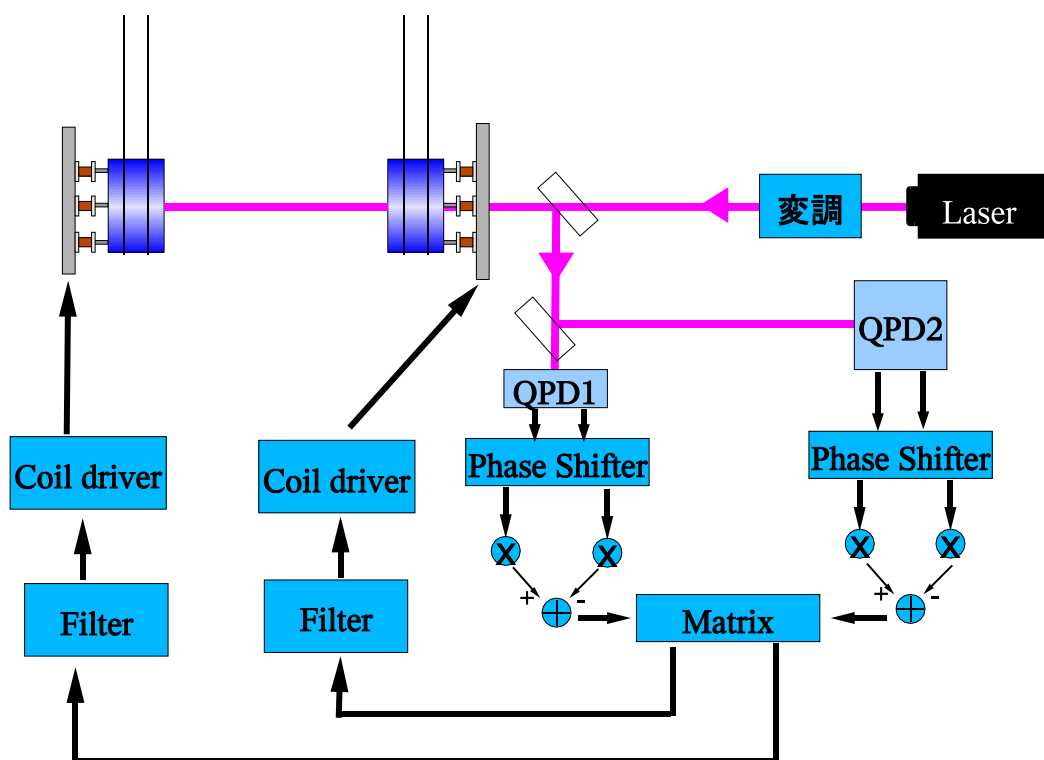
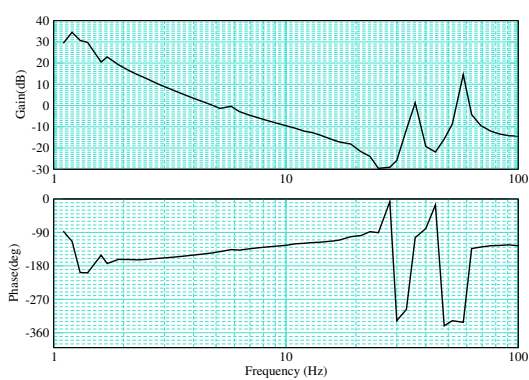
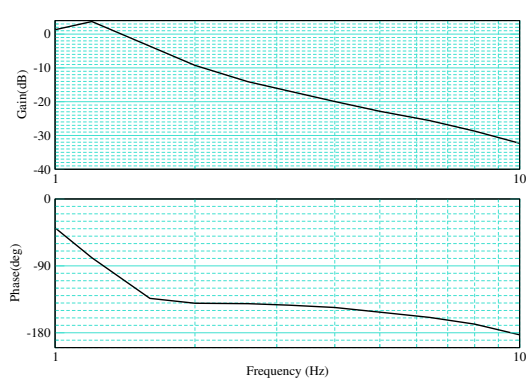


図 5.13: アライメント制御の構成



-(a)-



-(b)-

図 5.14: アライメント制御の Open Loop 伝達関数: (a)Front mirror (b)End mirror

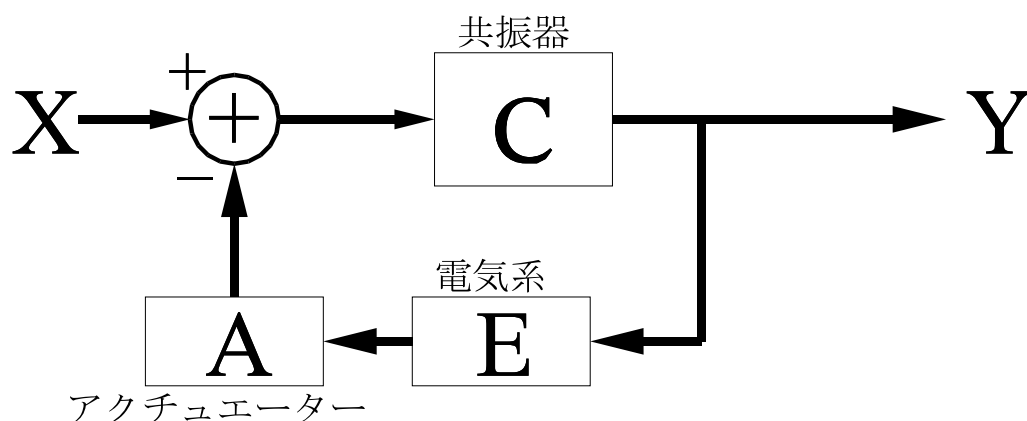


図 5.15: 共振器長制御の Block diagram

まず Photo Sensor を用いて、Pitch 方向に鏡を動かすアクチュエーターの入力電圧から実際の鏡の傾きへの伝達関数を測定する。これを A_p とする。次に実際に干渉計をロックし、Wave Front Sensor が働くようにする。この状態で、アクチュエーターの入力電圧から Wave Front Sensor の信号への伝達関数を測る。これを W_p とする。すると、 $A_p/W_p \equiv K$ が鏡の傾きから Wave Front Sensor の信号への伝達関数である。よって、Wave Front Sensor の信号に $1/K$ をかけてやれば鏡の傾きが得られる。

5.4 真空

レーザー光を上下2段に分けるためのビームスプリッター以降の光学系は、全て真空容器の中に入れられる。これは、空気の揺らぎや対流によって鏡が揺らされたり、ビームジッターが起るのを避けるためである。真空ポンプにはロータリーポンプを使い、約 0.1torr まで引いた。測定中はロータリーポンプからの振動を避けるためにポンプは止められる。

第6章 実験結果と考察

この章では、前章で説明した実験装置を使って得られた結果とその考察を述べる。

6.1 共振器長制御

6.1.1 動作

共振器長制御は非常に安定であった。人為的に制御を切らない限り、外乱によって動作点を外れるということはなく、真空タンクに体当たりしても制御は外れなかった。

6.1.2 変位スペクトル

補助干渉計の共振器長制御をかけた場合と、かけない場合の主干渉計の共振器長変位スペクトルを比較した(図 6.1)。補助干渉計に制御をかけた場合、1 Hz 以下で顕著なノイズの減少がみられ、制御をかけない場合に比べて最大で-40dB 程の差がついている。またスペクトルの形も、制御をかける前は2つの山と1つの谷から成る3段振り子の共振構造なのに対して、制御後は1.2HzにQの高いピークが1つあるだけになっている。このピークは、仮想的な剛体棒と化した補助干渉計から吊られた主干渉計の、単振り子としての共振である。従って、4.1節で述べた主干渉計の描像と良く一致している。

3Hz 以上では2つのスペクトルに殆んど差が見られない。この原因ははっきりとは分かっていない。最初に考えられるのは、suspension の非対称性による CMRR の低下であるが、ダンピングマスからの伝達関数測定(6.1.4節)では10Hz 付近まで同相雑音除去(CMR)が効いていることが分かったので、この可能性は否定される。また、この周波数帯において地面振動のスペクトルは $1/f^2$ に比例してる。さらに suspension の防振効果は $1/f^5$ であるので、鏡に伝わる地面振動は $1/f^7$ に比例するはずである。しかしながら得られたスペクトルは $1/f^5$ に比例する形をしている。これは、他自由度(垂直方向、Yaw、Pitch 等)から振動が混入しているか、地面振動以外の雑音(レーザーの周波数雑音など)が効いているためであると考えられる。この帯域でスペクトルに差がつかない原因は今後さらに調べる必要がある。

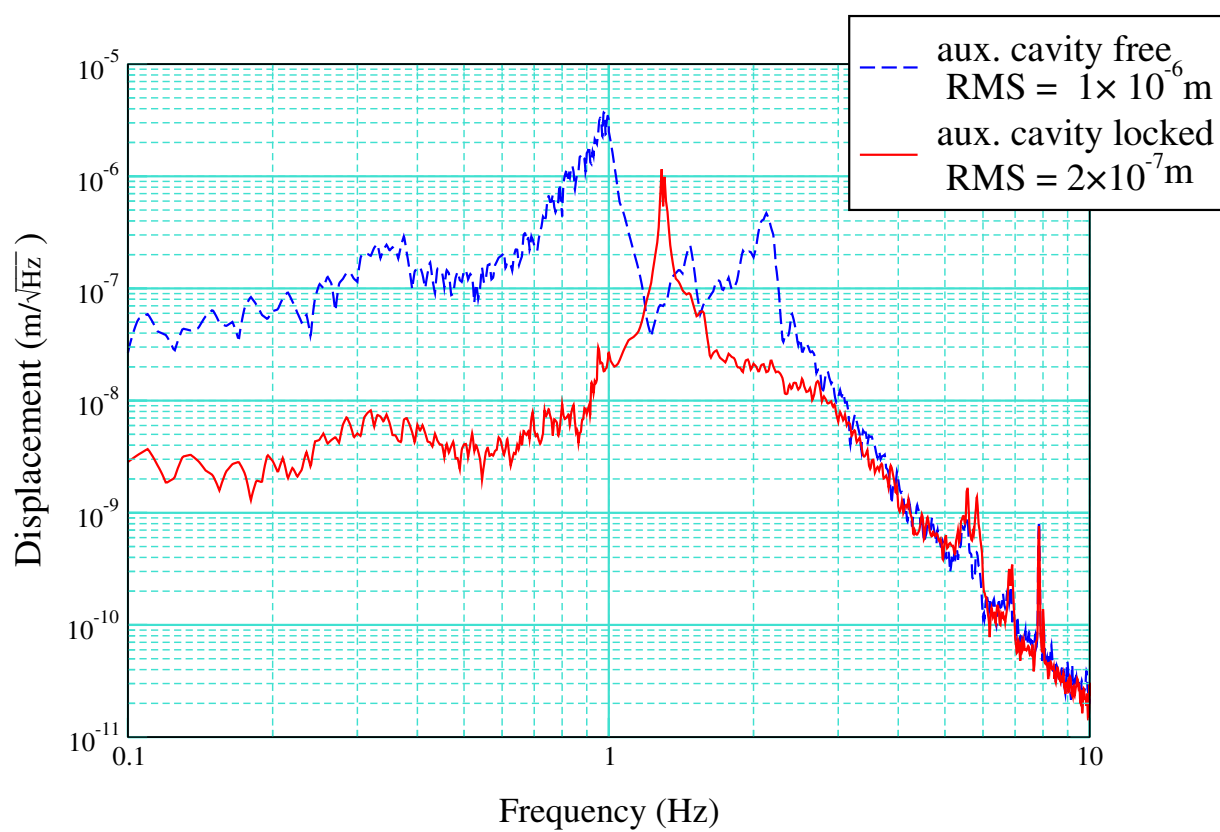


図 6.1: 共振器長の変位スペクトル比較

6.1.3 RMS 振幅

アクチュエータ雑音の低減や、高 Finesse 共振器のロックを考える場合、鏡の RMS 振幅が重要になる。図 6.1 のスペクトルを積分して RMS 振幅を求めると、補助干渉計を制御しない場合 $1 \times 10^{-6} \text{m}$ 、制御を書けた場合 $2 \times 10^{-7} \text{m}$ であった。よって約 5 倍の改善が見られたことになる。

アクチュエータの負担がどれだけ軽くなったのかを見るためには、単純に RMS 振幅を比較するのは正確ではない。なぜならば、補助干渉計を制御する前後でアクチュエータの伝達関数が変化しているからである (図 6.2)。そこで、変位スペクトルをアクチュエータの伝達関数で割ってやり、これを積分したものを比較すれば良い。これはアクチュエータに入力される電圧の RMS 値を計算していることと等価である。実際に計算してみると、補助干渉計を制御しない場合が 11.5mV、制御した場合は 2.1mV であった。つまり、アクチュエータを約 5.4 倍弱くすることができる。従って、単純計算でアクチュエータによる雑音を $1/5.4$ に減らすことができる。

6.1.4 ダンピングマスから主干渉計への伝達関数

ダンピングマスに取り付けられているアクチュエータでダンピングマスを加振し、主干渉計への伝達関数を測った。ダンピングマスの変位は、アクチュエータに入力した電圧から求めた¹。伝達関数の測定結果は図 6.3 である。これを見ると、低周波に行くほど差が顕著になるのがわかる。これは 4.3.3 節で行った CMRR に関する考察と一致する。また 5Hz 以上では差が殆んど見られなくなるが、これはダンピングマスのアクチュエータに非対称性が存在し、水平方向のみならず、Yaw, Pitch 方向にも動かしてしまうことの影響が大きいと考えられる。実際、ダンピングマスを加振したとき、主干渉計の透過光量が加振周波数で変動する現象が見られた。これは鏡が加振周波数で Yaw または Pitch 方向に揺れて、アラインメントが崩れているためであると考えられる。また、補助干渉計の共振器長制御 Gain は 10Hz 程度で 80dB 以上あり、共振器長の変動はほとんど抑え込まれてしまうため、共振器長変動が透過光量を変動させているとは考えにくい。

ダンピングマスから主干渉計までの間の Pitch 方向の共振周波数は数十 Hz であり、従ってその周波数以下ではダンピングマスの Pitch 揺れがそのまま主干渉計に伝わってしまう。よって Pitch 揺れの伝達関数は水平になる。図 6.3 の 10Hz 以上はまさにそういう形をしており、この帯域で伝達関数に差が見られない理由としては Pitch 揺れの混入が非常に疑わしい。

図 6.3 の破線は質点近似モデルで計算した理論線であり、5Hz 付近までは実測と一致している。

¹ダンピングマスのアクチュエータへの入力電圧からダンピングマスの変位への伝達関数は Phosto Sensor を用いて測定されているので (補遺 D)。

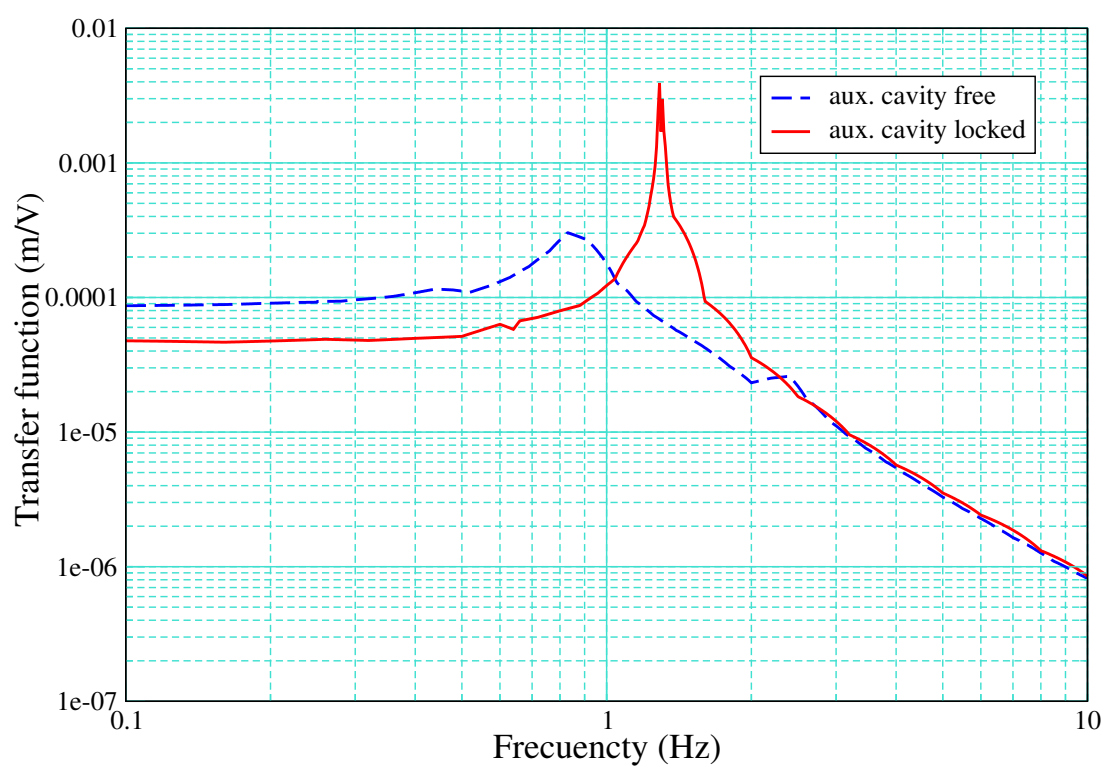


図 6.2: アクチュエーターの入力電圧から鏡の変位への伝達関数

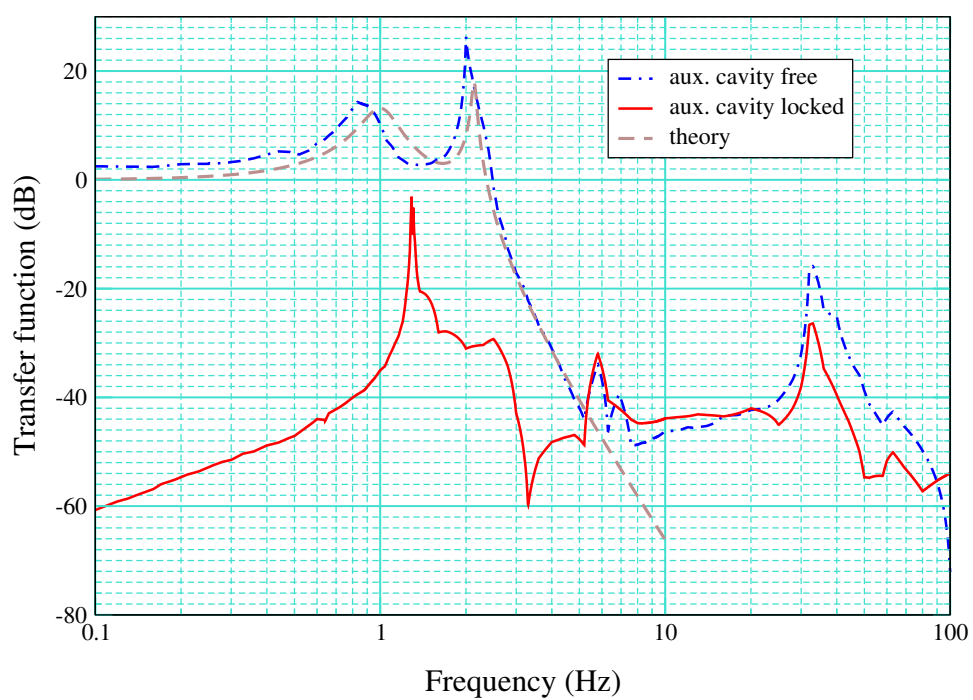


図 6.3: ダンピングマスから主干渉計への伝達関数

6.1.5 地球コア振動に対する感度

地球コアの振動は、重力場ベクトルの傾きを引き起こす。そこで、主干渉計を吊る振り子がどれだけ傾いたかを知る必要がある。図 6.4は、主干渉計の変位スペクトルをワイヤー長 (15cm) で割って傾きを求めたものである。

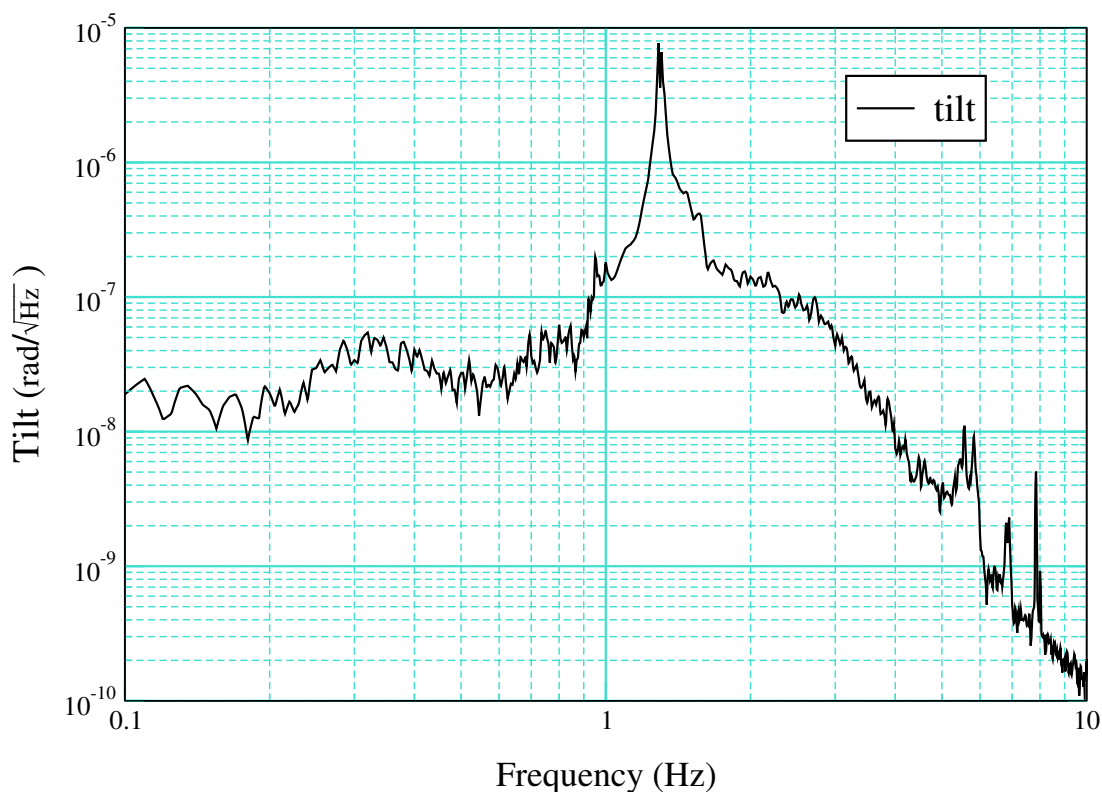


図 6.4: 主干渉計振り子の傾き

ところで、地球のコア振動による振り子の傾きは、次のようになると見積もられている [19]。

$$\Delta\alpha \sim \left(\frac{L}{4\text{km}} \right) \times 10^{-13} \quad (\text{rad}) \quad (6.1)$$

ここで、 $\Delta\alpha$ は振り子の角度変動、 L は共振器の長さである。今回の実験では、 $L=15\text{cm}$ なので、 $\Delta\alpha \sim 4 \times 10^{-18}(\text{rad})$ である。従って今回の実験で得られた、 0.1Hz で $2 \times 10^{-8}\text{rad}/\sqrt{\text{Hz}}$ という値を $10^{-4} \sim 10^{-5}\text{Hz}$ まで外挿して考えると、地球のコア振動を検出するためには 10 桁感

度が足りないことがわかる。なお、今回の実験で振り子の共振周波数以下の性能を制限している原因としては、レーザーの周波数雑音および、縦振動が疑わしい。しかし本当に何が原因であるのかを探るのは今後の課題である。

本格的に補助干渉計を用いて地球コア振動の検出を試みる場合、最も厳しい雑音源は縦振動であると予想される。4.3.2節で述べた通り、縦振動は補助干渉計によって抑えることができない。そのため、振り子による防振が効かない低周波では、地面振動がそのまま鏡に伝わってしまう。ここで、 10^{-5}Hz 付近での地面振動が、 $10^{-5}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$ だとすると、縦横結合率 0.1% としても、

$$\Delta\alpha = \frac{10^{-8}}{l}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (6.2)$$

である。従って、非常に大きな雑音となる。

ただし、上記の値は、2枚の鏡およびレーザーが独立に振動した場合の値である。今考えている周波数は非常に低いので、干渉計を数十 m の大きさにして土台をしっかりとしたものになれば、鏡やレーザーはほぼ同じ動きをすると考えられる。従って、大きな同相雑音除去が期待できる。これは、実験をして確かめる必要がある。

上に述べたように、縦振動の影響を抑えるためには干渉計を小さくした方が有利であるが、式 (6.1) によれば L が長ければ長いほどコア振動の効果は大きく現れる。したがって干渉計の大きさには最適値があると思われる。また、干渉計を用いて鏡の縦振動を検出する方法が開発されれば、縦振動を補助干渉計で抑えることができるので基線長を長くすることができる。この場合、コア振動の効果が大きくなるので検出が容易になる。

いずれにしても、補助干渉計を用いた地球コア振動検出のためにはさらなる研究が必要である。

6.2 アラインメント制御

6.2.1 動作

アラインメント制御は、ゲインを上げていくとすぐ発振してしまうため、低いゲインで制御しなければならなかった。しかし、一旦最適なゲインで制御をかけてしまえば、その後の動作は安定であった。

6.2.2 傾きスペクトル

図 6.5・図 6.6 は主干渉計の Front mirror 及び End mirror の Pitch 方向の変動スペクトルである。補助干渉計にアラインメント制御をかけた場合とかけない場合を比較してあり、最大で 10dB 程度の差が見られる。共振器長変動の場合に比べて差が少ないのは、アラインメント制御ではゲインがあまり取れなかったことや、Wave Front Sensor 信号に鏡の揺れ以外の信号が混入してしまったことが原因と考えられる。また、2-3Hz 以上の周波数では補助干渉計に制御をかけた場合の方がノイズレベルが悪化してしまっている。この原因については次節で考察する。RMS 振幅に関しては、10Hz まで積分してしまうと 1.2 倍程度の差しか見られなかった。これ

は上記のスペクトル悪化が原因と考えられる。1Hz 以下で積分すると、End で 2.5 倍、Front で 2.4 倍の差が見られた。

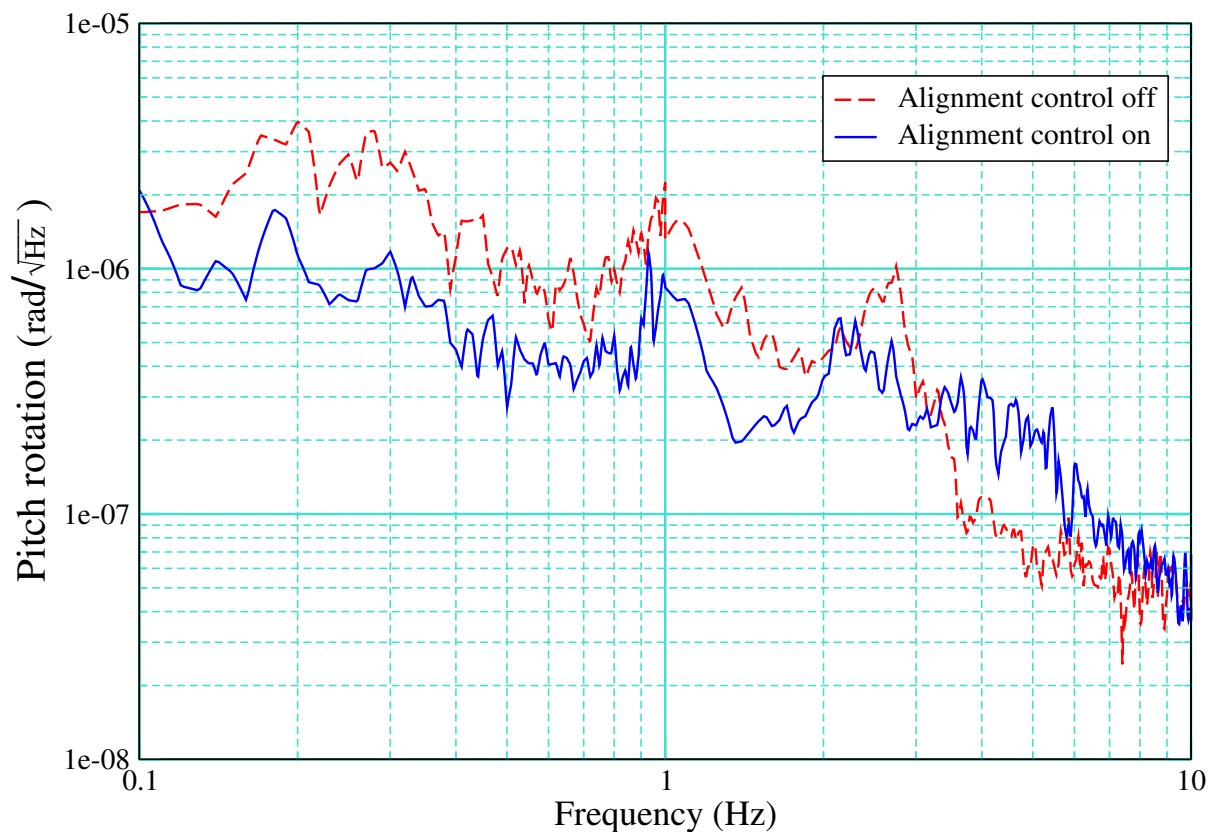


図 6.5: Front mirror Pitch 変動のスペクトル

6.2.3 スペクトル悪化の原因

補助干渉計にアライメント制御をかけたとき、2-3Hz 以上でスペクトルが悪化する理由について考える。実は主干渉計より補助干渉計のほうが制御信号に乗るノイズが大きかった。そのため、2-3Hz 以上の帯域では制御をかけると逆に鏡を揺らしてしまう。そして制御で導入された補助干渉計の鏡の揺れが主干渉計に伝わり、ノイズレベルを悪化させるというのが最も疑わ

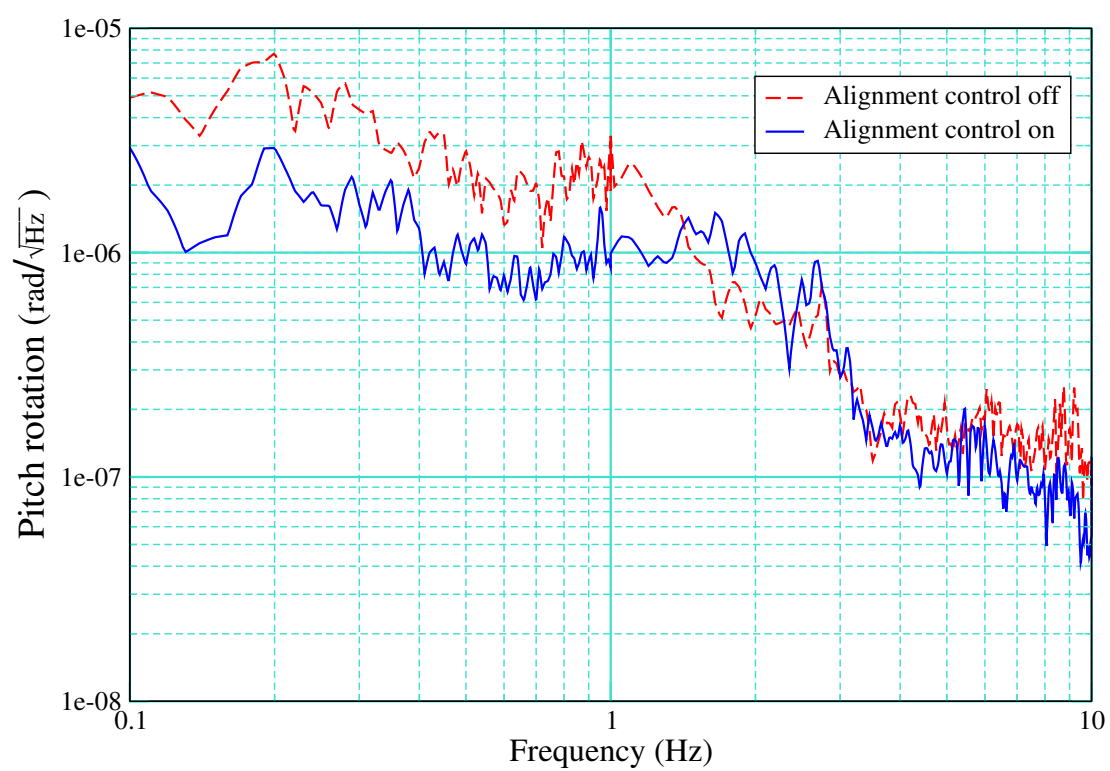


図 6.6: End mirror Pitch 変動のスペクトル

しい原因である。

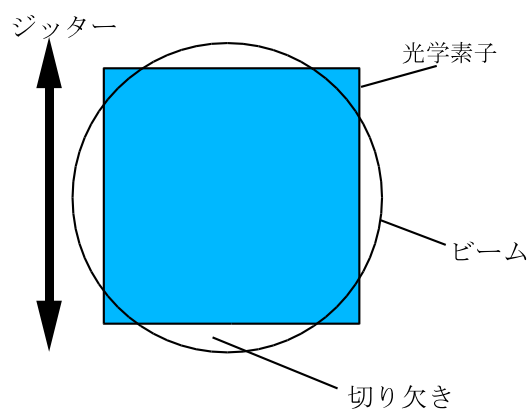
補助干渉計のノイズレベルが大きい原因には様々なことが考えられるが、その一つとして、小さなビームスプリッターを用いたためにビームの一部を切り欠いてしまったことが挙げられる。レーザーが EOM で位相変調を受けるとき、その変調周波数 (今は 15MHz) でビームジッターも導入される。これは EOM の光学素子が圧電変形を起こすためであり、この実験では防ぎようがない²。15MHz のビームジッターそれ自体は特に存在しても問題ないが、ビームジッターを持つ光がビームスプリッター等の光学素子を通るときにビームの端が切り欠かれると、15MHz の強度変調を引き起こしてしまう (図 6.7)。そして 15MHz の強度変調を持つ光が QPD に入射し、復調されると DC 的なオフセットとして、Wave Front Sensor の信号に現れる。ここで強度変調の振幅が変化するとオフセットも変化し、DC 付近の雑音になるわけである。強度変調の振幅が変化する原因としては、レーザーが元々持っている DC 付近のビームジッターや、ビームを切り欠いている光学素子の振動等が考えられる。今回の実験装置では、Wave Front Sensor のために反射光を分けるビームスプリッターがビーム径の太い所に置かれており、ビームを切り欠いてしまう。そして特に上段のビームスプリッターは長いロッドの先に取り付けられているため、地面振動で大きく揺れてしまう (図 6.7(b))。そのため上段 (補助干渉計) の方が下段 (主干渉計) よりも雑音が大きくなるのである。

以上のような問題を避けるためには、ビームを切り欠かないように大きなビームスプリッターを使用することが必要であるが、今回の実験では大きなビームスプリッターを用意することができなかった。これは今後改良すべき点である。

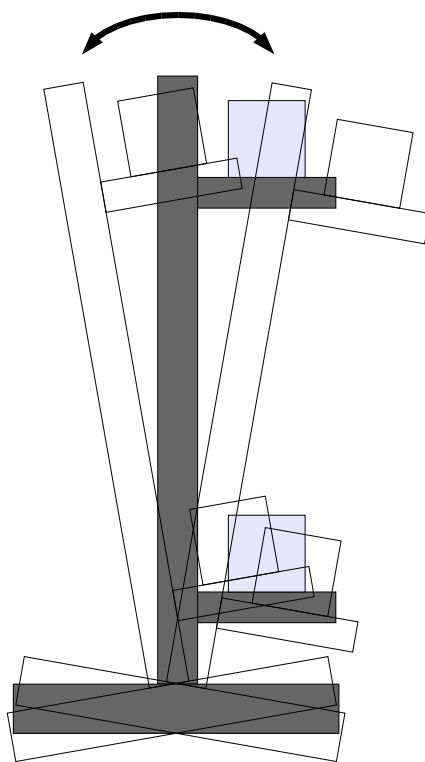
6.2.4 アクチュエーターバランス

今回の実験において Pitch 方向のアラインメント制御は、図 6.8 のようにミラーマスの上部と下部に取り付けた 2 つのアクチュエーターを差動で動かすことによって行った。しかし 2 つのアクチュエーターのバランスが悪いと、Pitch 方向に動かしたつもりが並進方向にも動いてしまう。そして実際にそのバランスが悪かったため、アラインメント制御を入れると共振器長の変位雑音レベルが悪化してしまった。今回の実験では 2 つのアクチュエーターの強さを独立に変えることができないような設計になっていたため、今後これを独立に変えられるように改良する必要がある。

²モードクリーナーを使えば除去できる



-(a)-



-(b)-

図 6.7: (a) ビームジッターでビームが上下に動くと、切り欠きの大きさが変化し、強度変調を引き起こす。(b) ロッドの先端にマウントされた光学素子の方が地面振動の影響を受け易い

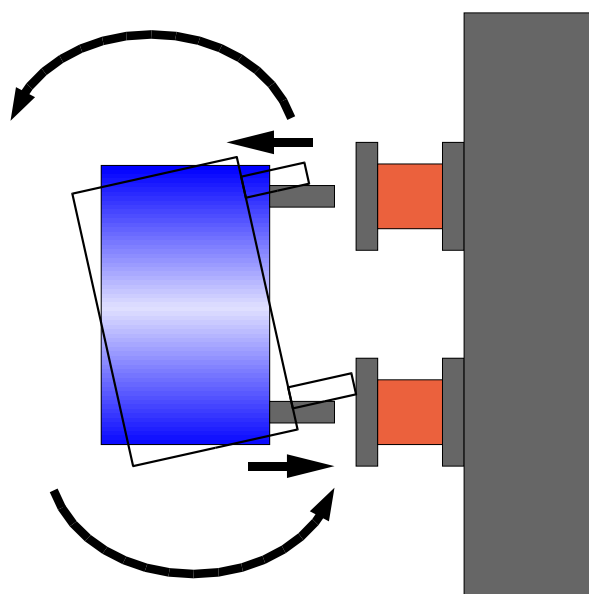


図 6.8: Pitch 方向のアクチュエーター

第7章 まとめ

7.1 結果

- 2 段振り子で防振された補助干渉計から主干渉計を懸架するという構成の装置を作り、2 つの干渉計を同時かつ安定に動作させることができた。
- 補助干渉計の共振器長を制御する前後で主干渉計共振器長の変動スペクトルを比較すると、1Hz 以下において最大で-40dB の改善が見られた。
- 主干渉計共振器長変動の RMS 振幅は、補助干渉計を制御することによって 1/5 に減少した。また、これによって 5.4 倍弱いアクチュエーターを使うことができる。
- ダンピングマスから主干渉計への振動伝達関数を測定した。その結果、補助干渉計を制御する前後で最大-60dB の改善が見られた。また、伝達関数の改善率は低周波に行くほど良くなる傾向があった。これは、主干渉計の CMRR が低周波に行くほど良くなるというモデル計算と一致する。
- 補助干渉計の姿勢制御をすることで主干渉計を構成する鏡の Pitch 方向変動が抑えられることを確認した。スペクトルでは 1Hz 以下で最大-10dB の改善が見られた。
- Pitch 方向 1Hz 以下の RMS 振幅は補助干渉計姿勢制御を入れる前後で約 2.5 倍改善した。
- 地球重力場の変動を検出するために、主干渉計を吊る振り子の傾きのスペクトルを得た。しかし予想される地球コア変動の効果を検出するためには、10 桁感度が足りない。

7.2 問題点、課題

- 共振器長変動スペクトルが 3Hz 以上で改善されない原因を突き止める必要がある。
- 1Hz 以下で補助干渉計の共振器長制御ゲインは 120dB 以上ある。しかし、主干渉計のスペクトルは 40dB しか改善されていない。原因としては縦振動の混入やレーザーの周波数雑音などが考えられる。ミラー懸架精度の向上や、レーザーの周波数安定化を図る必要がある。
- ダンピングマスのアクチュエーターに非対称性が存在し、並進方向に加振すると同時に Yaw,Pitch 方向にも揺れてしまう。従ってアクチュエーターのバランスを取る必要がある。また、鏡の Pitch 方向制御に使うアクチュエーターのバランスも調整する必要がある。

- Pitch 方向の制御がより安定になるように、Feedback Filter の改良を行う必要がある。
- 反射光を分けるビームスプリッターがビームの端を切り欠いているため、ビームジッターが強度雑音に変換されてしまっている。従ってより大きなビームスプリッターを使う必要がある。
- Yaw 方向の制御も入れる。
- 地球のコア振動測定のためには、主干渉計に及ぶ縦振動の影響を抑えるための研究が必要である。また、長時間に及ぶ測定のために、装置全体の温度安定化も必要であると予想される。
- 大型干渉計への導入へ向けて、Fabry-Perot-Michelson 干渉計で補助干渉計の動作を確認する。

7.3 結論

今回の実験では、補助干渉計によって主干渉計を構成する鏡の RMS 振幅を抑えることに成功し、補助干渉計の原理的動作を確認した。これによって、補助干渉計が将来の大型干渉計で様々な問題を解決する方法として有用であるということが分かった。

また、次世代干渉計で多数の重力波イベントを捕らえるにはあらゆる雑音を低減する必要がある、その一環として補助干渉計は重要な技術である。従ってさらに研究を続ける必要がある。今後の課題として、前節で述べたように振り子の共振周波数よりも高い周波数で補助干渉計の効果を確認し、さらに大型干渉計と同じ干渉計方式で補助干渉計の動作を確認する必要がある。

補遺 A Gaussian beam 光学

A.1 基本モード

レーザービームでは電場が全て同一方向を向いているので、これをスカラー関数として扱うことができる。この時、電場 u が満たす波動方程式は、

$$\nabla^2 u - k^2 u = 0 \quad (\text{A.1})$$

である。 z 方向に進むレーザー光を考え、上式に、

$$u = \psi(x, y, z) e^{-ikz} \quad (\text{A.2})$$

を代入する。 ψ の z 方向への変化は緩やかであり、 $\partial^2 \psi / \partial z^2$ は無視できるとすると、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (\text{A.3})$$

となる。式 (A.3) は、

$$\psi = \exp \left\{ -i \left(P + \frac{k}{2q} r^2 \right) \right\} \quad (\text{A.4})$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (\text{A.5})$$

という解を持つ。これは、 z 一定の断面における強度分布が Gaussian の形をしているので、Gaussian beam と呼ばれる。

式 (A.4) を式 (A.3) に代入すると、

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{i}{q} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{dq}{dz} = 1 \quad (\text{A.7})$$

となる。式 (A.7) より、距離 d だけ離れた 2 点で、

$$q_2 = q_1 + d \quad (\text{A.8})$$

である。また、 q をつぎのように書く。

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi w^2} \quad (\text{A.9})$$

ここで、 λ は光の波長である。これを、式 (A.4) に代入すると、

$$\psi = \exp \left\{ -i \left(P(z) + \frac{kr^2}{2R(z)} \right) - \frac{r^2}{w^2} \right\} \quad (\text{A.10})$$

である。この式を見ると w はビームの振幅が $1/e$ になる半径を示しており、ビーム半径と呼ばれる。また、 R は等位相面の曲率半径である。

ここで、 z の原点を q が純虚数となるような位置に決める。この時、

$$q_0 = i \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (\text{A.11})$$

すると、

$$q(z) = q_0 + z = i \frac{\pi w_0^2}{\lambda} + z \quad (\text{A.12})$$

これと式 (A.9) を合わせて、

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] \quad (\text{A.13})$$

である。これはビーム半径の変化を表しており、ビーム半径は $z = 0$ で最小値 w_0 をとる。よってこの点をウエストと呼ぶ。また、

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \equiv \alpha_0 \quad (\text{A.14})$$

である。 α_0 は遠方でビームの広がり角を表す。

R に関しては、

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad (\text{A.15})$$

よって、Gaussian beam の等位相面はウエストにおいて平面 ($R = \infty$) となり、無限遠で球面 ($R = z$) に近づいていく。

式 (A.6) に式 (A.9) を代入して解くと、

$$iP(z) = \ln \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2} - i \tan^{-1} \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \quad (\text{A.16})$$

ここで、第一項はビームが広がるにつれて単位面積当りのビームパワーが減少する効果をあらわす。第二項は Gaussian beam と背後に仮定された平面波 (式 (A.2) の e^{-ikz}) との位相差を表す。これは Guoy phase と呼ばれている。

以上の結果を合わせると、

$$u(r, z) = \frac{w_0}{w} \exp \left\{ -i \left(kz - \eta \right) - r^2 \left(\frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2R} \right) \right\} \quad (\text{A.17})$$

ただし、 η は Guoy phase である。これは、基本 Gaussian モードと呼ばれる。

A.2 高次モード

より一般に式 (A.3) の解は、

$$\psi = g\left(\frac{x}{w}\right) \cdot h\left(\frac{y}{w}\right) \exp\left\{-i\left[P + \frac{k}{2q}(x^2 + y^2)\right]\right\} \quad (\text{A.18})$$

とかける。ここで、 g は x と z の関数。 h は y と z の関数である。これを、式 (A.3) に代入すると、 h と g に関して、

$$\frac{d^2 H_m}{dx^2} - 2x \frac{dH_m}{dx} + 2mH_m = 0 \quad (\text{A.19})$$

という Hermite の微分方程式が得られる。よって、

$$g \cdot h = H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right) H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w}\right) \quad (\text{A.20})$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

である。式 (A.18) を規格化して整理すると、

$$U_{lm}(x, y, z) = U_l(x, z) U_m(y, z) \exp\{-kz + (l + m + 1)\eta(z)\} \quad (\text{A.22})$$

$$U_l(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w(z)^2}\right)^{1/4} \left(\frac{1}{l!2^l}\right)^{1/2} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \exp\left[-\left(\frac{x}{w(z)}\right)^2 - i\frac{k}{2R(z)}x^2\right] \quad (\text{A.23})$$

w や R の定義は基本モードと同じである。また Guoy phase はモードの次数によって $(l + m + 1)\eta(z)$ というように変化する。このように、ビーム断面の強度分布が Hermite 多項式で表されるモードを、Hermite Gaussian モードと呼ぶ。

A.3 Fabry-Perot 干渉計の固有モード

Gaussian beam がレンズを通った場合を考える。焦点距離 f のレンズは曲率半径 R_1 の球面波を R_2 の球面波へと変換する。その関係は下の通りである。

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} \quad (\text{A.24})$$

ここでレンズはビームの半径を変えないので、 q は次のように変換される。

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} \quad (\text{A.25})$$

上の関係を用いて Fabry-Perot 干渉計の固有モードについて考える。曲率半径 R の鏡は、焦点距離 $f = R/2$ のレンズと同じ働きをする。したがって、曲率半径 R_1 の鏡と R_2 の鏡からなる Fabry-Perot 干渉計の中を往復する光は、焦点距離 $f_1 = R_1/2$ のレンズと $f_2 = R_2/2$ のレンズが共振器の長さ d だけ離れて交互に並んでいるような光学系を通り抜けるのと同じ変形を受ける (図 A.2)。

q_1 を用いて q_3 を表すと、

$$q_2 = \frac{1}{q_1 + d} - \frac{1}{f_2} \quad (\text{A.26})$$

$$q_3 = \frac{1}{q_2 + d} - \frac{1}{f_1} \quad (\text{A.27})$$

より、

$$\frac{1}{q_3} = -\frac{(d - f_1 - f_2)q_1 + d^2 - df_1 - 2df_2 + f_1f_2}{f_1(d - f_2)q_1 + df_1(d - 2f_2)} \quad (\text{A.28})$$

である。

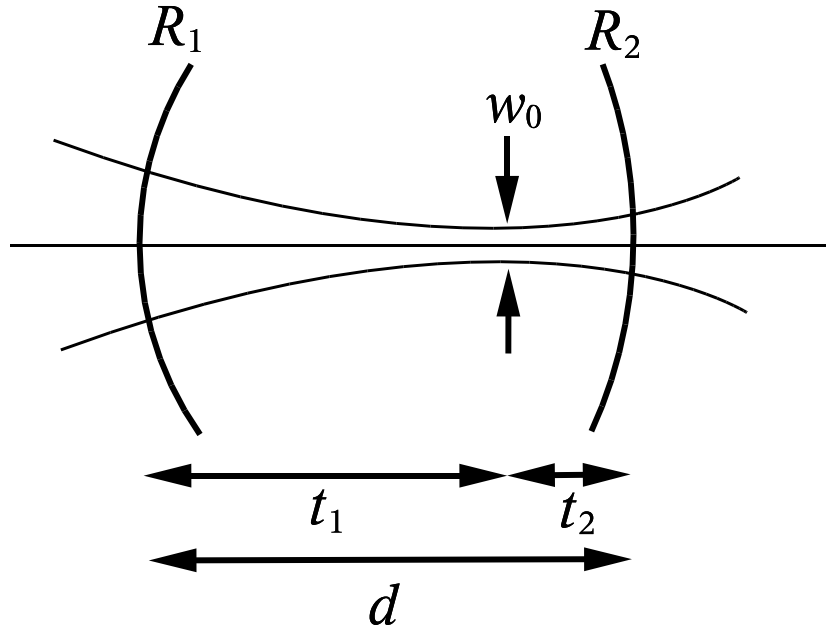


図 A.1: Fabry-Perot 干渉計の固有モード

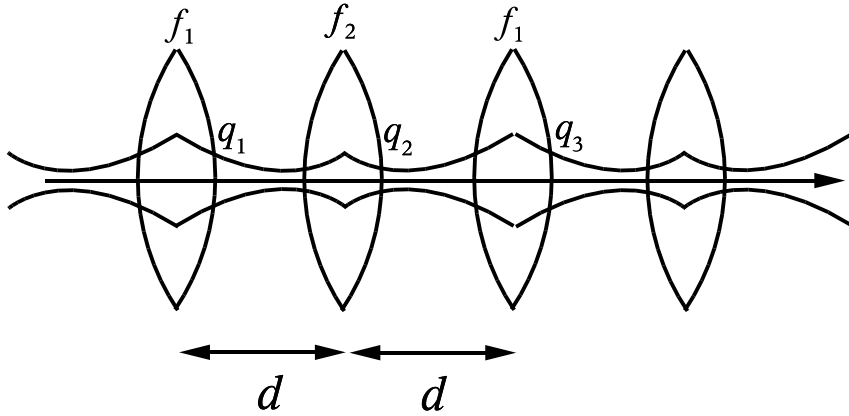


図 A.2: Fabry-Perot 干渉計と等価なレンズの並び

光がこの共振器に共振するためには、1 往復してきた光が元の光と同じ半径、曲率を持たなければならない。それは、図 A.2で、

$$q_1 = q_3 \quad (\text{A.29})$$

という条件である。

$q_1 = q_3 = q$ において、 q について解くと、

$$q = \frac{d^2 - 2df_2 \pm \sqrt{d(d-2f_1)(d-2f_2)(d-2f_1-2f_2)}}{2(f_1 + f_2 - d)} \quad (\text{A.30})$$

$f_1 = R_1/2$ 、 $f_2 = R_2/2$ を代入して、

$$\frac{1}{q} = -\frac{1}{R_1} \mp \frac{i}{R_1} \sqrt{\frac{(R_1 - d)(R_1 + R_2 - 2d)}{d(R_2 - d)}} \quad (\text{A.31})$$

これと、式 (A.9) を比べると、フロントミラー上で、ミラー曲率とビーム等位相面の曲率が一致し、そこでのビーム径が、

$$w_1^4 = \left(\frac{\lambda R_1}{\pi} \right)^2 \frac{(R_2 - d)d}{(R_1 - d)(R_1 + R_2 - d)} \quad (\text{A.32})$$

であることがわかる。同様にエンドミラーも計算すると、

$$w_2^4 = \left(\frac{\lambda R_2}{\pi} \right)^2 \frac{(R_1 - d)d}{(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)} \quad (\text{A.33})$$

となることが分かる。

ここで、式 (A.15) を式 (A.13) で割ると、

$$\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} = \frac{\pi w^2}{\lambda R} \quad (\text{A.34})$$

が得られる。この式を用いて、共振器のウエスをの位置、サイズを知ることができる。まず、ウエストの位置を原点にとる。そのときフロントミラーは $z = -t_1$ 、エンドミラーは $z = t_2 = d - t_1$ にある (図 A.1)。それぞれの鏡の位置でのビーム径 w および等位相面の曲率半径 R を式 (A.34) に代入すると、ウエストサイズ w_0 およびフロントミラーからウエストまでの距離 t_1 に対する、連立方程式が得られる。これを解くと、

$$w_0^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \frac{d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - 2d)^2} \quad (\text{A.35})$$

$$t_1 = \frac{d(R_2 - d)}{R_1 + R_2 - 2d} \quad (\text{A.36})$$

$$t_2 = \frac{d(R_1 - d)}{R_1 + R_2 - 2d} \quad (\text{A.37})$$

これで、共振器の固有モードが分かった。

A.3.1 Mode matching

次にレーザーの光を共振器のモードと重なるようにレンズを使って整形することを考える。レーザーから出た光が元々持っているウエストの位置を原点にとる。共振器は原点から l_c の距離にサイズ w_c のウエストを持つとする。原点にあるウエストサイズを w_L とすると、原点の q は、

$$q_0 = i \frac{\pi w_L^2}{\lambda} \quad (\text{A.38})$$

原点から、距離 l_1 に焦点距離 f_1 のレンズを置いたとすると、そのレンズの直後で q は

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q_0 + l_1} - \frac{1}{f_1} \quad (\text{A.39})$$

$$q_1 = \frac{f_1(q_0 + l_1)}{f_1 - l_1 - q_0} \quad (\text{A.40})$$

共振器のウエストにおける q パラメータを q_2 として、 $l_2 \equiv l_c - l_1$ とすると、

$$q_1 = q_2 - l_2 \quad (\text{A.41})$$

である。よって、

$$\frac{1}{q_0 + l_1} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{q_2 - l_2} \quad (\text{A.42})$$

ここで q_0, q_2 は純虚数なので、 $q_0 = ip_0$ 、 $q_2 = ip_2$ とすると、

$$\frac{1}{ip_0 + l_1} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{ip_2 - l_2} \quad (\text{A.43})$$

上式の実部と虚部をそれぞれ等しいと置くと、

$$\frac{l_1}{l_1^2 + q_0^2} - \frac{1}{f_1} = -\frac{l_2}{l_2^2 + q_2^2} \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{q_0}{l_1^2 + q_0^2} = -\frac{q_2}{l_2^2 + q_2^2} \quad (\text{A.45})$$

上2式を l_1, l_2 について解くと、

$$l_1 = f_1 \pm \frac{w_L}{w_c} \sqrt{f_1^2 - p_0 p_2} \quad (\text{A.46})$$

$$l_2 = f_1 \pm \frac{w_c}{w_L} \sqrt{f_1^2 - p_0 p_2} \quad (\text{A.47})$$

となる。上2式を使ってレンズを置く位置を決めることができる。実際には l_1, l_2 が現実的でない値になることがある。その場合 f_1 を調節するが、必要な f_1 を持つレンズが得られない時は、レンズの数を増やす。レンズの数を増やすと、調節可能な自由度が増えるので、 f_1 や l_1, l_2 に対する制限が緩くなる。

補遺 B Pound-Drever-Hall 法

Pound-Drever-Hall 法 [12] とは、レーザーに位相変調をかけることによって、Fabry-Perot 干渉計の長さ変動信号を得るための方法である。共振器長を制御するためには、1) 共振器長の変動に 1 次で比例し、2) 共振器が完全に共振しているとき 0 になるような信号が必要である。Pound-Drever-Hall 法ではレーザーに位相変調をかけ、発生したサイドバンドとキャリアの干渉によって上の条件を満たす信号を取り出す。

入射光の電場を、

$$E_{\text{in}} = E_0 e^{i\Omega t} \quad (\text{B.1})$$

とする。この光に角周波数 ω_m の位相変調をかける。

$$E_{\text{in}}^{\text{m}} = E_0 e^{i(\Omega t + m \cos \omega_m t)} \quad (\text{B.2})$$

E_{in}^{m} はベッセル関数によって次のように展開される。

$$\begin{aligned} E_{\text{in}}^{\text{m}} &= E_0 e^{i\Omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) i^n e^{in\omega_m t} \\ &\simeq E_0 \left[J_0(m) e^{i\Omega t} + iJ_1(m) e^{i(\Omega+\omega_m)t} + iJ_1(m) e^{i(\Omega-\omega_m)t} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

ただしここで $m \ll 1$ として近似した。上の式には 3 つの周波数成分が含まれている。元の光の周波数 Ω の成分をキャリアと呼ぶ。 $\Omega \pm \omega_m$ の成分はそれぞれ ± 1 次のサイドバンドと呼ばれる。共振器のキャリアに対する反射率を r_{c0} 、 $+1$ 次サイドバンドに対する反射率を r_{c+1} 、 -1 次サイドバンドに対する反射率を r_{c-1} とすると、共振器の反射光は、

$$E_{\text{r}} = E_0 \left\{ r_{c0} J_0(m) e^{i\Omega t} + iJ_1(m) \left(r_{c+1} e^{i(\Omega+\omega_m)t} + r_{c-1} e^{i(\Omega-\omega_m)t} \right) \right\} \quad (\text{B.4})$$

である。キャリアが共振器に共振しているとすると、 $r_{c+1} \simeq r_{c-1} \simeq 1$ である。また、キャリアの反射率は、式 (3.18) より、

$$r_{c0} = r_1 - \frac{t_1^2 r_2 e^{-2i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\delta}} \quad (\text{B.5})$$

である。 δ を共振点 ($\delta = n\pi$) の近くで展開すると、

$$\begin{aligned} r_{c0} &\simeq r_1 - \frac{t_1^2 r_2 (1 - 2i\delta')}{1 - r_1 r_2 (1 - 2i\delta')} \\ &\simeq r_1 - \frac{t_1^2 r_2}{1 - r_1 r_2} - i \frac{2t_1^2 r_2 (1 - 2r_1 r_2)}{(1 - r_1 r_2)^2} \delta' \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

ただし $\delta = n\pi + \delta'$ と置いた。よって、反射光は、

$$E_r = E_0 e^{i\Omega t} \left[\left(r_1 - \frac{t_1^2 r_2}{1 - r_1 r_2} - i \frac{2t_1^2 r_2 (1 - 2r_1 r_2)}{(1 - r_1 r_2)^2} \delta' \right) J_0(m) + 2i J_1(m) \cos \omega_m t \right] \quad (\text{B.7})$$

$|E_r|^2$ をもとめて $\cos \omega_m t$ の項を取り出すと、

$$\frac{8t_1^2 r_2 (1 - 2r_1 r_2)}{(1 - r_1 r_2)^2} J_1(m) \delta' \cos \omega_m t \quad (\text{B.8})$$

この信号を in-phase($\cos \omega_m t$) で復調すると、 δ' の 1 次 に比例した信号が取り出せる。ここで、

$$\delta' = \frac{\Delta L \Omega + L \Delta \Omega}{c} \quad (\text{B.9})$$

なので、 $\Delta \Omega = 0$ ならば、共振器長の変動に比例した信号がえられる。しかし一般に $\Delta \Omega \neq 0$ であり、Pound-Drever-Hall 法では共振器長の変動と周波数の変動は区別がつかない。

補遺 C Wave Front Sensor

Wave Front Sensor[13, 14] とは、共振器からの反射光に含まれる基本横モードと高次の横モードの干渉を利用して、共振器を構成する鏡の傾きに関する情報を取得する方法である。

C.1 Hermite Gaussian モードの展開

Hermite Gaussian モードを、 x 軸方向に δx だけ平行移動したモードで展開すると次のようになる [22](図 C.1)。

$$U_{00} = U_{00}(x', y', 0) + \left(\frac{\delta x}{w_0}\right) U_{10}(x', y', 0) \quad (\text{C.1})$$

$$U_{10} = U_{10}(x', y', 0) - \left(\frac{\delta x}{w_0}\right) U_{00}(x', y', 0) \quad (\text{C.2})$$

また、 y 軸を中心に α 回転をしたモードで展開すると次のようになる (図 C.2)。

$$U_{00} = U_{00}(x', y', 0) + i \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right) U_{10}(x', y', 0) \quad (\text{C.3})$$

$$U_{10} = U_{10}(x', y', 0) + i \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right) U_{00}(x', y', 0) \quad (\text{C.4})$$

なお、文字の意味は補遺 A に準ずる。

C.2 鏡の傾きとモードの展開

共振器を構成する鏡が、角度 α 傾いたときを考える (ここでは Front mirror でも End mirror でもどちらでもよい。図 C.3は Front mirror が傾いたときの例である)。入射光軸に対して共振器の軸が $R_1\alpha$ だけ傾き、 x 軸方向に $X_1\alpha$ だけ平行移動したとする¹。入射光を共振器の軸で展開すると、

$$U_{00\rightarrow} = U'_{00\rightarrow} + \left\{ \frac{X_1}{w_0}\alpha + i \left(\frac{R_1}{\alpha_0}\right)\alpha \right\} U'_{10\rightarrow} \quad (\text{C.5})$$

ここで、 $\rightarrow$ は入射方向であることを表し、 $\leftarrow$ は反射方向であることを表す。また、 $'$ は共振器軸上のモードであることを表す。つぎに、共振器の軸に対して鏡で直接反射される光の軸が $R_2\alpha$

¹このような線型の関係は、 α の 1 次で近似すれば常に成り立つ。

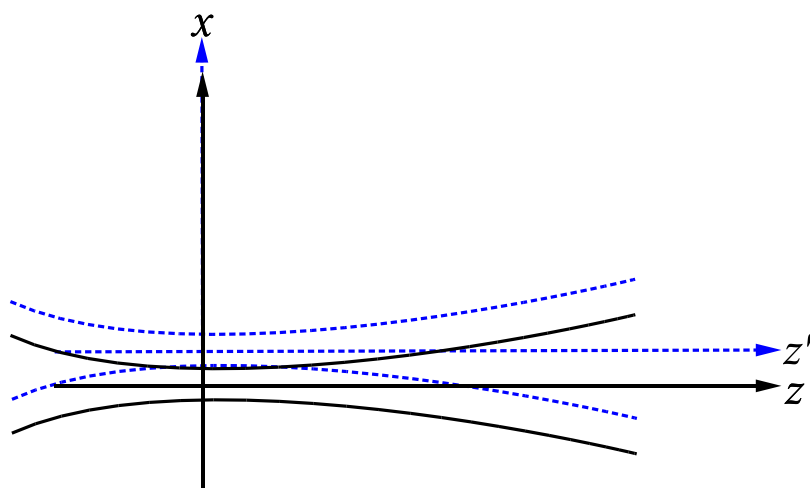


図 C.1: Hermite Gaussian モードの平行移動

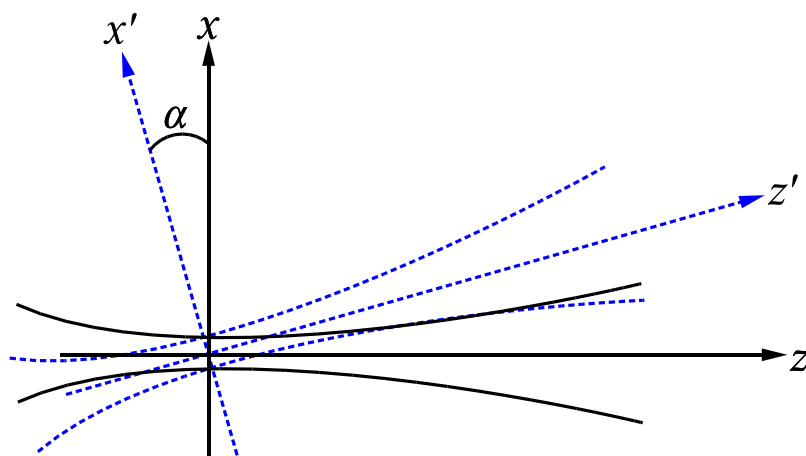


図 C.2: Hermite Gaussian モードの回転

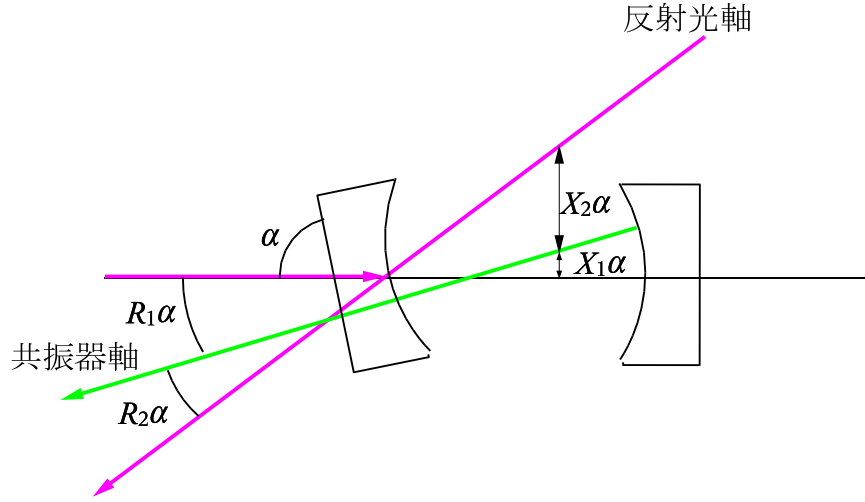


図 C.3: Front mirror が傾いた場合

回転し、 $X_1\alpha$ 平行移動しているとすると、共振器の軸は反射光軸で次のように展開される。なおここではキャリアについて考えている。

$$U'_{00\rightarrow} = r_0 \left[U''_{00\leftarrow} + \left\{ \frac{X_2}{w_0} \alpha - i \left(\frac{R_2}{\alpha_0} \right) \alpha \right\} U''_{10\leftarrow} \right] \quad (\text{C.6})$$

$$U'_{10\rightarrow} = r_1 \left[U''_{10\leftarrow} + \left\{ \frac{X_2}{w_0} \alpha - i \left(\frac{R_2}{\alpha_0} \right) \alpha \right\} U''_{00\leftarrow} \right] \quad (\text{C.7})$$

ここで、 r_0 は TEM_{00} のキャリアに対する共振器の反射率、 r_1 は TEM_{10} のキャリアに対する共振器の反射率である。また、 $''$ は反射光軸上のモードであることを表す。式 (C.5) に式 (C.6) 式 (C.7) を代入して、

$$U_{00\rightarrow} = r_0 U''_{00\leftarrow} + \left\{ \frac{r_1 X_1 + r_0 X_2}{w_0} + i \frac{r_1 R_1 - r_0 R_2}{\alpha_0} \right\} \alpha U''_{10\leftarrow} \quad (\text{C.8})$$

サイドバンドに対しては、キャリアと全く同様に計算できて、

$$U_{00\rightarrow} = r_{s0} U''_{00\leftarrow} + \left\{ \frac{r_{s1} X_1 + r_{s0} X_2}{w_0} + i \frac{r_{s1} R_1 - r_{s0} R_2}{\alpha_0} \right\} \alpha U''_{10\leftarrow} \quad (\text{C.9})$$

となる。ここで、 r_{s0} は TEM_{00} のサイドバンドに対する共振器の反射率、 r_{s1} は TEM_{10} のサイドバンドに対する共振器の反射率である。

C.3 信号

入射光は、キャリア、

$$E_0 J_0(m) e^{i\Omega t} U_{00\rightarrow} \quad (\text{C.10})$$

と、サイドバンド、

$$2iE_0 J_1(m) e^{i\Omega t} \cos \omega_m t U_{00\rightarrow} \quad (\text{C.11})$$

の足しあわせなので、反射光は、

$$E_r = E_0 e^{i\Omega t} \left[J_0 \left\{ r_0 U_{00} + \left(\frac{r_1 X_1 + r_0 X_2}{w_0} + i \frac{r_1 R_1 - r_0 R_2}{\alpha_0} \right) \alpha U_{10} \right\} \right. \\ \left. + 2i J_1 \cos \omega_m t \left\{ r_{s0} U_{00} + \left(\frac{r_{s1} X_1 + r_{s0} X_2}{w_0} + i \frac{r_{s1} R_1 - r_{s0} R_2}{\alpha_0} \right) \alpha U_{10} \right\} \right] \quad (\text{C.12})$$

となる。ここで U に付く " $\rightarrow$ " や " $\leftarrow$ " は省略した。 $|E_r|^2$ を計算して、 $\cos \omega_m t$ の項だけを抜き出すと、

$$2i J_0 J_1 \cos \omega_m t [(r_{s0} r_0^* - r_{s0}^* r_0) U_{00} U_{00}^* + r_0^* U_{10} U_{00}^* S \alpha - r_0 U_{00} U_{10}^* S^* \alpha \\ + r_{s0} U_{00} U_{10}^* C^* \alpha - r_{s0}^* U_{00}^* U_{10} C \alpha] \quad (\text{C.13})$$

$$C = \frac{r_1 X_1 + r_0 X_2}{w_0} + i \frac{r_1 R_1 - r_0 R_2}{\alpha_0} \quad (\text{C.14})$$

$$S = \frac{r_{s1} X_1 + r_{s0} X_2}{w_0} + i \frac{r_{s1} R_1 - r_{s0} R_2}{\alpha_0} \quad (\text{C.15})$$

である。上式の [] 内が、反射光を Photo Detector で受けて $\cos \omega_m t$ で復調したときの信号である。また式 (C.13) の第一項は Pound-Drever-Hall 法で利用した信号である。今、Pound-Drever-Hall 法によって共振器は完全に共振状態に制御されているとすると、共振器の振幅反射率は全て実数であると見なして良い。従って式 (C.13) 第一項は消る²。残りは α に比例する項のみであり、反射率が実数であることを使うとこれは、

$$\left(\frac{r_1 X_1 + r_0 X_2}{w_0} r_{s0} - \frac{r_{s1} X_1 + r_{s0} X_2}{w_0} r_0 \right) U_s + \left(\frac{r_1 R_1 - r_0 R_2}{\alpha_0} r_{s0} + \frac{r_{s1} R_1 - r_{s0} R_2}{\alpha_0} r_0 \right) U_c \quad (\text{C.16})$$

となる。ただし、 U_c は、

$$U_c \equiv U_{10}^* U_{00} + U_{10} U_{00}^* = U_1^* U_0^* e^{-2i\eta} U_0 U_0 e^{i\eta} + U_1 U_0 e^{2i\eta} U_0^* U_0^* e^{-i\eta} \\ = U_1^* U_0^* U_0 U_0 (e^{i\eta} + e^{-i\eta}) = 2U_1^* U_0^* U_0 U_0 \cos \eta \quad (\text{C.17})$$

同様に、 U_s は、

$$U_s \equiv U_{10}^* U_{00} - U_{10} U_{00}^* = -2U_1^* U_0^* U_0 U_0 \sin \eta \quad (\text{C.18})$$

である。また η は Guoy phase である。

²Pound-Drever-Hall 法の信号なのだから当然である。

$U_1^* U_0^* U_0 U_0$ は、 U_1 が奇関数で U_0 が偶関数なので、 $-\infty < x < \infty$ で積分すると 0 になってしまう。これは、反射光を全て 1 つの Photo Detector で受けてしまうと信号が得られないということである。そこで、 $x < 0$ の領域と $x > 0$ の領域に分けて積分し、その差をとれば α に比例した信号が得られる。これは、Photo Detector の受光面を半分に分割してビームの断面のうち半分ずつを別々に受光し、後にその差をとるという操作に対応している。

また、式 (C.16)～式 (C.18) から分かるように、得られる信号の大きさは Guoy phase に依存している。一般的に Front mirror が傾いた場合と End mirror が傾いた場合では、 X_1 、 X_2 、 R_1 、 R_2 の値が違ふ。従って、それぞれの鏡で信号が最大になる Guoy phase が違ふ。よって適当な Guoy phase を選べば Front mirror と End mirror の信号を分離できる。

C.4 X_1 、 X_2 、 R_1 、 R_2 の値

Front mirror の曲率が R_F 、End mirror の曲率が R_E である Fabry-Perot 共振器について、 X_1 、 X_2 、 R_1 、 R_2 は、簡単な幾何学計算から求まる。結果だけを示すと、 α の 1 次までで、

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_F}{R_F + R_E - d} \quad , \quad X_1 = (R_E - t_2) \frac{R_F}{R_F + R_E - d} \\ R_2 &= \frac{2R_E + R_F - 2d}{R_E + R_F - d} \quad , \quad X_2 = 2t_1 - \frac{(R_E - t_2) R_F}{R_E + R_F - d} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

End mirror

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_E}{R_F + R_E - d} \quad , \quad X_1 = (R_F - t_1) \frac{R_E}{R_F + R_E - d} \\ R_2 &= -R_1 \quad , \quad X_2 = -X_1 \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

である。ここで、 d は共振器長、 t_1 は Front mirror から共振器のウエストまでの距離、 $t_2 = d - t_1$ である。

補遺 D Photo Sensorによるアクチュエーター 伝達関数の測定

D.1 原理

Photo Sensor とは変位センサーの一種である。これは図 D.1のように、LED の両脇に Photo Detector が取り付けられた形をしている。これを目標物に近づけると、LED からの光は目標物で反射されて Photo Detector に入る。このとき Photo Detector に入る光の量は目標物と Photo Sensor の間の距離 x の関数になっている。まず x が大きいときは、Photo Sensor が近づくにつれて光の量が増す。これを領域 1 と呼ぶことにする。ある程度 Photo Sensor が近づくと、今度は Photo Detector の外壁が障害物となり、近づくにつれて PD に入る光の量が減る。これを領域 2 とする。領域 1、領域 2 とともに、 x と受光量の関係が線形になる場所があるので、その領域を利用して受光量の変動から距離 x の変動を測る。

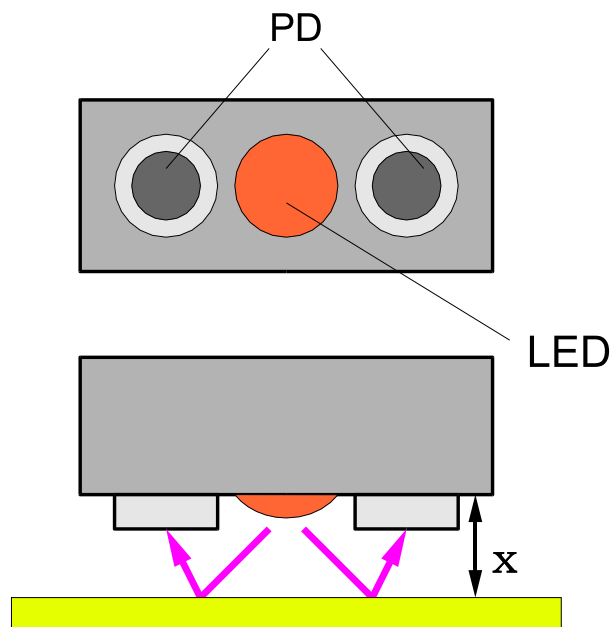


図 D.1: Photo Sensor

D.2 校正

Photo Sensor の校正は以下のように行う。

1. Photo Sensor をマイクロメーター付ステージにマウントする。
2. Photo Sensor を測定対象物に近づける。このとき、Photo Sensor と対象物との距離 x はマイクロメーターで変化させることができる。
3. マイクロメーターを動かして x を変えながら、Photo Sensor の出力を読み取り、記録する。
4. 得られたデータから x と Photo Sensor 出力 y の関係をグラフにする。
5. 線型性の良い部分を選び、1 次関数でフィットして傾き k を求める。
6. マイクロメータを動かして、上で求めた線型性の良い距離に Photo Sensor を置く。
7. 以後、Photo Sensor の出力変化 Δy を k で割れば、対象物と Photosensor 間の距離変化 Δx が求まる。

D.3 アクチュエーター伝達関数の測定

鏡を動かすアクチュエーターに入力する電圧から鏡の変位への伝達関数は、Photo Sensor を用いて測定した。まず Photo Sensor を鏡に近づけ、節 D.2 の手順で校正する。その後、アクチュエーターに正弦波を入力し、Photo Sensor の出力を測定する。その結果、入力信号と出力信号の比をとることによって伝達関数を求めることができる。実際の測定はサーボアナライザを用いて半自動的に行われる。

鏡の Pitch 方向の変位は図 D.2 のように、鏡の上部に Photo Sensor を近づけることで測定した。鏡の傾きが小さいとすれば、回転角度 θ は $\theta = x/l$ で求まる。

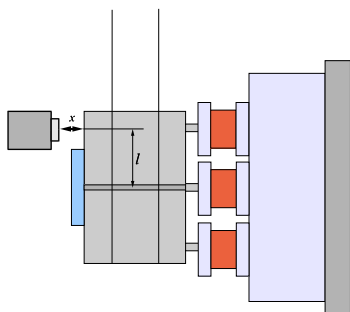


図 D.2: Pitch 方向の伝達関数測定

補遺 E 電気回路

実験で使用した電気回路のうち、重要なものの回路図を示す。

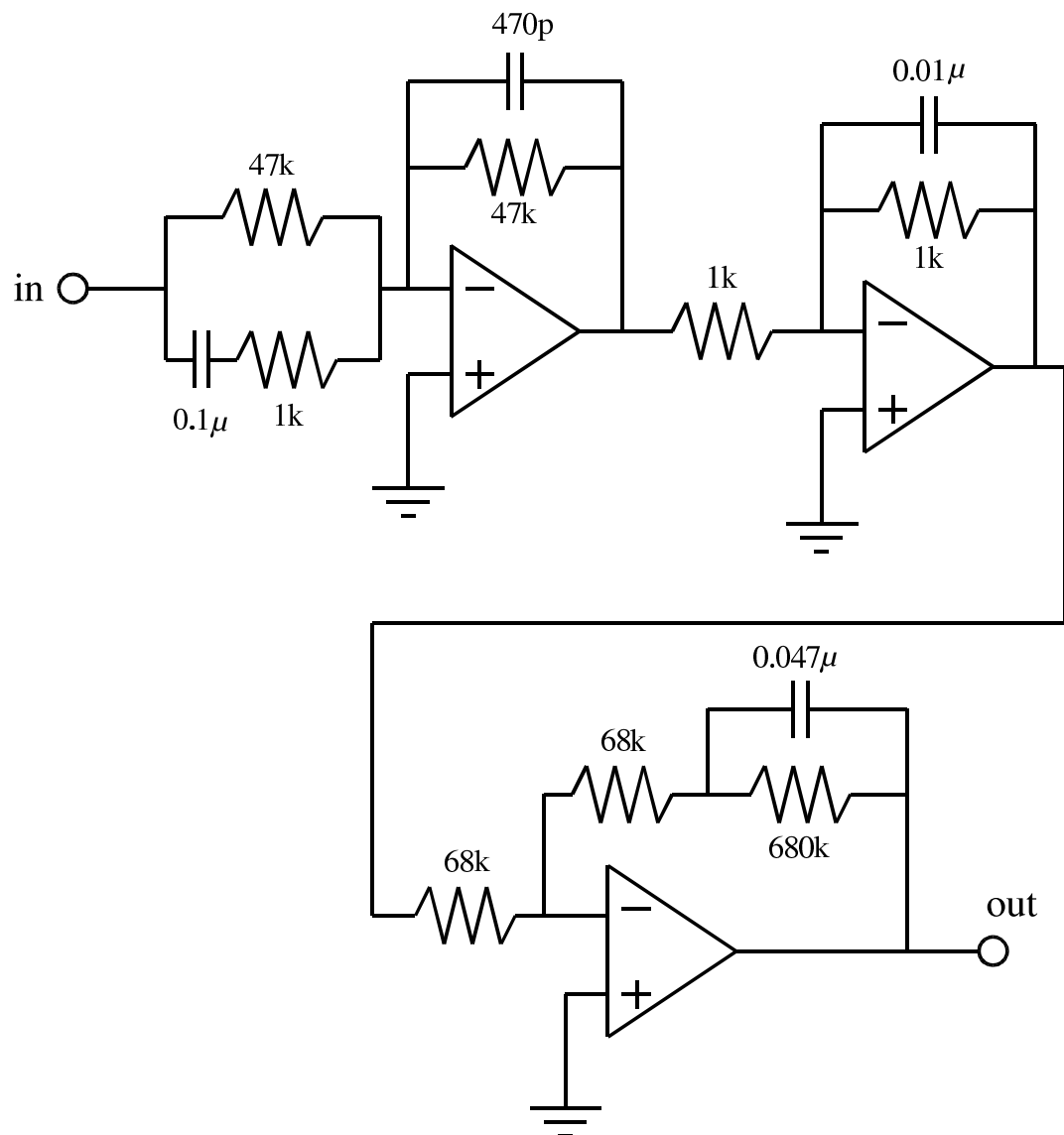


図 E.1: 共振器長制御用 Filter

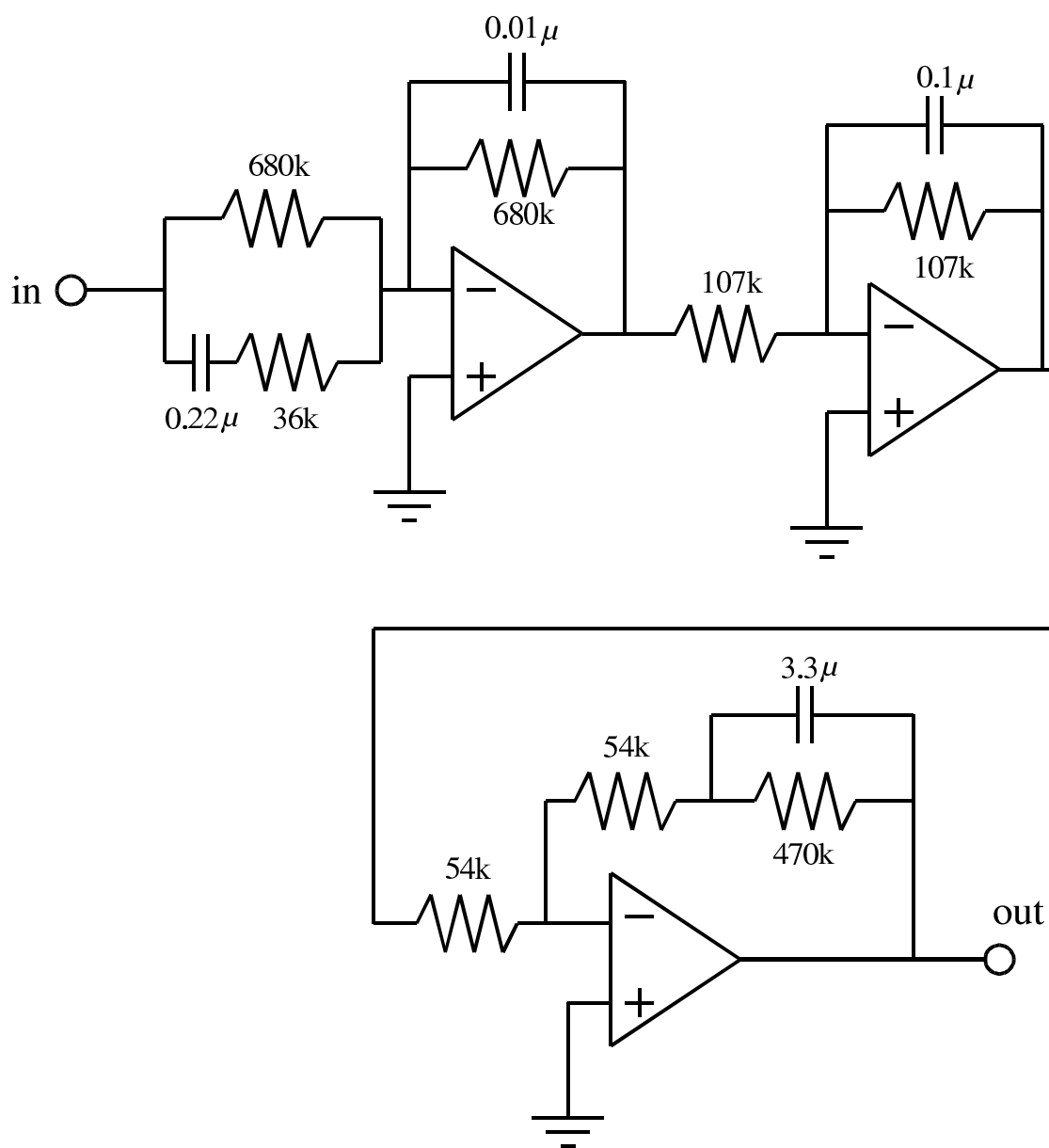


図 E.2: Pitch 制御用 Filter

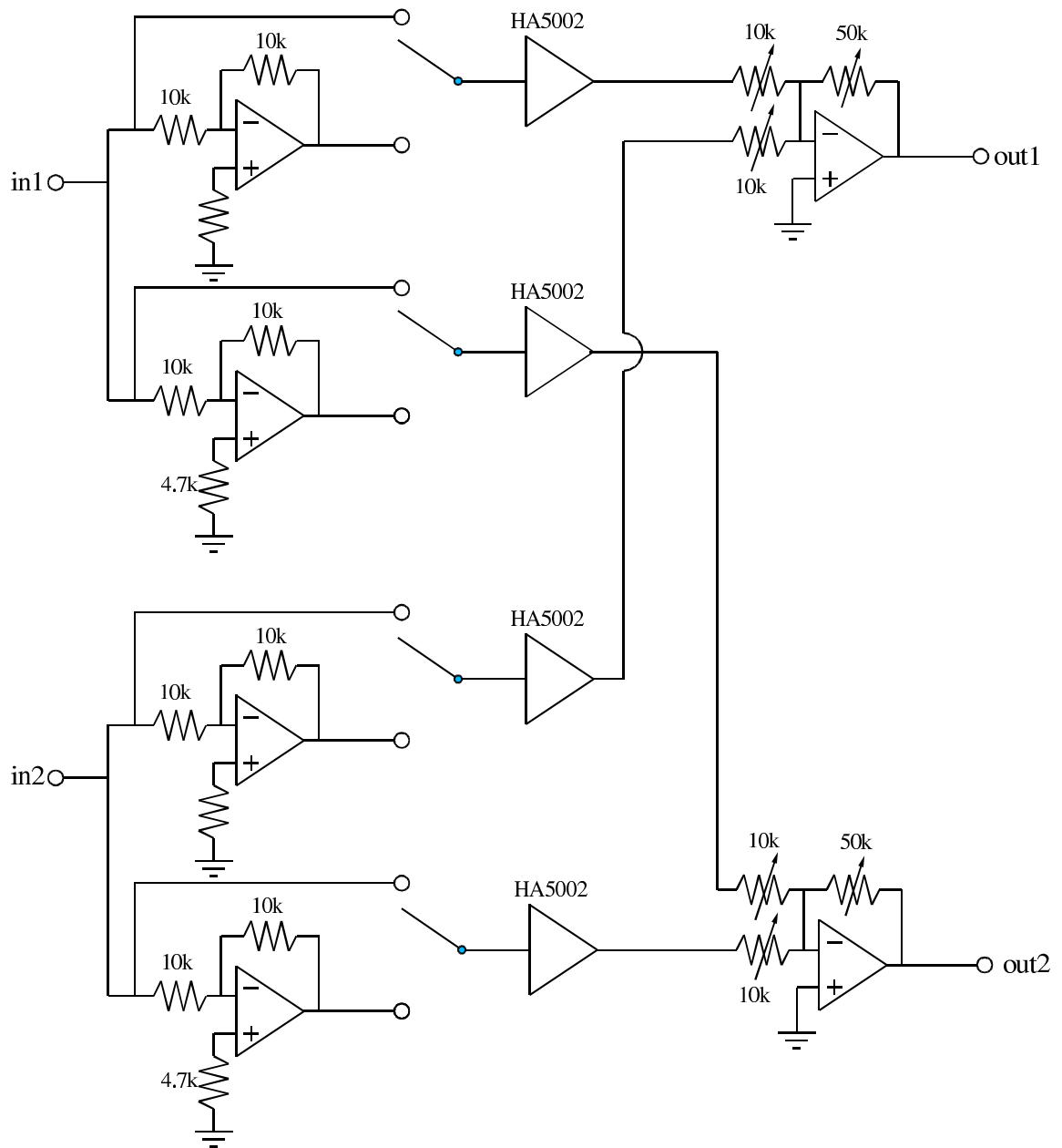


図 E.3: Wave Front Sensor 信号分離用 Matrix 回路

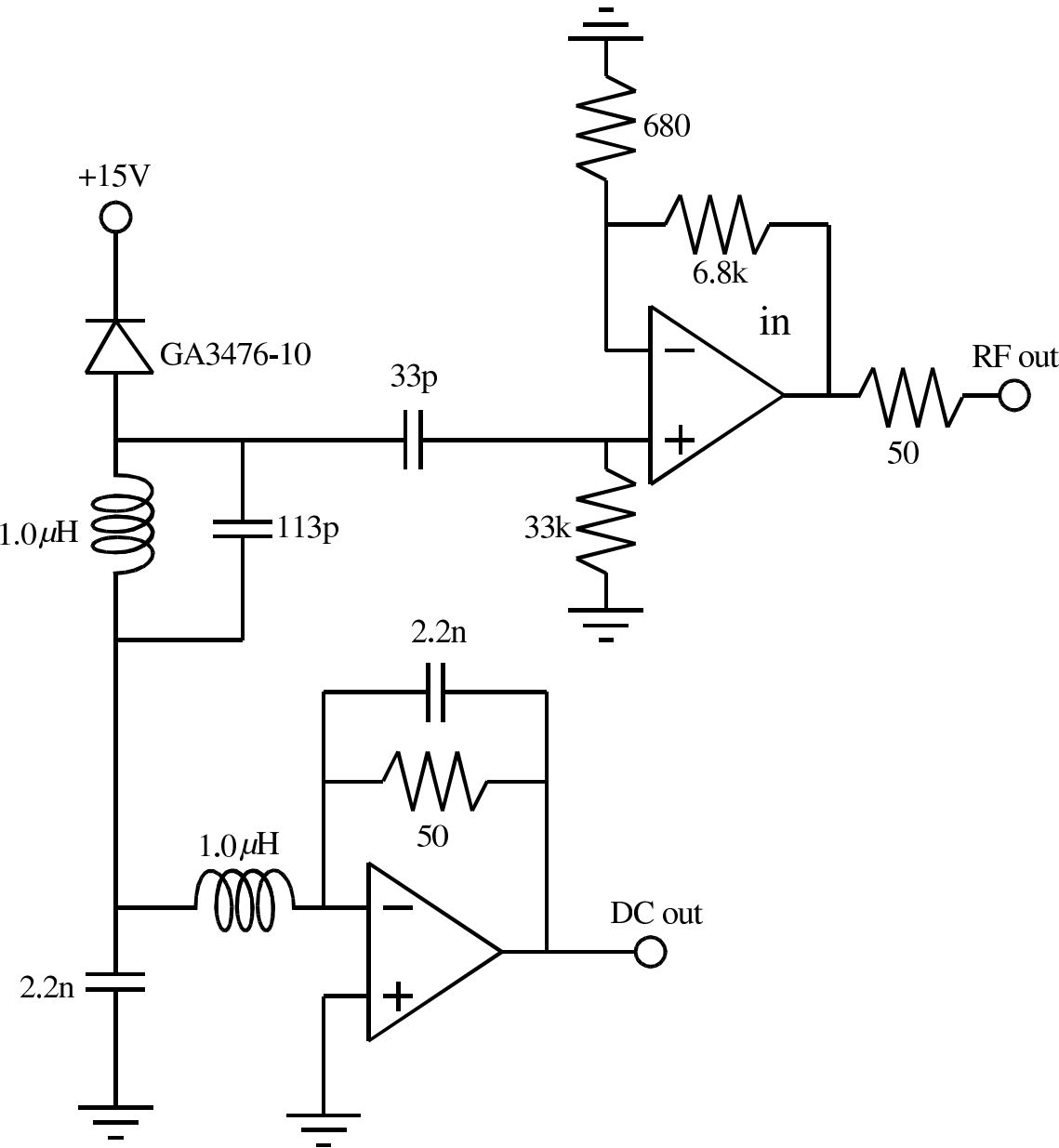


図 E.4: 15MHz Photo Detector

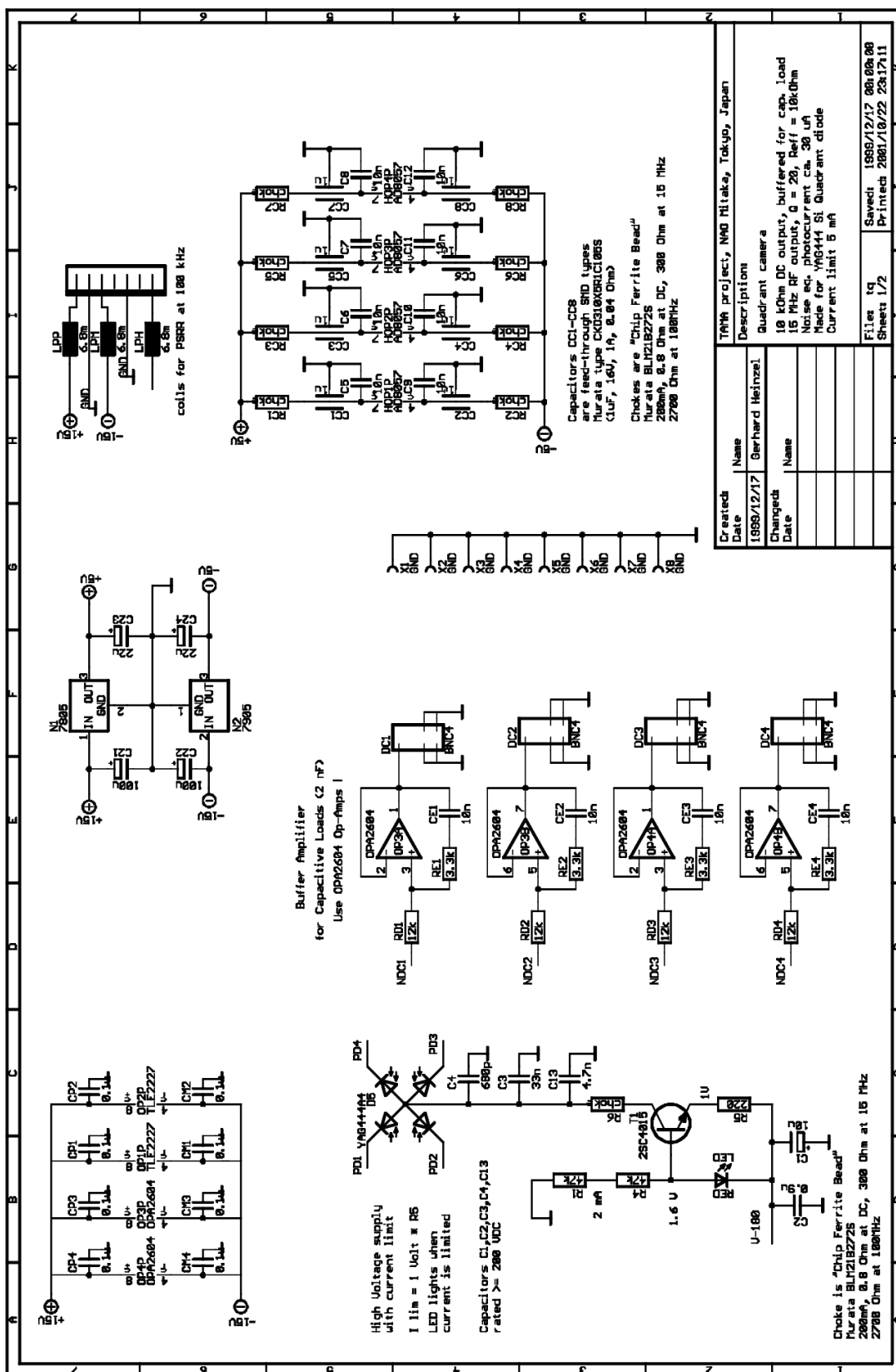


図 E.5: 4 分割 Photo Detector(QPD) G.Heinzel 氏設計 Page.1



参考文献

- [1] A.Einstein, "Die Grundlege der algemeiner Relativisänt theorie.", *Ann. der Phys.* **17**, 892
- [2] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健 編, 「重力波を捕らえる」, 京都大学学術出版会 (1998)
- [3] 三尾典克, 大橋正健 編, 「重力波アンテナ技術検討書 -干渉計ハンドブック-」, (1992)
- [4] J.H. Taylor, J.M. Weisberg, *Ap. J.* **345**, 435(1989)
- [5] V.Kalogera, R.Narayan, et al., *Astro. phys. J.* **556**, 340(2001)
- [6] L. Lindblom, *Astrophys. J.* **398**, 569(1992)
- [7] F. J. Raab, *Class. Quantum. Grav.* **18**, 4107(2001)
- [8] R. Passaquieti and Virgo collaboration, *Nucl. Phys. B-Proc sup* **85**, 241(2000)
- [9] H. Luck, *Class. Quantum. Grav.* **14**, 1471(1997)
- [10] M. Ando, K. Arai. et al., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3950(2001)
- [11] R.W.P. Drever, "Outline of a Proposed Design for a First Receiver for Installation in the Long-Baseline Facilities, of Fabry-Perot Type", LIGO Document T870001-00-R(1987)
- [12] R.W.P. Drever, J.L.Hall, et al, *Appl. Phys. B-Photo* **31**, 97(1983)
- [13] E. Morrison, B.J. Meers et al, *Appl. Opt* **33**, 5037(1994)
- [14] E. Morrison, B.J. Meers et al, *Appl. Opt* **33**, 5041(1994)
- [15] H.Kogelnik, T.Li, *Proc. of The IEEE.* **54**, 1312(1966)
- [16] A.Buonanno, Y. Chen, *Phys. Rev. D* **64**, 042006(2001)
- [17] V.B. Braginsky, F.Ya. Khalily, *Phys. Let. A* **218**, 167(1996)
- [18] Yu. Levin, *Phys. Rev. D* **57**, 042069(1998)
- [19] V.N. Rudenko, *Phys. Let. A* **223**, 421(1996)
- [20] V.N. Rudenko, Private communication.

参考文献

- [21] 安東正樹, 東京大学 修士論文,(1996)
- [22] 朽久保邦治, 東京大学 修士論文,(1996)
- [23] 新井宏二, 東京大学 修士論文,(1997)
- [24] ランダウ, リフシッツ, 「場の古典論」, 東京図書 (1964)
- [25] Bernard F. Schutz, “A first course in general relativity”, Cmbridge university press(1985)
- [26] 内山龍雄, 「相対性理論」, 岩波書店 (1977)
- [27] 植木義一, 添田喬, 「わかる自動制御」, 日新出版 (1966)

謝辞

私が本論文をまとめることができたのは、多くの方々のご協力のおかげです。深く感謝致します。

私の指導教官である坪野公夫教授は、私を重力波の直接検出という興味深い研究テーマへと導いてくださいました。そして、実験方針への助言のみならず、将来的な研究の展望に関しても相談に乗ってくださいました。また、実験環境の整備にも力を注いでいただき、実験に際して必要な物が無くて不自由するということはありませんでした。

坪野研究室助手の安東正樹氏には、実験、データ解析、論文執筆に至るまでありとあらゆる面で大変お世話になりました。実験が行き詰まったとき、経験豊富な氏からの助言は大変貴重なものであり、また、そのような氏の存在はとても頼もしいものでした。

坪野研究室助手の河邊径太氏には、私が学部4年生でこの実験を始めた当時に大変お世話になりました。氏は、干渉計や制御に関する知識が皆無であった私を、一から丁寧に指導してくださいました。

博士課程の高森昭光氏には、懸架系の設計に関して多くの示唆をいただきました。特に、縦防振に用いた Mini-GAS は氏の提供によるものです。また、実験結果に関する氏との議論は大変有益なものでした。

博士課程の沼田健司氏は、私が研究室に入った当時、最も近い先輩でした。右も左も分からない私に、研究室の日常的なことから実験の技術に至るまで様々なことを教えていただきました。また、氏の精力的な研究態度からは、常に刺激を受けてきました。氏との議論は常に得るものがあり、大変有益でした。

博士課程の飯田幸美氏、修士課程の依田達夫氏、関秀嗣氏、副田憲志氏、西雄彦氏とは、有益な議論を交わすことができました。特に、関氏の珍妙な言動は常に私の好奇心を刺激してくれました。また、西氏は氏が学部4年生の時、補助干渉計の実験を進めてくれました。

東京大学大学院情報理工学系研究科修士課程の小林義徳氏は、私が修士課程1年生の時の同期でした。氏とは一時期共同で実験を行い、様々な刺激を受けました。特に氏の計算機に関する知識は豊富で、多くのことを教えていただきました。

東京大学理学部物理学科試作室の大塚茂巳氏と南城良勝氏には、suspension の部品の大部分を製作していただきました。また、私が製作した部分に関しても、技術的な指導をしていただきました。

東京大学宇宙線研究所の山元一広氏には、多くの有益な意見をいただきました。

国立天文台助手の新井宏二氏には、Photo Diode や QPD、電源などを貸し出していただきました。また、干渉計や懸架系、電気回路等について、多くのことを教えていただきました。

東京大学大学院新領域創成科学研究科の三尾典克助教授と森脇成典助手には、超音波洗浄器を使わせていただきました。また、折りに触れて貴重なご意見をいただきました。

国立天文台助教授の川村静児氏には、TAMA プロジェクトのミーティングの際、干渉計の基本について講義していただきました。そこで得た干渉計に関する知識は、実験を行う上で大変役に立ちました。

謝辞

カルフォルニア工科大学の Riccardo DeSalvo 氏には、Mini-GAS 用のクランプを提供していただきました。

モスクワ大学の V.N. Rudenko 教授には、補助干渉計を用いた地球コア振動の検出について、示唆をいただきました。

多くの方々に支えられて、ここに実験結果をまとめることができ、この上ない感謝の気持ち一杯です。ありがとうございました。