修士論文

基線長300mレーザー干渉計型重力波検出器
のための懸架システムの開発

理学系研究科物理学専攻 56038
新井 宏二

1997年1月 (1997年11月改訂)

目次

第1章

はじめに

一般相対性理論における Einstein 方程式を弱い重力場の近似のもとで線形化すると、波動解が得られる。この光速で伝搬する時空の歪みを重力波という。A. Einstein は 1916 年に重力波の存在を理論的に示していた。J.H.Taylor らは連星パルサー PSR1913+16 を電波望遠鏡で観測し、その公転周期の減少から重力波の存在を間接的に証明した [1]。J.H.Taylor らはこの功績により 1993 年のノーベル物理学賞を授賞している [2]。しかし、重力波と物質の相互作用は非常に弱いため、その直接検出はいまだなされておらず、一般相対性理論の検証実験の中で残された大きな課題の一つとなっている。重力波を直接捉えることができるようになると電磁波による観測とは質の異なる「21 世紀の天文学」を開拓することができると期待されている。

近年、主にレーザー技術を中心とした目覚しい技術革新により、長基線レーザー干渉計による直接検出の気運が高まりをみせている。レーザー干渉計では、レーザー光源からの光をビームスプリッターによって直交する 2 方向に分け、干渉計の両腕に入射する。両腕から返ってくる反射光を干渉させ、その干渉強度の変化から重力波の信号を読みとるのが重力波検出の原理である。現在、世界各地で長基線干渉計計画が提案され、いくつかは計画が進行している [3] [4] [5] [6]。日本では、1995 年度より基線長 300m のレーザー干渉計型重力波検出器 (TAMA300) の建設が始まり、世界に先駆けて 1998 年には目標感度として重力波の振幅 $h = 3 \times 10^{-20}$ の観測を、また 1999 年には $h = 3 \times 10^{-21}$ の観測を開始する計画である [7]。TAMA300 は将来の km 級大型計画に必要な技術を確立する役割を担うと同時に、近傍銀河で重力波イベントが発生すれば直接検出一番乗りも可能な実証型の検出器でもある。しかし、TAMA300 で目標の感度を達成するには、干渉計の高感度化を妨げるさまざまな雑音を低減するために、数多くの技術開発を行なわなければならない。

雑音の中でも地面振動は地上に干渉計を作る限り避けることのできないものである。地面振動には地震などの突発的なもの以外にも、常微動と呼ばれる定常的なものが存在するため、目標感度を達成するためには干渉計の鏡を防振する必要があり、TAMA300 ではゴムの弾性による防振スタック [8] [9]、超長周期振り子 X-pendulum [10] [11] [12]、鏡の懸架システムを組み合わせて要請される条件を満たす防振性能を得る計画である。

懸架システムの開発に際しては、以下の手順のように進めるのが適切と思われる。

1. 地面がどれだけ振動しているのかを知る。
2. TAMA300 でどれだけの鏡の揺れが許容されるかを知り、地面振動の量と比較して、どれだけの性能の懸架システムが必要かを求める。
3. モデル計算を行い、要請を満たすよう懸架システム (試作機) の設計と製作を行う。
4. 試作機の性能を評価し、問題のある部分に改良を行う。また計算と合わない部分はモデルを改良する。
5. 妥当な性能が得られた時点で実機の製作を行う、

実際の開発では、モデル計算の構築と試作機の設計を並行して行った部分がある。

われわれのグループでは、TAMA300 の懸架システムとして、2 段振り子に弾性支持した磁石によるダンピングを行う方式を採用した。この方式を用いると、

- 単純な 1 段の振り子では TAMA300 の要求する防振特性に対して不十分であるが、2 段の構成にすることで十分な防振比を得ることができる。
- 磁石による受動ダンピングを採用することで、コンパクトなシステムで安定に振り子共振の抑制が可能である。
- さらにダンピング用磁石自身が防振されていて、重力波の観測帯域では磁石により地面振動が導入されないようになっている。

という利点がある。この方式を用いた TAMA300 用 2 段振り子懸架システムを設計し、その性能を確認するのが、この論文のテーマである。

この論文は、前述の開発手順に沿って構成されている。

まず、第 2 章では、Einstein 方程式から重力波解を導出し、その性質、伝播、発生、検出について解説する。

第 3 章では地面振動の大きさと重力波検出器に要請される防振性能について述べる。また、この論文で用いる防振に関する notation や、第 4 章と第 5 章で行う懸架システムの力学モデル計算のための計算法の解説も行う。

第 4 章では質点モデルによる懸架システムの方式や基本的なパラメータの決定を行う。そのパラメータに基づき TAMA300 用懸架システム試作機を設計した。

第 5 章では試作機について剛体モデル計算を行い、性能の検証や問題点の改善法を検討した。

第 6 章では実際に懸架システム試作機の伝達関数を測定し、その性能について考察した。

最後に第 7 章で全体の結論を述べる。

第2章

重力波—その性質と検出法

一般相対性理論において質量と重力の相互作用を記述する Einstein 方程式は、弱重力場近似においては 3 次元波動方程式に帰着される。この光速で伝播する時空の歪みを重力波という。

重力波の効果は著しく弱いため、検出可能な重力波源としては天体現象が最も有力であり、実際に連星パルサーの電波望遠鏡による観測から間接的に重力波の存在が証明されている。しかし、その直接検出はいまだなされていない。重力波の波形を直接に観測できれば、今までの電磁波によるものとは全く異なった新しい天文学を創成する事ができる。現在、直接検出を目指して各種の検出器が計画され、いくつかは既に建設の途上にある。

この章では、

- Einstein 方程式の線形化による重力波の導出。重力波の伝播とその性質。 [13] [14]
- 重力波の放出。主な重力波源。 [15]
- 重力波の検出。重力波検出器とその原理。世界各国の干渉計型重力波検出器計画。日本の干渉計型重力波検出器計画 TAMA300。 [7] [16]
- 干渉計の主要な雑音源。 [16]

について順に述べる。また 2.1 節と 2.2 節では万有引力定数を $G = 1$、光速度を $c = 1$ とする幾何単位系を用いている。幾何単位系については、補遺 A を参照のこと。

2.1 Einstein 方程式の線形化

2.1.1 弱い重力場における計量テンソルと微分幾何学諸量

一般相対性理論は 4 次元時空を表す 4 次元 Riemann 多様体の上に物理法則を構築している。4 次元 Riemann 多様体上の各点において 2 階対称テンソルである計量テンソル (metric tensor)$g_{\mu\nu}$ が定義され、局所的な 2 点間の間隔 $\mathrm{d}s$ は計量を用いて、

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{2.1}$$

で定義される。

多様体上 (つまり時空上) のある点 P で座標系として局所 Lorentz 系をとると、点 P において時

空は平坦であり、時空の計量は

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Minkowski 時空)} \tag{2.2}$$

になる。この計量は特殊相対性理論の計量と等しく、この系での点 P における物理法則は、特殊相対性理論における物理法則と全く等価になる。

重力場が存在し、かつ弱いという場合を考える。この場合、時空は Minkowski 時空から微小な摂動を受けるので、時空の計量は平坦時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ に摂動項 $h_{\mu\nu}$ を加えたものであると考えてよい。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{2.3}$$

$g_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ は対称テンソルであるので、$h_{\mu\nu}$ も対称テンソルである。

$|h_{\mu\nu}|$ の 1 次の精度においては、添字の上げ下げは $|h_{\mu\nu}|$ の 0 次の項、つまり $\eta_{\mu\nu}$ で行うのが妥当である。すなわち、

$$\begin{aligned} h^{\mu}{}_{\nu} &= \eta^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} \\ h^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} h_{\lambda\sigma} \\ g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.4}$$

が成立する。

式 (2.3) および式 (2.4) の計量における Christoffel 記号、Riemann 曲率テンソル、Ricci テンソル、スカラー曲率を求めると次のようになる。

Christoffel 記号

$|h_{\mu\nu}|$ の 1 次の精度で求めと、

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\beta\mu,\nu} + h_{\beta\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\beta}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

となる。

Riemann 曲率テンソル

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &= \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\mu} \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\lambda} (h_{\lambda\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\lambda\nu} - h_{\beta\nu,\lambda\mu} - h_{\lambda\mu,\beta\nu}) \\ &\quad \Big(\because\ \Gamma \cdot \Gamma \sim \mathrm{O}^2(h) \Big) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ricci テンソル

Riemann 曲率の上付添字と中央の下付添字を縮約する。

$$R_{\beta\nu} = \frac{1}{2}(h_{\rho\nu}{}^{,\rho}{}_{,\beta} + h_{\rho\beta}{}^{,\rho}{}_{,\nu} - h_{\beta\nu}{}^{,\rho}{}_{,\rho} - h_{,\beta\nu}) \tag{2.7}$$

ここで、$h_{\mu\nu}$ の trace

$$h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \tag{2.8}$$

を使用している。

スカラー曲率

Ricci テンソルをさらに縮約してスカラー曲率を得る。

$$\begin{aligned} R &= g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} = \eta^{\beta\nu} R_{\beta\nu} \\ &= h_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - h^{,\rho}{}_{,\rho} \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.1.2 Einstein 方程式

一般相対性理論において質量と重力の相互作用を表す Einstein 方程式は、2 つの 2 階対称テンソル Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ とエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ によって記述され、

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{2.10}$$

である。ここで、Einstein テンソルは

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{2.11}$$

という定義で、計量テンソル Ricci テンソル、およびスカラー曲率から計算される。

式 (2.3)、式 (2.7)、式 (2.9) より、弱い重力場における Einstein 方程式は、

$$h_{\rho\nu}{}^{,\rho}{}_{,\mu} + h_{\rho\mu}{}^{,\rho}{}_{,\nu} - h_{\mu\nu}{}^{,\rho}{}_{,\rho} - h_{,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\left(h_{\rho\lambda}{}^{,\rho\lambda} - h^{,\rho}{}_{,\rho}\right) = 16\pi T_{\mu\nu} \tag{2.12}$$

と書ける。より式を見やすくするために、

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \tag{2.13}$$

というテンソルを導入する[1] 。これにより式 (2.12) は次のように簡略化される。

$$\bar{h}_{\rho\nu}{}^{,\rho}{}_{,\mu} + \bar{h}_{\rho\mu}{}^{,\rho}{}_{,\nu} - \bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\rho}{}_{,\rho} + \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\rho\lambda}{}^{,\rho\lambda} = 16\pi T_{\mu\nu} \tag{2.14}$$

[1] h と $\bar{h}$ の間には、

$$\bar{h} \equiv \bar{h}^{\mu}{}_{\mu} = h - 2h = -h$$

という関係が成立することから、$\bar{h}_{\mu\nu}$ は $h_{\mu\nu}$ の “trace reverse” テンソルと呼ばれる。逆に $h_{\mu\nu}$ を $\bar{h}_{\mu\nu}$ で表すと、

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$$

ここで、この方程式の一般性を失うこと無く、Lorentz gauge 条件

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{2.15}$$

を課すことができる。その結果、線形化された Einstein 方程式

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} = -16\pi T_{\mu\nu} \tag{2.16}$$

を得る。特に真空中では、

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{2.17}$$

すなわち、

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{2.18}$$

という 3 次元波動方程式に帰着される。この方程式の解を**重力波**という。この方程式からも分かるように重力波の伝播速度は 1、つまり光速である。

なぜ式 (2.15) の Lorentz gauge 条件を課しても物理的一般性を失わないのか?(参考文献 [14])
座標系が無限小の座標変換

$$x^{\mu\prime} = x^{\mu} + \xi^{\mu} \tag{2.19}$$

を受けても、

$$\bar{h}^{(\mathrm{NEW})}_{\mu\nu} = \bar{h}^{(\mathrm{OLD})}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\alpha} \tag{2.20}$$

という新しい $\bar{h}^{(\mathrm{NEW})}_{\mu\nu}$ をとれば、物理法則は変化を受けない (ゲージ不変性)。

式 (2.14) を満たす解 $\bar{h}^{(\mathrm{OLD})}_{\mu\nu}$ が存在し、それが、Lorentz gauge 条件を満たさない ($\bar{h}^{(\mathrm{OLD})}_{\mu\nu} \neq 0$) とする。これを Lorentz gauge 条件を満たす $\bar{h}^{(\mathrm{NEW})}_{\mu\nu}$ へとゲージ変換することを考える。

$$\bar{h}^{(\mathrm{NEW})\mu\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}^{(\mathrm{OLD})\mu\nu}{}_{,\nu} - \xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} \tag{2.21}$$

であるから、そのような $\bar{h}^{(\mathrm{NEW})\mu\nu}$ へ変換するための条件は、

$$\xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}^{(\mathrm{OLD})\mu\nu}{}_{,\nu} \tag{2.22}$$

である。この式は 4 つの波動方程式と見ることができるが、波動方程式 $f^{,\mu}{}_{,\mu} = g$ は任意の g について解 f が存在する。つまり、如何なる物理的状況においても Lorentz gauge 条件をみたす $\bar{h}^{(\mathrm{NEW})\mu\nu}$ へ移ることができるのである。このような変換を行う ξ^{μ} は一意ではない。実際

$$\zeta^{\mu,\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{2.23}$$

を満たす ζ^{μ} が ξ^{μ} に加算されてもなお、

$$(\xi^{\mu} + \zeta^{\mu})^{,\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}^{(\mathrm{OLD})\mu\nu}{}_{,\nu} \tag{2.24}$$

を満たす。

2.2 重力波の伝播

2.2.1 TT gauge

式 (2.15) の Lorentz gauge 条件と式 (2.17) の Einstein 方程式を満たすもっとも単純な解は次のような単色平面波解である。

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \tag{2.25}$$

式 (2.15) と式 (2.17) から、

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \tag{2.26}$$

$$A^{\mu\alpha} k_\alpha = 0 \tag{2.27}$$

の 2 つの条件が k_α に課される。前者は平面重力波が平面電磁波と同じように光速度で進行するという条件を、後者は平面重力波の振幅はその進行方向と直交するという条件を意味する。もちろん、任意の周波数の平面波解が方程式を満たすので、Fourier 変換の基底の完全性から、光速で伝播する任意の波形の波もまた方程式の解である、ということが言える。

前述のように式 (2.15) の Lorentz gauge 条件は、ゲージを一意には定めない。式 (2.23) を満たす ζ として、定数 1-form B_μ を用いて、

$$\zeta_\mu \equiv B_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} \tag{2.28}$$

を採用すれば、平面波解には

$$A^{(\mathrm{NEW})}_{\alpha\beta} = A^{(\mathrm{OLD})}_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu \tag{2.29}$$

の変換を施せば良く、このときに

$$A^{(\mathrm{NEW})\alpha}{}_{\alpha} = 0 \tag{2.30}$$

$$A^{(\mathrm{NEW})}{}_{\alpha\beta} U^\beta = 0 \tag{2.31}$$

の条件を満たすように B_μ を決めることができる[2] 。ただし U^β は任意に選んだ time like unit vector、つまり任意に選んだ 4 元速度ベクトルである。

式 (2.15)、式 (2.30)、式 (2.31) を合わせて、transverse-traceless gauge (TT gauge) 条件といわれる。式 (2.30) は $\bar{h}_{\mu\nu}$ の trace が 0(traceless)

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}\alpha}{}_{\alpha} = 0 \tag{2.32}$$

であることを要請する。これは

$$\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu} = h^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu} \tag{2.33}$$

を意味する。一方、式 (2.27) と式 (2.31) は局所 Lorentz 系にいる任意の観測者から見て重力波を横波 (transverse wave) として観測することができる、そのような座標系が必ずある、ということを意味する。

[2] 式 (2.30) は 1 つの条件式、式 (2.31) は 4 つの条件式であるが、Lorentz gauge 条件を満たす $A_{\alpha\beta}$ について $k^\alpha A_{\alpha\beta} U^\beta = 0$ が成立するため、実際には 4 つの独立した線形方程式であり、これを解くことで B_μ を求めることが可能である。

2.2.2 重力波の自由度

TT gauge を使って重力波の性質をさらに見てみる。局所 Lorentz 系にいる観測者を考える。彼の 4 元速度が

$$U^\mu = \delta^\mu{}_0 \tag{2.34}$$

であるような直交座標系では、観測者にとっての TT gauge をとると式 (2.31) より、

$$A_{\alpha 0} = 0 \tag{2.35}$$

である。さらに座標系の z 軸が重力波の進行方向を向いているとすると、

$$\begin{cases} k_t &= \omega \\ k_x &= 0 \\ k_y &= 0 \\ k_z &= \omega \end{cases} \tag{2.36}$$

であり、式 (2.27) より、

$$A_{\alpha z} = 0 \tag{2.37}$$

が成立する。$A_{\mu\nu}$ が trace-less の対称テンソルであることから、

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

となる。このように重力波の持つ自由度は本質的には $h_+, h_\times$ の 2 つである。

2.2.3 重力波が自由質点に及ぼす影響

自由質点の運動は測地線の方程式、

$$\frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0 \tag{2.39}$$

によって決まる。ここで、U^α は質点の 4 元速度、τ は質点の固有時間である。

粒子が初速度を持たず、式 (2.34) が成り立つとする。このとき、初期状態で質点に働く加速度は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}U^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right)_0 &= -\Gamma^\alpha{}_{00} \\ &= -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(h_{\beta 0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

となり、質点は加速度を受けない。つまり、重力波が入射しても質点は初期座標を保つ。これは我々が TT gauge を選んだことにより、重力波によって座標値が変化しないように座標が変化する、ということを意味する。

座標の取り方によらないやり方で重力波の影響を見るために、はじめに静止している近接した2質点を考える。一方の質点は座標原点に、もう一方は $x=\varepsilon,\ y=z=0$ に静止しているとする。重力波が来ても前述の通り、双方とも座標値を保つ。しかし、2質点間の固有距離 δl は、

$$\begin{aligned}\delta l \equiv \int |\mathrm{d}s^2|^{1/2} &= \int |g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu|^{1/2} \\ &= \int_0^\varepsilon |g_{xx}|^{1/2}\mathrm{d}x \sim |g_{xx}(x=0)|^{1/2}\,\varepsilon \\ &\sim \left[1+\frac{1}{2}h_{xx}^{\mathrm{TT}}(x=0)\right]\varepsilon \end{aligned} \tag{2.41}$$

のように、重力波に対応して変化するということが分かる。この固有距離の変化は座標系の取り方によらず存在する。

2.2.4 重力波の偏光

近接質点間の固有距離の変化を用いて、重力波の2つの自由度の性質について考える。

前節と同様に座標原点にある静止質点と、x-y 平面内の原点近傍の半径 ε の円周上に自由質点群があると考える (図2.2.4左)。

まず、この質点群に z 軸方向に進行する $h_+\neq 0,\ h_\times = 0$ の重力波が入射したとする。

式(2.41)と同様に、座標原点にいる観測者から質点までの固有距離を計算すると、質点の座標を $(\varepsilon\cos\theta,\ \varepsilon\sin\theta)$ として、

$$\delta l \sim \left(1+\frac{1}{2}h_+ e^{ik(t-z)}\cos 2\theta\right)\varepsilon \tag{2.42}$$

この固有距離の時間変化を図示すると、図2.2.4中のようになる。

次に z 軸方向に進行する $h_+ = 0,\ h_\times \neq 0$ の重力波が入射したとすると同様に、

$$\delta l \sim \left(1+\frac{1}{2}h_\times e^{ik(t-z)}\sin 2\theta\right)\varepsilon \tag{2.43}$$

となり、図2.2.4右のようになる。

固有距離の変化の形から h_+ の及ぼす効果を+(plus)モードといい、$h_\times$ の及ぼす効果を $\times$(cross) モードという。$\times$ モードは+モードを45度回転した形をしている。この2つの偏光が重力波の2つの自由度を表す[3]。

2.3 主要な重力波源

重力波の放出強度を求める際には、式(2.16)を解くことになる。このとき放射される重力波の強度は遅延ポテンシャルの方程式を解いた帰結として、

$$-\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{G}{45c^5}\sum_{i,j}\dddot{D}_{ij}^{\,2} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{2.44}$$

となる[17]。ここで4重極モーメント D_{ij} は

$$D_{ij} \equiv \int \mu(3x^i x^j - r^2\delta^{ij})\mathrm{d}V \tag{2.45}$$

[3] この2つのモードの線形結合を取ることで、2つの自由度として別の偏光を選ぶこともできる。例えば、電磁波と同様に左回転偏光、右回転偏光も存在する。

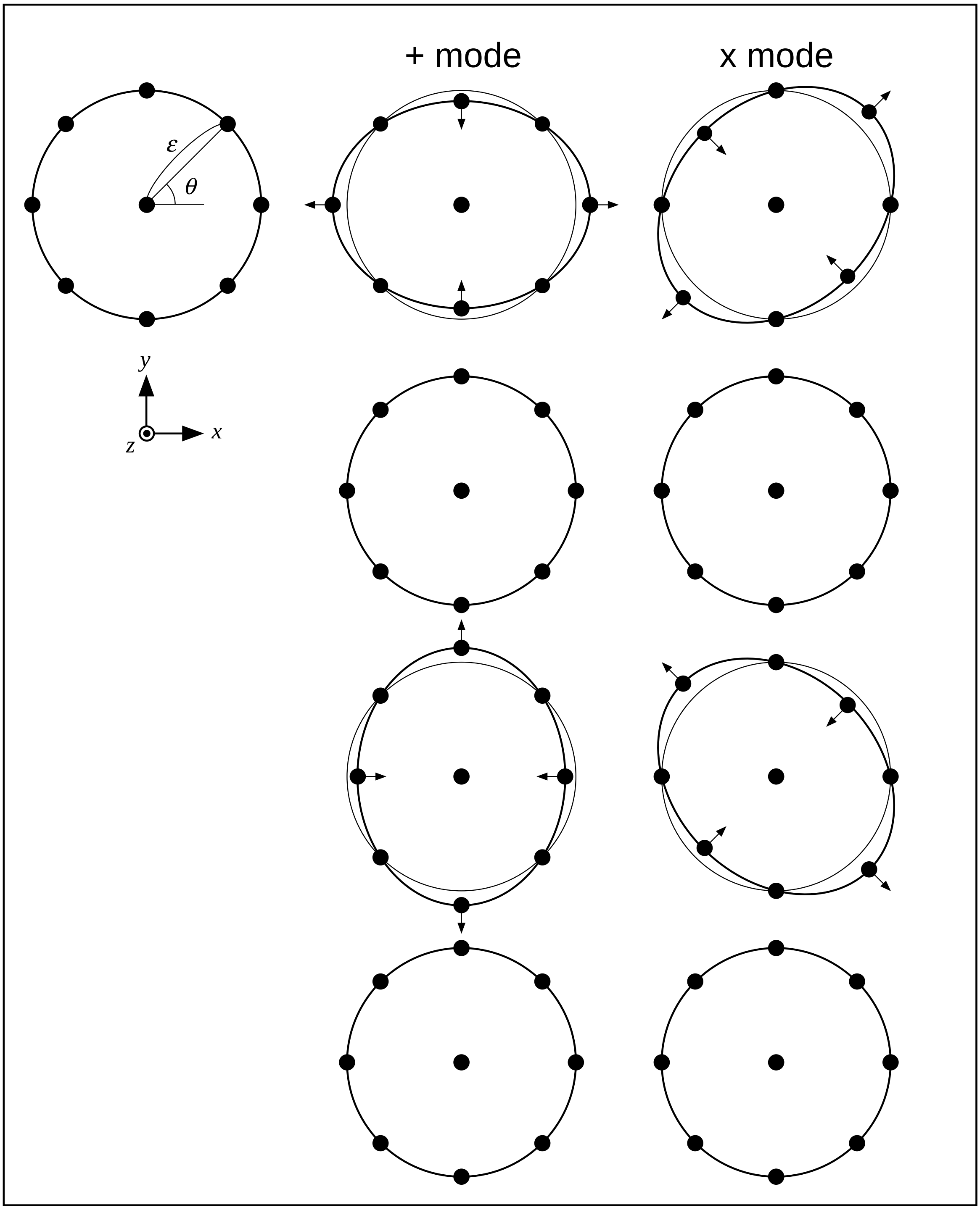


図 2.1　重力波の影響下における自由質点群間の固有距離の変化

重力波源	周波数	振幅	頻度
連星中性子星合体 (200Mpc)	10Hz∼1kHz	10^{-21}	∼ 3/年
超新星爆発 (銀河系内)	∼1kHz	10^{-18}	∼ 3/100 年
超新星爆発 (乙女座銀河団)	∼1kHz	10^{-21}	数回/年
巨大ブラックホールの形成	∼1mHz	10^{-17}	1/年

表 2.1　主な重力波源

という定義である。

このように重力波の効果は光速度の 5 乗に反比例するため、非常に弱い。そのため、重力波源としては大質量のコヒーレントな運動、つまり天体現象がまず考えられる。それも、4 重極モーメントの変化が無ければならないため、球対称の系や軸対称で定常な系は重力波を発生しない [16]。

主な重力波源としては連星中性子星合体や超新星爆発などがある (表 2.1)。連星中性子星は公転しながら重力波を放出し、その軌道半径と軌道周期を減少させてゆく。そして、最後に高い周波数の重力波を放出しながら衝突し、ブラックホールになると考えられている。この合体の直前および合体の瞬間には強い重力波の放出が予想される。

また、超新星爆発の際に回転や非対称性が存在すると、エネルギーの一部を重力波として放出する。超新星爆発による重力波イベントは乙女座銀河団まで含めれば、1 年に数回程度を観測できると考えられている。

2.4　レーザー干渉計による重力波の検出

自由質点間の固有距離は重力波の入射により変化する (2.2.4 節)。これを検出するための Michelson 干渉計について、その原理と実際に重力波を検出するための工夫について述べる。

2.4.1　Michelson 干渉計

レーザー干渉計型重力波検出器は Michelson 干渉計を基本としている。Michelson 干渉計は、

- 光源となるレーザー発振器
- ビームを 2 つに分割するためのビームスプリッター (BS, beam splitter)
- レーザー光を反射するための 2 枚の鏡
- 干渉光を検出するための光検出器 (PD, photo detector)

から構成される (図 2.2)。レーザー光源から出た光はいったん BS で 2 つに分割され、直交する干渉計の 2 つ腕に入射される。それぞれの腕の終端には水平方向に自由質点となるよう振り子に吊られた反射鏡が置かれ、光を反射する。反射鏡の向きを適切に調整すると、戻ってきた 2 つの光が BS 上で干渉する。この光の強度変化を PD で読みとることで、両腕の光路長差の変化を知ることができる。

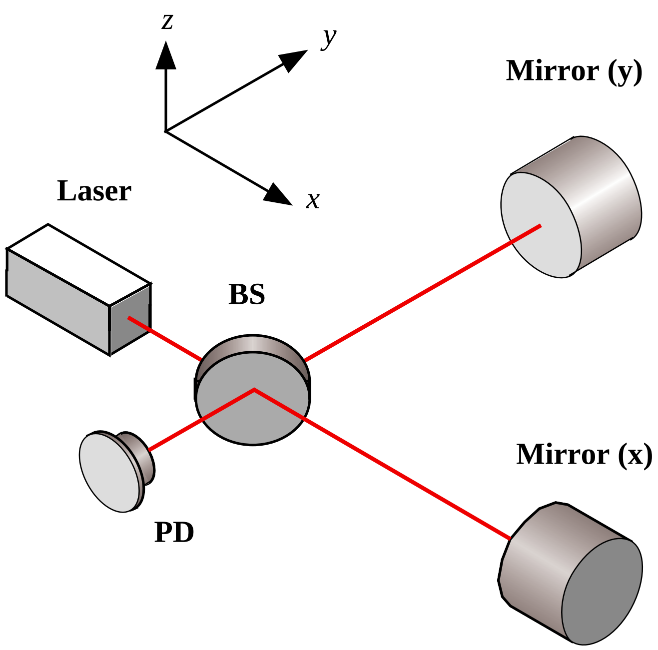


図 2.2 Michelson 干渉計の概念図

光源から入射するレーザー光の電場を、

$$E_{\rm in} = E_0 e^{i\Omega t} \tag{2.46}$$

とする。各腕を往復し再び BS 上で結合するときには、腕の長さに応じて光の位相は変わっているので、それを $\phi_x,\ \phi_y$ として、PD で読みとられる電場は、

$$E_{\rm out} = \frac{E_0}{2} e^{i(\Omega t - \phi_x)} - \frac{E_0}{2} e^{i(\Omega t - \phi_y)} \tag{2.47}$$

となる。電場の強度としては、

$$\begin{aligned} P_{\rm out} &\equiv |E_{\rm out}|^2 \\ &= \frac{|E_0|^2}{2} [1 - \cos(\phi_x - \phi_y)] \\ &= \frac{P_{\rm in}}{2} [1 - \cos(\phi_x - \phi_y)] \end{aligned} \tag{2.48}$$

となる。つまり、各腕で稼ぐ位相が対称に変化したときには Michelson 干渉計の出力は変化しないが、反対称に変化したときには、出力の変化を生む。

式 (2.48) によれば $P_{\rm out}$ は 0 から $P_{\rm in}$ の間を変動するが、実際の干渉計においては鏡の反射率の差や鏡の向きの設定の問題などから完璧な干渉状態には到らない。この時の検出最大強度 $P_{\max}$ と検出最小強度 $P_{\min}$ を用いて、

$$C \equiv \frac{P_{\max} - P_{\min}}{P_{\max} + P_{\min}} \tag{2.49}$$

という量を定義し、コントラスト (contrast) と呼ぶ。完璧な干渉状態の時 $C=1$ で、全く干渉を起こさないとき ($P_{\max}=P_{\min}$ のとき) は $C=0$ となる。コントラストは干渉計の設定の完全度を知るための指標となる。

2.4.2 Michelson 干渉計の重力波に対する応答

図 2.2 の Michelson 干渉計に進行方向が z 軸方向で h_+ 偏光の重力波が入射し、4 次元線素が

$$\mathrm{d}s^2=-c^2\mathrm{d}t^2+(1+h_+)\mathrm{d}x^2+(1-h_+)\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2 \tag{2.50}$$

で与えられるとする。

BS や鏡などは水平面内には自由質点にしてあるとすると、これらの座標は変化しないままである (2.2.3 節)。そこで BS を座標原点にし、2 つの鏡の座標を $(l_1, 0, 0)$ と $(0, l_2, 0)$ とする。光は $\mathrm{d}s^2=0$ の道筋を通るので、x 軸に沿って往復して来た光の位相は、

$$\phi_x(t)=\Omega t_1 \qquad (\Omega=\frac{2\pi c}{\lambda}) \tag{2.51}$$

$$\int_{t_1}^{t}\frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1+h_+(t')}}=\frac{2l_x}{c} \tag{2.52}$$

によって与えられる。h_+ の 1 次までで近似すると、

$$\phi_x(t)=\Omega\left(t-\frac{2l_x}{c}-\frac{1}{2}\int_{t-2l_x/c}^{t}h_+(t')\mathrm{d}t'\right) \tag{2.53}$$

である。y 軸方向にも同様な計算をし、両者の位相差を求めると

$$\Delta\phi=\phi_x-\phi_y=-\frac{2\Omega(l_x-l_y)}{c}-\Delta\phi_{\mathrm{GR}}(t) \tag{2.54}$$

$$\Delta\phi_{\mathrm{GR}}(t)=\Omega\int_{t-2l/c}^{t}h_+(t')\mathrm{d}t' \qquad (l=l_x\sim l_y) \tag{2.55}$$

となる。式 (2.54) の第 2 項が干渉計の重力波に対する応答である。正弦的な重力波

$$h_+(t)=h_0\cos\omega t \tag{2.56}$$

を仮定して、式 (2.55) の位相変化を計算すると

$$\Delta\phi_{\mathrm{GR}}=2h_0\frac{\Omega}{\omega}\sin(\omega l/c)\cos\omega(t-l/c) \tag{2.57}$$

で、この応答の振幅は、

$$\phi_{\mathrm{GR}}=2h_0\frac{\Omega}{\omega}\sin(\omega l/c) \tag{2.58}$$

で表される。この式は周波数 ω の重力波に対して

$$\frac{\omega l}{c}=\frac{\pi}{2} \tag{2.59}$$

のとき、最大値を取る。例えば、300Hz の重力波に対しては、$l=250$km の時に感度が最大になる。しかし、このような長基線の干渉計を地上に作るのは不可能であり、現実の重力波検出器で

は実効光路長を長くするための工夫として、鏡の間を複数回折り返す Delay-Line 方式 (DL 方式) と向かい合わせた鏡の多重干渉を利用した Fabry-Perot 方式 (FP 方式) が考えられている (図 2.3)

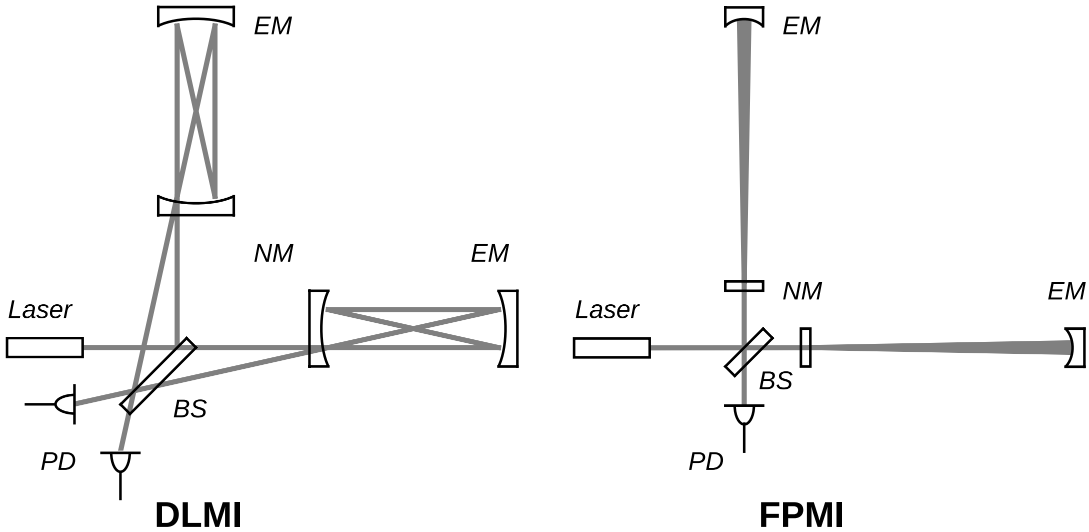


図 2.3 DL 方式 (左) と FP 方式 (右)

TAMA300 計画で採用している FP 方式は Michelson 干渉計の両腕を Fabry-Perot 共振器で置き換えた干渉計 (Fabry-Perot Michelson 干渉計, FPMI) である。Fabry-Perot 共振器とは 2 枚の鏡 (Front Mirror と End Mirror) を向かい合わせにしたものである。片側の鏡から共振器にレーザー光を入射したとき、共振器を一周する光の位相が入射光の位相と一致すると、内部は共振状態になり光が蓄積される。この時には光子が共振器内に滞在する時間が長くなり、実効的に基線長が長くなった場合と同じような効果が得られる。

2.4.3 世界の干渉計計画

現在、世界各地で重力波の検出を目指してレーザー干渉計計画が進行している (表 2.2)。

アメリカの LIGO プロジェクトでは東部と南部に基線長 4km の 2 台のレーザー干渉計を建設している。2 つのサイトの coincidence 観測開始は 2000 年の予定である [3] [4]。

イタリアーフランス共同の VIRGO プロジェクトでは基線長 3km の干渉計を建設する。VIRGO プロジェクトの特徴は巨大な多段懸架システムで 10Hz から重力波を狙えるようになっている。2000 年からの観測開始の予定である [5]。

イギリスとドイツでは、先進的な技術を用いて 600m の基線長でも km 級の干渉計と同等の感度を出そうという GEO600 計画が進んでいる [6]。1998 年末からの観測開始予定である。

オーストラリアでは 3km の干渉計を作ることを目指して技術開発が行われている。

日本の TAMA300 計画については次の節を参照されたい。

国	計画名	基線長	方式	観測開始予定年
アメリカ	LIGO	4km × 2	FP	2000
イタリア&フランス	VIRGO	3km	FP	2000
イギリス&ドイツ	GEO600	600m	DL	1998
日本	TAMA300	300m	FP	1998
オーストラリア	AIGO	3km	FP	—

表 2.2　世界の干渉計計画

2.4.4　TAMA300 計画

日本の基線長 300m のレーザー干渉計計画を TAMA 計画という [7]。TAMA 計画は、

- 将来の km 級大型計画に必要な技術の確立
- 近傍銀河でイベントが発生すれば直接検出も可能な実証型検出器の建設

という 2 つの側面をもつ。

TAMA300 干渉計の建設地は国立天文台三鷹キャンパスである。TAMA300 は両腕が 300m の Fabry-Perot-Michelson 型の干渉計である。観測帯域は 150Hz から 450Hz で、1998 年の前半に RMS 感度$h = 3 \times 10^{-20}$の観測を半年間行い (Phase I)、その後 1 年の改良期間を経て、1999 年の後半に$h = 3 \times 10^{-21}$の観測を半年間 (Phase II) 行うことを予定している。この間にアンドロメダ星雲付近までの距離で超新星爆発が起きれば、重力波検出一番乗りも不可能ではない。

以下では TAMA300 の主要な構成要素について述べる。

- **レーザー光源**

  出力 10W の注入同期型 LD 励起 Nd:YAG レーザー (波長 1064nm) である。周波数安定化と強度安定化を行う予定である。

- **モードクリーナー**

  レーザー光源からの光は基線長 10m の 3 枚鏡リング型モードクリーナーに通され、TEM_{00} モードの選択とビームジッターの低減を行う。

- **Fabry-Perot キャビティー**

  両腕には長さが 300m の Fabry-Perot キャビティーが置かれ、重力波が 150 倍の長さのマイケルソン干渉計と同等の効果を生じるようにする。

- **パワーリサイクリング**

  モードクリーナーとビームスプリッターの間にリサイクリングミラーを置き、干渉計内に光を閉じ込めることで干渉計内の光の強度を増幅する。

- **防振システム**

  干渉計による重力波検出の原理的要請から、鏡は懸架システムに吊られ、水平方向に関して自由質点にされる。またその他の主要な光学部品も防振のために懸架される。詳細は 3.1 節を参照。

- **真空システム**

  主要な光学要素は音や空気の揺動による外乱をさけるために、真空容器内に納められる。また、屈折率揺らぎによる光路長変化をさけるために、両腕の 300m の光路もダクトにより真空に保たれる。

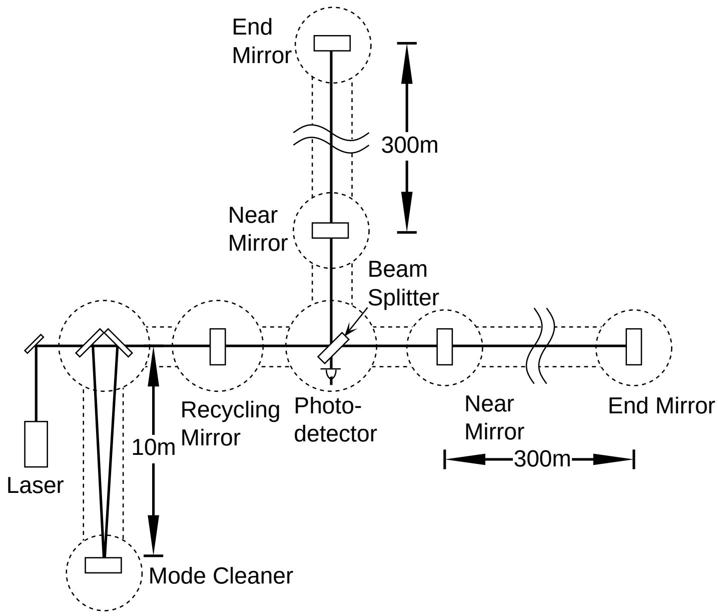


図 2.4　TAMA300 の概要

2.5　レーザー干渉計の雑音

天体からやってくる非常に微弱な重力波を地上に設置されたレーザー干渉計でとらえるためには、干渉計の高感度化を妨げる様々な雑音を取り除かなければならない。

ここでは、最も重要と思われる幾つかの雑音源について、懸架システム設計の際に注意すべき点も含めて述べることにする。

2.5.1　地面振動

鏡が外乱により振動してしまうと、重力波による微弱な信号はかき消されてしまい、その検出は不可能になる。それればかりか、過大な振動は干渉計の安定な動作の妨げとなる。重力波検出器を構成する全ての部品があらゆる振動から守られているのが理想である。

外乱振動源としては、地震や人間活動による突発的な振動に加えて、定常的に存在する地面の微小振動が大きな問題となる。その他、機器類による振動や音響が振動源となる。また、鏡の位置や姿勢の制御により、鏡に振動が加えられる可能性もある。これらの影響を防ぐために外乱振動に敏感な光学部品は真空中の防振系に置かれている。

振幅 h の重力波は干渉計の両腕の固有距離に変化を与え、それが鏡の変位

$$\delta x = hl \tag{2.60}$$

として検出される。これはある感度を目標にしたときに、基線長が長い方が地面振動に対する要求は楽になる、と言うことを意味する。地面振動については 3.1 節以降でより詳しく扱う。

2.5.2 熱雑音

揺動散逸定理によれば散逸を伴う物理過程は揺動を伴う。例えば、電気抵抗には、その両端に熱雑音による白色雑音電圧 (Nyquist 雑音) が生じている。レーザー干渉計型重力波検出器の反射鏡は懸架システムに吊り下げられているが (3.2 節)、同じように懸架システムや鏡自体の散逸が揺動力を生じ、鏡の振動を生むと考えられている。この振動による雑音を熱雑音という。

重力波検出器で問題となる熱雑音には、主に次にあげる 2 種類がある。

- 懸架システムにおける機械的散逸に起因する「振り子の熱雑音」
- 反射鏡自体における機械的散逸に起因する「鏡の熱雑音」

熱雑音は重力波検出器にとって非常に大きな問題であり、ここで立ち入った議論は行うことはできないが、懸架システムの設計に関係のある部分について述べたいと思う。

熱雑音のパワースペクトル密度

揺動散逸定理によれば、物体に生じる揺動力 F_{thermal} のパワースペクトル密度 (PSD)[4] は、

$$\sqrt{\langle \tilde{F}^2_{\mathrm{thermal}} \rangle} = \sqrt{4k_{\mathrm{B}}TR(\omega)} \tag{2.61}$$

である。ここで、k_{B} はボルツマン定数、T は系の温度、$R(\omega)$ は機械インピーダンス $Z(\omega)$ の実部である。機械インピーダンスは系のある点に加えられる外力を $F_{\mathrm{ext}}(\omega)$、結果としてその点に生じる速度を $v_{\mathrm{res}}(\omega)$ として、

$$Z(\omega) = \frac{F_{\mathrm{ext}}(\omega)}{v_{\mathrm{res}}(\omega)} \tag{2.62}$$

で定義される。系に与える駆動力と駆動点に生じる変位の比

$$\chi(\omega) = \frac{X_{\mathrm{res}}(\omega)}{F_{\mathrm{ext}}(\omega)} \tag{2.63}$$

を自己コンプライアンスというが、機械インピーダンスと自己コンプライアンスの間には、

$$Z(\omega) = \frac{1}{i\omega\chi(\omega)} \tag{2.64}$$

[4] 片側パワースペクトル密度

の関係が成立するため、熱雑音の変位換算パワースペクトル密度は

$$\sqrt{\langle \tilde{x}^2_{\mathrm{thermal}} \rangle} = \sqrt{-\frac{4k_{\mathrm{B}}T\,\mathrm{Im}\left[\chi(\omega)\right]}{\omega}} \tag{2.65}$$

となる。

例として散逸を含む 1 次元振動系を考える。運動方程式を周波数領域で記述すると、

$$m\left\{-\omega^2 + \omega_0^2\left[1 + i\phi(\omega)\right]\right\}\tilde{x}(\omega) = F_{\mathrm{ext}}(\omega) \tag{2.66}$$

となる。ここで $\phi(\omega)$ は複素バネ定数 (complex erastic constant) で、系に散逸を取り入れるために用いる。共振の鋭さ Q は

$$Q = \phi^{-1}(\omega_0) \tag{2.67}$$

で定義される。この $\phi(\omega)$ としては様々なモデルがあるが、系の速度に比例した抵抗力が働く場合 (velocity damping model) では、

$$\phi(\omega) = \frac{\omega}{Q\omega_0} \tag{2.68}$$

である。実際に測定された例から、材質に固有の散逸に関しては $\phi(\omega)$ の周波数依存性はないのではないか、という説が有力で、このような構造減衰モデル (structure damping model) では、

$$\phi(\omega) = \frac{1}{Q} \tag{2.69}$$

である。それぞれのモデルについて熱雑音の変位換算パワースペクトル密度を計算すると、速度減衰モデルの場合、

$$\sqrt{\langle \tilde{x}^2_{\mathrm{thermal(vd)}} \rangle} = \sqrt{\frac{4k_{\mathrm{B}}T\omega_0}{mQ}\frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega_0\omega/Q|^2}} \quad \text{(velocity damping model)} \tag{2.70}$$

$$\sqrt{\langle \tilde{x}^2_{\mathrm{thermal(sd)}} \rangle} = \sqrt{\frac{4k_{\mathrm{B}}T\omega_0^2}{m\omega Q}\frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega_0^2/Q|^2}} \quad \text{(structure damping model)} \tag{2.71}$$

となる。

振り子の熱雑音

振り子に関しては共振周波数が重力波の観測帯域よりも十分低い ($\omega_0 \ll \omega$) ので、観測帯域での熱雑音スペクトルは、構造減衰モデルであれば式 (2.71) より、

$$\sqrt{\langle \tilde{x}^2_{\mathrm{thermal(sd)}} \rangle} \simeq \sqrt{\frac{4k_{\mathrm{B}}T\omega_0^2}{m\omega^5 Q}} \tag{2.72}$$

速度減衰モデルであれば式 (2.70) より、

$$\sqrt{\langle \tilde{x}^2_{\mathrm{thermal(vd)}} \rangle} \simeq \sqrt{\frac{4k_{\mathrm{B}}T\omega_0}{m\omega^4 Q}} \tag{2.73}$$

となる。

ワイヤーによる減衰が支配的である場合には式 (2.72) を使用するが、渦電流ダンピングを行っている場合などは式 (2.73) を使用する。また、多段振り子の場合、各段の熱雑音は各式に類似する表式により与えられ、その振動は下の段に行くに従い防振されて鏡に伝わる。

熱雑音で励起される鏡の回転運動なども同様の手法で計算できる。回転運動の熱雑音の干渉計の信号への寄与は、どれだけレーザー光が鏡の中央に当たっているかに依存する。

鏡の熱雑音

鏡は低い周波数では剛体とみなせるが、高周波では弾性体としてふるまう。鏡の固有振動周波数は数 10kHz 以上であり、熱雑音を扱う場合には $(\omega \ll \omega_0)$ の近似の元、構造減衰モデルとして式 (2.71) を用いるのが適当であると考えられている。

$$\sqrt{\langle \tilde{x}^2_{\mathrm{thermal(sd)}} \rangle} \simeq \sqrt{\frac{4k_{\mathrm{B}}T}{\mu\omega\omega_0^2 Q}} \tag{2.74}$$

μ は固有モードの換算質量である。

鏡には多数の固有モードが存在しており、それらのトータルの寄与を考慮しなければならない。また固有モードには軸対称のものとそうでないものがあるので、レーザー光がミラーの中央に当たっているかどうかが熱雑音に影響を与える。

防振との関連

以上の単純な計算から、振り子の熱雑音と鏡の熱雑音に共通に言える事として、熱雑音の寄与を小さくするには、

1. Q 値を高くする。
2. 系の温度 T を下げる。
3. 基線長を長くする。

という方法が考えられる。また、振り子の熱雑音の場合、振り子の共振周波数を低くすべきである。また、鏡の熱雑音の場合には換算質量を大きくしたり、共振周波数を高くするのがよい。系を冷やすのは真空中では困難をともなうので、現在は、熱雑音対策として主に Q の高い材質を用いた振り子や鏡の製作、Q を高くする懸架方式などの研究がなされている。

共振周波数における熱雑音の大きさが揺動散逸定理に従うということは、共振型重力波検出器における雑音の研究などからもよく確かめられているが、共振周波数以外で熱雑音がどのような振る舞いをするのか、散逸過程としてどのような散逸モデルが妥当か、実際に散逸が生じるのは振り子や鏡のどの部分で、それは鏡の光軸方向の振動にどれだけ現れるのか、など不明な点が多く現在議論が活発に行われている。TAMA300 が稼動した暁にはこれらの問題に対する何らかの知見が得られるものと期待されている。

懸架システムの設計の観点からみると、多段防振系の上流の段の熱雑音が鏡に伝わらないように防振する必要性、振り子の最終段の散逸を極力小さくする必要性が存在している[5] 。またそれ以外の関連として、鏡の制御特性 (自己コンプライアンス) の計算と熱雑音の計算に共通の部分があること、熱雑音の寄与を極力抑えるために鏡のセンタリングが必要であることなどがあげられる。

[5] これは、振り子の coupled motion が高い Q を持たなければならない、ということを意味しているわけではない。あくまで、最終段の散逸が少なければ良い。

2.5.3 散射雑音

強度一定のレーザー光を光電効果を利用した光検出器で検出すると、レーザー光が光子の集まりからなることに起因して、

$$I_{\rm shot} = \sqrt{2eI_0} \quad {\rm A}/\sqrt{\rm Hz} \tag{2.75}$$

の白色雑音を生じる。この雑音電流を散射雑音 (shot noise) という [16]。ここで e は電子の素電荷、I_0 はレーザー光により一定強度で流れている光電流である。

干渉計で取得される信号の強度はレーザーの強度に比例するから、レーザー出力が増大すれば、その平方根で雑音は小さくなってゆく。このようにショットノイズを小さくするには、レーザー光源の出力を大きくするのが一つの方法である。

また、Michelson 干渉計のレーザー光源と BS の間に 1 枚鏡を追加することで、干渉計から抜け出ていく光 (レーザーに戻っていく光が主) を反射し、実効的に干渉計内部の光量を増加させるパワーリサイクリングという手法も考案されている。

干渉計の鏡が振動し、ミスアラインメントを起こすとコントラストの悪化やリサイクリングゲイン (パワーリサイクリング時の光量増加比) の悪化を招く。これはショットノイズの増大につながるので、懸架システムの設計の際には十分に配慮する必要がある。

第3章

懸架システムによる防振

前章で述べたようにレーザー干渉計による重力波検出器には様々な雑音が存在しており、その中でも地面振動は地上においてレーザー干渉計を建設する際には避けることのできないものである。地面振動の影響を小さくするためには、地面振動の静かな場所になるべく長い基線長の干渉計を設置するのが良い。そして、干渉計の建設地や基線長が決められた後は、防振技術によって地面振動の効果を低減する努力をしなければならない。TAMA300 においては防振スタック、X-pendulum、懸架システムの 3 段の防振系によって重力波検出に必要な防振比を得る計画になっている。これら地面振動と防振については 3.1 節にて述べている。

鏡を振り子に吊り下げて自由質点にするという干渉計型重力波検出器の原理から、鏡の懸架システムは必須の装置であるが、それ自体目標感度を達成するに足るだけの防振特性を持ちうる、重要な防振装置でもある。この懸架システムの設計の指標とするために、目標感度達成に必要な観測帯域での「防振比」や全周波数域で地面振動雑音を積分した「RMS 振幅」を 3.2 節に示した。

懸架システムの設計する際には、モデル計算を行って、細かいパラメータを決定する。3.3 節では力学モデル計算の手法について解説している。

3.1 地面振動と防振

重力波検出器は高精度の振動検出器で、その鏡は水平方向には全く外力を受けない状態になっていなければならない。鏡が外乱を受け、重力波の振幅に対して無視できない振幅で振動すると、干渉計はそれを検出してしまい、天体から来る微弱な重力波をとらえることができなくなる。鏡の外乱振動の中で最も一般的なもののひとつに地面振動がある。地面は地震などが無くても、あらゆる周波数で微小振動をしている。この地面振動が鏡を吊っている支点を動かし、それが鏡を動かすことで干渉計の雑音となる[1] 。

地面振動が干渉計の出力に影響しないようにするためには、地面振動による雑音がその他の雑音より小さくなるように低減することが必要である。そのためには次のような点に留意しなければならない。

1. **地面振動の小さい地域に干渉計を建設する。**

   地面振動スペクトルは図 3.1 のような周波数特性を持っている。一般に都市部に比べ閑散部では地面振動レベルはかなり静かである。例えば、東京大学理学部重力定点地下室や国立天

[1]逆に干渉計に現れる地面振動の影響を利用した地震計を作ることも可能である [18]。

文台三鷹キャンパスの地面振動に比べ、京都大学上宝地殻変動観測所トンネルの地面振動は 2 桁も低い。レーザー干渉計は海から遠い閑散地の地中にトンネルを掘る、など静かな場所に作るのが良い。

2. **基線長を長くする。**

   振幅 h の重力波による光路長変化 δx は、$\delta x = h \times L$ であり、基線長 L に比例して重力波による光路長変化が大きくなる。地面振動による光路長変化は基線長によらないため、基線長が長いほど地面振動への要求は緩和される。

3. **防振する。**

   地面に存在する振動を防振系により減衰し、鏡の支点に伝わる振動が小さくなるようにする。また、鏡の懸架装置そのものも防振効果を持っていて、鏡の支点の振動が鏡に伝わらないようにしている。

これらの点について TAMA300 ではどのようになっているか見てみると、

1. TAMA300 の建設地は国立天文台三鷹キャンパスである。近くには交通量の多い道路もあり、必ずしも静かな場所ではない。しかし、重力波をねらう帯域は 150 $\sim$ 450Hz であることから、防振系を多段に組み合わせることで対処できるという見通しである。

2. 干渉計の基線長は天文台の敷地を一杯に使って 300m である。

3. TAMA300(PhaseII) の目標感度設定は、150Hz で -165dB の防振比を要請する。防振系に要求される性能については 3.2.4 節で詳細に述べる。

単独で -165dB の防振比を持つ防振系というのは現実には非常に困難であるため、通常は重力波検出器では防振系を多段に組み合わせている。TAMA300 ではスタック、X-pendulum、鏡の懸架システムの 3 ステージの構成となっている (図 3.2)。以下に 3 つの防振系について簡単に述べる。

スタック

SUS 製のブロックとゴムを 3 段に組み合わせたもので、観測帯域を含む数 10Hz 以上の周波数域での防振を主眼に置いた防振系である。ゴムのような有機物質は脱ガスが多く高い真空度を得る妨げとなったり、放出物質が鏡の表面を汚染する原因となるので、TAMA300 のスタックではゴムをベローズに封入する。加振器を用いた防振特性測定実験では水平垂直ともに 150Hz で -60dB の防振比が得られている [8] [9]。

X-pendulum

X 型にクロスしたワイヤーにより吊られた板は、ある特定の条件を満たすとき、非常に平坦なポテンシャルを持ち、10 秒 (またはそれ以上) の周期の単振り子と同等の振る舞いを示す。この特性を生かして設計された超低周波防振装置が X-pendulum である [10] [11] [12]。TAMA300 では X-pendulum により 0.1Hz 付近からの防振を行うこと、そして観測帯域でも -60dB 程度の防振比を得ること、などが目標となっている。

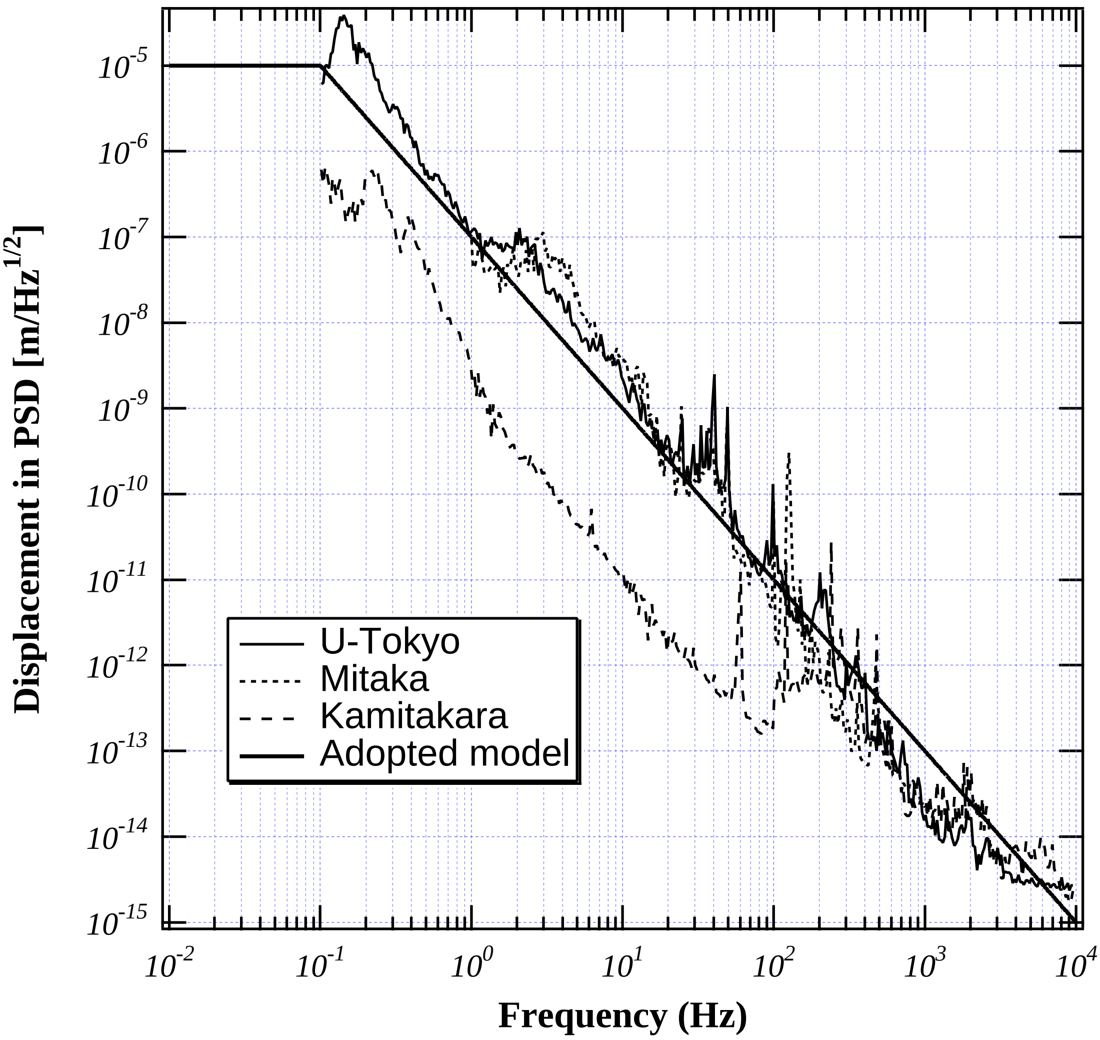


図 3.1　地面振動の変位スペクトル。京都大学上宝地殻変動観測所トンネル内の地面振動は東京大学理学部重力定点地下室や国立天文台三鷹キャンパスのそれと比べて 2 桁ほども小さい。太い直線はこの論文で用いている地面振動のモデル。(国立天文台の地面振動データ R. Takahashi, et al. 上宝および東京大学の地面振動データ A. Araya, et al. いずれも `http://t-munu.phys.s.u-tokyo.ac.jp/` にて取得可能。)

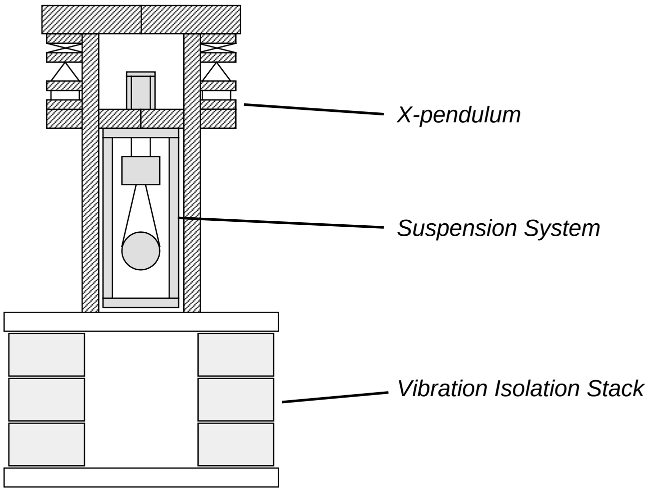


図 3.2　TAMA300 の防振システム

懸架システム

干渉計の鏡やビームスプリッターなど主要な光学部品を懸架するのが懸架システムである。懸架システムでは鏡や光学部品はワイヤーに吊られて、振り子にされている。懸架システムのフレームの天板は X-pendulum と結合され、吊られる。懸架システムは 数 Hz ～ 観測帯域までをカバーする防振系である。詳細は次節以降で述べる。

3.2　懸架システムによる振り子防振

3.2.1　懸架システムの役割

干渉計懸架システムは鏡に直接触れるものであるため、次のような数多くの役割を担っている。

- 各鏡を自由質点にする。自由質点間の固有距離の変動を測定するのが干渉計を用いた重力波検出器の原理であり (2.4.1 節)、鏡は水平方向に束縛力を受けないようになっていなければならない。
- 防振をする。地面振動を防振しなければ重力波をとらえることができない (3.1 節)。懸架システムは干渉計の防振系の最終段として働く。また、単純な振り子のままでは、振り子の共振周波数で地面振動が非常に大きく増幅されてしまう。これを抑制するために受動的または能動的に減衰を行うダンピング機構が必要である。
- 干渉計の動作のために鏡を制御できるようにする。ダンピングを行っても鏡は干渉計の動作点からは大きくはずれて振動してしまう。これをフィードバック制御により動作点に止めるのであるが、そのための光路長制御機構を持たなければならない。
- 鏡のミスアラインメントはコントラストやリサイクリングゲインの低下を招くので、鏡の姿勢制御の機構 (アラインメントの制御機構) を備えていなければならない。また、初期設定

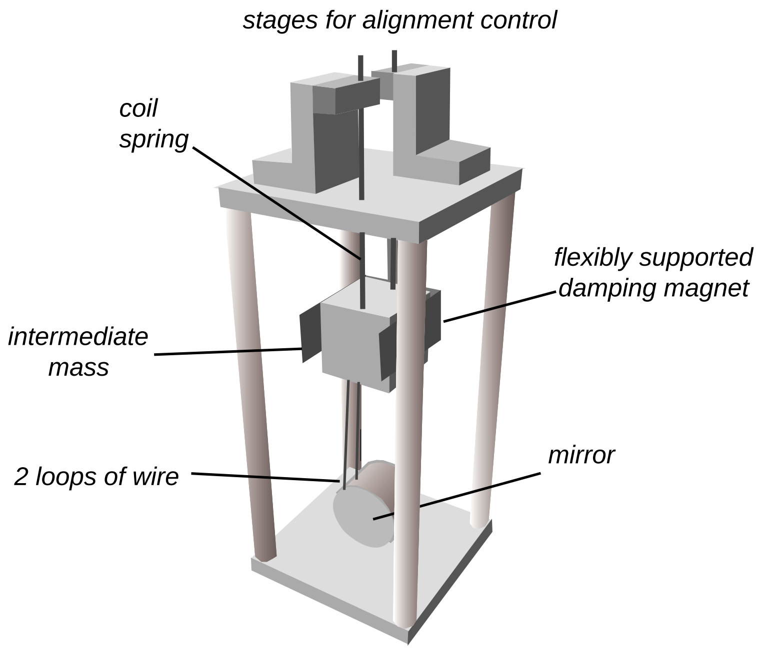


図 3.3　懸架システムの例 (東京大学理学部 3mFPMI で使用されている懸架システム)

時のアラインメント調整や鏡のセンタリング調整も懸架システムで行う。

- 熱雑音の寄与を抑えるため、懸架システムの振り子の最終段では極力散逸が起こらない様にする。また、多段防振系の上流からの熱雑音が鏡に伝わらないように防振する必要がある。
- 鏡の保護を行う。万が一、ワイヤーが切れたときに、鏡が落ちると破損する可能性があるので、落下防止と鏡の保護を行う。

3.2.2　懸架システムの構成

懸架システムが主にどのような要素によって構成されているか述べる。より具体的には、4.5 節にて TAMA300 用の懸架システムの試作機について記述しているので参照されたい。

鏡

レーザー光を反射するための鏡で、通常は熱雑音を低減するため、fused silica など散逸の少ない単一の材質に誘電体多層膜コーティングを施したもの (monolithic mirror) を用いる。技術開発用プロトタイプ干渉計などでは熱雑音を問題としないので、金属製の錘に鏡を張り付けたものを使うこともある。

ワイヤー

鏡を吊るためのワイヤー。熱雑音の特性をよくするために材質を選ばなければならない。また、ワイヤーの弦共振の周波数が観測帯域に重なることがあるので、引張り強さ、太さ、材質に気を

使う必要がある。

マス

多段振り子の場合は、懸架システムの支点 (サスペンションポイント) と鏡の間に別の錘を持つ。これはマス、または中段マスなどと呼ばれる。鏡自体も振り子の最終マス (final mass) として錘の役割をする。

光路長制御機構

鏡をレーザーの光軸方向に制御するための機構で、鏡に張った棒状磁石を外部に固定されたコイルで駆動する手法が一般的である。極板に電圧をかけ、静電誘導を利用して制御を行う場合もある。

ダンピング機構

振り子の共振周波数付近の大きな揺れを抑制するためのもので、光路長制御機構と同様の方式による能動ダンピングや、永久磁石により生じる渦電流を用いた受動ダンピングなどが行われる。

アラインメント制御機構

干渉計の初期設定時や運転中に鏡の姿勢を制御するために、サスペンションポイントが可動ステージで動くようになっていたり、鏡に複数張り付けられた磁石を異なる向きに駆動し、トルクを発生させる方法などが採られる。

3.2.3 防振性能の指標となる量

懸架システムの防振性能を表すために論文中で用いている表記について解説する。

座標系の設定

鏡や中段マス、懸架システムのサスペンションポイントの運動を表すために次のように座標系を設定する (図 3.4)。

- レーザーの光軸の方向を x 軸とする。反射光の向きを正とする。
- 水平面内でレーザーの光軸に直交する方向を y 軸とする。正負は x, y, z 軸が右手系をなすように選ぶ。
- 鉛直上向きに z 軸を取る。
- x 軸まわりの回転を Roll とよび、右ネジの方向を正にとる。座標系の変数としてを ξ ととる。
- y 軸まわりの回転を Pitch とよび、右ネジの方向を正にとる。座標系の変数としてを η ととる。

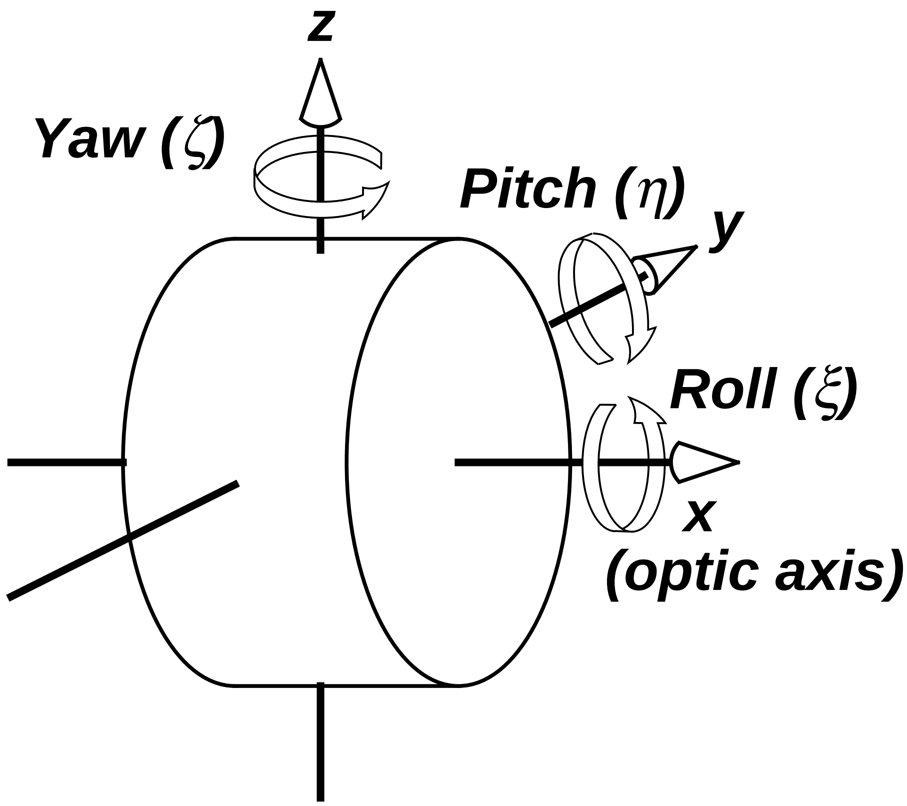


図 3.4　座標系の設定

- z 軸まわりの回転を Yaw とよび、右ネジの方向を正にとる。座標系の変数としてを ζ ととる。

特に、サスペンションポイントの振動は X, Y, Z で[2]、中段マスの振動は x_{i}, y_{i}, z_{i}, ξ_{i}, η_{i}, ζ_{i} で、鏡の振動は x_{f}, y_{f}, z_{f}, ξ_{f}, η_{f}, ζ_{f} で表す。

防振特性

防振特性は「伝達関数」と「RMS 振幅」の 2 つに大別できる。

伝達関数はサスペンションポイントの運動の鏡への伝達率を表したもので、周波数に関する複素関数で表される。伝達関数には並進に関する「防振比」と回転に関する「角度揺れ特性」の 2 つがある。

防振比 (vibration isolation ratio) はサスペンションポイントの並進振動振幅に対する、鏡の並進振動振幅の周波数応答で、x, y, z の各方向に対して、周波数の関数として x-x 防振比、y-y 防振比、z-z 防振比をそれぞれ次のように定義する。

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \frac{\tilde{x}_{\mathrm{f}}}{\tilde{X}} \\ T_{yy} &= \frac{\tilde{y}_{\mathrm{f}}}{\tilde{Y}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

[2]地面振動の回転成分に関しては不明な点が多く、この論文では扱っていない。

$$T_{zz} = \frac{\tilde{z}_{\rm f}}{\tilde{Z}}$$

$\tilde{x}_{\rm f}, \tilde{X}$ などは周波数領域での変位である。

元来、x 方向の鏡の振動と y, z 方向の地面振動は分離していて、無関係なはずである。しかし、懸架システムに存在する非対称性のために、実際にはこれらの地面振動により x 方向にも鏡は振動してしまう。この現象をカップリングという。カップリングの量を、

$$\begin{aligned} T_{yx} &= \frac{\tilde{x}_{\rm f}}{\tilde{Y}} \\ T_{zx} &= \frac{\tilde{x}_{\rm f}}{\tilde{Z}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

などで定義し、それぞれ y-x 防振比、z-x 防振比などと呼ぶ。また、(例えば) 鏡の z 振動が鏡の x 振動にどれだけ変換されたか、を表すために、

$$\tau_{zx} = \frac{T_{zx}}{T_{zz}} \tag{3.3}$$

などとしてカップリング率 (coupling rate) を定義する。防振比は振幅を振幅で割ったものであるから、単位は無次元である。防振比の絶対値を、

$$r_{\rm dB} = 20 \log_{10} |r| \tag{3.4}$$

と対数表示することが多い。この論文ではグラフなどでは防振比の絶対値を dB で表している。

もう一つの伝達関数**角度揺れ特性 (transfer function to angular motion)** はサスペンションポイントの並進振動振幅に対する、鏡の回転振動振幅の周波数応答である。マスを吊るワイヤーが固定されている点と重心との間に高さの差があるときには、x 振動により Pitch 回転が、y 振動により Roll 回転が励起される。そこで、x-Pitch 特性や y-Roll 特性を、

$$\begin{aligned} T_{x\eta} &= \frac{\tilde{\eta}_{\rm f}}{\tilde{X}} \\ T_{y\xi} &= \frac{\tilde{\xi}_{\rm f}}{\tilde{Y}} \end{aligned} \tag{3.5}$$

と定義する。また、系の非対称性により本来は励起されないはずの回転も起こってしまう。このようなカップリング (z-Pitch 特性など) も

$$T_{z\eta} = \frac{\tilde{\eta}_{\rm f}}{\tilde{Z}} \tag{3.6}$$

などと表される。角度揺れ特性は角度を振幅で割ったものであるから、単位は rad/m などで表される。

伝達関数が分かると、実際の地面振動モデルを用いて、各自由度が自乗平均としてどれくらい揺れるかを求めることができる。これを **RMS(Root Mean Square) 振幅**という。各自由度 (v とする) について、

$$v_{\rm RMS} = \sqrt{\int_0^\infty |T_{xv}X|^2 {\rm d}f + \int_0^\infty |T_{yv}Y|^2 {\rm d}f + \int_0^\infty |T_{zv}Z|^2 {\rm d}f} \tag{3.7}$$

と計算される。実際に問題となるのは、x 方向、Pitch 回転、Yaw 回転の RMS 振幅である。

3.2.4 要求される防振性能

防振システムに要求される防振性能は、

- **防振比:** 観測帯域において干渉計の要求を満たすだけ地面振動を減衰する。
- **RMS(Root Mean Square) 振幅:** 干渉計の制御のダイナミックレンジ内に振動振幅を抑える。

の 2 点である。前者は観測帯域 (150~450Hz) の話であり、後者は低周波 (主に ~10Hz) の話になる。RMS 振幅には鏡の並進振動と鏡の回転運動に関するものの 2 つがある。

地面振動のモデルを導入し、次に防振比と並進および角度揺れの RMS 振幅に対する要求を明らかにする。

地面振動のモデル

この論文では、都市部の典型的な地面振動を f の単位を Hz として、水平、鉛直に関し等方に

$$X(f) = Y(f) = Z(f) = \begin{cases} 10^{-5} \quad \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}} & (f \le 0.1\,\mathrm{Hz}) \\ \dfrac{10^{-7}}{f^2} \quad \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}} & (f \ge 0.1\,\mathrm{Hz}) \end{cases} \tag{3.8}$$

とモデル化する。 周波数が 0.1Hz 以上の領域は測定データ (図 3.1) から決まっている。周波数が 0.1Hz 以下の地面振動に対しては確定的な測定データが無く、計算上 RMS 振幅が発散しないように仮に周波数特性がフラットであるとした。実際には、振り子長が 1m 以下の懸架システムの防振比は 0.5Hz 以下の周波数域ではほぼ 0dB で、防振を行うことも振動を増幅することもない。よって、0.1Hz 以下のモデルは RMS 振幅のうち懸架システムの設計によって影響を与えることが出来ない部分を決めているにすぎない。

後述するように、このモデルで決まる並進の RMS 振幅は $3.7\,\mu$m で、制御をかけていない干渉計の干渉光が常に数フリンジ程度変動していることから推測しても、現実と大幅に食い違ってしまっている、と言うことはない。

観測帯域での防振比

式 (3.8) の地面振動が全て鏡の振動として伝わったとすると、雑音は観測帯域では重力波の振幅に換算して、(f の単位を Hz として、)

$$h_{\mathrm{seis}} = \sqrt{4} \times \frac{10^{-7}}{f^2}\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}} \times \frac{1}{300\mathrm{m}} = \frac{6.7 \times 10^{-10}}{f^2}/\sqrt{\mathrm{Hz}} \tag{3.9}$$

という値になる。はじめの $\sqrt{4}$ は FPMI を構成する鏡が両方の腕を合わせて 4 枚あることから来る係数である。それに対し、TAMA300 の目標感度は次表の通りである[3] 。

	RMS 目標感度 h_{RMS}	PSD 目標感度[4] h_{PSD} $/\sqrt{\mathrm{Hz}}$
Phase I	3×10^{-21} →	

[3]Phase I は 1998 年の TAMA300 目標感度。Phase II は 1999 年の TAMA300 目標感度。

よって、要求される防振比 $h_{\mathrm{PSD}}/h_{\mathrm{seis}}$ は次の表のようになる。地面振動の振幅は周波数が高いほど小さくなるので、高周波に行くほど要求は楽になる。

	150Hz	450Hz
Phase I	−145dB	−126dB
Phase II	−165dB	−146dB

並進の RMS 振幅

式 (3.8) の地面振動は RMS 振幅にしてどれだけの振幅を持つか求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{RMS}} &= \sqrt{\int_0^\infty X^2 \mathrm{d}f} \\ &= 3.7 \times 10^{-6}\mathrm{m} \end{aligned} \tag{3.10}$$

鏡に地面振動が直接伝わったとして生じる 3.7μm の振動のうち、1Hz 以上の振動の寄与は全パワーを 1 として 2.5×10^{-4} しかないので、いくら 1Hz 以上の防振を行っても RMS 振幅を減らすことはできない。そのままでは干渉計を共振状態に保つことは不可能であるので、鏡に対し光軸方向の制御を行い、干渉計を共振状態に「ロック」する手法が取られる。

逆に懸架システムのもつ振り子モードや機械共振などの低周波の共振により RMS 振幅が増大してしまう可能性があるので、懸架システムにおいては、RMS 振幅が制御の限界よりも大きくなって、干渉計の動作に支障をきたさないよう、RMS 振幅を悪化させない設計を行う、ということに注意しなければならない。

角度揺れの RMS 振幅

光路長の制御を行い干渉計を共振状態にロックしても、干渉計の鏡が傾くとコントラストやリサイクリングゲインが悪化してしまう。アラインメント制御に関する研究において、干渉計のコントラストを 99%に保つための、鏡の傾きの許容量は、

$$\eta_{\mathrm{RMS}} = \zeta_{\mathrm{RMS}} = 5 \times 10^{-7}\mathrm{rad} \tag{3.11}$$

となっている [19]。

反面、振り子の熱雑音の要求として懸架システムの最終段は共振周波数がなるべく低い方が良い、という結果も出ている [20]。共振周波数を低くすると RMS 振幅が大きくなる可能性があるため、双方の要求を最大限満たすような解を見つける設計を行わなければならない。

3.3 力学モデル計算による懸架システムの設計

前節では TAMA300 の防振システムに要求される性能を述べた。懸架システムでは単独でこの要求を満たす様な防振特性を持つことを目標に設計を行う。そうすることで、実際にそれほどの

[4] 感度曲線が周波数特性を持たないものとして、目標感度 (RMS) を観測帯域幅の平方根 $\sqrt{300\mathrm{Hz}}$ で割ったもの。

高い防振性能を得るまでに至らない場合にも、他の防振系と組み合わせることで目標を達成することが容易になる。

そのような高い性能を有する懸架システムを製作するためには、注意深く設計を行う必要がある。その為に力学モデルによる防振特性の計算を行った。結果については第 4 章、および第 5 章で述べることにして、ここでは計算の手法について解説する。

3.3.1 モデル計算の種類

多くの事柄を考慮したモデル計算は複雑すぎて、目的によっては不適切な場合があり、必要とする情報に応じてモデルの細かさを選択するべきである。モデルの種類には次のようなものがある。

質点モデル

質点モデルは振り子を構成するマス (mass、錘) を質点とみなし、ワイヤーやバネによって結合されているとするモデルである。計算は簡便であるが、かなり理想化されたモデルであり、現実にこのモデルが有効なのは主に 10Hz 以下である。この論文では第 4 章で、懸架システムの方式を決定するために、また並進運動の RMS 振幅を悪化させない設計のために使用している。

剛体モデル

剛体モデルは各マスを剛体とみなし、マスどうしが複数のワイヤーやバネによって結合されているとするモデルである。鏡の剛体運動を考慮するため、自由度が増え計算は煩雑になるが、剛体モードの共振周波数を予想したり、懸架システムの吊り方に非対称性が存在する場合の影響を求めたりするなど、実際的な計算を行うことができる。この論文では、剛体運動の共振や角度揺れに関する計算、実験と比較するための伝達関数の計算を行うために、2 次元の剛体モデルを用いた。詳細は第 5 章で扱う。

弾性体モデル

懸架システムのフレームや姿勢制御用可動ステージの変形、ワイヤーの弦振動 (バイオリンモード)、さらには鏡自体の共振などを扱うためには弾性体モデルを用いなければならない。現実的には極めて簡単なモデルしか扱うことができない。弾性体モデルが必要とされるのは 100Hz 以上の周波数域である。

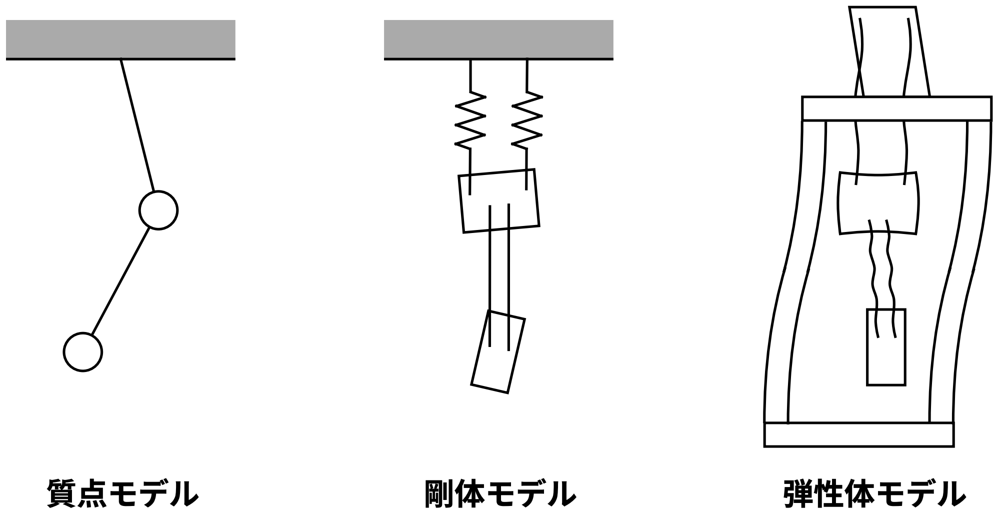


図 3.5　3 種類の力学モデル

3.3.2　防振特性の計算法

ここでは質点モデルや剛体モデルにおいて、どのような方法で防振特性を計算するかを説明する [21][22]。

伝達関数を計算するためには、以下のような過程を辿る。

1. 質点や剛体により構成される力学モデルを構築する。
2. 運動方程式を立て、行列形式で表す。
3. 系の応答を表す行列により共振周波数と Q 値を求める。
4. 行列方程式を解き、外部の振動により導入される外力に対する各自由度の応答を計算する。
5. 与えられた外部振動と各点の振動の振幅比を求め、伝達関数を求める。

続く数節では解説が必要と思われる、運動方程式の行列表現、共振周波数や Q 値の計算、そして剛体モデルにおける運動方程式の計算の手法について述べることにする。

3.3.3　運動方程式の行列表現

まず、各質点、剛体がそれぞれどのように配置されているかを決め、運動方程式をたてる。各点は、振り子に吊られていたり、バネなどで弾性支持されているので、それぞれの座標に比例した復元力を受ける。系にダンピングをかけている場合、(例えば) 速度に比例した減衰力を受ける。

運動方程式をたてたら、それを行列で表す。N 自由度系の運動方程式は一般的に

$$\sum_{i=1}^{N}(m_{ij}\ddot{q}_i + c_{ij}\dot{q}_i + k_{ij}q_i) = f_j \qquad (j = 1 \sim N, m_{ij}, c_{ij}, k_{ij}\text{は実数}) \tag{3.12}$$

という形式になる。これを行列を用いて書き表すと、

$$\mathcal{M}\ddot{\vec{q}} + \mathcal{C}\dot{\vec{q}} + \mathcal{K}\vec{q} = \vec{f} \tag{3.13}$$

これらの実 N 次正方行列 $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$ をそれぞれ慣性行列、減衰行列、剛性行列と呼ぶ。

式 (3.13) の両辺を Fourier 変換して周波数領域で表すと次の形式になる。

$$\left(-\omega^2\mathcal{M} + i\omega\mathcal{C} + \mathcal{K}\right)\tilde{\vec{q}} \equiv \mathcal{H}'\tilde{\vec{q}} = \tilde{\vec{f}} \tag{3.14}$$

この式は強制振動における系の運動を記述している。$\mathcal{H}'$ の逆行列 $\mathcal{H}(\equiv \mathcal{H}'^{-1})$ を用いれば、

$$\tilde{\vec{q}} = \mathcal{H}\tilde{\vec{f}} \tag{3.15}$$

と書くことができ、外力 $\tilde{\vec{f}}$ に対する系の応答 $\tilde{\vec{q}}$ を知ることができる。このことから $\mathcal{H}$ を周波数応答関数行列という。サスペンションポイントの変位がマスに与える外力を知れば、式 (3.15) より対象がどれだけの振幅で振動するかが計算でき、伝達関数を得ることができる。

3.3.4 共振周波数と Q 値の定義

伝達関数の計算では、複素 Fourier 平面に極と零点を配置することで各点の周波数応答を決定する、という観点に立つこともできる。通常の力学系を想定して $\tilde{\vec{f}}$ が極を持たないと考えると、系の応答の極は特性方程式、

$$\det\mathcal{H}' = 0 \tag{3.16}$$

の根により与えられる。

式 (3.16) をあらわな形で書くと、

$$a_0\omega^{2N} + ia_1\omega^{2N-1} + \ldots + ia_{2N-1}\omega + a_{2N} = 0 \tag{3.17}$$

または $s = i\omega$ を用いて、

$$b_0 s^{2N} + b_1 s^{2N-1} + \ldots + b_{2N-1}s + b_{2N} = 0 \tag{3.18}$$

と表される。ここで、a_n, b_n は実数である。式 (3.17) の奇数次が虚数係数を持つのは、ω の奇数次の項はかならず $\mathcal{C}$ によって与えられるからである。また、式 (3.18) は Fourier 変換ではなく Laplace 変換を用いたときの特性方程式に相当する。

代数学の基本定理によれば複素係数 n 次代数方程式は複素数の範囲で必ず n 個の根を持つ。よって式 (3.17) の根の個数は $2N$ 個で、系の応答の極の個数は $2N$ 個である。また全ての極は複素 Fourier 空間上 Im(ω)≥0 の半平面上に存在する。これは系のインパルス応答

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{3.19}$$

が $t < 0$ では 0 である、という因果律から要請されることである[5] 。

[5]留数定理と Jordan の予備定理から、$t < 0$ での $h(t)$ には Fourier 平面の下半分に存在する極が、 $t > 0$ での $h(t)$ には Fouier 平面の上半分の極が影響を与える。

式 (3.18) に目を転じれば、実係数代数方程式である。実係数代数方程式において複素数解 α が存在するとき、その複素共役 $\bar{\alpha}$ も根である[6]。これは、つまり ω でみれば、$2N$ 個の根は偶数個の純虚数根と虚軸を挟んで対称な点に現れる根の組で構成されるということである。

系が減衰を持たない場合、式 (3.17) の奇数次の項は消える。この場合、ある ω を方程式の解とすると、$-\omega, \bar{\omega}, -\bar{\omega}$ がやはり解となる。解つまり極は $\mathrm{Im}(\omega)\geq 0$ の半平面上に存在するという制約から、実際には $2N$ 個 の極は全て実軸上の

$$\omega = \pm\omega_1,\, \pm\omega_2,\, \ldots \pm \omega_N \tag{3.20}$$

に配置される。これは、これらの角振動数において系の応答が発散することを意味する。系の減衰が小さく、極が実軸に近いときには、その極の周波数付近で伝達関数が著しく大きくなる。

系の減衰を大きくしていくと、虚軸を挟んで対称な位置にあった極は ω の実軸の近くを離れ、虚数軸へ近づいていく。式 (3.17) の対応する 2 根が重根になるとき、極は虚軸で同一の点になる。この状態を臨界減衰 (critical damping) という。さらに減衰が大きくなると、虚軸上で再び 2 つの点に分裂する。この状態を過減衰 (over damping) という。

この様子を 1 質点系の場合を例にとり見てみる。バネ定数 k のバネに質量 m の質点がとりつけられていて、質点には外力 f と速度に比例する減衰力 $\Gamma\dot{x}$ が働くとする。運動方程式は、

$$(-m\omega^2 + i\Gamma\omega + k)\tilde{x} = \tilde{F} \tag{3.21}$$

であるから、外力に対する質点の応答は、

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{F}}{-m\omega^2 + i\Gamma\omega + k} \tag{3.22}$$

となる。$\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ を共振角振動数という。周波数になおした場合に、$f_0 = \omega_0/2\pi$ を共振周波数という。また、共振の鋭さを表す量として Q 値という量を

$$Q = m\omega_0/\Gamma$$

で定義する。これらの量を使って系の応答は、次のように表すことができる。

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{F}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_0/Q)} \tag{3.23}$$

このとき極は

$$\omega = \frac{i\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}} \tag{3.24}$$

である (図 3.6)。$Q = 1/2$ で臨界減衰、$Q < 1/2$ で過減衰の状態になる。

減衰のある N 体系に共振周波数と Q 値の定義を拡張すると、対となる極 ω_1, ω_2 について、

$$\omega_0 = i\sqrt{\omega_1\omega_2} \tag{3.25}$$

$$Q = -\frac{\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\omega_1 + \omega_2} \tag{3.26}$$

[6] 式 (3.18) の両辺の複素共役を取れば明らかである。

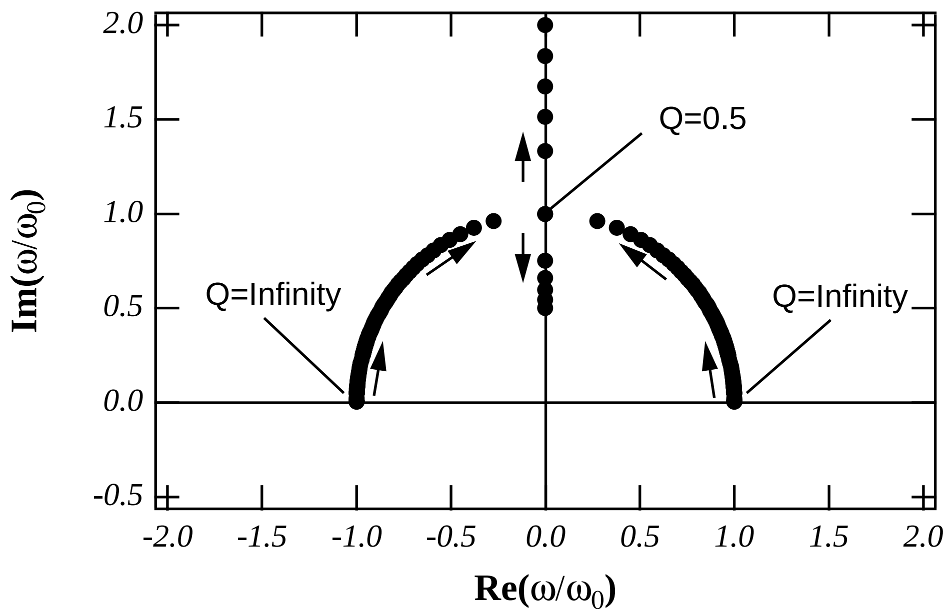


図 3.6　1 質点系における複素 Fourier 平面上の根軌跡

として、Q 値と共振周波数を求めることができる。過減衰ではない系に対しては、対になっている極を

$$\omega = \pm\omega_{\rm R} + i\,\omega_{\rm I} \tag{3.27}$$

と表せば、

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{\rm R}^2 + \omega_{\rm I}^2} \tag{3.28}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\omega_{\rm I}} \tag{3.29}$$

となり、片方の極の位置からだけでも Q 値や共振周波数を知ることができる。

3.3.5　剛体モデルにおける運動方程式の計算法

質点モデルでは力学モデルから運動方程式をたてるのは容易である。しかし、剛体モデルの場合自由度が著しく増え、また系を構成する要素も多くなり、計算は複雑となる。

剛体モデルにおける運動方程式の計算には 2 つの方法がある。

1. **解析力学的手法**

   各自由度の変位に対し Lagrangian $\mathcal{L}$ を計算し、Euler-Lagrange 方程式

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \tag{3.30}$$

   により運動方程式 (すなわち各行列、ベクトルの成分) を得る手法。

2. **系に静的仮想変位を与え、その線形応答を見る方法**

各自由度に一つずつ独立に摂動を加え、その時に各自由度に現れる復元力を求め、運動方程式の 1 次の係数を得る方法。この場合、摂動は静的であるから得られるのは $\mathcal{K}, \vec{f}$ の成分である。その他の行列要素は別個に補う。

多自由度の系では自由度が分離している場合などの特殊な場合以外では、解析的に行列計算を行うことが困難である。そこで、一般的な場合については数値計算を用いることになる。そういった事情もふまえて、この論文では、

- 変位に比例する力をあたえるのはワイヤーのみ、速度に比例した減衰を与えるのはマグネットのみ、など力の働く素過程がはっきりしているので、計算の各過程が非常に単純かつ簡単である。そのため、計算コードの検証も行い易い。

- どちらの手法を用いても、一般的には与えられた懸架システムのパラメータに対し、単純には静止状態を求めることはできない。そこで、数値計算で求めることになる。静的仮想変位法はほとんど同じ単純な計算を自由度の数だけ繰り返す手法で計算機で扱いやすいタイプの手法である。

などの理由から静的仮想変位の手法を採用した。計算速度に対する要求が軽いので、計算のコードには高級言語である数式処理ソフトウェア *Mathematica* を用いている。実際の計算コードにおいては図 3.7 のような流れで計算を行っている。

この計算では、剛性行列 $\mathcal{K}$ と外力ベクトル $\vec{f}$ を力学モデルから求め、慣性行列 $\mathcal{M}$ と減衰行列 $\mathcal{C}$ はアプリオリに与える方法を採っている。また、系が静止状態になくてもこれらの行列を求めることができてしまうので、系の配置が一般の場合から静止状態へ移行するための処理も行わなければならない。

以下に、剛性行列 $\mathcal{K}$ と外力ベクトル $\vec{f}$ の求め方、静止状態の求め方について述べる。それ以外の行列は実際に計算を行う第 5 章で与える。

剛性行列 $\mathcal{K}$ と外力ベクトル $\vec{f}$

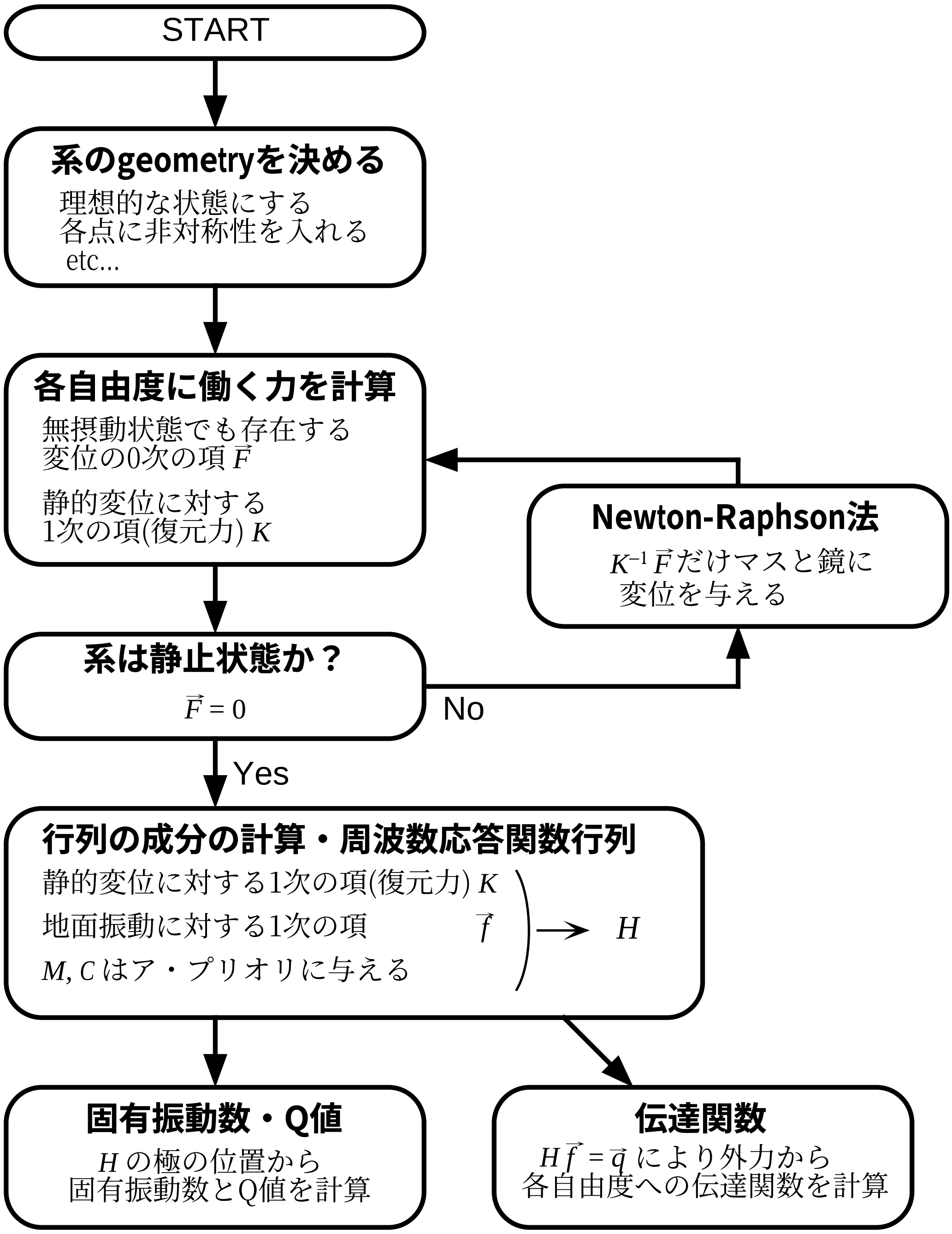
静止状態にあるとき、系の復元力と外力が釣り合っている。

$$\sum_{i=1}^{N} k_{ij} q_i = f_j \qquad (j = 1 \sim N) \tag{3.31}$$

この状態で、$\vec{q}$ のうちの一つ x_i を静的に微小に動かす。この時、x_i 以外の値は静止状態の値に固定しておく。x_i を動かしたことにより系を静止状態に保つために新たに外力を加えなければならない。摂動を δx_i、生じる力を δf_j とすると、δx_i の 1 次で、

$$k_{ij} \delta x_i = \delta f_j \qquad (j = 1 \sim N) \tag{3.32}$$

である。つまり、x_i のみに静的変位を加えたときに、系が運動を起こさないように各自由度 q_j に加えなければならない束縛力とトルクを計算することで、剛性行列の k_{ij} 成分を求めることができる。自由度の個数だけ計算を繰り返せば、$\mathcal{K}$ が定まる。摂動時の合力の計算は、摂動を加えた状態でのワイヤーの張力ベクトルの合計と重力の和を求めることで計算できる。



START
系のgeometryを決める
理想的な状態にする
各点に非対称性を入れる
etc...
各自由度に働く力を計算
無摂動状態でも存在する
変位の0次の項 $\vec{F}$
静的変位に対する
1次の項(復元力) K
Newton-Raphson法
$K^{-1}\vec{F}$ だけマスと鏡に
変位を与える
系は静止状態か？
$\vec{F}=0$
No
Yes
行列の成分の計算・周波数応答関数行列
静的変位に対する1次の項(復元力) K
地面振動に対する1次の項 $\vec{f}$
M, C はア・プリオリに与える
$\longrightarrow H$
固有振動数・Q値
H の極の位置から
固有振動数とQ値を計算
伝達関数
$H\vec{f}=\vec{q}$ により外力から
各自由度への伝達関数を計算

図 3.7　計算の流れ

また、サスペンションポイントに加えられる変位がどれだけの力を系に及ぼすかという外力ベクトル $\vec{f}$ も、全く同様にして計算される。

Mathematica を用いると、仮想変位を実際の摂動の量ではなく未知数によって与えることができ、その 1 次の係数を厳密に求めることができる。そのため数値計算上の問題、たとえば摂動の量により 1 次の項の係数が影響を受けるといった問題、などが発生しないという利点がある。

静止状態

懸架システムの配置を適当に与えたときは、系は静止状態にはなっていない。この系が徐々にエネルギーを失い、静止状態に落ちついたときどのような配置になるか、漸近的な手法を用いて求める。

静止状態ではない配置の時、系に働く加速度を $\vec{F}$ とすると、

$$\mathcal{M}\ddot{\vec{q}} = -\mathcal{K}\vec{q} + \vec{f} = \vec{F} \tag{3.33}$$

この $\vec{q}$ に補正 $\vec{q_0}$ を加えて静止状態にすることを考える。

$$-\mathcal{K}(\vec{q} + \vec{q_0}) + \vec{f} = 0 \tag{3.34}$$

式 (3.33) より、

$$\vec{q_0} = \mathcal{K}^{-1} \cdot \vec{F} \tag{3.35}$$

となり、$\vec{q_0}$ が計算される。式 (3.35) は 1 次近似で解を与えるものであるから、このプロセスを繰り返して、$\vec{F}$ が十分小さくなったところで計算を打ち切ればよい。つまり、これは一種の Newton-Raphson 法である。

第 4 章

懸架システム設計のためのモデル計算I

この章では TAMA300 の防振への要求を元に、懸架システムの方式や設計に必要な基本的なパラメータの決定を行っている。

- まず、懸架システムの方式を弾性支持マグネットダンピング付き 2 段振り子方式にするに至った根拠を示す (4.2 節)。
- 次に水平、垂直の防振比から懸架システムの基本パラメータを決定する (4.3 節)。
- z-x カップリングを考慮して、水平方向の防振比と垂直方向の防振比の比較を行う (4.4 節)。
- 決定したパラメータを用いて設計した、TAMA300 用懸架システム試作機について述べる (4.5 節)。

という構成となっている。

4.1 計算の目的

この章で行う計算の目的は、懸架システムの試作機の設計を行うために必要なパラメータを決定することである。しかし、あまりに具体的なパラメータを計算に盛り込むと、調整すべき自由度が多くなりすぎて、最適化が不十分になったり、重要なファクターを見落とす可能性がある。

そこで、質点モデルによる単純な計算を行い、TAMA300 で要求される防振性能を基準に、ベースとする懸架システムの方式を決定する。次に、振り子の長さや各マスの質量などの、いくつかの基本的なパラメータを決定する。そして、そのパラメータに基づき TAMA300 用懸架システムの試作機を製作する、という手順を取ることにする。

4.2 懸架システムの方式の決定

まず、おおもととなる懸架システムの方式を決定する。ここで決めることは、

- 何段の振り子にするか
- どのようなダンピング方式をとるか

という 2 点である。

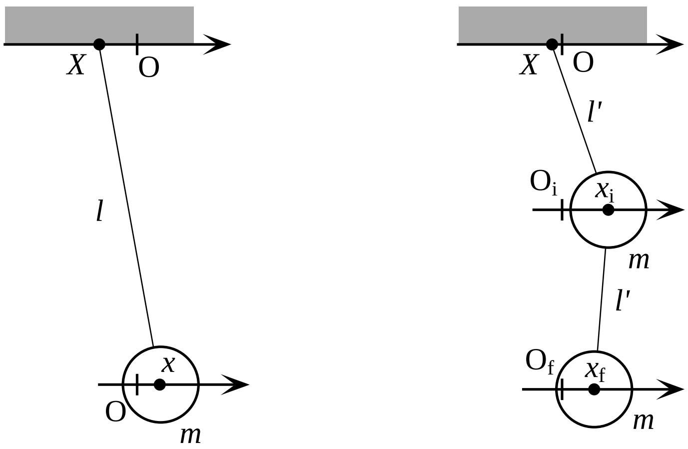


図 4.1 単振り子 (左) と 2 段振り子 (右)

4.2.1 振り子の段数

まず最も簡単な振り子として 1 段の振り子、すなわち単振り子についてその性能を評価する。鏡を表す質点がワイヤーに吊られているとしよう (図 4.1 左)。図のとおり座標系を取り、サスペンションポイントの座標、鏡の座標をそれぞれ X, x とする。ワイヤー長は l、質点の質量を m とする。

運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}(x - X) \tag{4.1}$$

で、この両辺を Fourier 変換してまとめると防振比として、

$$\frac{\tilde{x}}{\tilde{X}} = \frac{mg/l}{-m\omega^2 + mg/l} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{4.2}$$

を得る。ここで、$\omega_0 \equiv \sqrt{g/l}$ は振り子の共振周波数である。$l = 0.5\,\mathrm{m}$ の場合を例に防振比を描いたのが、図 4.2 の実線である。明らかなように TAMA300 の観測帯域の下限である 150Hz で −100dB の防振比もないため、単振り子は不適である。

そこで次に 2 段振り子の防振比を評価する (図 4.1 右)。図の通りに座標系を取り、サスペンションポイントの座標、中段マスの座標、鏡の座標をそれぞれ X, x_i, x_f とする。ワイヤー長は上下とも l'、中段マスの質量も鏡の質量も m とする。運動方程式は、

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_\mathrm{i} &= -\frac{2mg}{l'}(x_\mathrm{i} - X) - \frac{mg}{l'}(x_\mathrm{i} - x_\mathrm{f}) \\ m\ddot{x}_\mathrm{f} &= -\frac{mg}{l'}(x_\mathrm{f} - x_\mathrm{i}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

となり、Fourier 変換して行列形式にすると、($\omega_0' \equiv \sqrt{g/l'}$ として)

$$\begin{pmatrix} 3\omega_0'^2 - \omega^2 & -\omega_0'^2 \\ -\omega_0'^2 & \omega_0'^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_\mathrm{i} \\ \tilde{x}_\mathrm{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega_0'^2 \tilde{X} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

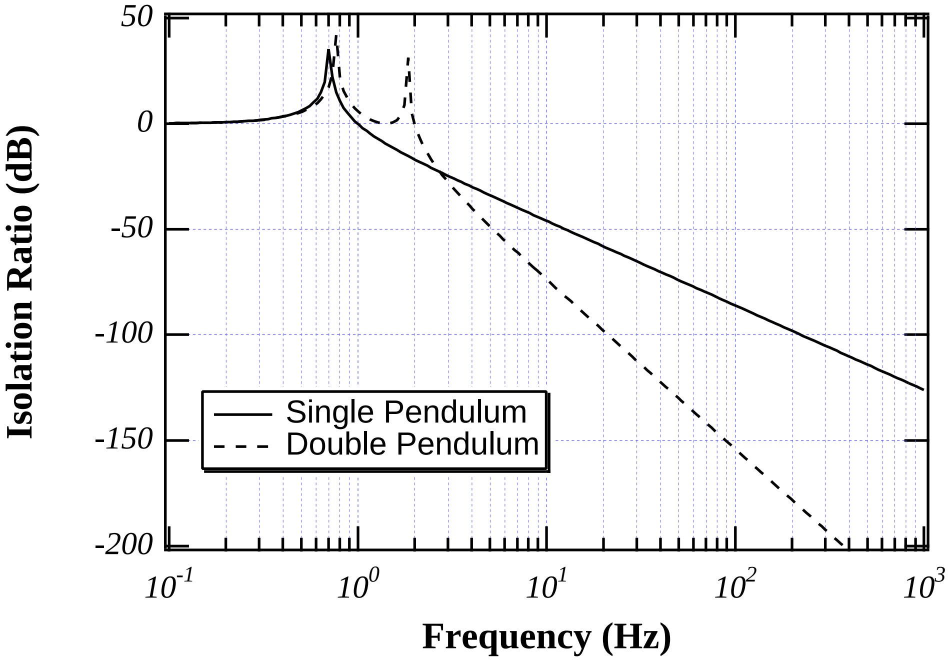


図 4.2 単振り子の防振比 (左) と 2 段振り子の防振比 (右)

これを解くと、

$$\frac{1}{\tilde{X}}\begin{pmatrix}\tilde{x}_\mathrm{i}\\ \tilde{x}_\mathrm{f}\end{pmatrix}=\frac{1}{\omega^4-4\omega_0'^2\omega^2+2\omega_0'^4}\begin{pmatrix}2(\omega_0'^4-\omega_0'^2\omega^2)\\ 2\omega_0'^4\end{pmatrix} \tag{4.5}$$

となる。全体の振り子長が先ほどの単振り子と同じ場合、すなわち $l'=0.25\,\mathrm{m}$ の場合を例に防振比を描いたのが、図 4.2 の点線である。観測帯域で -165dB 以上の防振比が取れていることが分かる。

4.2.2 ダンピング

前節で述べた 2 段振り子のままでは、1Hz 付近のピークにより RMS 振幅が非常に大きくなってしまうのでなんらかのダンピングを行わなければならない。

ダンピングの方式としては能動ダンピングと受動ダンピングを選ぶことができる。能動的なダンピングとしては 2 段振り子の中段マスまたは鏡に速度に比例した減衰力を加えるような制御をかけることもできる。これはローカルコントロール (local control) と呼ばれている [16]。

一方、受動的なダンピングの例としては、永久磁石によって金属表面に生じる渦電流を用いるものがある。東京大学理学部では多段振り子を強力な希土類永久磁石により渦電流ダンピングする方式の振り子が製作され、また性能評価実験によりその有効性が確かめられている [23]。またその技術は同学部の基線長 3mFPMI で使用されている [24]。

図 4.3 のように、磁石を中段マスの近くに置いた 2 段振り子を作る。中段マスと磁石の相対速度に比例した減衰力が中段マスに働く。その比例係数 Γ は、

$$\Gamma=A\sigma B\frac{\partial B}{\partial x} \tag{4.6}$$

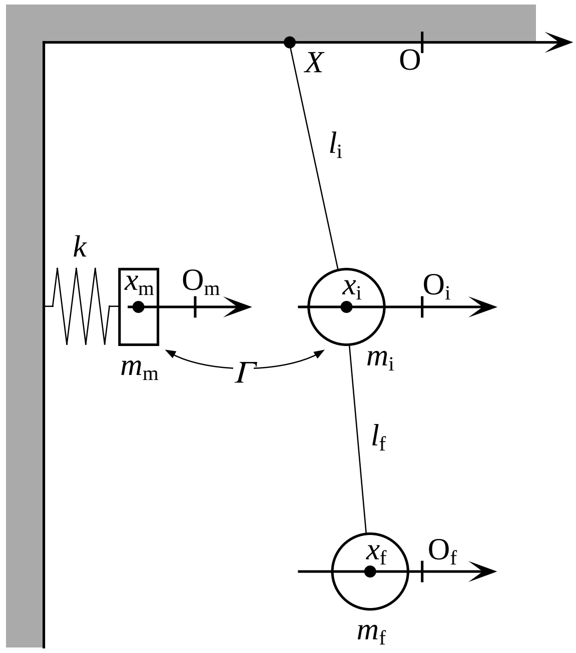


図 4.3　水平方向の質点モデル

と表すことができる。ここで、A は幾何形状から来るファクター、B は磁石による磁束密度、σ はマス表面の電気伝導度である。 2 段振り子では振り子共振においては 2 つのマスは結合して動くため、中段マスの渦電流によるエネルギーの散逸により 2 つの振り子共振を効果的につぶすことができる。

ところで、磁石によるダンピングは観測帯域付近では逆に地面振動を導入するため、ダンピングをかけない場合に比べて、防振比は悪くなる。この問題はダンピングマグネット自体を防振することで避けることができる [23]。

この効果を見るために図 4.3 の力学モデルを用いて防振比を計算する。

中段マス (intermediate mass) と鏡 (mirror, final mass) はワイヤーに吊られた質点 (質量 m_{i}, m_{f}) で、ダンピングマグネット (damping magnet, 質量 m_{m}) はサスペンションポイントと一緒に動く壁からバネで支持されている質点とする。

サスペンションポイント、中段マス、鏡、マグネットが中立の位置にある時をそれぞれの原点 O, $\mathrm{O_i}$, $\mathrm{O_f}$, $\mathrm{O_m}$ として、水平方向の座標をそれぞれ X, x_{i}, x_{f}, x_{m} とする。

上下のワイヤー長はそれぞれ l_{i}, l_{f} である。マグネットを支持しているバネのバネ定数は k であり、マグネットと中段マスとの間には、相対速度に比例した抵抗力 (比例定数 Γ) が働くものとする。

実際の数値として、表 4.1 と表 4.2 の値を利用して防振比を計算した (表はいずれも 57 ページ)。

ダンピングを行わない場合をまず考える。与えたパラメータの減衰の大きさ Γ を 0 にすると、散逸はなくなりダンピングはかからなくなる。この場合 0.8Hz と 2Hz 付近に振り子モードのピークが立つ。観測帯域では防振比は周波数の -4 乗に比例する (図 4.4 実線)。

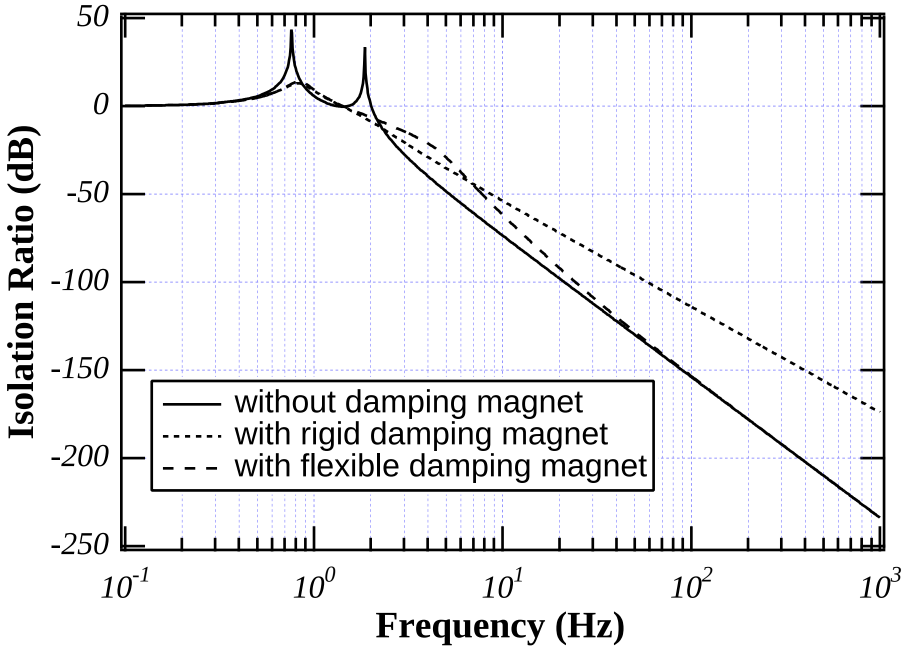


図 4.4　ダンピング方式による防振比の違い

$k \to \infty$ の極限では、ダンピングマグネットはサスペンションのフレームに固定されたことになる。振り子運動のピークは潰れるが、観測帯域では防振比は周波数の -3 乗に比例する (図 4.4 点線)。

ダンピングマグネットを弾性支持した場合では、それぞれの 2 つの特長が生かされ、振り子運動のピークを潰すと同時に、観測帯域では防振比を周波数の -4 乗に比例するようにできる (図 4.4 破線)。

このように 2 段振り子と弾性支持マグネットの組み合わせは、低周波の振り子共振を抑えて RMS 振幅の悪化を防ぎ、かつ観測帯域で良好な防振比を得る潜在性能を持つので、TAMA300 の懸架システムに使用可能であることが分かった。そこで、この方式を TAMA300 の懸架システムに採用することに決定した。

4.3　振り子のパラメータの決定

懸架システムの方式が決まったので、次に具体的なパラメータの決定を行った。決定したパラメータは、振り子長、中段マスやダンピングマグネットの質量、ダンピングマグネットの弾性支持周波数、ダンピングによる減衰の大きさといった水平振動に関するものと、懸架されたマスの共振やダンピングマグネットの弾性支持の共振周波数のような垂直振動に関するものに大別される。

垂直方向の振動は干渉計の光軸に直交する方向であるため、本来は干渉計に影響を与えないはずである。しかし、実際には中段マスや鏡の吊り方の非対称性によって、それらの振動が光軸方向の振動に現れてしまう現象 (カップリング) が存在する。カップリングの存在から垂直防振により垂直振動を少なくする必要性が生じる。カップリングに関する定量的な議論は、この章の 4.4 節

で扱う。

防振比計算によってパラメータを決めていく際に注意したことは、

- 観測帯域の f^{-4} の特性に影響が出ないようにする。
- 少なくとも質点モデルで扱える共振に関して、RMS 振幅が悪化することのないよう、伝達関数に大きなピークがなく、滑らかな特性になるようにする。

ということである。以下では多くの試行の結果として得られたパラメータ (57 ページ) を基本として、各パラメータをひとつずつ変化させたときの鏡の防振比への影響を求めることにより、パラメータ決定の根拠を示すことにする。

4.3.1 水平防振比の調整

運動方程式

力学モデルとしては図 4.3 のモデルを使用する。各物理量の表記については 4.2.2 節を参照されたい。

運動方程式は次のようになる。

$$\left\{\begin{array}{lcl} m_\mathrm{i}\ddot{x}_\mathrm{i} & = & -\dfrac{(m_\mathrm{i}+m_\mathrm{f})\,g}{l_\mathrm{i}}(x_\mathrm{i}-X)-\dfrac{m_\mathrm{f}\,g}{l_\mathrm{f}}(x_\mathrm{i}-x_\mathrm{f})-\Gamma(\dot{x}_\mathrm{i}-\dot{x}_\mathrm{m}) \\ m_\mathrm{f}\ddot{x}_\mathrm{f} & = & -\dfrac{m_\mathrm{f}\,g}{l_\mathrm{f}}(x_\mathrm{f}-x_\mathrm{i}) \\ m_\mathrm{m}\ddot{x}_\mathrm{m} & = & -k(x_\mathrm{m}-X)-\Gamma\,(\dot{x}_\mathrm{m}-\dot{x}_\mathrm{i}) \end{array}\right. \tag{4.7}$$

式 (4.7) について、

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{m_\mathrm{i}+m_\mathrm{f}}{m_\mathrm{i}}\dfrac{g}{l_\mathrm{i}} & \to & \omega_\mathrm{i}^2 \\ \dfrac{g}{l_\mathrm{f}} & \to & \omega_\mathrm{f}^2 \\ \dfrac{k}{m_\mathrm{m}} & \to & \omega_\mathrm{m}^2 \end{array} \tag{4.8}$$

の置き換えを行なう。ここで導入された ω_i は下の鏡を固定して、さらにダンピングによる散逸を無いものとしたときの共振角振動数で、ω_f は中段マスを固定したときの共振各振動数、ω_m はダンピングマグネット単体での共振角振動数である。

方程式を周波数領域で表し整理すると、周波数応答関数行列の逆行列は、

$$\mathcal{H}^{-1}=\begin{pmatrix} -m_\mathrm{i}\omega^2+m_\mathrm{i}\omega_\mathrm{i}^2+m_\mathrm{f}\omega_\mathrm{f}^2+i\omega\Gamma & -m_\mathrm{f}\omega_\mathrm{f}^2 & -i\omega\Gamma \\ -m_\mathrm{f}\omega_\mathrm{f}^2 & -m_\mathrm{f}\omega^2+m_\mathrm{f}\omega_\mathrm{f}^2 & 0 \\ -i\omega\Gamma & 0 & -m_\mathrm{m}\omega^2+m_\mathrm{m}\omega_\mathrm{m}^2+i\omega\Gamma \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

となり、運動方程式は

$$\mathcal{H}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\tilde{x}_\mathrm{i}\\ \tilde{x}_\mathrm{f}\\ \tilde{x}_\mathrm{m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_\mathrm{i}\omega_\mathrm{i}^2\\ 0\\ m_\mathrm{m}\omega_\mathrm{m}^2\end{pmatrix}\tilde{X} \tag{4.10}$$

となる。右辺は水平方向の地面振動 X による外力の項である。これにより、各質点の防振比は次式右辺で求められる。

$$\frac{1}{\tilde{X}}\begin{pmatrix}\tilde{x}_{\mathrm{i}}\\ \tilde{x}_{\mathrm{f}}\\ \tilde{x}_{\mathrm{m}}\end{pmatrix} = \mathcal{H}\cdot\begin{pmatrix}m_{\mathrm{i}}\omega_{\mathrm{i}}^2\\ 0\\ m_{\mathrm{m}}\omega_{\mathrm{m}}^2\end{pmatrix} \tag{4.11}$$

上下の振り子の長さ

上下段の振り子の長さの和は干渉計をおさめる真空容器の大きさや、懸架システムを支持する X-pendulum の大きさによって制限される。そこで全長を妥当な長さとして 0.50 m と定める。次に、これをどう上下段に割り振るかが問題になる。上下段の長さにより防振比がどう変化するかを計算したのが図 4.5 である。$l_{\mathrm{i}} + l_{\mathrm{f}} = 0.5\,\mathrm{m}$ に固定したまま、l_{i} を変化させている。それ以外のパラメータは固定している。

1Hz 以下のピークの高さは l_{i} が長いほど低くなる。これは、最低次のモードにおいて、l_{i} が長いときは中段マスと質点がほとんど同じように動き、ダンピングがよく効くからである。逆に l_{i} が短いと最低次のモードで下段の鏡が揺れても、中段マスはあまり動かず、ダンピングが効きにくくなる。

下の段を短くすると、下の段の振り子運動、垂直振動、剛体運動の周波数が高くなり、熱雑音特性や垂直防振の面で問題を生じるので、ワイヤ長をあまり短くしたくない。そこで防振、熱雑音の両者の要求の中庸をとるのであるが、l_{i} を短くしていったときに、 1Hz 以下のピークが許容できる範囲であるのは $l_{\mathrm{i}} = 0.25\,\mathrm{m}$ のときくらいまでであり、この値を採用した。

中段マスの質量

中段マスの質量 m_{i} のみを変化させた時の防振比の変化を描いたのが図 4.6 である。中段マスはダンピングマグネットから減衰力を受けるが、m_{i} が軽いと中段マスが大きく揺られて、ダンピングマグネットの共振の周波数にピークが立ち、また観測帯域の防振比も悪くなる。逆に m_{i} が重いと減衰力の効果が効きにくくなるため、 1Hz あたりが盛り上がる。m_{i} は 1kg かまたはそれよりも若干重い程度が適切である。

ダンピングマグネットの質量

ダンピングマグネットの質量 m_{m} のみを変化させた時の防振比の変化を描いたのが図 4.7 である。中段マスの質量を変えたときとおおむね同様の変動を受ける。 m_{m} が軽いとダンピングマグネットが振り子の共振に振られてしまい、 2Hz 付近にピークが立つ。また、m_{m} が重いとダンピングマグネットの共振周波数付近が強調される。以上のことから、m_{m} は 0.5kg あたりが良い。

マグネット支持の共振周波数

他の質点を取り外して、ダンピングマグネット単体にすると、

$$f_{\mathrm{m}} \equiv \frac{\omega_{\mathrm{m}}}{2\pi} \tag{4.12}$$

の周波数で共振が起こる。この共振周波数 f_{m} のみを変化させた時の防振比の変化を描いたのが図 4.8 である。f_{m} が 4Hz よりも低いと、振り子の共振と干渉してピークが立つ。減衰の Q 値はモードの周波数に反比例するため、f_{m} が高いと、ダンピングマグネットの揺れが減衰しにくくなり、マグネットの支持の共振周波数付近が強調される。また、マグネット支持の共振周波数以下ではダンピングマグネットはあまり動かないので防振比は周波数の -3 乗に比例する。f_{m} が高いと、これが周波数の -4 乗に戻る周波数が遅れるので好ましくない。このようなことから f_{m} は 5∼6Hz にするのが適当である。

減衰の大きさ

減衰の大きさ Γ のみを変化させたときの防振比の変化を描いたのが図 4.9 である。減衰が小さいと振り子運動とマグネットの運動が分離する傾向になるため、振り子の 2 つの共振とダンピングマグネットの共振のピークが立つ。減衰が大きすぎると、マグネットと中段マスがくっついたようになるため、1Hz あたりに下段の振り子のピークが出て、3Hz 付近に中段マスとマグネットが一緒に動く共振が出る。よって、Γ は 15 kg/s 程度が適当と思われる。

この減衰力はどのようにすれば分かるだろうか。たとえば、鏡を吊らずに中段マスと固定されたダンピングマグネットだけの 1 質点モデルで防振比を測定できるとすれば、Q 値と Γ の関係は、

$$Q = \frac{\mathrm{m_I}\sqrt{g/l_{\mathrm{i}}}}{\Gamma} \sim 0.4 \tag{4.13}$$

であるから、このような配置のもとで振り子共振の Q 値を測定すれば、減衰の大きさを知ることができる。

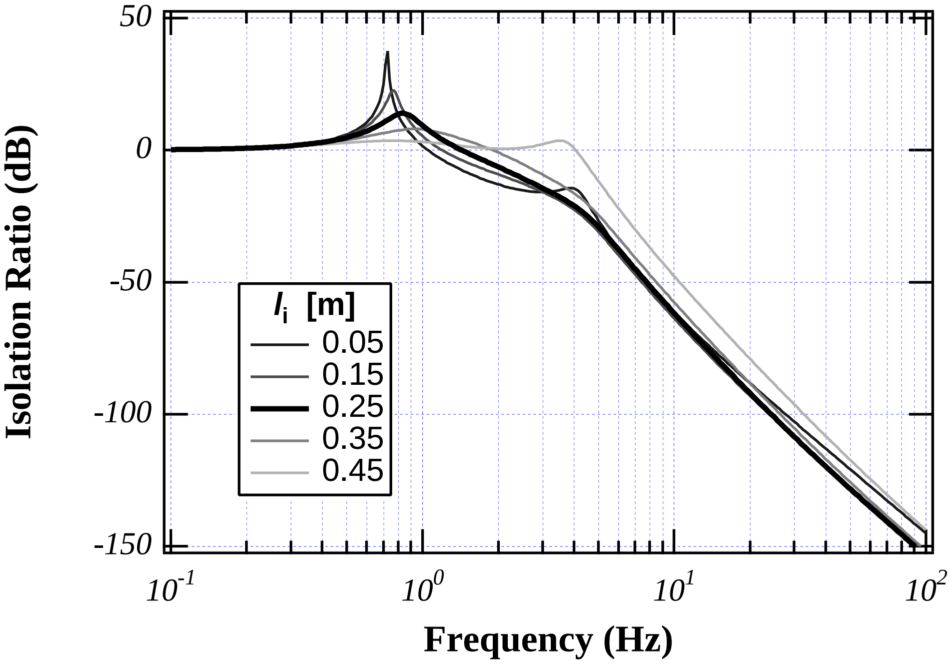


図 4.5　上段の振り子長 l_i を変えたときの防振比の変化

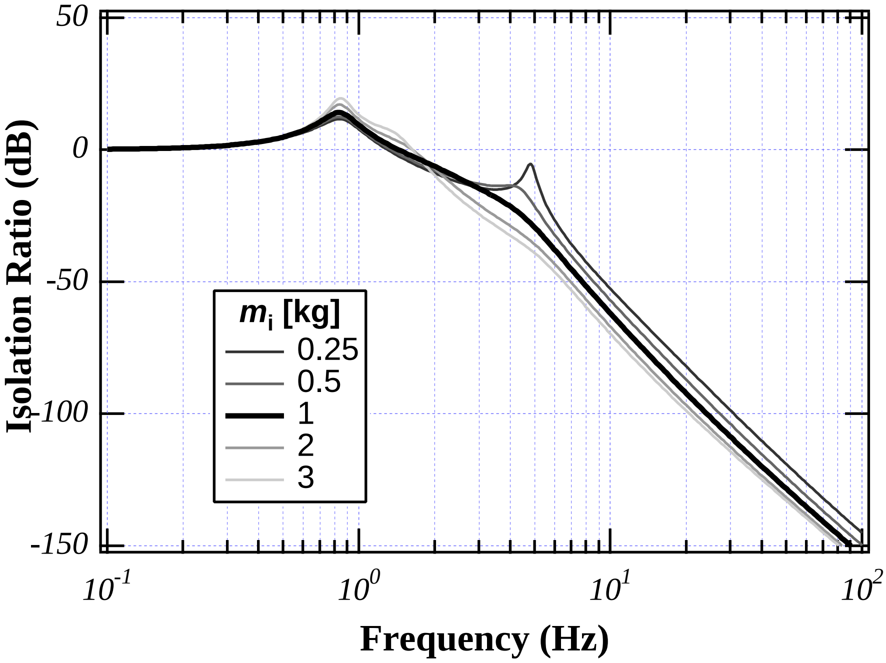


図 4.6　中段マスの質量 m_i を変えたときの防振比の変化

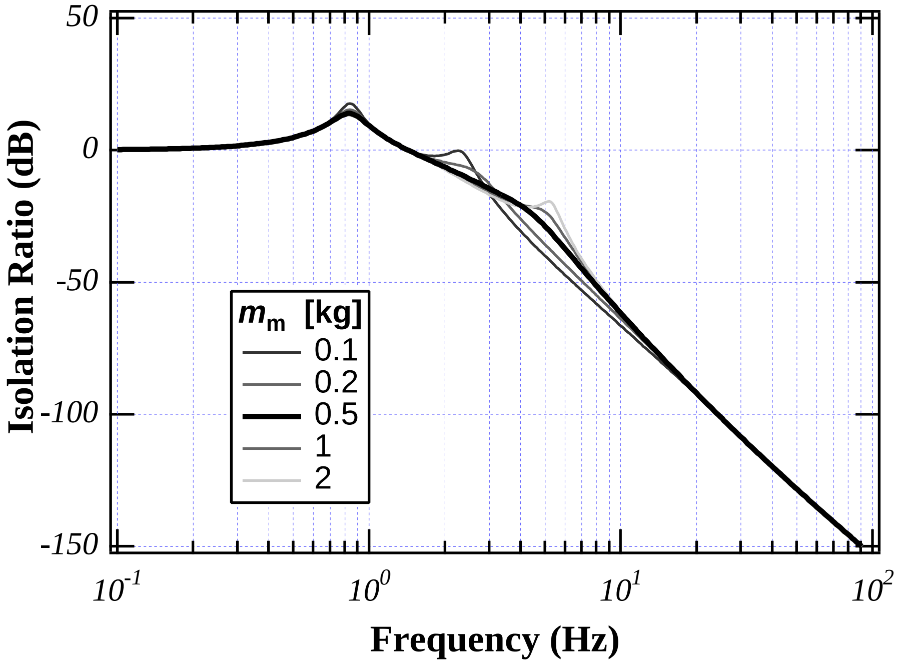


図 4.7　ダンピングマグネットの質量 m_{m} を変えたときの防振比の変化

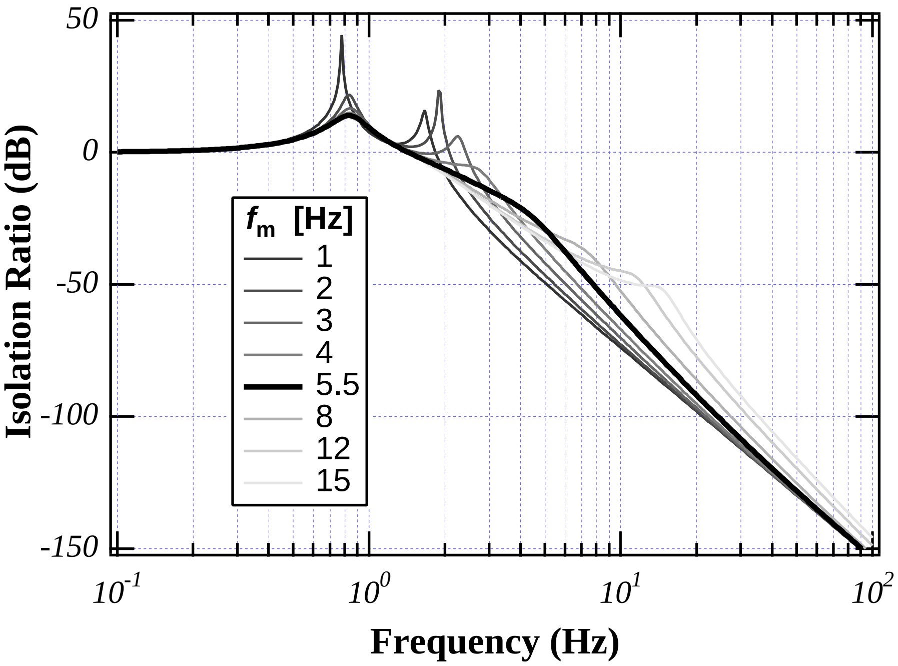


図 4.8　マグネットの弾性支持共振周波数 f_{m} を変えたときの防振比の変化

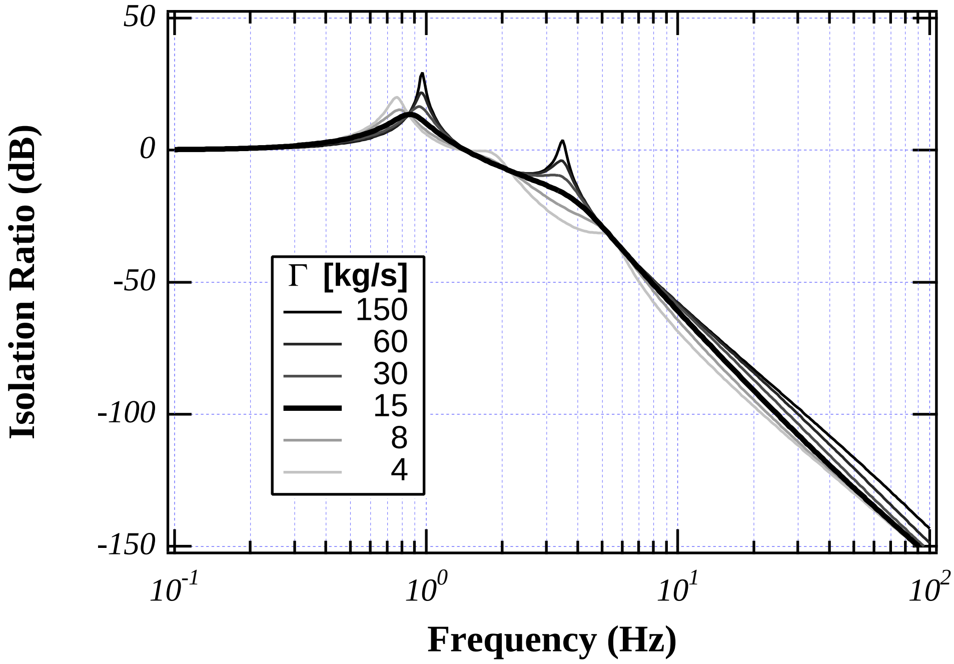


図 4.9　減衰の大きさ Γ を変えたときの防振比の変化

4.3.2　垂直防振比の調整

垂直防振に関しては

- マスをワイヤーで吊っていると、ワイヤーがバネの働きをする。また、ワイヤーだけでは硬すぎる場合バネを入れて共振周波数を下げなければならない。
- ダンピングを行わない場合、垂直方向の防振比 (z-z 防振比) は観測帯域では周波数の -4 乗に比例するが、実際には水平方向のダンピングを行う事で垂直方向にも自動的にダンピングがかかる。
- ダンピングマグネットが懸架システムのフレームに固定されている場合、z-z 防振比は観測帯域では周波数の -3 乗に比例するようになってしまう。そのため、観測帯域で防振比が周波数の -4 乗に比例するように、ダンピングマグネットにも z 防振を施す必要がある。

という事情がある。垂直方向の各共振周波数は数 Hz より下げることは難しく、Q 値を小さく抑えるには水平方向と同様のパラメータの調整が必要となる。具体的には縦防振用バネのバネ定数やダンピングマグネットの縦防振の共振周波数などを決定した。

力学モデル

中段マスと鏡は、バネとみなすことのできるワイヤーや縦防振機構によって吊られている質点 (質量 $m_{\rm i}$, $m_{\rm f}$) で、ダンピングマグネット (質量 $m_{\rm m}$) もサスペンションポイントと同じ箇所からバネで吊られている、というモデルを採用する (図 4.10)。

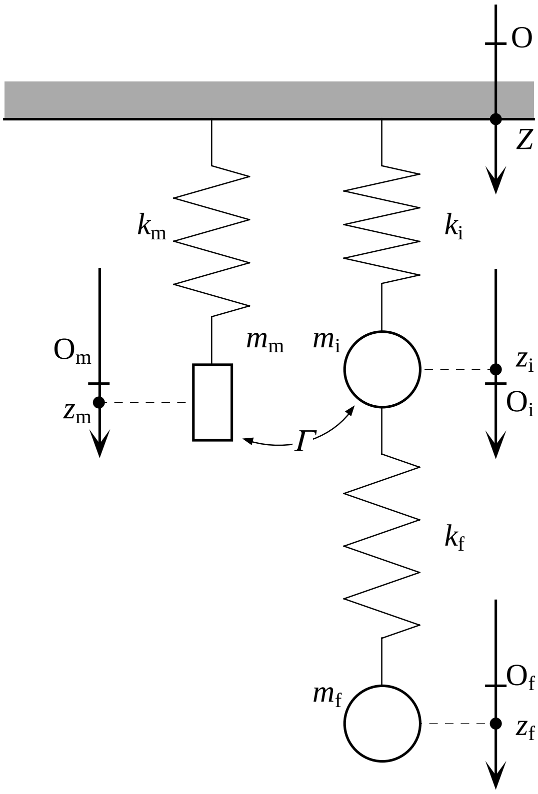


図 4.10　垂直方向の質点モデル

サスペンションポイント、中段マス、鏡、マグネットが中立の位置にある時をそれぞれの原点 $\mathrm{O}, \mathrm{O_i}, \mathrm{O_f}, \mathrm{O_m}$ とし、原点から垂直方向の変位をそれぞれ $Z, z_\mathrm{i}, z_\mathrm{f}, z_\mathrm{m}$ とする。

中段マス、下段マス、マグネットを支持しているバネのバネ定数はそれぞれ $k_\mathrm{i}, k_\mathrm{f}, k_\mathrm{m}$ である。マグネットと中段マスとの間には、相対速度に比例した抵抗力 (比例定数 Γ) が働くものとする。

運動方程式

以上のようなモデルにおいて、運動方程式は次のようになる。

$$\left\{\begin{array}{lcl} m_\mathrm{i}\ddot{z}_\mathrm{i} & = & -k_\mathrm{i}(z_\mathrm{i}-Z)-k_\mathrm{f}(z_\mathrm{i}-z_\mathrm{f})-\Gamma(\dot{z}_\mathrm{i}-\dot{z}_\mathrm{m}) \\ m_\mathrm{f}\ddot{z}_\mathrm{f} & = & -k_\mathrm{f}(z_\mathrm{f}-z_\mathrm{i}) \\ m_\mathrm{m}\ddot{z}_\mathrm{m} & = & -k_\mathrm{m}(z_\mathrm{m}-Z)-\Gamma\,(\dot{z}_\mathrm{m}-\dot{z}_\mathrm{i}) \end{array}\right. \tag{4.14}$$

ここで、

$$\frac{k_j}{m_j} \to \omega_j^2 \qquad (j = \mathrm{i,\ f,\ m}) \tag{4.15}$$

の置き換えを行なうと、周波数応答関数行列は水平モデルと全く同一になり、その $\mathcal{H}$ を使って防振比は、

$$\frac{1}{\tilde{Z}}\begin{pmatrix} \tilde{z}_\mathrm{i} \\ \tilde{z}_\mathrm{f} \\ \tilde{z}_\mathrm{m} \end{pmatrix} = \mathcal{H}\cdot\begin{pmatrix} m_\mathrm{i}\omega_\mathrm{i}^2 \\ 0 \\ m_\mathrm{m}\omega_\mathrm{m}^2 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

となる。なお垂直防振における Γ の大きさは水平防振の際のものと同じ値になると仮定している。

縦防振用バネのバネ定数

鏡を吊っている最終段は熱雑音を極力発生させないために、散逸のもととなる縦防振系を入れることはできないと考えられている [25]。最終段を柔らかくするにはワイヤーを極力細くするのであるが、あまりに細いとワイヤーが切れて危険であるため、細くするにも限界がある。1.0kg の石英の鏡を吊るには、直径 50μm のタングステンワイヤーが限界である[1]。4 本のワイヤー (2-turn) で鏡を吊るので、4 本まとめたバネ定数にして、

$$k_{\mathrm{f}} = 4\frac{E\pi r^2}{l_f} = 1.3 \times 10^4 \mathrm{N/m} \tag{4.17}$$

1 本あたりでは 3.1×10^3 N になる。ただし、ヤング率 $E = 4 \times 10^{11}$ N/m^2 を使用した。

z 方向の共振の共振周波数をこれ以上上下げようと思うと、サスペンションポイントに挿入する縦防振系のバネのバネ定数を下げるしかない。しかし、上下マスの合計 2kg を吊ることが可能でなければならず、数 Hz より柔らかいバネを製作するのは耐荷重の面で困難である。2kg のものを 5Hz の共振周波数で吊るとすると、

$$k_{\mathrm{i}} = (m_{\mathrm{i}} + m_{\mathrm{f}})(2\pi f)^2 = 2.0 \times 10^3 \,\mathrm{N/m} \tag{4.18}$$

で、4 本のバネで吊るとすると、1 本あたり 5.0×10^2 N/m になる。

ダンピングマグネット縦防振周波数

ダンピングマグネットの縦防振用バネの周波数を決める。他の質点を取り外して、ダンピングマグネット単体にすると、

$$f_{\mathrm{m-v}} \equiv \frac{\omega_{\mathrm{m}}}{2\pi} \tag{4.19}$$

の周波数で共振が起こる。この共振周波数 $f_{\mathrm{m-v}}$ を変化させた時の z-z 防振比の変化を描いたのが図 4.11 である。

ダンピングマグネットは約 0.5kg の質量しかなく、その縦防振を数 Hz 以下の周波数にするようなバネを作るのは難しい。また、図からも分かるように $f_{\mathrm{m-v}}$ が低いと低周波のピークが強調される。$f_{\mathrm{m-v}}$ が高周波側の共振 (20 数 Hz) より高くなると、ダンピングマグネットの共振周波数にピークが立ち、防振比の落ちが悪くなり、観測帯域まで影響が生じる。これらの事情から、 $f_{\mathrm{m-v}}$ は 10Hz 前後が適切である。

4.4 水平防振比と垂直防振比の比較

前節で定めたパラメータでは、x-x 防振比、z-z 防振比は図 4.12 のようになる。この防振比でどれだけの防振性能が出るかを計算した。

[1]著者の preliminary な実測によると、タングステンワイヤーの引っ張り強さは 250kg/mm^2 程度であることが分かった。これは 1.0kg の鏡を直径 50μm のタングステンワイヤーで 2 本吊りする際には安全係数にしておよそ 2 に相当する。ただし、これはクランプによってワイヤーが傷ついている効果も含んでいる可能性があり、クランプの質を改善することでより安全性を高めることができるのではないかと考えている。

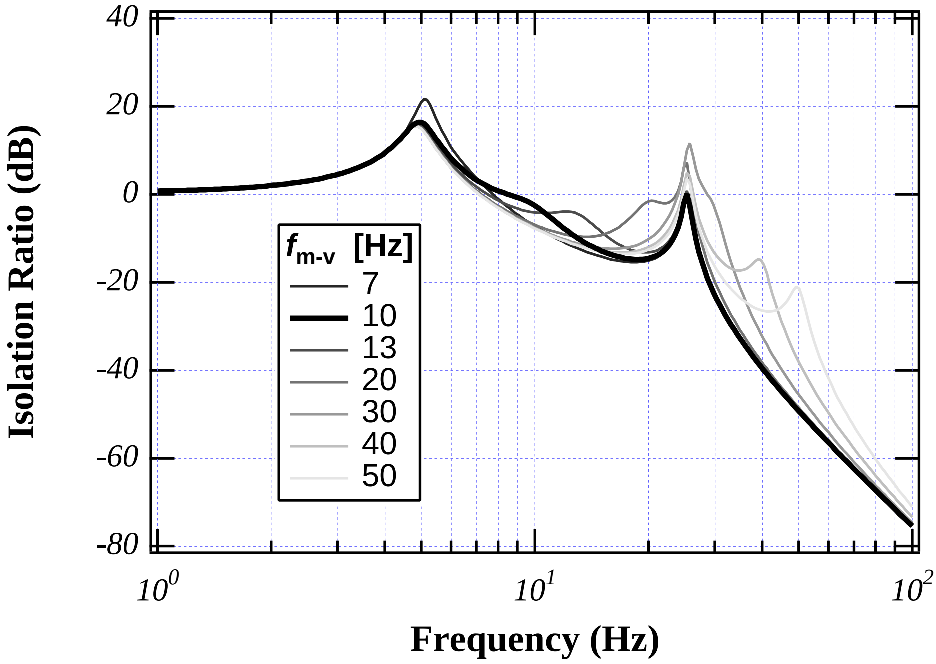


図 4.11　ダンピングマグネットの縦防振周波数 $f_{\mathrm{m-v}}$ を変えた時の z-z 防振比の変化

4.4.1　並進の RMS 振幅

とりあえず、TAMA300 の他の防振系は忘れて、この懸架システムに式 (3.8) の地面振動が等方的に加わると考えると、地面振動の水平方向成分 $\tilde{X}$ と水平防振比 T_{xx} から、水平方向の RMS 振幅として、

$$x_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\int_0^\infty \left|T_{xx}\tilde{X}\right|^2 \mathrm{d}f} = 3.7\mu\mathrm{m} \tag{4.20}$$

という値が得られる。同様に垂直方向の RMS 振幅は地面振動の垂直方向成分 $\tilde{Z}$ と水平防振比 T_{zz} から、

$$z_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\int_0^\infty \left|T_{zz}\tilde{Z}\right|^2 \mathrm{d}f} = 3.8\mu\mathrm{m} \tag{4.21}$$

となる。カップリング率 τ_{zx} は最悪でも数%と見積もられているので、垂直振動が光軸方向の RMS 振幅に寄与する量は無視しても構わない。

4.4.2　縦横カップリングの上限値

ここでも、懸架システムに直接に地面振動が加わると考える。

観測帯域の下限である 150Hz では、

$$\begin{cases} T_{xx} & = & -168\mathrm{dB} \\ T_{zx} & < & -90\mathrm{dB} \end{cases} \tag{4.22}$$

と垂直方向の振動の方がはるかに大きい。ゆえに光軸の振動が水平地面振動由来か垂直地面振動

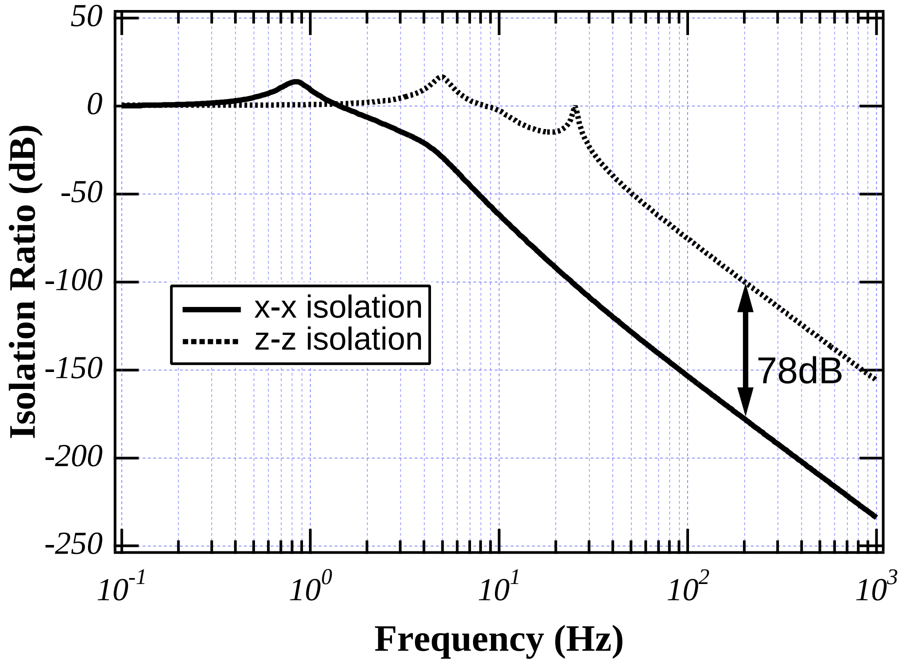


図 4.12　x-x 防振比 vs z-z 防振比

由来かは、カップリング率 τ_{zx} によって決まる。カップリング率が

$$\tau_{zx} < \frac{T_{xx}}{T_{zz}} = -78\text{dB} \qquad (f = 150\text{Hz}) \tag{4.23}$$

の範囲であるならば、観測帯域の振動は水平方向の地面振動によるものが主となる。この時には十分な水平防振比があるので重力波の観測が可能になる。

逆にカップリングが大きく、

$$T_{zz} \cdot \tau_{zx} > T_{xx} \tag{4.24}$$

となる場合、観測帯域の振動は垂直方向由来の振動が支配的になる。この場合に、地面振動が重力波検出を妨げないための条件は 150Hz において -165dB の防振比であるから、150Hz において $T_{zz} = -90$dB であることを用いて、

$$T_{zx} < -75\text{dB} \qquad (f = 150\,\text{Hz}) \tag{4.25}$$

となり、カップリングへの要求は結局ほとんど変わらない。

しかし、現実にはスタックにより、$f = 150$Hz では

$$\begin{cases} T_{xx} &= & -60\text{dB} \\ T_{zx} &< & -70\text{dB} \end{cases} \tag{4.26}$$

の防振比が得られる見込みであり [9]、また X-pendulum によっても防振が行われるので、懸架システムに要求される値は上記のものよりは軽減される。

4.5 TAMA300 用懸架システム試作機

以上のような過程を経て設計されたのが TAMA300 用懸架システム試作機である。この試作機は、実機の製作に先立ち防振特性試験を行い問題点を洗い出す目的で製作された。以下では各部について簡単に説明する。試作機のパラメータについては表 4.4 を参照のこと。

鏡

熔融石英製の鏡で大きさは ϕ100mm×60mm、質量は 1kg である。2 本の直径 50μm のタングステンワイヤーのループによって中段マスから吊り下げられる。下段の振り子長は 250mm。ビームの高さはブレッドボード面から 200mm である。設計では X-pendulum によりブレッドボードより 5mm 浮かされるため、フレームの底板の底面から鏡の高さまでは 195mm である。

中段マス

80mm×100mm×60mm のアルミ製直方体にワイヤークランプ機構をつけたもの。質量 1.2kg。4 本の直径 100μm のタングステンワイヤーによりサスペンションポイントから吊り下げられている。上の段の振り子長はおよそ 260mm である。

縦防振用バネ

サスペンションポイントとそれぞれのワイヤーの間にはバネ定数 500N/m の溶接ベローズが挿入されている。ベローズは独立に上下に動かすことができる調整機構に固定されている。

ダンピングマグネット

マグネットサポートは中段マスの側面を覆うようなロの字型をしている。x ステージの上に取り付けられた板から、ϕ2mm のステンレス棒で吊られている。棒とマグネットサポートの間には縦防振用の板バネが入れてある。マグネットサポートは着磁性の SUS403 製で、強力な希土類永久磁石を 8 個 (6.4.1 節参照) つけている。全てを含んだ重量は約 900g である。

コントロールブロック

フレームの天板には x ステージが取り付けられ、温度変化による干渉計の腕の長さの日周変化などに対応する。

x ステージの上には、その他のコントロールブロックやダンピングマグネット、および鏡の保護を取り付ける板がある。これらは x ステージの動きに追従して動き、相対位置が x ステージの動きによっては変化しないようにしてある。

y ステージ、z ステージはビームのセンタリングを行うためのものである。更に上にはアラインメントの粗調整、オートアラインメントコントロール用の Pitch ステージ、Yaw ステージがある。

全てのステージが picomotor というピエゾ素子で駆動するアクチェータにより、リモートで動かすことができるようになっている。またアラインメント用ステージには picomotor とピエゾ素子が入れてあり、オートアラインメントコントロールの際にはピエゾ素子を駆動することになる。

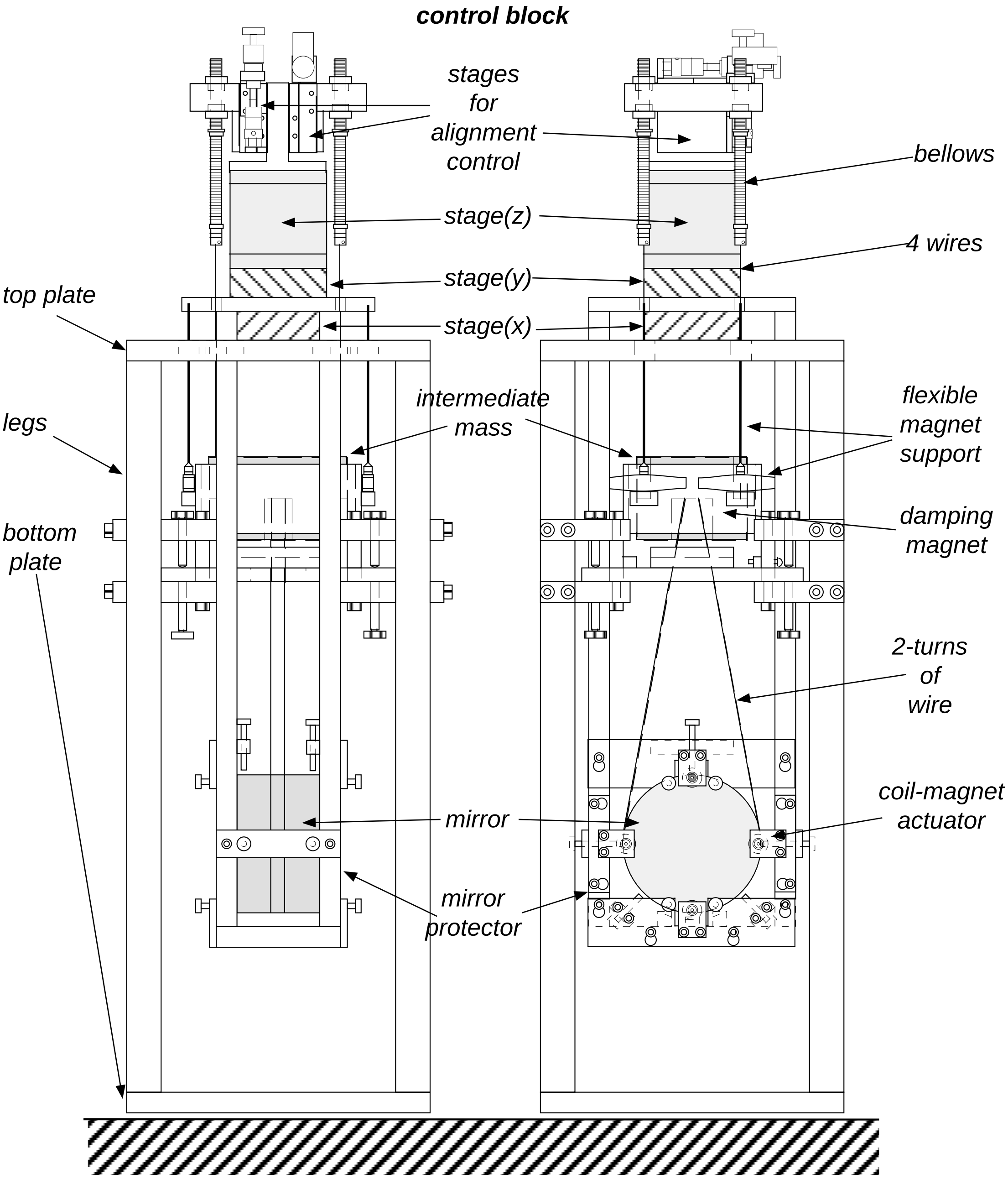


図 4.13　TAMA300 用懸架システム試作機

フレーム

SUS 製フレームは 220×220×560mm の直方体を形成しており、X-pendulum とは天板で結合される。X-pendulum と結合された状態では、ブレッドボードから 5mm だけ浮くよう設計されている。

4.6 この章の結論

この章では、まず、質点モデルにより防振比の計算を行い、2 段振り子に弾性支持したマグネットによるダンピングをかけることで、TAMA300 で要求される防振比と RMS 振幅を満たす潜在能力を持つ懸架システムを作ることが可能であることを示した。

次に、懸架システムの設計に必要なパラメータを決定した。懸架システムのパラメータは、表 4.1、表 4.2、表 4.3 の通りである。

そのパラメータを用いて、TAMA300 用懸架システム試作機を設計および製作した。完成した実物の試作機のパラメータは表 4.4 のようになった。

下段マスの質量	$m_{\mathrm{f}} = 1.034\mathrm{kg}$ ($\phi 100\mathrm{mm} \times 60\mathrm{mm}$ の熔融石英製円柱)
上下の振り子長さの和	$l_{\mathrm{i}} + l_{\mathrm{f}} = 0.5\,\mathrm{m}$
重力加速度	$g = 9.8\mathrm{m/s^2}$

表 4.1　あらかじめ決定されているパラメータ

上下段の振り子長	$l_{\mathrm{i}} = l_{\mathrm{f}} = 0.25\,\mathrm{m}$
中段マスの質量	$m_{\mathrm{i}} = 1\,\mathrm{kg}$
ダンピングマグネットの質量	$m_{\mathrm{m}} = 0.5\,\mathrm{kg}$
マグネット支持の共振周波数	$f_{\mathrm{m}} = 5.5\mathrm{Hz}$
減衰の大きさ	$\Gamma = 15\,\mathrm{kg/s}$

表 4.2　水平方向の防振比より決定されたパラメータ

上段の縦防振用バネのバネ定数 (4 本分)	$k_{\mathrm{I}} = 2.0 \times 10^3\,\mathrm{N/m}$
下段のワイヤーのバネ定数 (4 本分)	$k_{\mathrm{f}} = 1.3 \times 10^4\mathrm{N/m}$
マグネット支持の垂直共振周波数	$f_{\mathrm{m-v}} = 10\mathrm{Hz}$

表 4.3　垂直方向の防振比より決定されたパラメータ

中段マスの質量	$m_{\mathrm{i}} = 1.2\,\mathrm{kg}$
下段マスの質量	$m_{\mathrm{f}} = 1.0\mathrm{kg}$
ダンピングマグネットの質量	$m_{\mathrm{m}} = 0.9\,\mathrm{kg}$
上段の振り子長	$l_{\mathrm{i}} = l_{\mathrm{f}} = 0.26\,\mathrm{m}$
下段の振り子長	$l_{\mathrm{i}} = l_{\mathrm{f}} = 0.25\,\mathrm{m}$
マグネット支持の水平共振周波数	$f_{\mathrm{m}} = 4.8\mathrm{Hz}$
マグネット支持の垂直共振周波数	$f_{\mathrm{m-v}} = 9.0\mathrm{Hz}$
減衰の大きさ	$\Gamma = 15\,\mathrm{kg/s}$
上段の縦防振用バネのバネ定数 (4 本分)	$k_{\mathrm{i}} 1.9 \times 10^3\,\mathrm{N/m}$
下段のワイヤーのバネ定数 (4 本分)	$k_{\mathrm{f}} 1.3 \times 10^4\,\mathrm{N/m}$

表 4.4　実際の懸架システム試作機のパラメータ

第5章

懸架システム設計のためのモデル計算II

この章では製作した試作機について、より具体的な特性を調べるために行った、剛体モデル計算について説明している。

この章の構成は次のようになっている。

- まず 5.2 節では、計算に必要な行列を定めている。
- 次に 5.3 節では、理想的な懸架状態のときの共振周波数、Q 値、伝達関数、RMS 振幅について述べている。その結果 Pitch、Yaw のモードが問題となりそうであることが分かった。
- 5.4 節では、Pitch や Yaw のモードについて問題点の改善法を提案する。
- 5.5 節では懸架システムが懸架状態により非対称性をもつ場合に、それがどれだけ伝達関数を悪化させるか、どれだけのカップリングを生じるかをモンテカルロ計算を用いて評価した結果を述べている。

5.1 計算の目的

前章での質点モデル計算は簡便ではあるが、パラメータの決定のために多くの自由度を省略しており、現実の懸架システムの性質を理解するには程遠い。そこで本章では、既に製作された試作機について、問題が存在しているか、またあるとしたらどのように改善すればよいのか、剛体モデル計算を行い明らかにする。また、懸架システムに非対称性があると、理想的な懸架状態では生じないはずのカップリングが現れる。非対称性を含めた場合の数値計算も行い、その効果の見積りも行う。

5.2 計算のための準備

まず、剛体の運動方程式を解くために、行列要素に関する準備を行う。

5.2.1 力学モデル

力学モデルとして 2 次元のモデルを考える。x-z 平面内の 2 次元のモデル (図 5.1 左) では x, z, η の自由度以外は考えない。同様に y-z 平面内の 2 次元モデル (図 5.1 右) では y, z, ξ の自由度しか考えない。x-z 平面内のモデルを例にとって話を進める。

中段マスは剛体とし座標を $(x_\mathrm{i},\, z_\mathrm{i},\, \eta_\mathrm{i})$ で与える。鏡も剛体とし座標を $(x_\mathrm{f},\, z_\mathrm{f},\, \eta_\mathrm{f})$ で与える。ダンピングマグネットは質点であるとみなし、座標を $(x_\mathrm{m},\, z_\mathrm{m})$ で与える。行列やベクトルにおける各自由度の順番は、

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_\mathrm{i} \\ z_\mathrm{i} \\ \eta_\mathrm{i} \\ x_\mathrm{f} \\ z_\mathrm{f} \\ \eta_\mathrm{f} \\ x_\mathrm{m} \\ z_\mathrm{m} \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

とする。

また、サスペンションポイントの揺れに対しても座標 $(X,\, Z)$ を与えるが、これは自由度ではなく外乱を導入するための変数であるから、行列中には席を持たない。外乱ベクトルはこの 2 変数の線形結合で表される。以下の計算では、 X 方向に振動を加える場合 (x 加振) と Z 方向に振動を加える場合 (z 加振) とで分け、それぞれ独立の計算を行っている。

5.2.2　運動方程式

この 8 自由度系の運動方程式は次のように書くことが出来る。ただし、$\mathcal{K}$, $\vec{f_x}$, $\vec{f_z}$ はそれぞれ剛性行列、水平地面振動 X により導入される外力のベクトル、垂直地面振動 Z により導入される外力である。ここで $(\vec{v})_i$ はベクトル $\vec{v}$ の i 成分を意味している。

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} m_\mathrm{i}\ddot{x}_\mathrm{i} & + & (\mathcal{K}\cdot\vec{x})_{x_\mathrm{i}} & + & \Gamma(\dot{x}_\mathrm{i}-\dot{x}_\mathrm{m}) & = & (\vec{f_x})_{x_\mathrm{i}}X & + & (\vec{f_z})_{x_\mathrm{i}}Z \\ m_\mathrm{i}\ddot{z}_\mathrm{i} & + & (\mathcal{K}\cdot\vec{x})_{z_\mathrm{i}} & + & \Gamma(\dot{z}_\mathrm{i}-\dot{z}_\mathrm{m}) & = & (\vec{f_x})_{z_\mathrm{i}}X & + & (\vec{f_z})_{z_\mathrm{i}}Z \\ I_\mathrm{i}\ddot{\eta}_\mathrm{i} & + & (\mathcal{K}\cdot\vec{x})_{\eta_\mathrm{i}} & + & \Gamma_\eta\dot{\eta}_\mathrm{i} & = & (\vec{f_x})_{\eta_\mathrm{i}}X & + & (\vec{f_z})_{\eta_\mathrm{i}}Z \\ m_\mathrm{f}\ddot{x}_\mathrm{f} & + & (\mathcal{K}\cdot\vec{x})_{x_\mathrm{f}} & & & = & 0 & & \\ m_\mathrm{f}\ddot{z}_\mathrm{f} & + & (\mathcal{K}\cdot\vec{x})_{z_\mathrm{f}} & & & = & 0 & & \\ I_\mathrm{f}\ddot{\eta}_\mathrm{f} & + & (\mathcal{K}\cdot\vec{x})_{\eta_\mathrm{f}} & & & = & 0 & & \\ m_\mathrm{m}\ddot{x}_\mathrm{m} & + & k_x & + & \Gamma(\dot{x}_\mathrm{m}-\dot{x}_\mathrm{i}) & = & k_xX & & \\ m_\mathrm{m}\ddot{z}_\mathrm{m} & + & k_z & + & \Gamma(\dot{z}_\mathrm{m}-\dot{z}_\mathrm{i}) & = & & & k_zZ \end{array} \right. \tag{5.2}$$

式 (5.2) から、慣性行列 $\mathcal{M}$ は次のような対角行列になる。

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_\mathrm{i} & & & & & & & \\ & m_\mathrm{i} & & & & & & \\ & & I_\mathrm{i} & & & & & \\ & & & m_\mathrm{f} & & & & \\ & & & & m_\mathrm{f} & & & \\ & & & & & I_\mathrm{f} & & \\ & & & & & & m_\mathrm{m} & \\ & & & & & & & m_\mathrm{m} \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

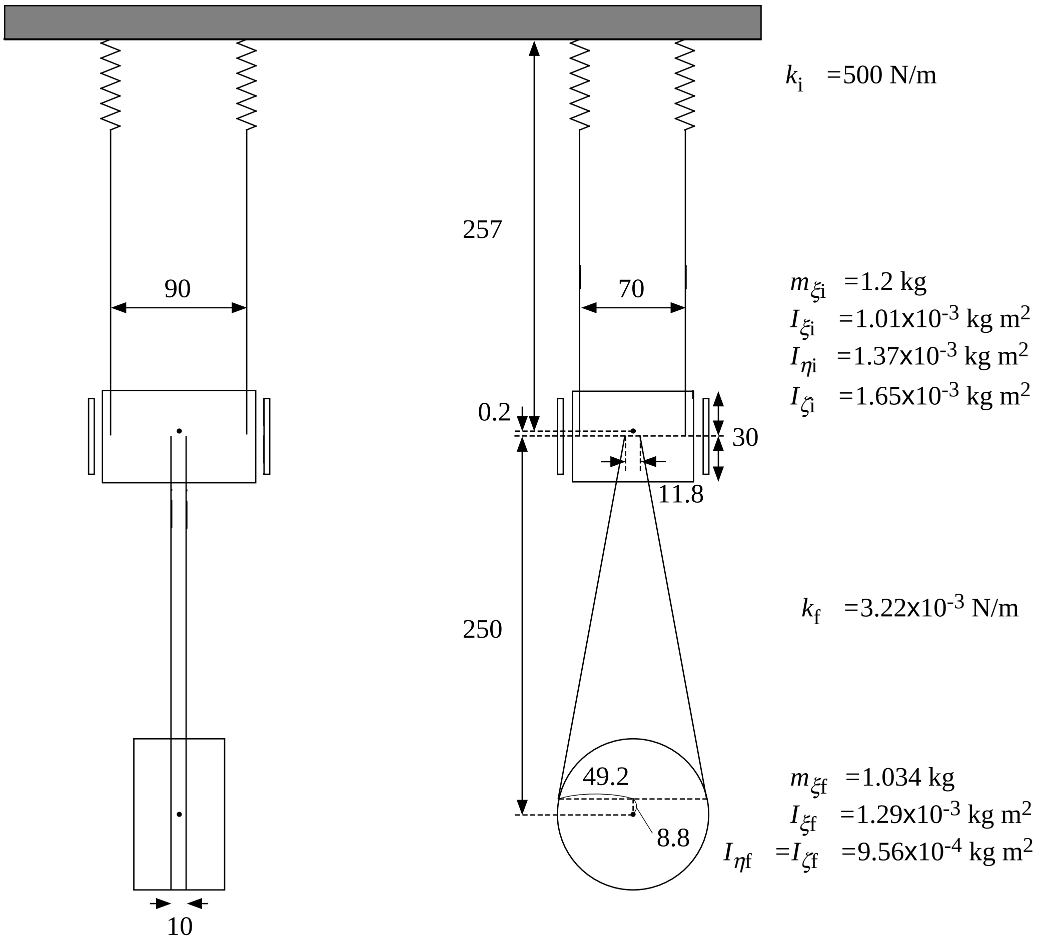


図 5.1　基本となる力学モデル

減衰行列 $\mathcal{C}$ は

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \Gamma & & & & & & -\Gamma & \\ & \Gamma & & & & & & -\Gamma \\ & & \Gamma_\eta & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ -\Gamma & & & & & & \Gamma & \\ & -\Gamma & & & & & & \Gamma \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

となる。回転に対するダンピングは Γ に比例するはずなので、比例定数を α と置いて、

$$\Gamma_\eta = \alpha\Gamma \tag{5.5}$$

とする。ここで、この比例定数 α はどれくらいになるのか、見積もりを行ってみよう。2 次元の領域 Ω をもつ物体を考える (図 5.2 右)。回転面内でダンピングが一様であると仮定する。Ω 内の面積素片 $\mathrm{d}\Omega$ を考えると、そこに働く減衰力 $\mathrm{d}F$ は、適当な比例定数 γ を用いて、

$$\mathrm{d}F = \gamma r\dot{\theta}\mathrm{d}\Omega \tag{5.6}$$

である。よって面積素片にかかる減衰力によるトルクは、

$$\mathrm{d}\tau = \gamma r^2\dot{\theta}\mathrm{d}\Omega \tag{5.7}$$

である。これを面内で積分すれば正味のトルクが計算される。

$$\Gamma_\theta\dot{\theta} \equiv \tau = \int_\Omega \gamma r^2\dot{\theta}\mathrm{d}\Omega \tag{5.8}$$

並進運動について考えると、$\Gamma = \gamma\int_\Omega \mathrm{d}\Omega$ であるから、

$$\alpha \equiv \frac{\Gamma_\theta}{\Gamma} = \frac{\displaystyle\int_\Omega r^2\mathrm{d}\Omega}{\displaystyle\int_\Omega \mathrm{d}\Omega} \tag{5.9}$$

慣性モーメントを求める計算も全く同様に行える。物体の (質量の) 面密度を一様に ρ と仮定して、慣性モーメント I_θ を求める計算を行うと、

$$I_\theta\ddot{\theta} = \tau = \int_\Omega \rho r^2\ddot{\theta}\mathrm{d}\Omega \tag{5.10}$$

並進運動について考えると、$m = \rho\int_\Omega \mathrm{d}\Omega$ であるから、慣性モーメント I_θ と質量 m の比

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega r^2\mathrm{d}\Omega}{\displaystyle\int_\Omega \mathrm{d}\Omega} = \frac{I_\theta}{m} \tag{5.11}$$

はまさに α である。よって、

$$\alpha = \frac{I_\theta}{m} \tag{5.12}$$

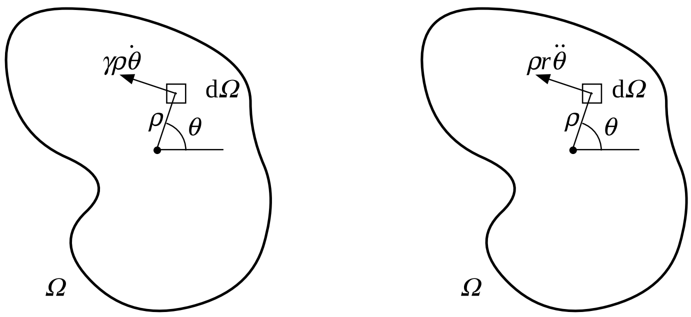


図 5.2　回転の減衰の大きさの計算 (左) と慣性モーメントの計算 (右)

実際にはダンピングも質量の面密度も一様ではないが、慣性モーメントと質量の比を回転の減衰の大きさの見積もりとして採用できるだろう。

剛性行列や外力ベクトルのうち、中段マスと鏡に関する部分については、3.3.5 節で解説した手法によって得られるが、ダンピングマグネットに関する剛性行列の値は水平、垂直のバネ定数で定める。マグネットの弾性支持の共振周波数 f_{m}, $f_{\mathrm{m-v}}$ とマグネットの質量 m_{m} を用いて、

$$k_x = m_{\mathrm{m}}(2\pi f_{\mathrm{m}})^2 \tag{5.13}$$

$$k_z = m_{\mathrm{m}}(2\pi f_{\mathrm{m-v}})^2 \tag{5.14}$$

として与える。

5.3　理想的に吊られている場合

まず、マスや鏡が完全に決めたとおりに吊られている場合を考える。このような理想的な場合には、系の対称性から、鏡の 3 次元の運動は次のように自由度を分離して考えることができる。

1. x_{i}, η_{i}, x_{f}, η_{f}, x_{m} の結合した、x および Pitch に関する振動。
2. y_{i}, ξ_{i}, y_{f}, ξ_{f}, y_{m} の結合した、y および Roll に関する振動。
3. z_{i}, z_{f}, z_{m} の結合した、z に関する振動。
4. ζ_{i}, ζ_{f} の結合した、Yaw に関する振動。

そこで、x, z に関する計算と y, z に関する計算を別々に行い、前者からは 1 に関する情報を取得し、後者からは 2, 3 に関する情報を取得する。 4 の Yaw は並進運動と結合しないため、ここでは扱うことはできない。2 段振り子の Yaw 振動の共振周波数については補遺 B で述べている計算を用いている。z 振動に関して、y と一緒に計算したものを使用するのは、鏡を吊るワイヤーは y 方向に絞られており、この効果を正確に取り入れるためである。

周波数 Hz	Q 値	モードの種類 (主に揺れる自由度)
0.75	32.5	Yaw
0.87	3.4	Pendulum (Y)
0.87	3.5	Pendulum (X)
1.8	0.74	Pendulum (Y)
1.8	0.74	Pendulum (X)
2.2	1.1	Yaw
3.2	133.4	Pitch
4.1	2.1	Magnet-Pendulum (X)
4.1	2.1	Magnet-Pendulum (Y)
4.7	4.7	Z
7.7	4.0	Roll
8.8	3.3	Magnet-Z
8.9	4.6	Pitch
24.1	25.4	Z
25.7	409.0	Roll

表 5.1　試作機の各剛体モードの固有振動数、Q 値の計算

5.3.1　各モードの共振周波数と Q 値の計算

運動方程式から共振周波数とその Q 値を求めたのが、表 5.1 である。

共振周波数が高いと、たとえ共振より高い周波数で伝達関数が小さくなっていくとしても観測帯域まで悪影響が生じる可能性がある。また、渦電流ダンピングでは高い周波数のモードはダンピングがかかりにくく、Q 値が大きくなる。この 2 つの理由から、剛体モードの周波数は低い方が良い。

計算の結果、この懸架システムには次のような Q 値の高いモードが存在することが分かった。

周波数 Hz	Q 値	モード
0.75	32.5	Yaw
3.2	133.4	Pitch
24.1	25.4	Z
25.7	409.0	Roll

これらのモードは干渉計の動作上問題となる可能性がある。特に Yaw と Pitch のモードが問題となるので、その改善法は以降で扱ってゆく。

5.3.2　伝達関数

周波数応答関数行列と外力ベクトルから、各伝達関数を求めた。

図 5.3 は各並進方向に対する防振比である。磁石を弾性支持していることにより、どの方向に

ついても観測帯域では周波数の -4 乗で防振比が向上し、平行線になる。y-y 防振比と z-z 防振比はそれぞれ 25.7Hz と 24.1Hz に Q 値の大きい共振を持つため、観測帯域での防振比が x-x 防振比より悪くなっている。

観測帯域での x-x 防振比と y-y 防振比、z-z 防振比との差は、

$$\frac{T_{xx}}{T_{yy}} = -21\mathrm{dB} \tag{5.15}$$

$$\frac{T_{xx}}{T_{zz}} = -77\mathrm{dB} \tag{5.16}$$

であるから、各カップリング率がこの値を超えると、観測帯域の振動は y 振動または z 振動由来のものが支配的となる。y-x カップリングとして、約 -20dB つまり 10%を実現するのは容易であるので、25.7Hz の鋭いピークの影響が干渉計の信号に現れる可能性はあるが、共振周波数付近の局所的なものであり、観測帯域で問題となることはない。

しかし、z-x カップリングとして、-77dB を達成するのは非常に困難である。なぜなら、懸架システムには必ず吊り方などに非対称性が存在し、その結果 z-x カップリングが生じてしまうからである。このことについては 5.5 節における非対称性を含めた防振比の計算でより具体的に扱っている。

次に角度揺れ特性 (図 5.4) を見る。防振比が低周波で 1 であるのに対し、角度揺れ特性は低周波に行くにつれ、伝わりにくくなる。これは直観的には、非常にゆっくりと振り子を動かすと追従して振り子は並進するが、鏡の傾きは励起されない、ということに対応する。そして、振り子共振の周波数で特性は山の頂上に達し、角度揺れ共振の周波数を過ぎると、防振がききはじめ、特性が良くなってゆく。このように、主に角度揺れ特性が悪いのは、振り子共振から角度揺れ共振までの間であり、角度揺れのパワーはこの周波数帯に集中する。

5.3.3 RMS 振幅

並進方向の RMS 振幅

地面振動のモデルとして式 (3.8) を使って、x, y, z 各方向の RMS 振幅を計算した。

$$x_{\mathrm{RMS}} = 3.7\mu\mathrm{m}$$
$$y_{\mathrm{RMS}} = 3.7\mu\mathrm{m}$$
$$z_{\mathrm{RMS}} = 3.7\mu\mathrm{m}$$

地面振動の RMS 振幅は振り子の共振周波数よりも低い周波数の寄与で決まっているので、懸架システムの防振によって RMS 振幅が改善されることはない。しかし、計算値からは地面振動の RMS 振幅 3.65μm を大幅に悪化させることはないこともわかり、問題はない。また、どの方向にもほぼ等しく揺れるので、カップリング率が最悪 10%であるとしても、x 方向の RMS 振幅に y や z の振動が寄与することはなく、x 方向の地面振動のみによって決まる。

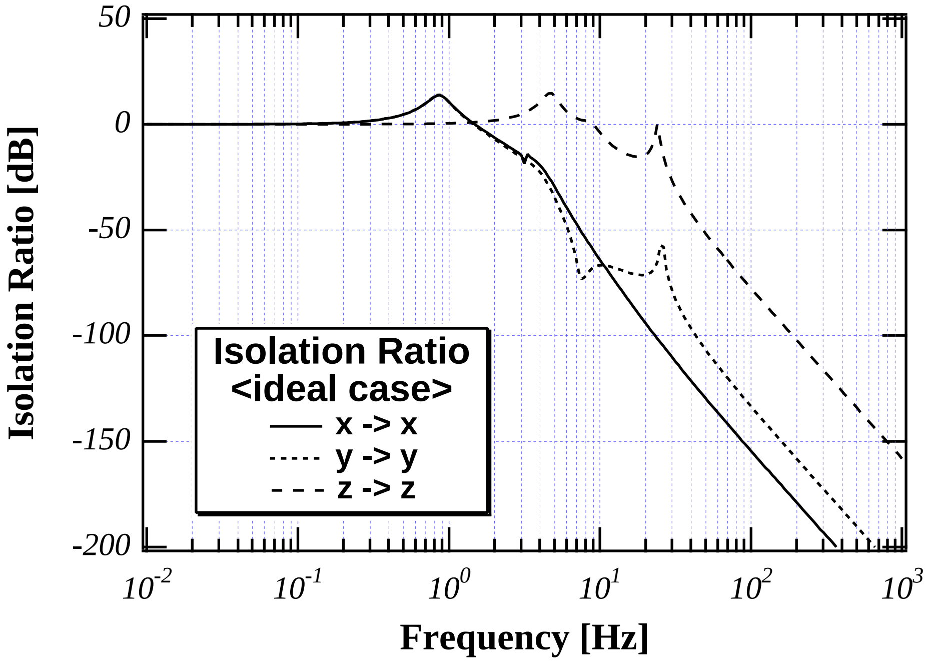


図 5.3　試作機の x-x、y-y、z-z 防振比の計算

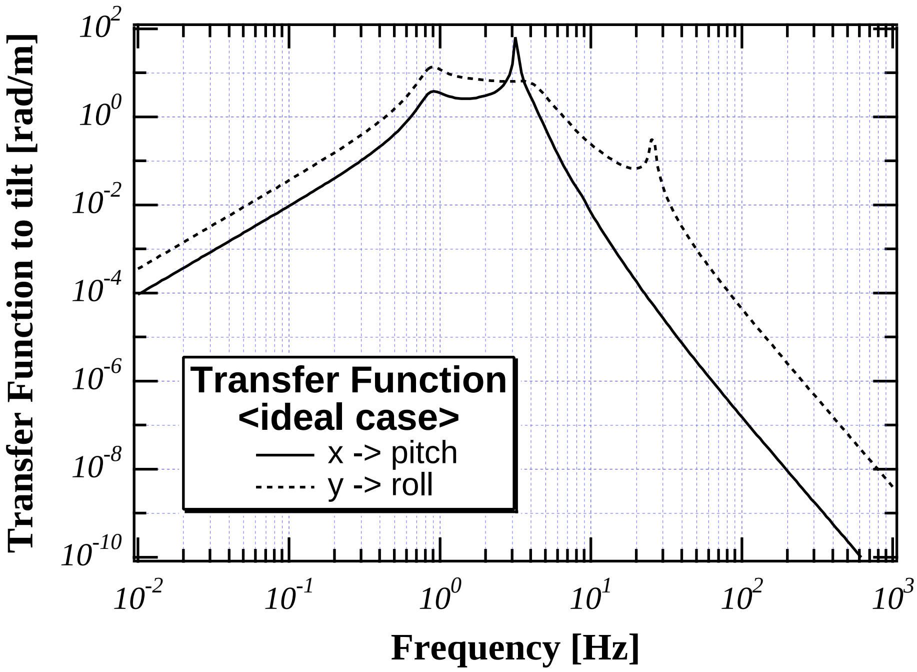


図 5.4　試作機の x-Pitch 特性、y-Roll 特性の計算

角度揺れ RMS 振幅

同じように地面振動モデルから、x 方向の地面振動により励起される Pitch 揺れの RMS 振幅を求めた。

$$\eta_{\mathrm{RMS}} = 5.3 \times 10^{-7}\mathrm{rad} \tag{5.17}$$

この値は、3.2.4 節で述べたミスアラインメントの許容値 ($\eta_{\mathrm{RMS}} < 10^{-7}$rad) を満たさず、問題となる。 Pitch モードの Q 値が高いこと、Pitch モードの周波数が低いこと、が RMS 振幅を悪化させる原因となっている。

5.4 角度揺れ振動の Q 値、RMS 値の改善法について

試作機の防振特性の計算から、鏡の Pitch 運動と Yaw 運動の Q 値が高く、Pitch についてはRMS 振幅が問題となることが分かった。鏡が大きく振動して、コントラストやリサイクリングゲインの低下が起これば、感度を悪化させてしまう。この感度悪化は現実に東京大学理学部 3mFPMIで起こったことであり [26]、改善策を講じて回避しなければならない。

まず、Q 値を低くする方法について考えてみる。試作機では、鏡がピッチ共振するモードは周波数が 3.2Hz と振り子共振に近い周波数になっている。これは、10mm という狭いワイヤー間隔で吊っていること、ワイヤーが 50μm と細いことによる。それに対し、中段マスはベローズという柔らかいバネで吊ってはいるものの、90mm という広い間隔で吊っているため、鏡ほど Pitch共振の周波数は低くない。このような事情から、2 つの Pitch 共振のうち、 3.2Hz の Pitch 共振では鏡だけがよく揺れ中段マスはあまり揺れない。また、8.9Hz のモードでは中段マスはよく揺れるが、下のマスは防振されるため、あまり揺れない。つまり、 2 つのモードの結合が弱い。

ダンピングは中段マスにかけられているため、中段マスがあまり揺れない 3.2Hz のモードのダンピングは弱くなる。これが Q 値が大きくなる原因である。Yaw についても同様で、中段マスと鏡の Yaw 振動はあまり結合していないため、Q が大きい。

これらの振動の結合をよくするためには、中段マスの Pitch 共振周波数と鏡の Pitch 共振周波数を近づければよい。具体的には次のような変更案が考えられる。

1. 縦防振用のバネのバネ定数を小さくし、中段マスの Pitch 共振周波数を下げる。
2. 中段マスを吊るワイヤーの x 軸方向の間隔 (90mm) を小さくして、中段マスの Pitch 共振周波数を下げる。
3. 鏡を吊るワイヤーを太くして、鏡の Pitch 共振周波数を上げる。
4. 鏡を吊るワイヤーの光軸方向の間隔 (10mm) を広げ、鏡の Pitch 共振周波数を上げる。

次に RMS 振幅について考えてみる。 Q 値を下げることは RMS 振幅を小さくする方法の一つである。しかし、Q 値が十分に小さくなっても、角度揺れ特性にピークはなくなるものの、特性自体が小さくなり 0 に近づくわけではなく台形状の特性は依然として残る。よって、RMS 振幅の改善は頭打ちになる。この台形の高さを低くするには Pitch の共振周波数を高くする必要がある。これは上記の $3, 4$ が有望であるということを意味する。しかし、あまり高くすると渦電流による

ダンピングが弱くなり、 逆に Q 値が大きくなるという問題と、熱雑音からの要請を満たすことができなくなるという問題が起こる。そこで最適値を探すために、1 ～ 4 の手法について Pitch モードの Q 値と RMS 振幅の改善の可能性について調べた。

RMS 振幅を小さくするもう一つの方法として、水平運動と回転運動の結合を小さくするという方法がある。中段マスも鏡も重心と同じ高さで吊れば並進運動と回転運動が完全に分離するので、水平な地面振動によって角度揺れが励起されることはなくなる。これは補遺 B の周波数応答関数行列の計算 (121 ページ) において、鏡の並進と回転の結合の強さを表す剛性行列の非対角項 $K_{x\eta} = mgz_0/R_0$ が鏡の重心の高さとワイヤークランプ点の高さのずれ z_0 に比例するということからも分かる。そこで、試作機のパラメータでワイヤーが鏡を離れる点をなるべく重心と同じ高さになるように調整することを考える。

Yaw モードについては並進地面振動によりどれだけ励起されるか不明であるので見積もりを行うことができないが、Q 値を下げて、RMS 振幅を改善するという方針で考えた。

5.4.1 Q 値を下げるための試行

各条件において、図 5.1 の懸架システム試作機のパラメータを以下で述べるように変化させ、理想的な懸架状態にある 2 次元の 2 段振り子の剛体運動計算を行い、Q 値と RMS 振幅の変化を検討した。

(1) 縦防振用バネのバネ定数を変化させた場合

縦防振用のベローズのバネ定数を小さくして、より中段マスの Pitch 振動を柔らかくしようとする方法である。バネ定数を元々の 500N/m から 200, 100, 50N/m と小さくしてゆき、Q 値と RMS 振幅の変化を見た (図 5.5)。バネを柔らかくするに従って、周波数の低い方の Pitch 共振の Q 値は劇的に下がる。周波数の高い方の Pitch 共振周波数もそれにつられて周波数が下がるが Q 値はほとんど変化しない。しかし、RMS 振幅の改善は小さい。

(2) 上側ワイヤーの間隔を変化させた場合

上側ワイヤーの間隔を狭くして、より中段マスの Pitch 振動を柔らかくしようとする方法である。間隔を 90mm から 10mm まで 20mm 間隔で変えて、 Q 値と RMS 振幅の変化を見た (図 5.6)。間隔を狭くするとほぼ (1) と同様の変化をする。ここでもやはり、RMS 振幅の改善は小さく、周波数を低くする方向の変化はあまり効果がない、ということが分かった。

(3) 下側ワイヤーの太さを変化させた場合

下側ワイヤーを太くして、より鏡の Pitch 振動を硬くしようとする方法である。ワイヤーの太さを 50μm, 60μm, 100μm, 150μm と変えて、Q 値と RMS 振幅の変化を見た (図 5.7)。低い周波数の Pitch モードは、周波数は高く Q 値は小さくなり、高い周波数の Pitch モードは周波数は高く Q 値は大きくなる。RMS 振幅は太くするに従って改善されてゆく。

しかし、この方法には大きな弊害がある。一つはワイヤーを太くしたことにより、縦振動の共振周波数が高く、Q 値も大きくなることである。もともとワイヤー縦振動の周波数で観測帯域の

z-z 防振比が制限されており、これ以上硬くするのは好ましくない。さらにワイヤーを太くするとワイヤーの弦共振周波が低くなり、熱雑音と防振の両面からみて致命的である。

以上の理由により、この方法はデメリットの方が大きく、好ましくない。

(4) 下側ワイヤーの間隔を変化させた場合

鏡を吊るワイヤーの間隔を広げて、より鏡の Pitch 振動を硬くしようとする方法である。ワイヤーの間隔を 10mm から 25mm まで 5mm 間隔で変えて、 Q 値と RMS 振幅の変化を見た (図 5.8)。間隔を広くするとほぼ (3) と同様の変化をし、RMS 振幅も改善される。さらに、縦振動周波数はワイヤーの太さにより決まるので、ワイヤー間隔に依存せず問題ない。また弦モード周波数も変化しない。

そこで、ワイヤーの間隔を試作器の 10mm の 2 倍の 20mm にすることを考える。この時に Yaw モードについて共振周波数、Q 値の計算を行うと、

変更前		変更後	
周波数 Hz	Q 値	周波数 Hz	Q 値
0.75	32.5	1.1	8.6
2.2	1.1	2.3	1.2

と変更前よりも Q 値が下がっていることが確認された。

以上の結果として、下側ワイヤーの間隔を広げる方法は、Pitch と Yaw 双方に良い影響を与える有望な方法であることが分かった。回転の周波数が上がることは熱雑音にしわ寄せが行くことになるので、どれだけの変化が許されるのかは、アラインメント制御の要求と熱雑音の要求を突き合わせて考える必要がある。

5.4.2 水平-角度揺れ結合を小さくするための改善

試作機の中段マスはワイヤーのクランプ点と重心の高さを極力近づけている。しかし、鏡に単にワイヤーかけただけだと、鏡の重心とワイヤーが鏡を離れる点の高さは 8.8mm 離れている (図 5.1 参照)。このギャップを小さくすれば、水平運動と回転運動の結合が小さくなるので、水平地面振動による角度揺れの励起を小さくすることができる。

懸架システムを干渉計に組み込む際には、ワイヤーが鏡を離れる点にスタンドオフとよばれる丸棒状のものを挟む (図 5.9)。スタンドオフはワイヤーが鏡を離れる点を確定し、接触点での摩擦を減らすので、振り子の Q 値を上げて振り子の熱雑音を小さくするためには不可欠なものである。この位置を重心の高さに近づけることによって角度揺れがどれだけ低減されるか、計算を行ったのが図 5.10 である。スタンドオフを入れることにより、ワイヤーが鏡を離れる点を重心の高さから 1mm にできたとるすると、角度揺れ特性は 1 桁近く良くなる。高さのギャップは小さければ小さいほど良いので、スタンドオフの位置を注意深く定めるべきである。

図 5.10 にはワイヤー間隔を 20mm にしたときの角度揺れ特性も付記してある。ワイヤー間隔が

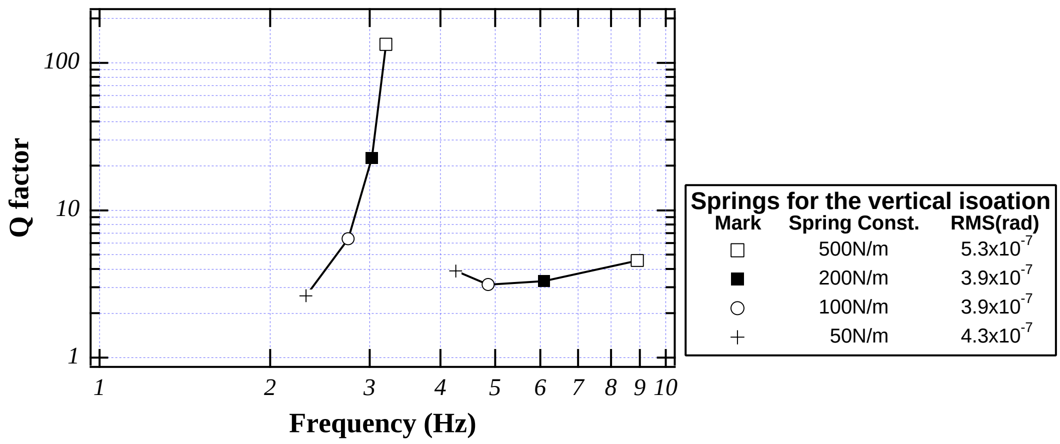


図 5.5　試作機の縦防振用バネのバネ定数を変えた時の Pitch 共振の周波数と Q 値の変化。

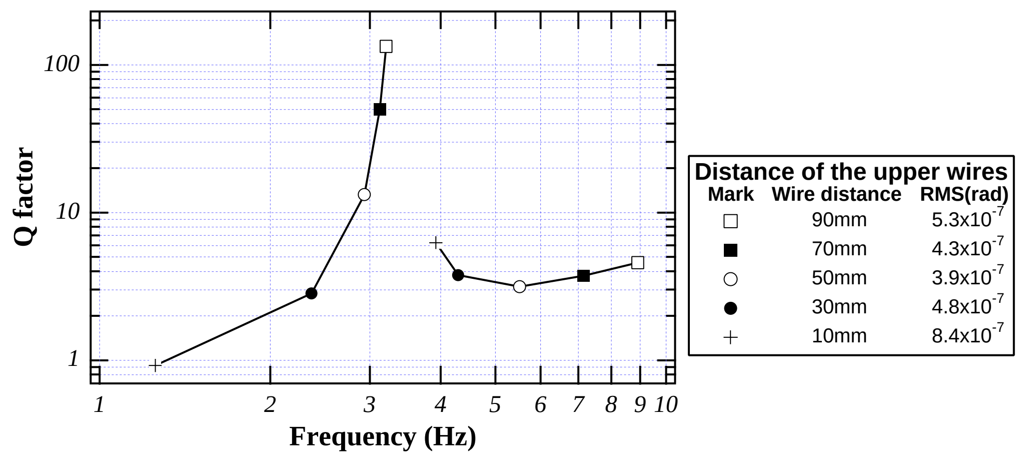


図 5.6　試作機の上側ワイヤーの間隔を変えた時の Pitch 共振の周波数と Q 値の変化。

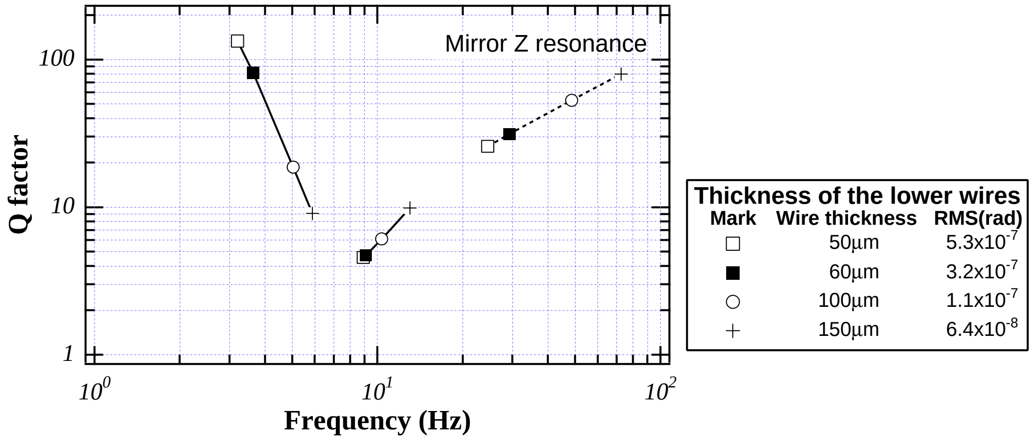


図 5.7　試作機の下側ワイヤーの太さを変えた時の Pitch 共振の周波数と Q 値の変化。鏡の Z 振動の周波数と Q 値の変化が点線で付記されている。

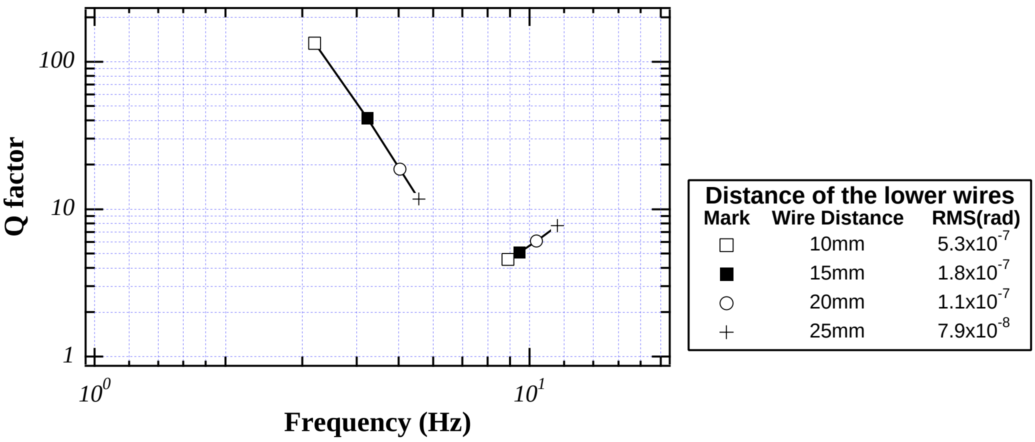


図 5.8　試作機の下側ワイヤーの間隔を変えた時の Pitch 共振の周波数と Q 値の変化。

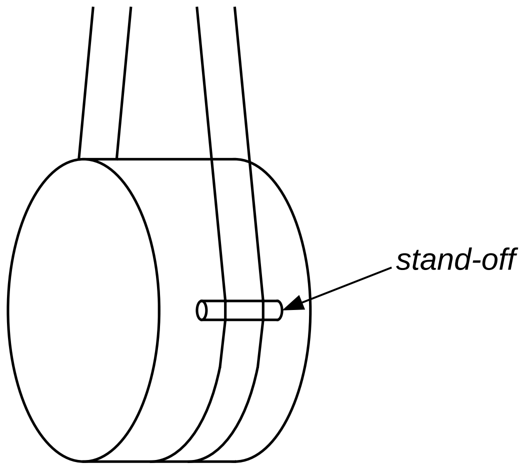


図 5.9　鏡のスタンドオフ

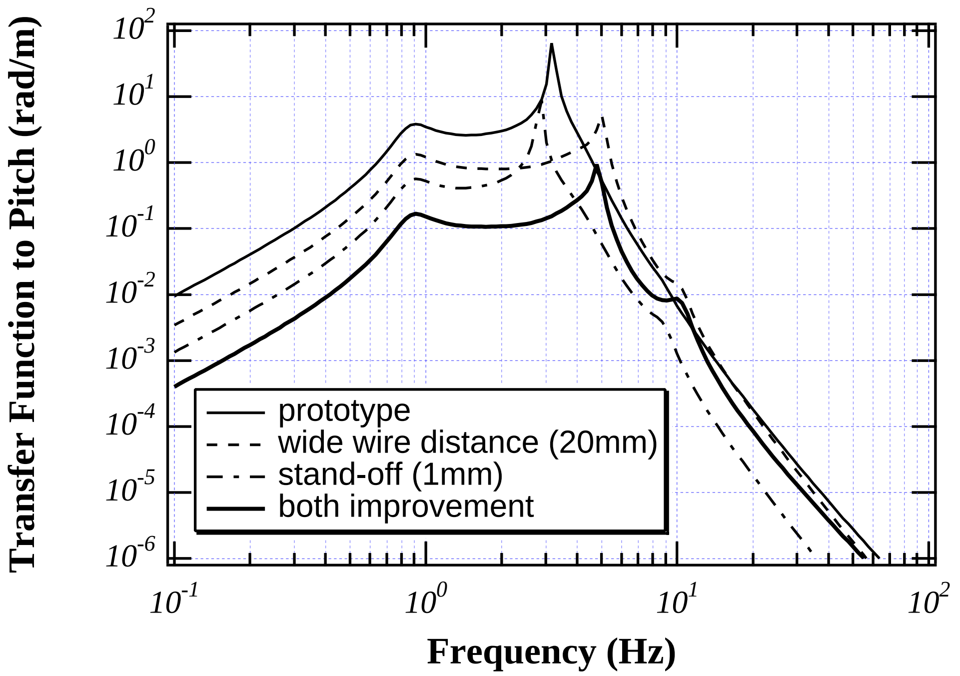


図 5.10　ワイヤー間隔の変更やスタンドオフによる角度揺れ特性の改善

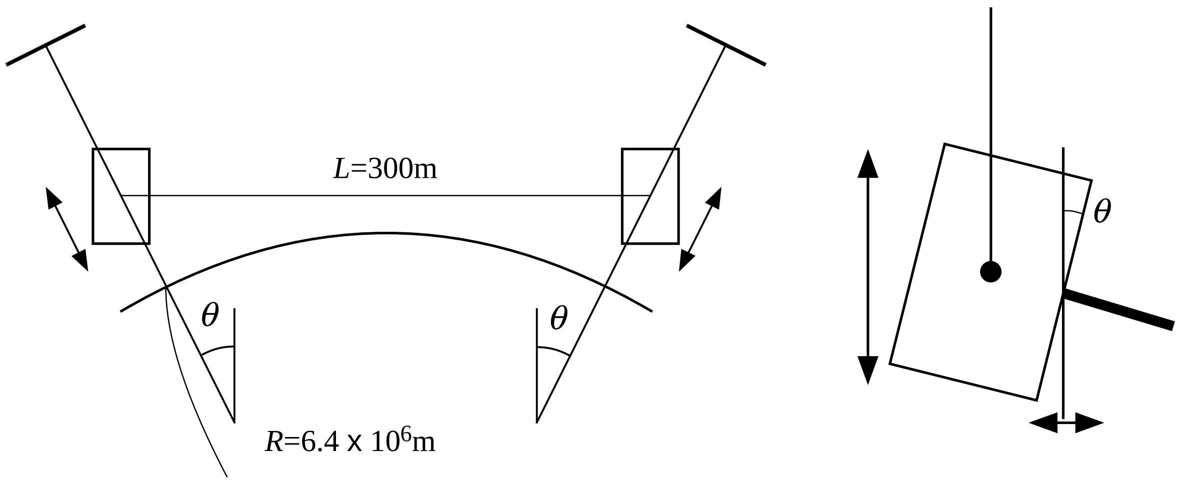


図 5.11　地球の曲率による z-x カップリング。

10mm の場合、20mm の場合、ワイヤーが離れる点と重心の高さの差が 8.8mm の場合、1mm の場合 (スタンドオフを入れた場合) を網羅した 4 通りについて、それぞれの Pitch の RMS 振幅を計算すると、

改善策	RMS 振幅 rad
試作機のまま	5.3×10^{-7}
ワイヤー間隔の変更のみ	1.1×10^{-7}
スタンドオフのみ	9.2×10^{-8}
両方を併用	1.4×10^{-8}

となり、両方の手法を併せて使うことにより大幅な改善が望める。この場合には、角度揺れのパワーは 1Hz 以下の振り子共振の周辺に集中する計算になる。

5.5　懸架システムの非対称性によるカップリング

長基線長干渉計は必ず z-x カップリングを持つ。それは地球の曲率によるもので、干渉計のビームと重力の方向が直交しないので、ビームに直交して置かれている鏡が重力の方向に揺れたときに、光軸方向の変動を生じてしまうのである (図 5.11)。その量は、地球の半径を R、干渉計の基線長を L として、

$$\tau_{ZX} = \frac{x_{\mathrm{earth}}}{z_{\mathrm{earth}}} = \frac{L}{2R} \tag{5.18}$$

である。このカップリングは長基線になるほど問題となるが、300m の基線長の場合にはカップリング率は -93dB で、まだ問題とならない。これが z-x カップリングの原理的な限界である。

現実の懸架システムでは、曲率以外にもワイヤークランプの工作精度やベローズのバネ定数のばらつき、鏡を吊る際のワイヤーのずれなどにより、理想的に懸架した場合には現れないはずのカップリングが生じてしまう。その中でも最も重要なものは、

- 鏡の垂直振動が光軸方向に現れる z-x カップリング
- 鏡の垂直振動が Pitch の角度揺れに変換される z-Pitch カップリング

の 2 つである。なぜなら、鏡を吊るワイヤーの z 共振で制限されている周波数を下げられないため、z-z 防振比が悪いからである。

これらのカップリングを計算するためには、現実の懸架システムと同様に非対称性を考慮して特性の計算を行わなければならない。しかし、懸架システムを組み立てたときにどの部分がどれだけの非対称性を持っているか知るのは困難である。そこで、モンテカルロ・シミュレーションを行って、非対称性により伝達関数が受ける影響を調べた。

このシミュレーションでは、懸架システムの各部は平均 0、標準偏差 σ のガウス分布に従う乱数によって、理想的な状態から摂動を受ける。この状態で、x-x, z-x, z-z の各防振比と x-Pitch, z-Pitch 特性を数値計算する。これを 1 回の試行とし、200 回の試行によりデータを蓄積した。σ としては 2 種類の組み合わせで計算を行い、結果を比較した。

具体的には導入した非対称性は次のようになっている。

- ベローズのバネ定数のばらつきとして、500 N/m に対し $\sigma = 50$ N/m を仮定した。これは、懸架状態においてベローズの伸び約 10mm に対し、1mm 程度の伸びのばらつきを持つことが試作機で確認されているからである。
- ワイヤーのクランプ点は $\sigma = 0.1$ mm または $\sigma = 0.5$ mm の標準偏差のガウス分布で x 方向と z 方向の双方にずれを持つとする。ここで $\sigma = 0.1$ mm は工作精度などから容易に起こるずれとして精度の限界と言えるべき量、$\sigma = 0.5$ mm は、これ以上はずれないだろうと言う上限値、として与えている。
- 下側のワイヤーの自然長は $\sigma = 0.1$ mm または $\sigma = 0.5$ mm の標準偏差のガウス分布でずれを持つ。
- 下側のワイヤーのバネ定数はクランプ点がずれることによる自然長の変化で決まる量だけのばらつきを受けるとする。

5.5.1　防振比

$\sigma = 0.5$ mm の非対称性を入れたときの x-x 防振比、z-z 防振比の変動 (200 回の試行での最大値と最小値) を示したのが図 5.12 である。これを見ると分かるように、これらの防振比は非対称性には大きな影響を受けない。

それに対し、本来 0 であるべき z-x 防振比を $\sigma = 0.1$ mm、$\sigma = 0.5$ mm について描いたのが図 5.13 である。 x-x 防振比と z-x 防振比を比較すると、非対称性が $\sigma = 0.1$ mm のときには最悪の場合でも x-x 防振比を下回っているが、$\sigma = 0.5$ mm のときには容易に凌いでしまう。防振比の最大値と最小値ではカップリングの悪い場合がどれくらい存在するのかわかりにくいので、よりはっきりと見るために、1000Hz における z-x カップリング率の頻度分布を各 σ について調べた (図 5.14)。

- $\sigma = 0.1\,\mathrm{mm}$ では、典型的には -100dB
- $\sigma = 0.5\,\mathrm{mm}$ では、典型的には -70dB

のカップリング率を持ちうることが分かる。等方的な振動に対し、z-x カップリング率が -77dB を越えると z 振動由来の振動が観測帯域での光軸の振動を支配する (5.3.2 節参照)。結論として、防振比へのカップリングの影響を無視するためには 0.1mm の精度が必要である、と言うことが分かった。全ての部分を 0.1mm の精度で合わせることは、細心の注意を払って懸架システムを製作しても困難であるため、z-x 防振比が x-x 防振比をしのぐ可能性が高いと言える。

5.5.2 角度揺れ特性

前節同様、非対称性を入れたときの x-Pitch 特性の (最大から最小までの) 変動を示したのが図 5.15 である。$\sigma = 0.1$mm の場合は x-Pitch 特性にはほとんど影響はないが、$\sigma = 0.5$mm の場合は 1 桁程度悪化する可能性がある。

それに対し、z-Pitch 特性 (図 5.13) はどちらの σ についてあまり変わらず、観測帯域では x-Pitch 特性を凌ぐことが分かった。また 3.2Hz のピーク付近でも x-Pitch 特性を凌ぐ場合があり、RMS 振幅への寄与があり得る。これが 5.4 節で述べた改善法により、解決されるかどうかは確認してはいない。

5.6 この章の結論

剛体モデルの計算を行うことで、TAMA300 用懸架システム試作機のもつ剛体モードの共振について解析し、また各自由度への伝達関数を計算した。

その結果から現在の試作機には Pitch モードと Yaw モードに問題があることがわかり、

1. 鏡を吊るワイヤーの間隔を 10mm から 20mm にすることで、Pitch モードの Q 値を下げ、また RMS 特性も改善させることができる。
2. 水平方向の振動と鏡の回転の結合を小さくするためにワイヤーのスタンドオフの位置を極力重心に近づけることで、Pitch モードの RMS 特性を改善することができる。

と言う改善法を提案した。この双方を併用することで Pitch の RMS 振幅は 1/40 近くに低減できる見込みである。

また、非対称性を盛り込んだ計算により、z-x 防振比が x-x 防振比より大きくなる可能性が高いと言うことが分かった。また、z-Pitch 特性は 5Hz 以上では大体常に x-Pitch 特性を上回ると言うことも分かった。

今後、さらに考慮をしなければならない事項としては、

- 改善案のとおりに試作機を改造し、実際にその効果を確かめる。
- 非対称性を含んだ計算で、各特性がどの部分のずれに敏感で、どの部分のずれに不感であるかを検討し、特に製作に気をつけなければならない部位を特定する。

- Yaw 回転の RMS 値を計算する。そのためには非対称性を含んだ 3 次元モデルの計算を行わなければならない。
- 地面振動に回転成分が存在すると RMS 値が影響をうけるかも知れない。地面振動に回転成分が存在するかどうか、または他の防振系で発生した回転がどれだけの影響を及ぼすか、実測および計算を行う。

などが挙げられる。

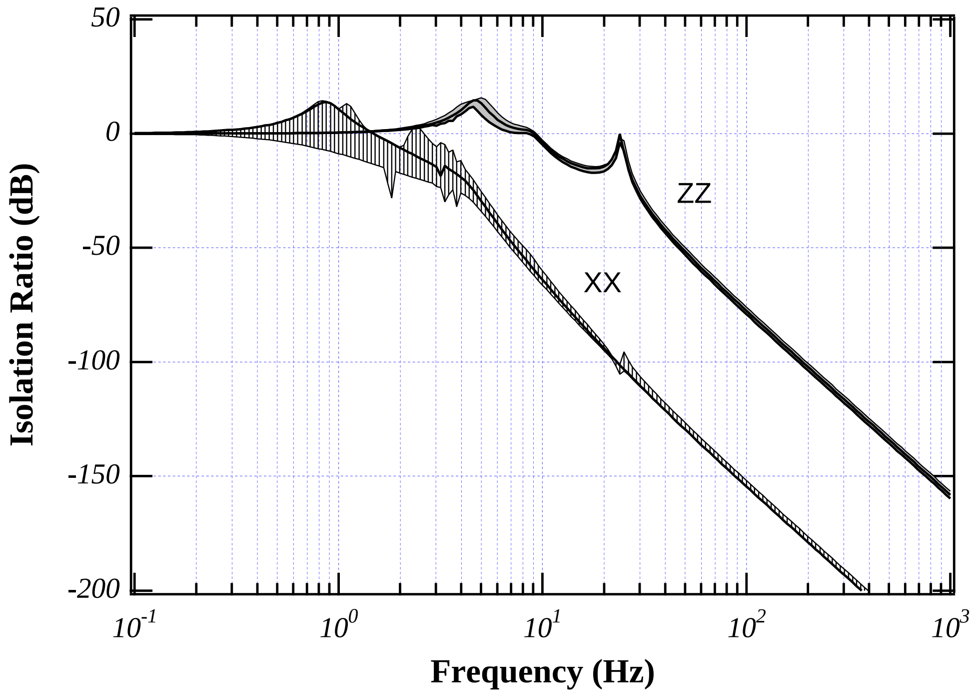


図 5.12　非対称性を含む場合の x-x 防振比、z-z 防振比の変動。

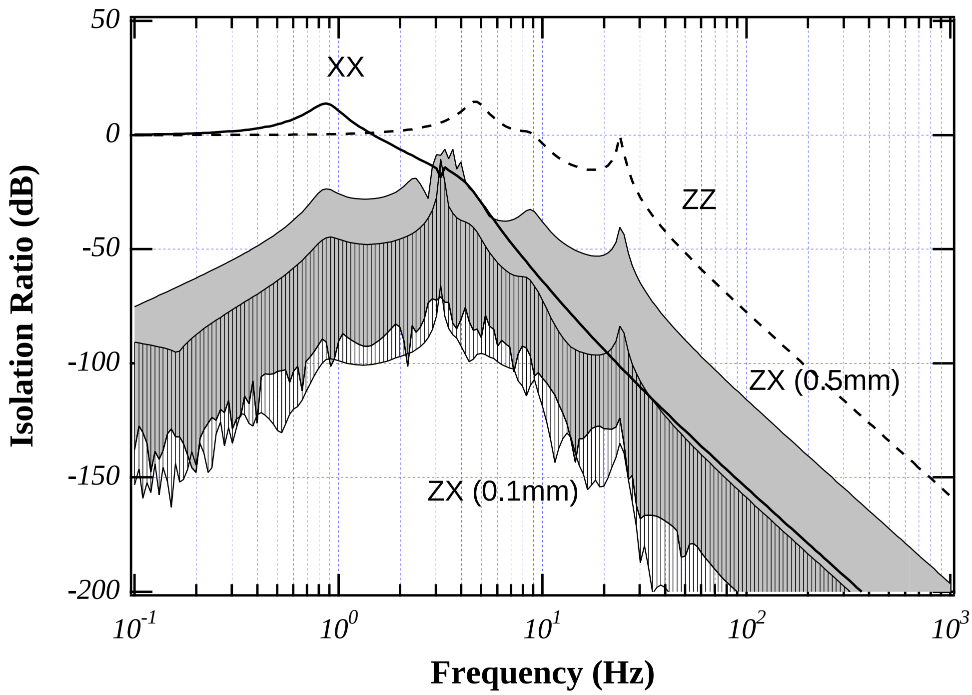


図 5.13　非対称性による z-x 防振比。縦縞は $\sigma = 0.1\mathrm{mm}$ の場合。横縞は $\sigma = 0.5\mathrm{mm}$ の場合。

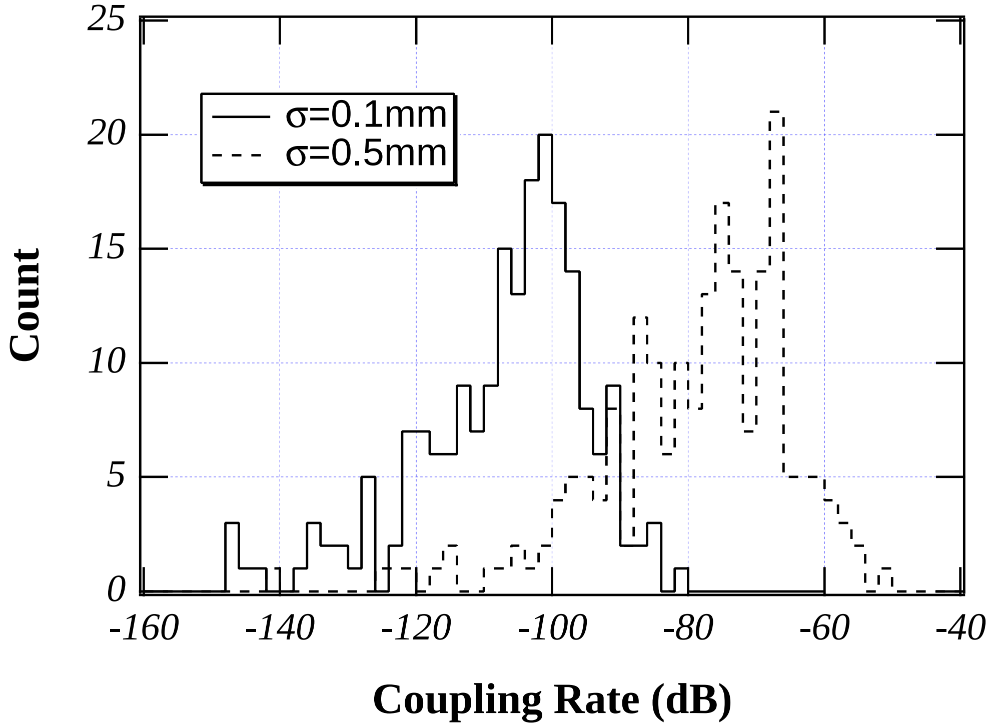


図 5.14　非対称性による z-x カップリング率のヒストグラム。

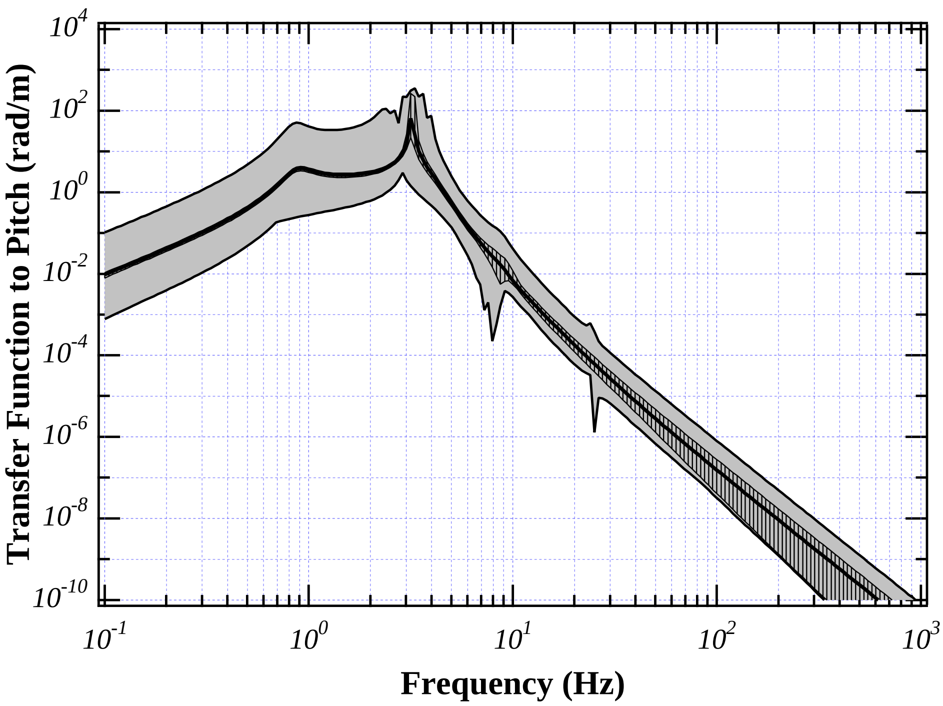


図 5.15　非対称性を含む場合の x-ηPitch 特性。縦縞は $\sigma = 0.1$mm の場合。横縞は $\sigma = 0.5$mm の場合。

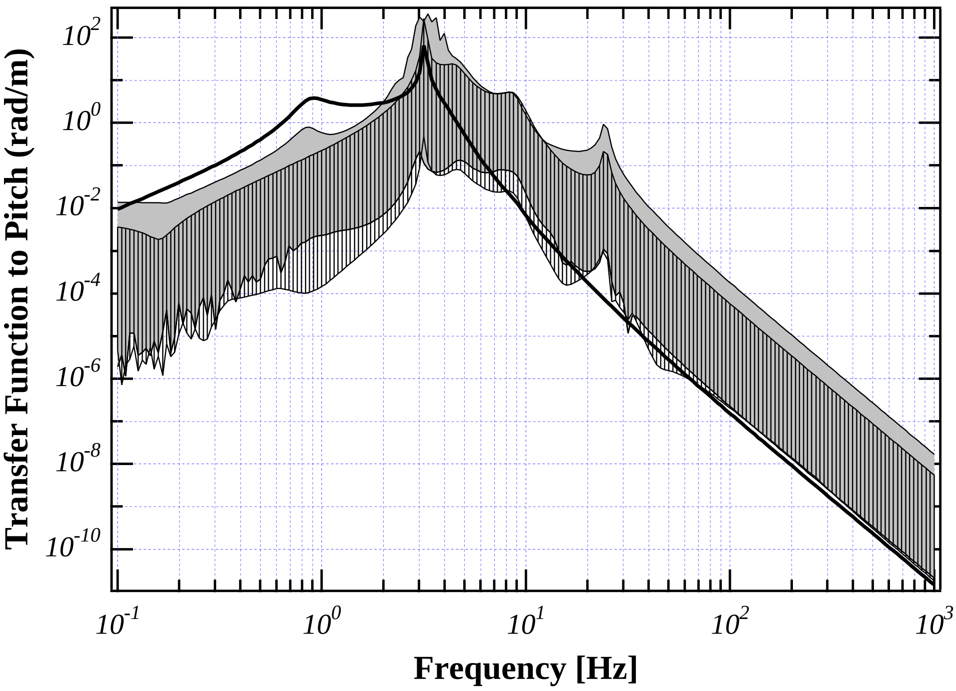


図 5.16　非対称性による z-Pitch 特性。縦縞は $\sigma = 0.1$mm の場合。横縞は $\sigma = 0.5$mm の場合。

第6章

試作機の伝達特性測定

懸架システムの伝達関数が分かれば、全ての防振特性を知ることができる。この章では TAMA300 試作機の伝達関数の測定について述べる。この章の構成は、

- 6.2 節では振動を発生させる加振器や振動を検出するセンサーについて解説している。また、センサーの感度の比較も行っている。
- 6.3 節では加振器の性能や懸架システムのコントロールブロックの共振などについて調べた結果を述べている。
- 6.4 節ではダンピングマグネットの減衰の大きさの設計とダンピングマグネットの弾性支持特性を測定している。
- 6.5 節では試作機のフレーム天板から鏡の各自由度までの防振比や角度揺れ特性の測定の結果について述べている。
- 6.6 節では伝達関数測定の考察について述べている。

となっている。

6.1 目的

ここまでの章で、質点モデル計算により、防振特性が TAMA300 の要求を満たすような懸架システムを設計し、剛体モデルにより、より詳細な防振特性計算と問題点の検討を行った。

次のステップとして、現実の懸架システムが設計通りの性能を有しているのかどうか、そして計算で指摘したような問題点が存在するのか、ということを確かめなければならない。加振器で試作機に振動を与え、そのときにダミーマスの各自由度の振動を振動検出器で測定し、天板から鏡までの伝達関数を得るのが実験の目的である。

6.2 実験方法

懸架システムが X-pendulum に吊られる際には、4.5 節で述べたように、懸架システムの天板と X-pendulum の防振された板が結合される。つまり、X-pendulum からフレーム天板を通して地面振動が導入される。そこで、天板の振動と鏡の全ての自由度の間の伝達関数を知ることで、懸架システムでどれだけの防振性能が得られるかがわかる。

実験では特定の方向の振動に関する伝達関数を知るために、加振器を使って懸架システムに動的な外力を加えた。x, y, z のうち一方向のみに懸架システムを振動させ、その際の鏡の並進、回

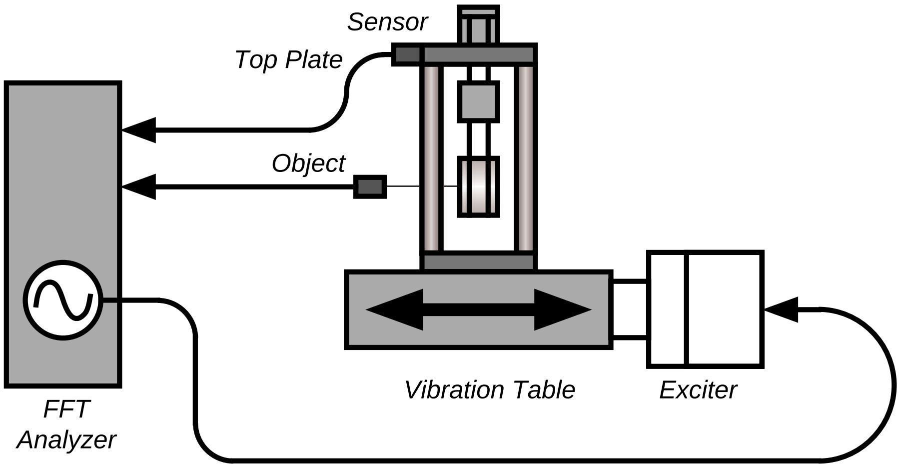


図 6.1 伝達関数測定の概念図

転を振動検出器で検出し、その振動を FFT アナライザーで処理することで、伝達関数を求めた (図 6.1)。

石英の鏡を加振実験に使用することはできないので、かわりに比重が近い材質であるアルミニウムのダミーマスを用いた。ダミーマスは TAMA300 の鏡と全く同じ大きさ (ϕ100mm $\times$ 60mm) で、質量は 1.25kg と、本来の鏡より 25%ほど重くなっている。

加振器としては、東京大学理学部の加振器を利用することができた。振動検出器には、フォトセンサー、ピエゾ加速度計、Michelson 干渉計、光てこを使用した。

以下に、振動源である加振器について、および振動を測定するための検出器について述べる。

6.2.1 加振器

加振器はいわば巨大なスピーカである。入力電圧をパワーアンプで増幅しコイルを駆動して振動を発生する (6.2 節)。東京大学理学部物理教室のアカシ E·DES-452 型動電形振動試験装置は最大で 4500 N の力で加振することができる。加振器のコイルを横に倒して水平振動台と結合することで水平加振が、コイルを垂直にして垂直振動台をとりつければ垂直加振が、それぞれ可能である。この加振器の最大性能は図 6.3 のようになっている。

懸架システムの伝達関数を測定する際には、懸架システムと加振器を結合する必要があるが、これは気を使うべき問題である。それは同一のセットアップを同じ力で加振しても、結合方法が異なると懸架システムの構成要素の持つ弾性体モードにより、フレーム天板の揺れの大きさや方向が異なってしまい、予想もしないようなカップリングが生じたり、測定の S/N が悪くなったりするからである。懸架システムを加振器へマウントする方法として、今回は以下の 3 つの方法を使用した。

1. **サスペンションポイント加振** (図 6.4a)

   懸架システムのコントロールブロックの最下段には x 方向にスライドする可動ステージがある。このステージに共振がないとすれば、天板が振動することと、このステージが動くこ

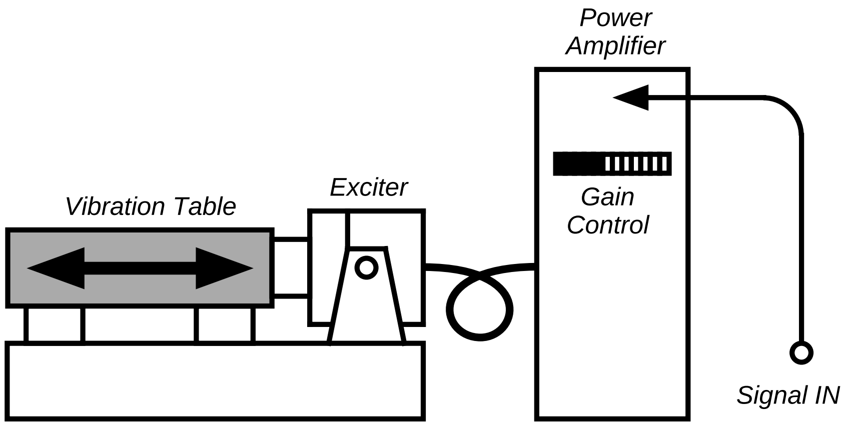


図 6.2　加振器の構造

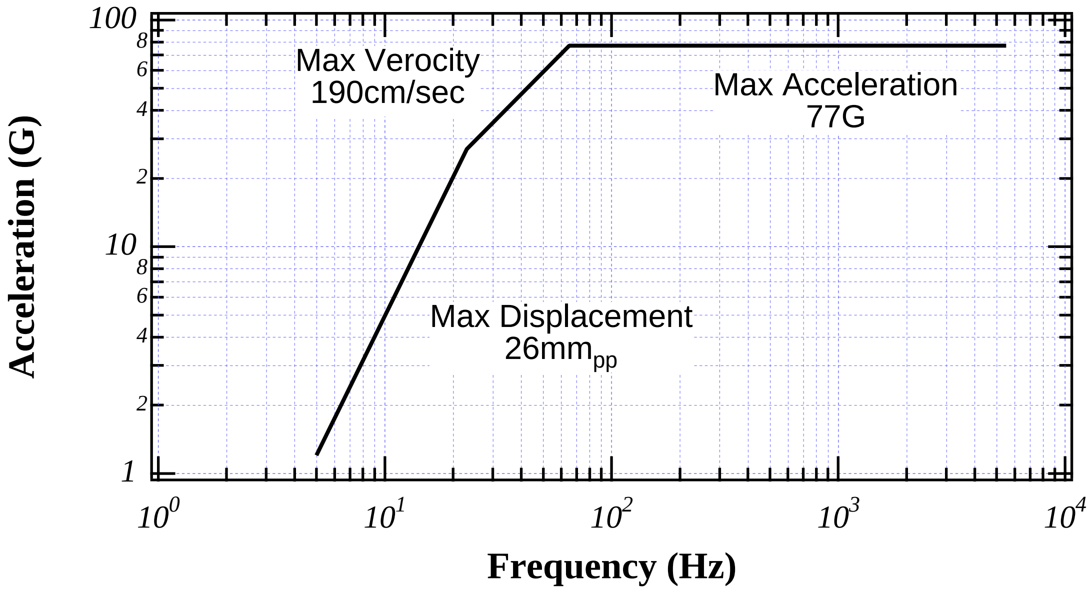


図 6.3　加振器の性能 [27]

とは等価であるので、加振器から張り出した駆動棒 (driving rod または stinger) によってステージを押すことで、ステージを水平振動台と見立てて加振することができる。この方法の場合、数 10Hz から数 100Hz のフレームの弾性振動モードの影響を受けにくくなる。振動の導入法としては、X-pendulum で吊る状況により近い形になっている。この加振法は x 加振の際に用いている。

2. **底板加振** (図 6.4b)

   y 方向のステージはダンピングマグネットを吊っている板よりも上にあるため、駆動棒で押して加振することができない。そこで、加振器の水平振動台に懸架システムの底板を固定し、加振する方法を取った[1]。この方法の場合、懸架システムのフレームの弾性振動モード (数 10Hz〜数 100Hz) の影響を強く受け、コントロールブロックは回転を含む運動を起こしてしまう。その結果、特定の周波数で参照側の測定点に不適切な節が現れ、見かけ上防振比が悪くなったり、本来カップルしないはずの垂直方向のステージ共振の効果が現れたりする。

   懸架システムを光学定盤に設置して干渉計を構築する場合の防振特性を測定したい場合には、この加振法を用いて底板と鏡の間の伝達関数を測定するべきである。

   この結合法は y 加振と x 加振の一部で用いている。

3. **垂直加振** (図 6.4c)

   垂直方向に加振する際には加振器に付属のジグ (垂直振動台) をコイルに取り付け、垂直振動台に懸架システムを固定して加振を行った。実際にはフレーム自体は垂直方向には硬いので共振周波数は高くなり、フレームの弾性振動モードは問題とはなってこない。この加振方法は z 加振の際に用いている。

最も S/N の良い伝達関数測定法は、正弦波で振動を与える方法である。この場合 FFT アナライザーは測定を行う周波数で正弦波を発生し、クロススペクトラムにより伝達関数を測定する。そして、その周波数における伝達関数を測定し終ると次の周波数へと移る。そのため、測定に時間がかかる場合がある。

S/N 比が非常に良く、低周波の測定などで正弦波加振では測定時間が非常に長くなる場合には、正弦波加振で周波数間隔の荒いデータを取るよりも、測定を行う全ての周波数の正弦波の重ね合わせの波形により加振を行う多重正弦波加振を行った方が良い場合もある。

多重正弦波加振を行った時や、伝達関数の小さくなるような測定を行う時には、コヒーレンス等を確認して、測定の信頼度をチェックした。

6.2.2 振動検出器 1: フォトセンサー

天板やダミーマスの振動を検出する変位計として、反射型フォトセンサー [28] を使用した (図 6.5)。これは 2 個のフォトダイオード (PD) と 1 個の赤外の LED を組み合わせたものである。LED

[1] これがこの加振器による水平振動試験の通常の姿であると思われる。しかしながら、工業製品 (例えば車など) の加振実験の際は振動台は使わず、コイルと駆動棒のみを何台も並べて「押したいところのみを押す」という方法が採られるようである [22]。

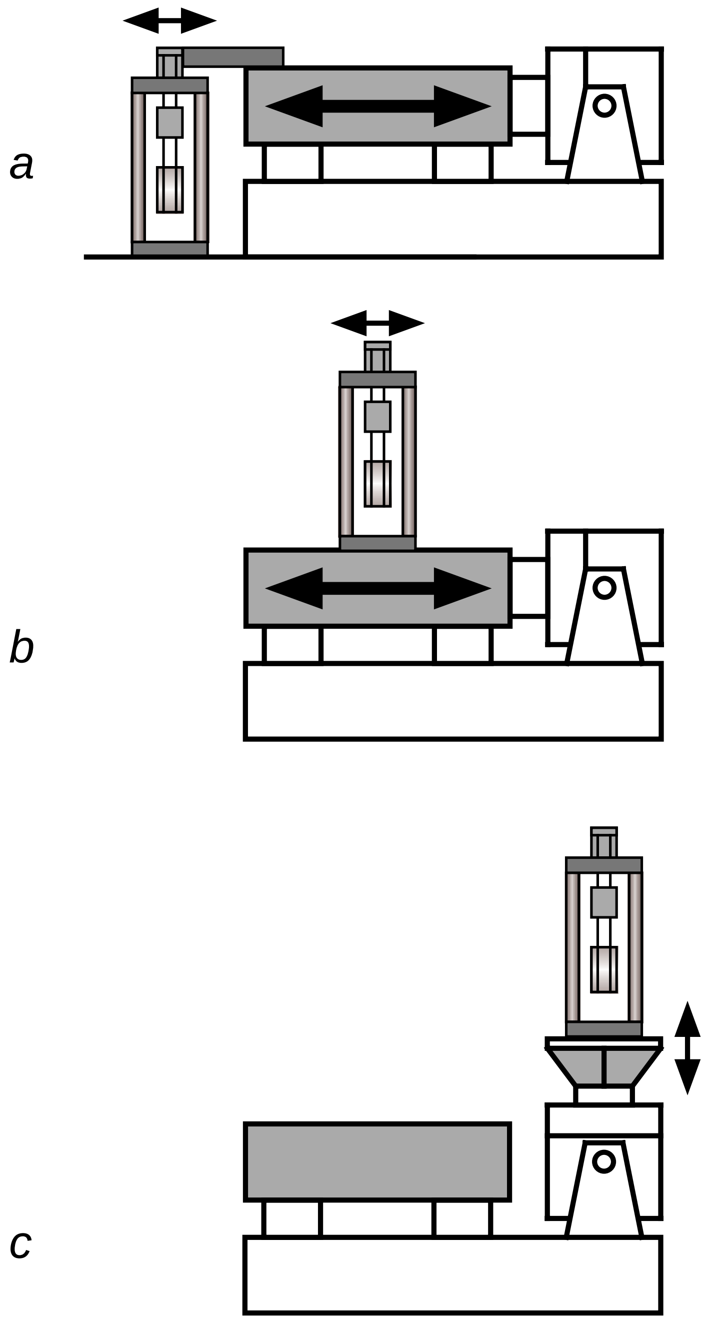


図 6.4　懸架システムの加振器へのマウント

の発光が測定対象に張り付けられた鏡で反射され、 LED に対し対称に配置された PD で検出される。フォトセンサーと鏡の距離が変化すると図 6.6 のように出力電圧が変化するので、出力が 6.4V の点を中心とした線形領域を 1.0×10^3 V/m の換算係数の変位計として利用した。 LED に対称な位置に 2 つの PD を配置しているので、鏡の角度揺れに対し出力の変化が 2 次になるようにする事ができ、測定の際には鏡の角度揺れの効果が影響を及ぼさないような配置にして測定を行った。

6.2.3 振動検出器 2: ピエゾ加速度計

ピエゾ加速度計は力を受けると電荷を発生するピエゾ素子を内蔵した加速度検出器で、粘着ワックスなどで測定対象に張り付けて使用する。コンパクトでどこにでも手軽に取り付けが行えるため、振動試験では最も一般的な振動検出器である。しかし、ダミーマスに直接張り付けるため、特性に影響が出る可能性がある、という欠点もある。

今回は KISTLER 社の 8628B5 型ピエゾビーム加速度計の出力を TEAC 社圧電型トランスデューサ用電圧アンプ SA-610 で増幅して測定に使用した。この加速度計はセンサーヘッドが 7g と大変軽量であり、また FET による電荷感受型プリアンプがヘッド内蔵されているため、ケーブルも細く柔らかくすることができ、ケーブルの振動による力学的な外乱の影響や、ケーブルからの電気雑音の混入の影響が少ない。また、測定がケーブルの影響を受けて、セットアップにより再現性無く外乱を受けるという事例は見つからなかった[2] 。電圧アンプのゲインを調整することで、システムとしてのゲインは様々に変更可能であるが、センサーヘッドの雑音が支配的であるため、ゲインにより S/N は変化しなかった。天板の揺れは 1V/G のゲインで、マスの揺れは 5V/G のゲインで測定を行った。

並進方向の振動を測定する際には、加速度計を張り付けることで鏡が傾いでしまうので、特性に影響が出ないよう、図 6.7a のように別の加速度計をカウンターバランスとして対称の位置に張り付けた。

角度揺れの測定に使用する際には、図 6.7b のように加振方向に垂直な方向に同じ感度の加速度計を 2 つ張り付け、その出力を FFT アナライザの差動入力で受ける。並進運動成分である同相成分を除去し、差動成分である角度揺れを検出している。この時、たとえば図図 6.7b-1 のような x-Pitch 特性は

$$T_{x\eta} = \frac{z_1 - z_2}{Xd} \tag{6.1}$$

で測定できる。ここで z_1, z_2 は 2 つの加速度計で測定した加速度を変位に変換したもので、d は 2 つの加速度計の距離である。また、X は天板の変位である。

6.2.4 振動検出器 3: Michelson 干渉計

重力波検出器に利用されている Michelson 干渉計も変位計であり、振動検出に利用することができる。測定対象である試作機の鏡を除き、全ての光学系を直径 70cm のブレッドボード上に組んでいる。光源のレーザーは波長 632.8nm の He-Ne レーザーで、周波数安定化がなされている。

[2]別の機会に別の加速度計で太いケーブルを用いた防振特性測定を行ったときには、10Hz 以下でケーブルの影響と見られる特性の乱れが見られた。

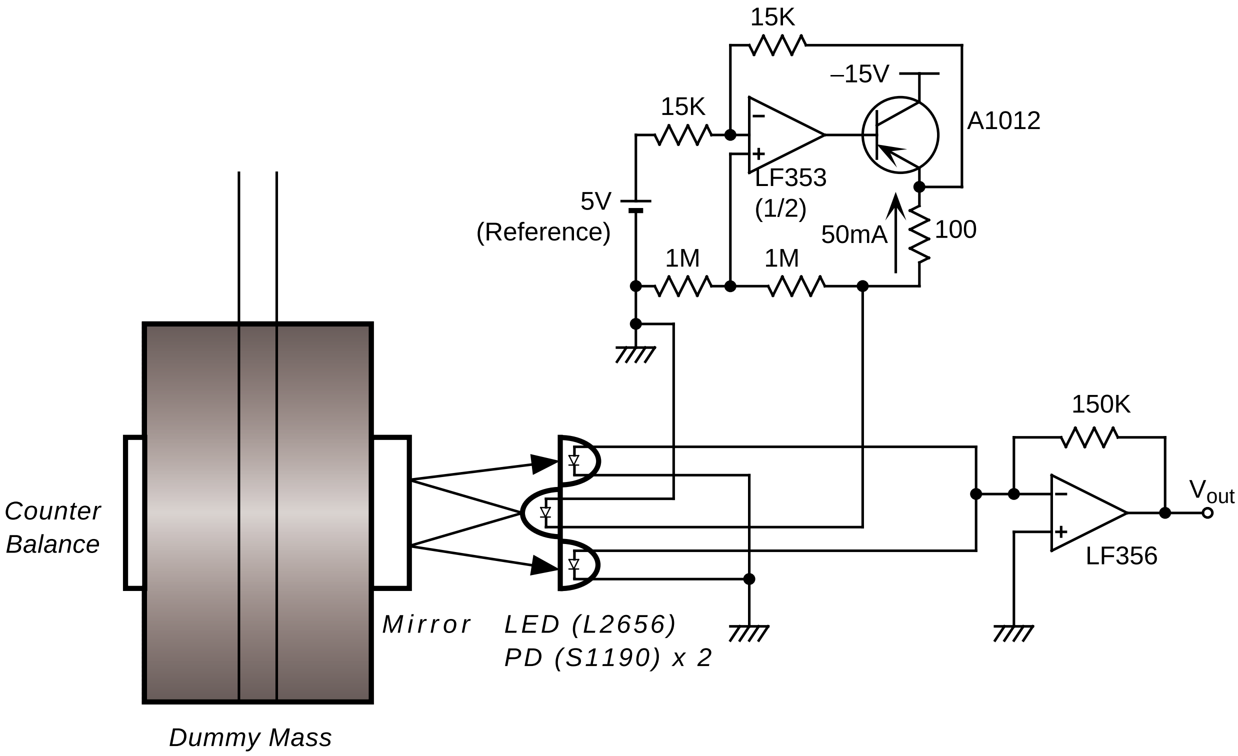


図 6.5　フォトセンサー [28]

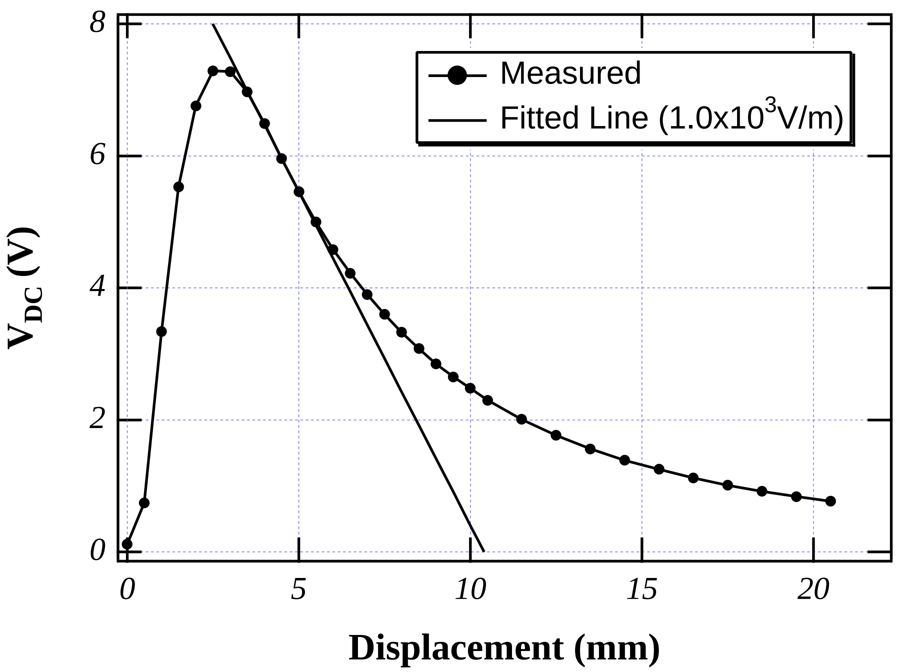


図 6.6　鏡と反射鏡の相対距離とフォトセンサーの出力 (A. Takamori et al.)

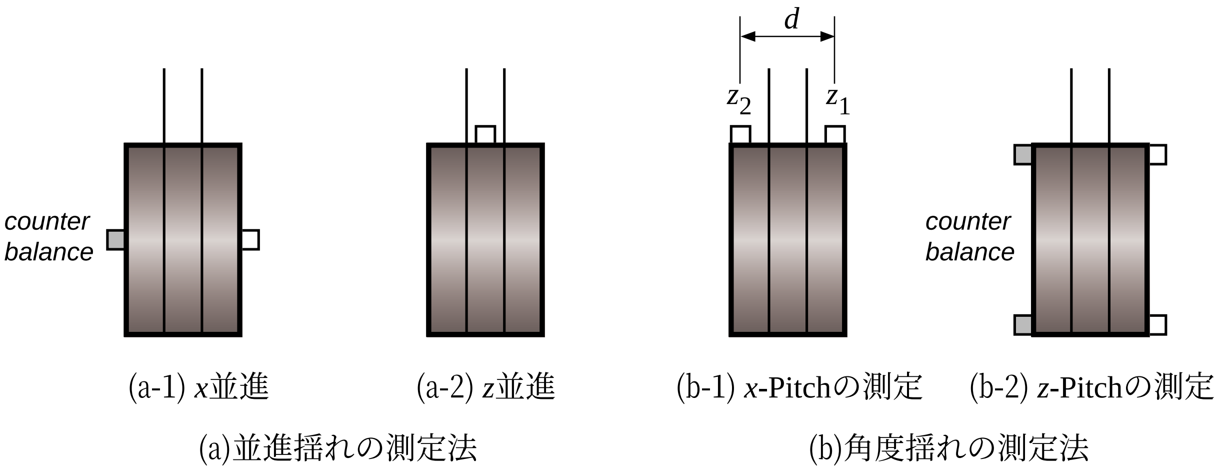


図 6.7 マスへのピエゾ加速度計の取り付け法

作成した Michelson 干渉計ではビームスプリッターと参照鏡が一つになっていて、2 段振り子に吊り下げられている。これは加振によるマスの揺れに比べてビームスプリッターの地面振動による揺れが無視できるようにするためである。干渉計の 2 本の腕のうち片方はこの固定された約 1cm の腕で、もう片方をダミーマスに取っている。ビームスプリッターとダミーマスの距離は約 48cm であった。

干渉光は差動アンプとサーボフィルターを介して、磁石-コイルアクチュエータに伝えられる。このアクチュエータによってビームスプリッター側の振り子の制御を行う。制御のダイヤグラムは図 6.9 のようになっている。H は Michelson 干渉計による変位から電圧への変換係数、G_1 は使用したフィルターの特性、G_2 はコイルドライバーから変位への伝達関数である。フィルター特性 G_1 は図 6.10 に、制御のオープンループ伝達関数 G_1G_2H は図 6.11 に示した。測定にはフィルターの出力 (フィードバック信号) を使用した。その為、干渉計の出力 v から (制御をしなかった時の) マスの変位 x を得るには、

$$x = \frac{1 + G_1G_2H}{G_1H}v \tag{6.2}$$

の関係を使う。この系の典型的な Unity Gain Frequency(UGF) は 300Hz で、位相余裕は 38 度である。UGF は 3.4kHz 付近の共振によって制限されている。この共振の由来は特定できていない。

この Michelson 干渉計の腕の長さは対称ではないので、使用した He-Ne レーザーのもともとのビーム径 (0.37mm) ではコントラストが悪くなる (計算値 64.4%)。そこで、ビームエキスパンダ (BE) で 3 倍の太さに広げている。これにより、コントラストとして計算上は 99.3%、実験では 80%を得た。

6.2.5 振動検出器 4: 光てこ

フォトディテクターが 4 つ田の字型に並べられた「4 つ割りフォトディテクター」(以下「4 つ割り」、図 6.12) にレーザー光を入射すると、それぞれのディテクターに入射した光量に応じた出力が得られる。ここでビームが図の u 方向に移動すればディテクター全体での検出光量は一定で

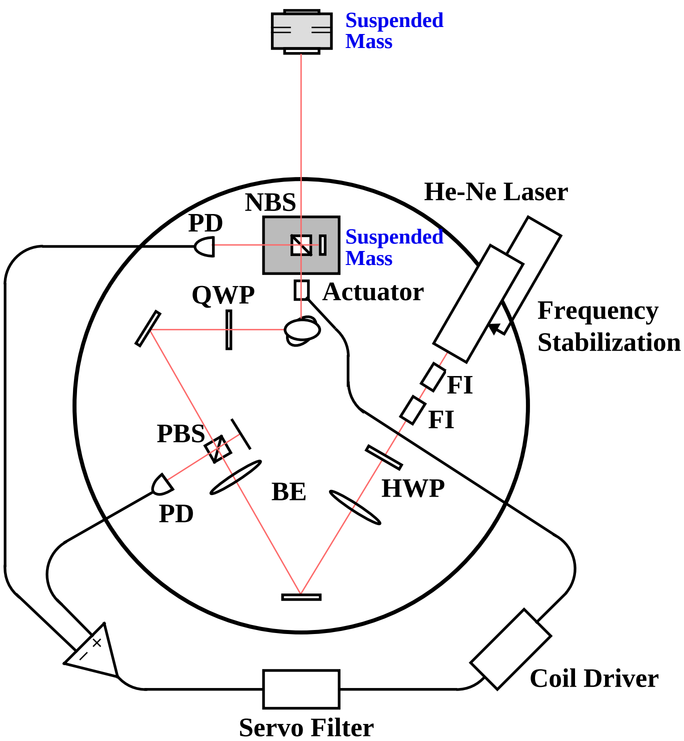


図 6.8　Michelson 干渉計

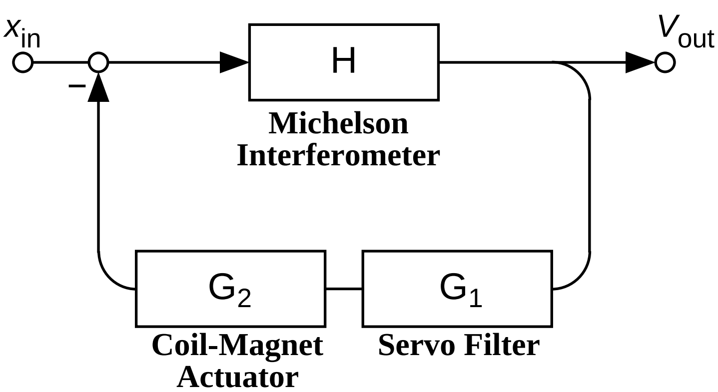


図 6.9　干渉計の制御

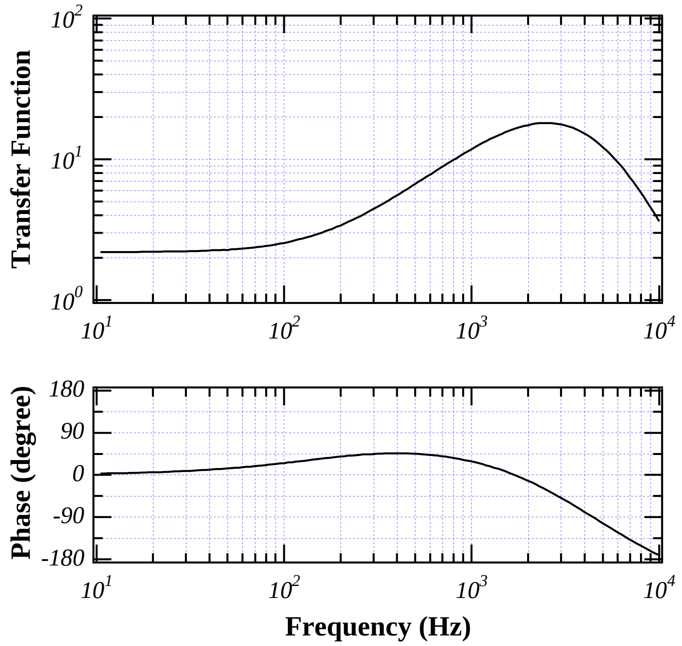


図 6.10　サーボフィルターの特性

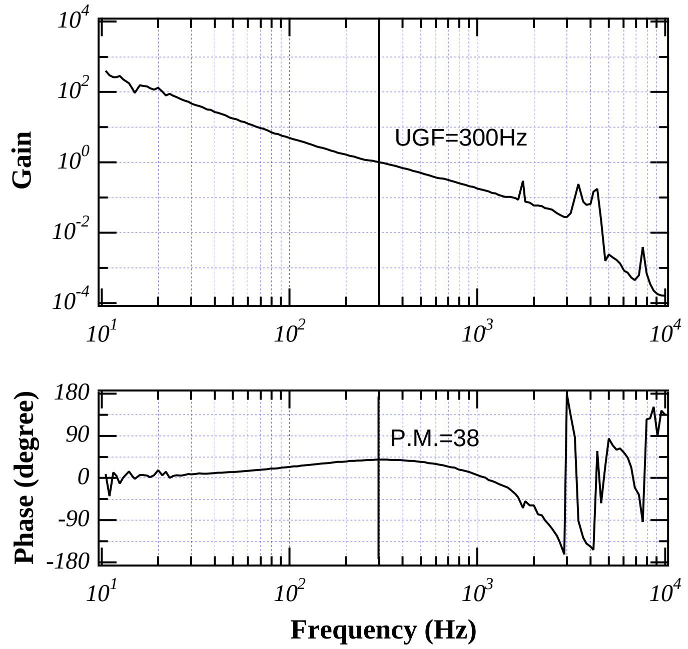


図 6.11　オープンループ伝達関数

あっても、a の出力と b の出力の和は増え、c の出力と d の出力の和は減る。v 方向にも同様のことが言えるので、4 つ割りによって、レーザースポットの位置の変動を 2 次元的に検出することができる。

Michelson 干渉計の BS を固定し、参照側のミラーでは光が反射しないように黒い紙で覆う。鏡から帰ってきて BS で反射される光は、l をダミーマスの鏡から 4 つ割りの距離として、鏡の傾き θ に対し、$2\theta l$ だけスポットの位置が変化する。このように角度揺れをスポット位置の変化にし、4 つ割りで検出することで鏡の回転角を測定することができる。

懸架システムの鏡を固定した状態で、4 つ割りディテクターの位置をマイクロメータと可動ステージにより並進させると、相対的にビームスポットの位置が変化し、ディテクターの DC 出力が変化する。この特性を測定したのが図 6.13 である。これにより u 方向には 33.5V/m、 v 方向には 47.7V/m の位置検出特性を持つ事が分かった。これは、$l = 71$cm であるため、角度に変換して Pitch に関しては 67.7V/rad、Yaw に関しては 47.6V/rad の換算係数になる。

6.2.6　センサーの感度の比較

前節で述べたように鏡の並進振動のセンサーとして 3 つ、角度揺れのセンサーとして 2 つの検出器を使用した。そこで、これらの雑音を測定し感度の比較を行った (図 6.14、図 6.15)。

並進センサーについて

- **フォトセンサー**

  金属製ロッドを使ってミラーマウントに装着したアルミコーティングミラーとフォトセンサーのヘッドをしっかりと動作点に固定し、その状態での出力のパワースペクトル密度を計測して、フォトセンサーの感度を計った。

  その結果、他のセンサーに比べ 20Hz 以下で特に感度がよいことがわかった。また雑音は 20Hz 以上で平坦な特性を示すが、動作点電圧が 6.6V のとき、ショットノイズは $5.5\times10^{-10}\ \mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ で、計測はそれより若干悪い。20Hz 以下の周波数における雑音源の特定は行っていない。

  フォトセンサーは x 加振、y 加振の際に、ピエゾ加速度計の感度が悪くなる 20Hz 以下の領域で使用した。

- **ピエゾ加速度計**

  懸架システムのダミーマスにピエゾ加速度計を張り付けた状態で静置し、その状態での出力のパワースペクトル密度を計測して、ピエゾ加速度計の感度を測定した。

  その結果、変位にして f^{-2} に比例、つまりほぼ加速度一定の雑音特性を得た。加速度計のセンサーヘッドが無い状態のアンプの出力はヘッドをとりつけていた時に比べて雑音が減るということが確認され、メインアンプではなくヘッドの雑音 (ピエゾ素子自体の出す雑音、またはヘッド内の FET プリアンプの雑音) が支配的であるということが分かった。

  ピエゾ加速度計はコンパクトで、取り扱いが簡便なため、全ての加振方法において用いている。

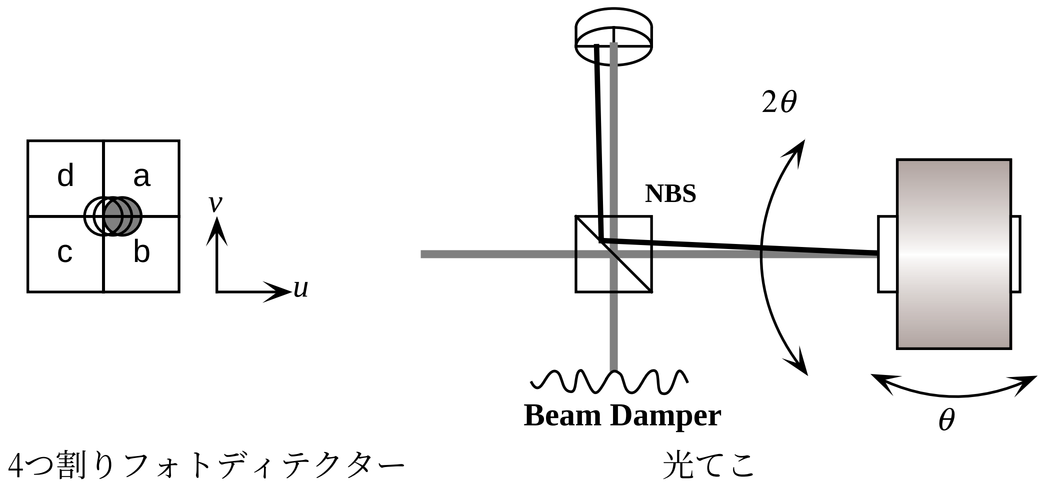


図 6.12　光てこ

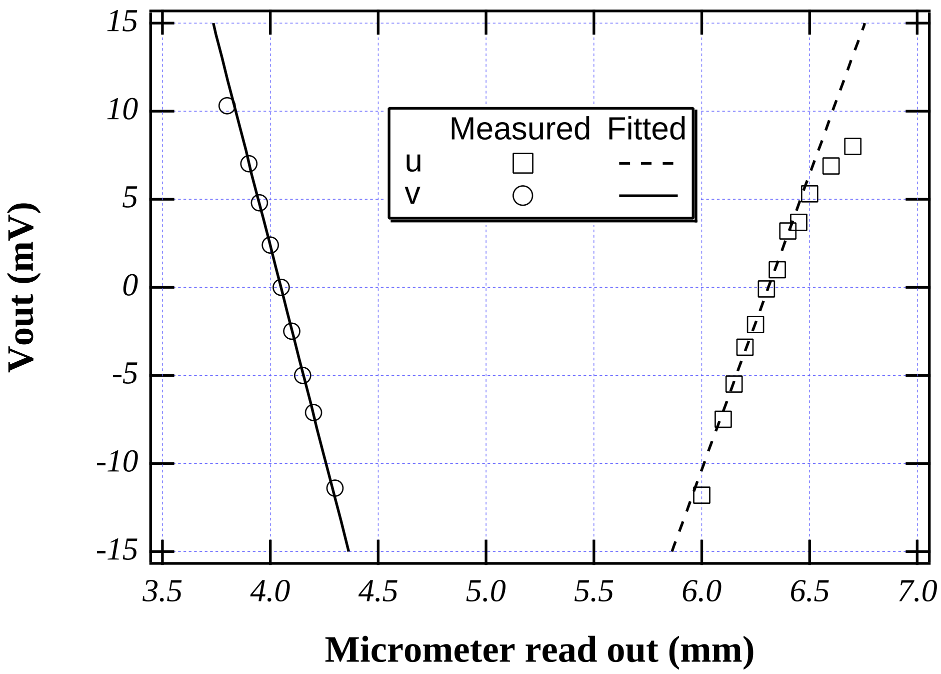


図 6.13　光てこの位置感度特性

- **Michelson 干渉計**

  懸架システムを静置し、その状態での干渉計のフィードバック信号から変位換算雑音を得た。ピエゾ加速度計に対し、1 桁程度良い感度を持つことが分かった。今回用いた並進のセンサーの中では最も感度がよいが、装置が大がかりで、自由に動かしたりすることができない。その為、x-x 防振比の測定にしか使用できなかった。防振比の高い領域で、ピエゾ加速度計による測定と比べることで、測定が正しく行われているかを調べることができる。

角度揺れセンサーについて

- **光てこ**

  懸架システムのダミーマスを固定した状態で、出力のパワースペクトル密度を計測して、光てこの感度を測定した。その結果 20Hz 以下で感度がよいことが分かった。光てこは x-Pitch 特性の測定で使用している。

- **ピエゾ加速度計**

  並進の場合のピエゾ加速度計の雑音を基に x-Pitch 特性測定に関する角度換算雑音を求めた。具体的には、2 つの加速度計の雑音が無相関であると仮定して、変位雑音を $\sqrt{2}$ 倍し、それを x-Pitch 特性測定の際の 2 つの加速度計の距離 6cm で割っている。

  しかし、加速度計の感度が非常によく一致していないと、本来同相成分で打ち消すはずの信号が差動入力に現れてしまう。感度の差を測定したところ 0.1dB(=1.012 倍) 程度の差があったため、並進振動の 1%が信号に漏れる。

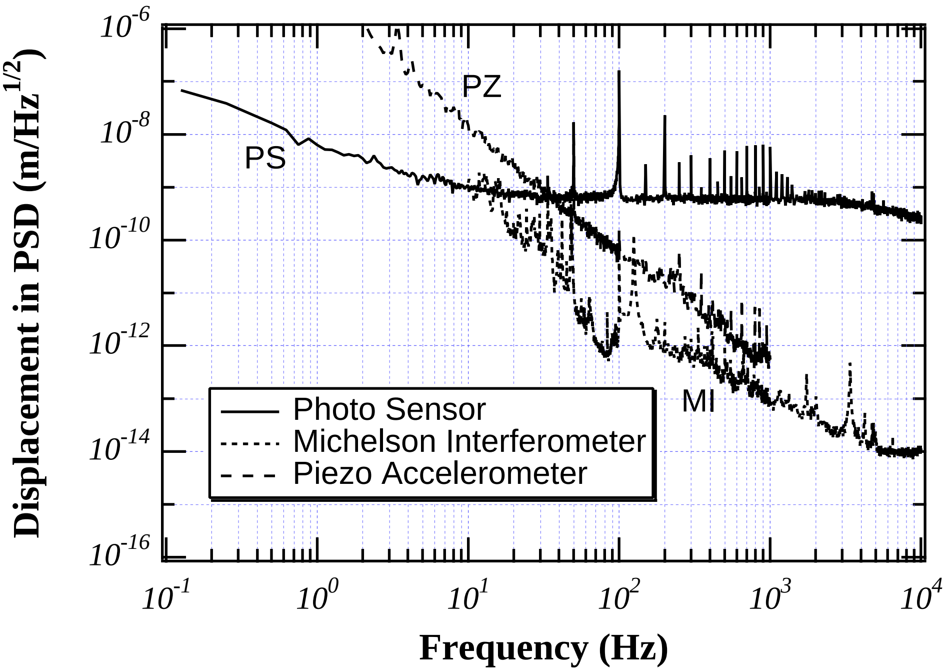


図 6.14　並進の振動検出器の感度特性

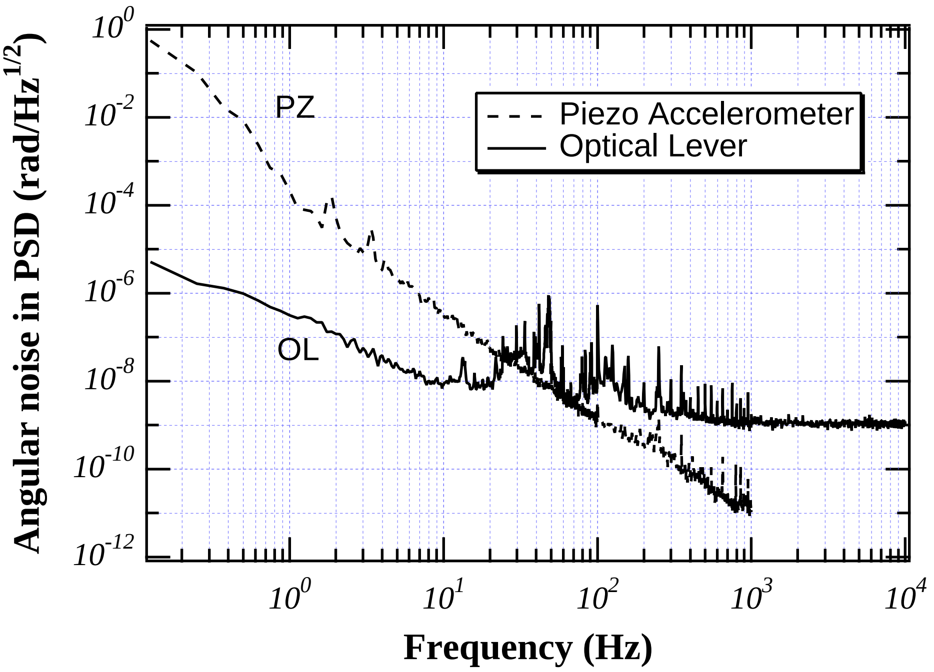


図 6.15　角度揺れの振動検出器の感度特性

6.3 加振特性の測定

6.3.1 加振振幅の測定

まず、それぞれの加振法について、加振器によって参照点をどれくらいの振幅まで振動させることができるかを測定した。参照点とは x 方向に関してはダンピングマグネットを吊っている板、y, z 方向に関してはフレーム天板のことである。加振器のパワーアンプの入力に入れる正弦波の振幅に対する、参照点の加振加速度振幅の応答を描いたのが図 6.16 で、変位に換算して低周波まで描いたのが図 6.17 である。

まず、図 6.16 を見ると、同じ電圧で加振しても、70Hz 以上では x 方向のサスペンションポイント加振が最も効率よく加振を行うことができることが分かる。底板で加振すると懸架システムのフレームの共振 (40Hz 付近、300Hz 付近) や z 方向の可動ステージの共振が、天板の揺れに現れる。底板加振で強く振ると共振点でワイヤー切れなどが起こるので、共振付近でのみ加振力を落として実験を行わなければならない。z 加振では 500Hz まではフラットな加振特性が得られる。

1Hz から 10Hz では変位振幅は一定であるが、それより低い周波数では振幅が出せなくなってくる。また高周波になると振幅が減ってゆくが、これは入力電圧に対し加振力が大体一定になるからである。

懸架システムの伝達関数測定で加振器に与えた正弦波の振幅は最大 0.2V で、これは加振器の性能では制限されていない。コントロールブロックのステージはステージ内部のバネにより束縛されているが、これ以上の電圧で振るとバネの力が加振力に負け、ステージがガたつき始める。これは参照点の振幅を加速度計で計測していると、波形が乱れて正弦波からはずれるのですぐに確認できる。共振の存在する周波数付近ではより小さい振幅で振らなければならなかった。

6.3.2 コントロールブロックの共振の測定

フレームの上に乗っているコントロールブロックに共振があると、X-pendulum から伝わってきた振動が共振で増大してサスペンションポイントに伝わってしまう。コントロールブロックのもつ機械共振を測定するために、参照点の振れに対して、ワイヤーが固定されているコントロールブロック頂上ではどれだけ振れるかを測定し、伝達関数を測定した (図 6.18)。

その結果、x, y 方向の共振が 60Hz 付近に、z 方向の共振が 160Hz 付近に存在することが分かった。いずれも共振峰の高さは 20dB ほどで、つまり共振の存在する領域では防振特性がおよそ 1 ケタ悪化する見込みになることがわかった。

6.4 ダンピングマグネットの減衰の大きさと弾性支持周波数の調整

ダンピングマグネットの減衰力や弾性支持周波数を設計した値に設定するために、

1. 磁石の個数の調整による減衰の大きさの調整

2. ダンピングマグネットの水平、垂直の共振周波数の調整

を行った。

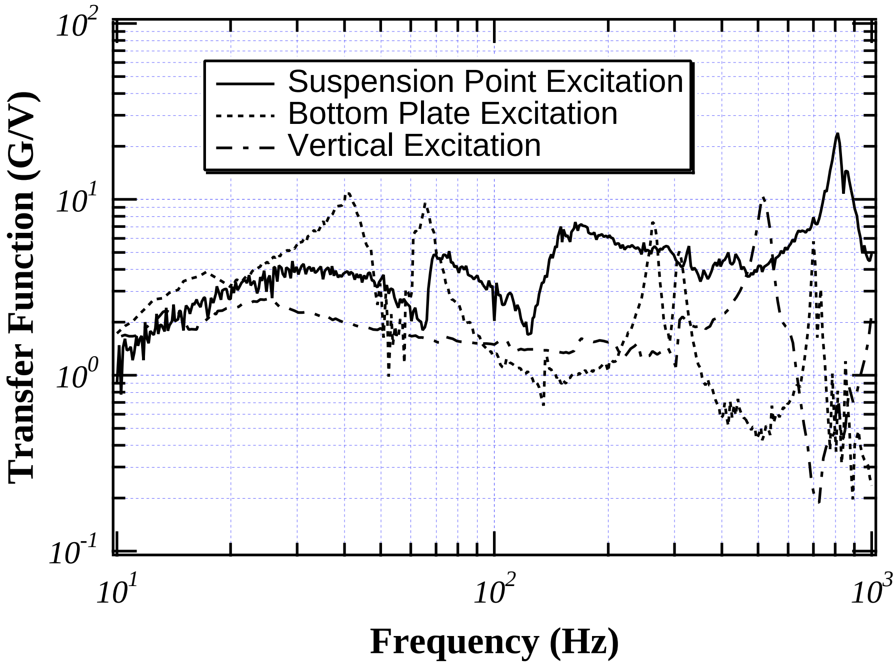


図 6.16 加振器入力から天板の加振加速度振幅への伝達関数

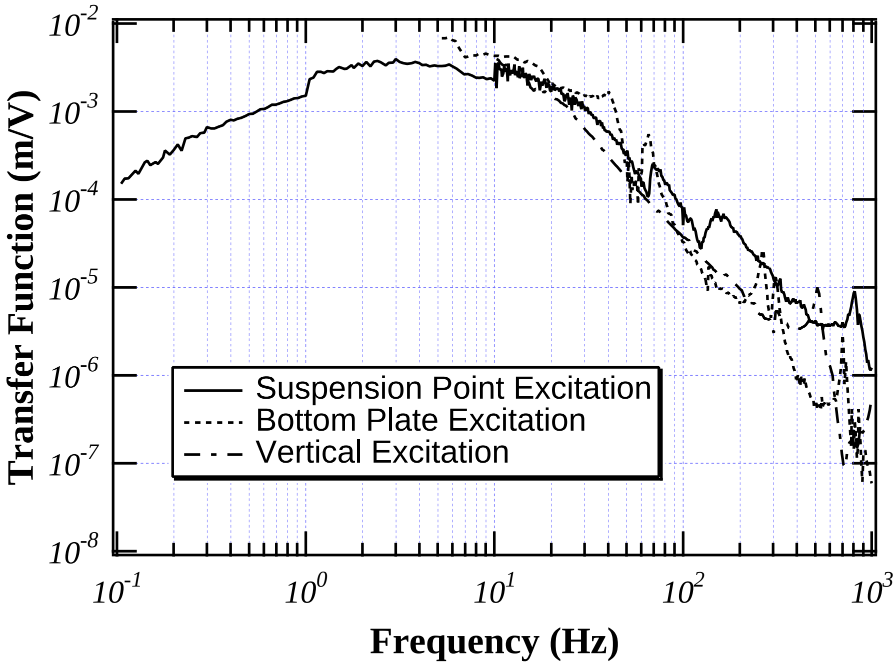


図 6.17 加振器入力から天板の加振変位振幅への伝達関数

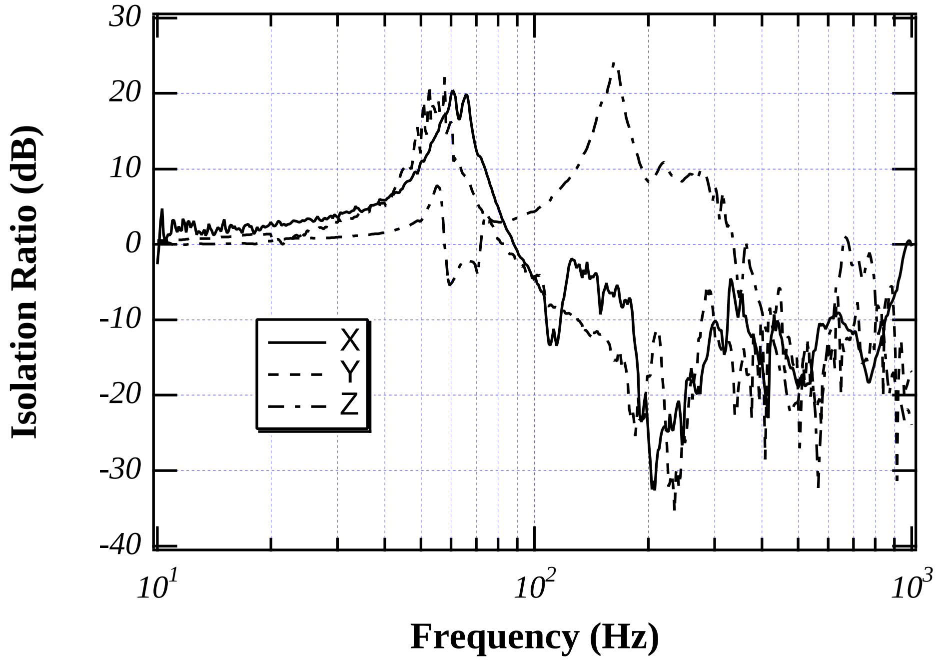


図 6.18　ステージの共振

6.4.1　減衰の大きさの調整

減衰力の効果をよりはっきりと見るために、中段マスによる単振り子を使用した。すなわち、ダンピングマグネットをフレームに固定し、さらにダミーマスをはずし、底板による x 加振を行い、伝達特性を減衰のある 1 次元の単振り子の特性と比較して、その Q 値を計測した。

マグネットの配置には図 6.19 のような 2 種類を使用した。N 極と S 極を交互に置いたのは、漏れ磁場をなるべく小さくするためである。

測定の結果を図 6.20 に示した。減衰のある単振り子の伝達関数と比較を行い、その結果マグネットの個数は 8 個が最適であることが明らかとなった。

6.4.2　弾性支持周波数の調整

次に、マグネットの弾性支持の周波数を決定するために、中段マスとダミーマスをはずし、

- マグネットを吊り下げる棒の太さや材質
- マグネットの垂直防振用板バネの方式と形状

を試行錯誤した結果、直径 2mm のステンレス製の棒を使用し、マグネット側に板バネを付けることで、垂直には 9Hz、水平には 4.8Hz の共振周波数を持つようにすることができた。

この状態で x 方向に底板加振を、z 方向に垂直加振を行い、天板からマグネットへの x-x 防振比と z-z 防振比を測定した (図 6.21)。その結果、100Hz 以上に板バネの内部共振や棒の内部共振などの多数の機械共振があらわれ、防振比の向上を妨げていることが分かった。これらの共振は弾性支持マグネット方式の理想的な性能を得る妨げになる。しかし、例えば、固定マグネットによ

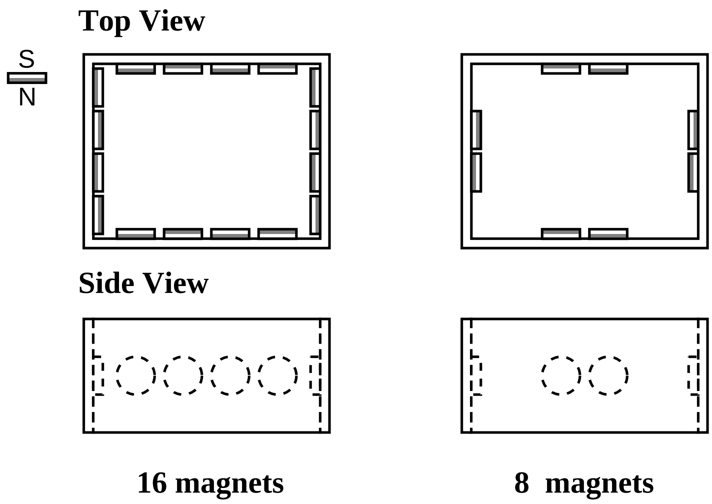


図 6.19 マグネットの配置

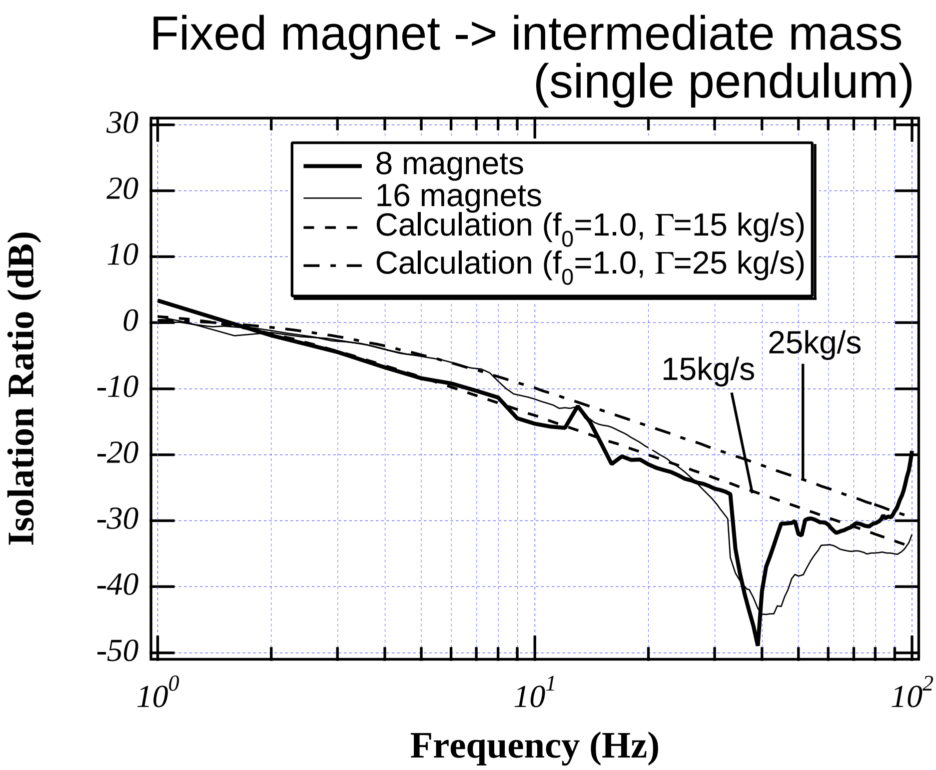


図 6.20 減衰の大きさの測定

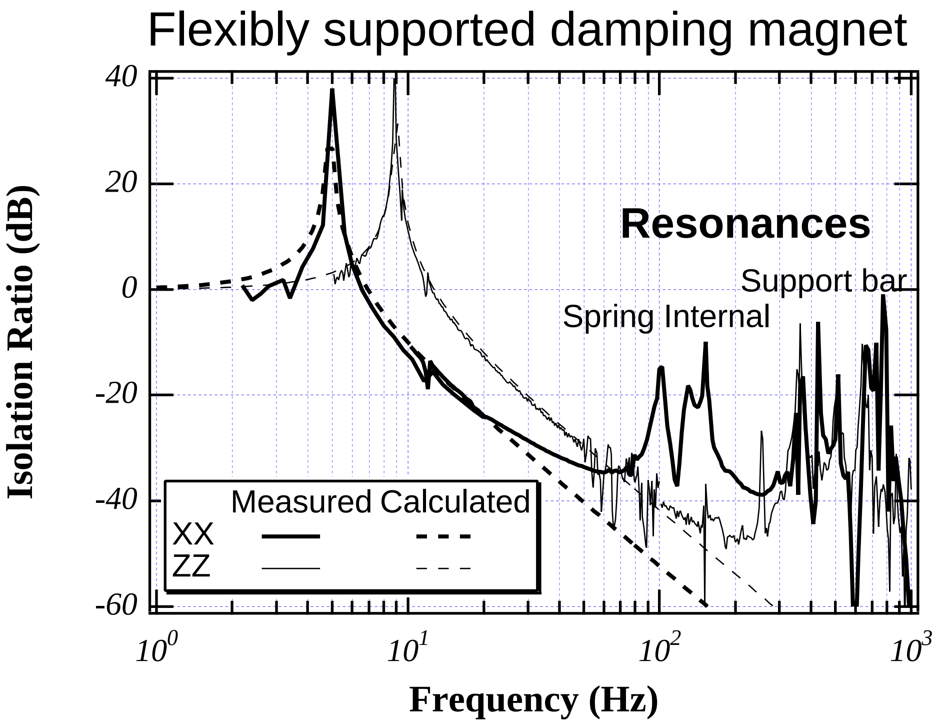


図 6.21　マグネットの弾性支持の特性

るダンピングの方式に比べれば、マグネットから導入される振動ははるかに小さい。よって、これらの共振により完全に懸架システムが機能しなくなる、ということはない。

また、マグネットの防振比には大きな影響を与えていないが、11Hz には Pitch 共振があり、加振中に Pitch の揺れも励起されていることが肉眼で確認された。このモードは計算では考慮していなかったが、鏡の角度揺れ特性に影響を与えることが予想される。

6.5　防振比、角度揺れ特性の測定

実際に懸架装置がどれだけの防振性能を発揮するかを確かめるために、懸架装置全体をくみ上げた状態での防振比と角度揺れ特性を測定した。

6.5.1　x-x 防振比の測定

x 方向にサスペンションポイント加振を行い、フォトセンサー、ピエゾ加速度計、Michelson 干渉計により、ダンピングマグネットを吊っている板からダミーマスまでの x-x 防振比を測定した。結果を理想的に懸架された場合の x-x 防振比の計算結果とともに図 6.22 に示した。

結果からみて、フォトセンサーでは 20Hz 以下の周波数で、ピエゾ加速度計では 5Hz 以上で測定できている事が分かった。また、Michelson 干渉計の測定はピエゾ加速度計の測定とほぼ一致している。測定と計算は 20Hz までは同じ傾向を示し、それ以上の周波数では -80dB から -100dB 程度で一定になる。これが正しい防振比であるかどうかについては後述する (6.6 節)。

計算により予測された周波数のいくつかではピークが現れた。 0.8Hz に振り子モード、3.3Hz には Pitch モードのピークが現れた。また計算では見えないはずであったが、27Hz に Roll または z 方向の共振が見られた。また計算では予測していなかった 17.2Hz に縦防振系として入れてあるベローズの共振が現れた。

6.5.2　y-y 防振比、y-x 防振比の測定

次に、y 方向に底板加振を行い、フォトセンサーとピエゾ加速度計により、天板からダミーマスまでの y-y 防振比、および y-x 防振比を測定した。結果を理想的に懸架された場合の y-y 防振比の計算結果とともに図 6.23 に示した。

y-y 防振比の結果は、x-x 防振比の測定同様、フォトセンサーでは 20Hz 以下で、ピエゾ加速度計では 5Hz 以上で測定できている。6Hz 以下および 25Hz から 40Hz の共振付近で測定と計算は良く一致した。

6Hz から 10Hz はダンピングマグネットの共振のある周波数であるが、防振比が計算より悪くなっている。また 17.2Hz と 130Hz にベローズの共振が、50Hz にステージに由来する共振が出ている。

y-x 防振比の結果から、今回のセットアップでは 6Hz 以下のカップリング率は約 -30dB、それ以上の周波数では約 -20dB であるということが分かった。

6.5.3　z-z 防振比、z-x 防振比の測定

z 方向に垂直加振を行い、ピエゾ加速度計により天板からダミーマスまでの z-z 防振比、z-x 防振比を測定した。結果を z-z 防振比の計算値とともに図 6.24 に示した。

z-z 防振比の結果は、70Hz 以下で測定と計算は良く一致した。しかし、130Hz と 225Hz にベローズの共振、 160Hz にコントロールブロックの共振、などがあり防振比の向上が妨げられている。

z-x 防振比には Pitch 共振 (3.3Hz) やベローズの共振 (17.2Hz) が現れた。10Hz 以上でカップリング率として典型的には -60dB、25Hz のピーク付近では最良値として -77dB という結果を得た。

6.5.4　x-Pitch 特性、z-Pitch 特性の測定

防振比の測定と同様の加振方式により、x-Pitch 特性と z-Pitch 特性を測定した。x-Pitch 特性の測定には光てことピエゾ加速度計を、z-Pitch 特性の測定にはピエゾ加速度計のみを使用した。結果を懸架状態が理想的な場合の x-Pitch 特性の計算結果とともに図 6.25 に示した。

まず x-Pitch 特性についてみると、計算が特性を良く再現できたのは 0.5Hz から 5Hz までで、10Hz 付近にはダンピングマグネットによる共振が現れた。また 20Hz 以上のピエゾ加速度計による測定では、ベローズの共振やコントロールブロックの共振の周波数にピークが出て、100Hz 以上では 10^{-3}rad/m で横這いになる。

次に本来存在しないはずの z-Pitch 特性をみると、3Hz から 10Hz までで x-Pitch 特性を凌いでいる。これは非対称性の計算によって想定されたことである。10Hz 以上では x-Pitch 特性と

z-Pitch 特性はほとんど等しくなるが、z 方向のモードの共振周波数である 27Hz を過ぎると、再び z-Pitch 特性の方が大きくなっている。

加速度計の感度が 0.1dB だけ差を持っていることによる、1%の並進振動の漏れについて考えてみる。今、 z 加振について考えると、加速度計は加振振幅で規格化して z-x 防振比 T_{zx} だけ並進する。1%の振動が漏れるとすると、加速度計は 8.4cm 離してとりつけてあるので、z 加振により角度揺れとして出力されるのは、

$$\frac{0.01T_{zx}}{0.084[\mathrm{m/rad}]} = 0.12T_{zx}\,\mathrm{rad/m} \tag{6.3}$$

これは全く問題にならない量である。また x 加振については T_{xz} 防振比が必要となるが測定していないので、最悪の事態としてマスの x 振動と同じ振幅だけ z 方向に揺れる (すなわち $T_{xz} = T_{xx}$) としても、

$$\frac{0.01T_{xx}}{0.06[\mathrm{m/rad}]} = 0.17T_{xx}\,\mathrm{rad/m} \tag{6.4}$$

これも全く問題とならない。よって今回の測定では感度の差による並進の漏れの影響は無い。

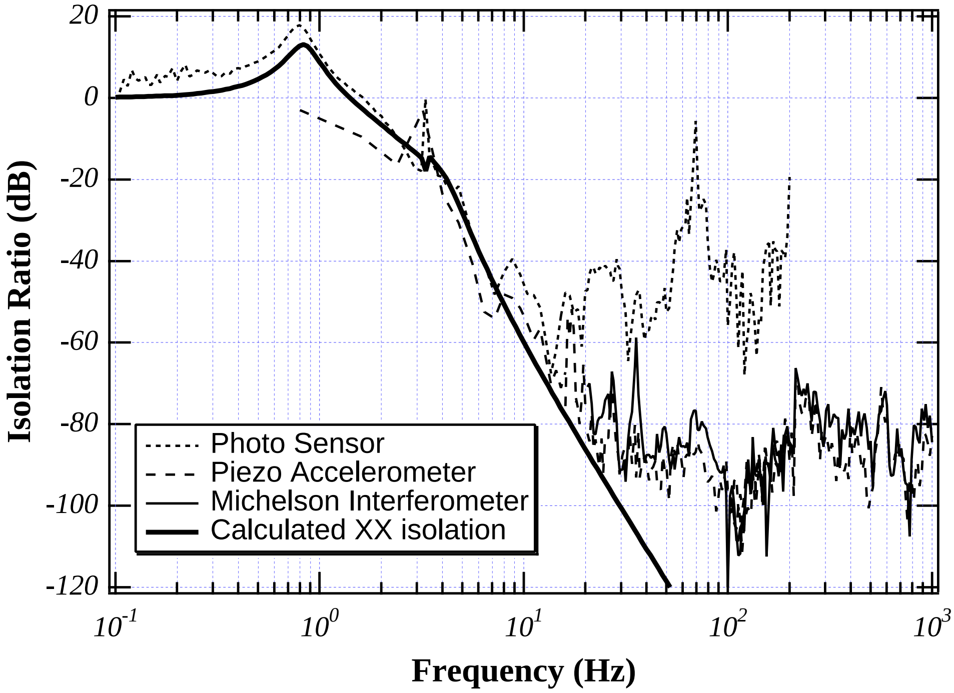


図 6.22　測定したダミーマスの x-x 防振比

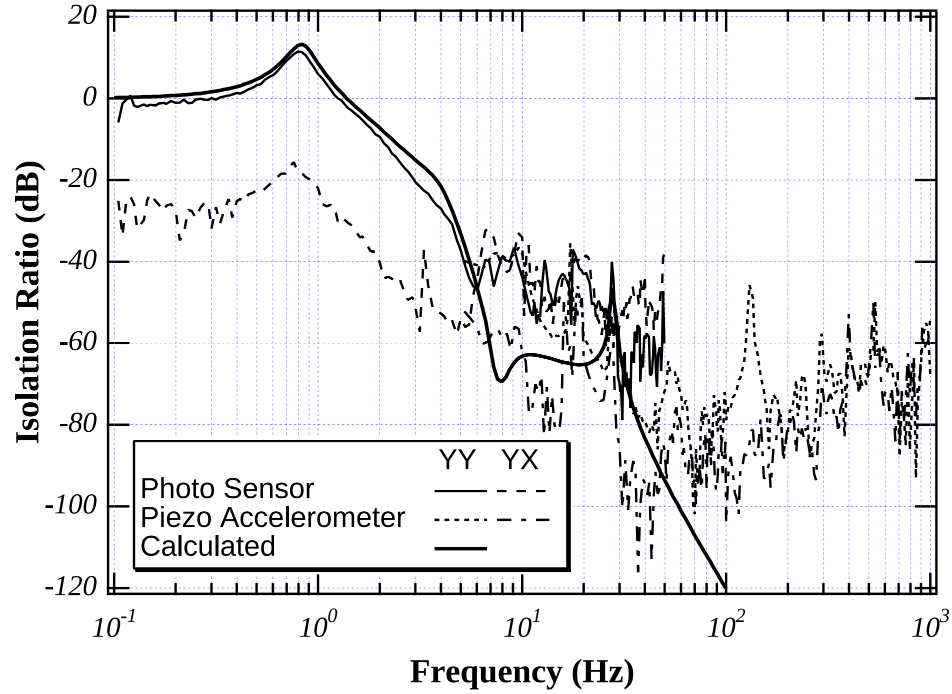


図 6.23　測定したダミーマスの y-y 防振比、y-x 防振比

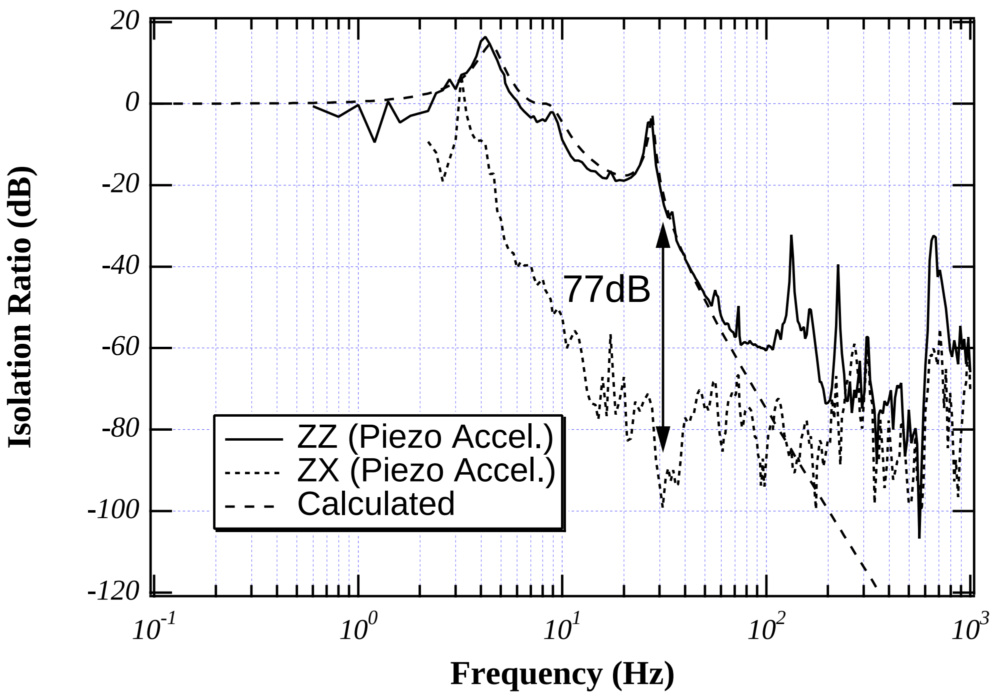


図 6.24 測定されたダミーマスの z-z 防振比、z-x 防振比

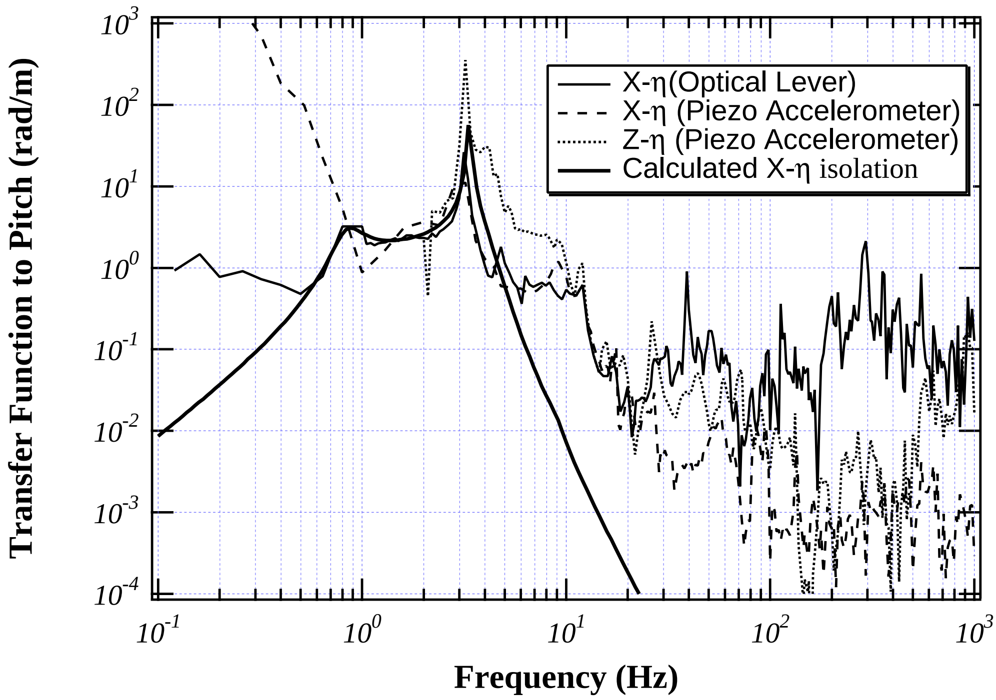


図 6.25 測定されたダミーマスの x-Pitch 防振比、z-Pitch 防振比

6.6　伝達関数測定の考察

6.6.1　防振比測定の限界

どの防振比測定においても −80dB あたりから、特性が乱れ、それ以上防振比が向上しなくなってしまう。そのような領域での実験では、センサーの incoherent noise が測定に現れないよう充分加振力は確保しており、実際測定の coherence は良かった。また、6.5.1 節でも述べたように、ピエゾ加速度計の測定結果と Michelson 干渉計の測定結果は一致した。故に、鏡は振動しているものと推測できる。

では、本当に防振比は −80dB なのであろうか。図 6.26 はダミーマスの防振比に加えて、中間マスの防振比も測定したものである。点線は弾性支持マグネットによるダンピングを行った場合、実線はダンピングを行わなかった場合の防振比である。ダンピングを行わなかった場合、中段マスはより防振比が高くなる。それにもかかわらず、ダミーマスの防振比は全く変化しない。これは、高い防振比の領域ではダミーマスの振動がワイヤーから導入される力で引き起こされているのではなく、空気により引き起こされているのではないか、ということを示唆している。それゆえ、真の防振比はより良いと推測される。これを確認するには真空中での測定が必要である。我々のグループでは今まで何度か真空中での防振比測定を試みて来たが、真空装置の共振の存在により加振力が上がらず、正しい測定を行えたという例はまだない。特に真空中でのサスペンションポイント加振を試みた例はまだないので、ベローズ等を介して、真空中で加振するという実験は試みる価値はある。

6.6.2　懸架装置の問題点

一方、図 6.26 は問題点もいくつか示している。

まず、弾性支持マグネットによるダンピングは観測帯域での防振比に影響を与えない計算であった。しかし、中段マスの防振比がダンピングにより観測帯域で 30dB ほど悪化していた。一つにはマグネットを装着していると、中段マスの重心の高さに加速度計を取り付けることができず、そのため角度ゆれの影響を受けている可能性がある。

さらにベローズの共振は鋭いピークを作る。垂直防振のバネの内部共振は避けるのが難しい問題である。真空を汚さないように封入したゴムで共振を潰す、または少量のゴムで良好な特性を得られるような別のバネを開発する、といった対策が考えられる。

6.6.3　x 軸方向の各防振比の比較

懸架システムが等方的な地面振動に曝された時に、鏡の光軸方向の振動はどの方向の地面振動で支配されるのか。それを知るためにことなるセンサーの測定をまとめて、x-x・y-x・z-x の各防振比を重ねてグラフにした (図 6.27)。10Hz∼30Hz 付近ではほとんどどれも差が無いように見える。この傾向が再現性良く現れるのかどうかは確認していない。

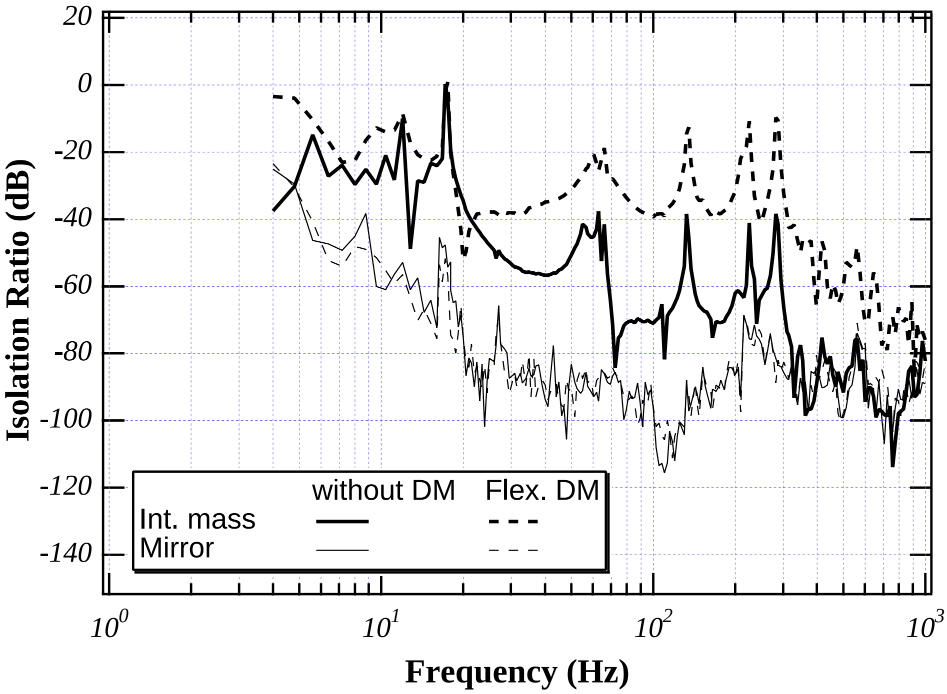


図 6.26　天板から中段マスの防振比。弾性支持マグネットによるダンピング有りの場合と無しの場合。

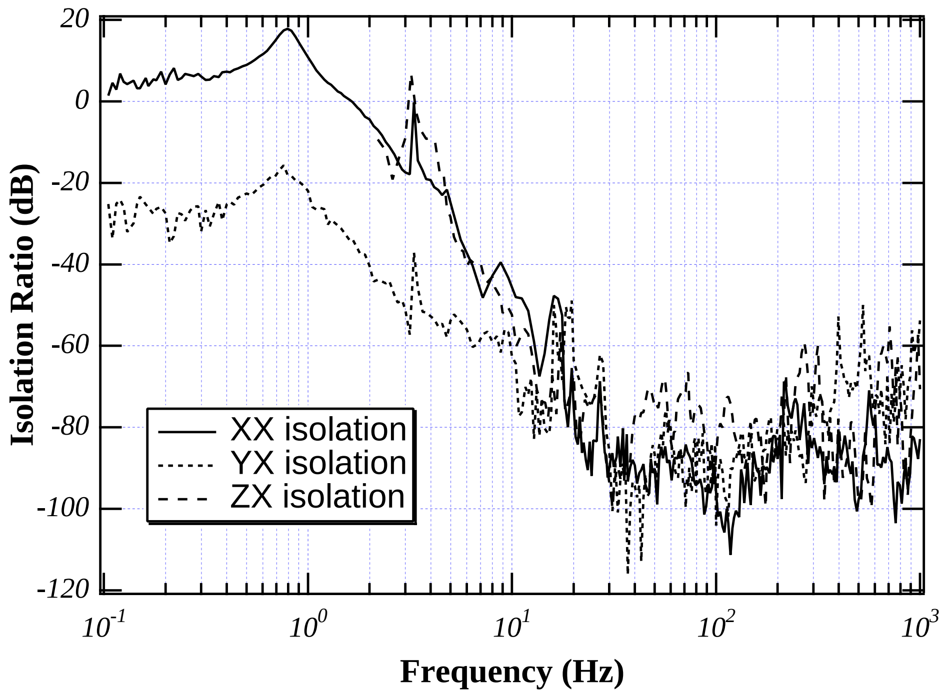


図 6.27　x 軸への各防振比の比較

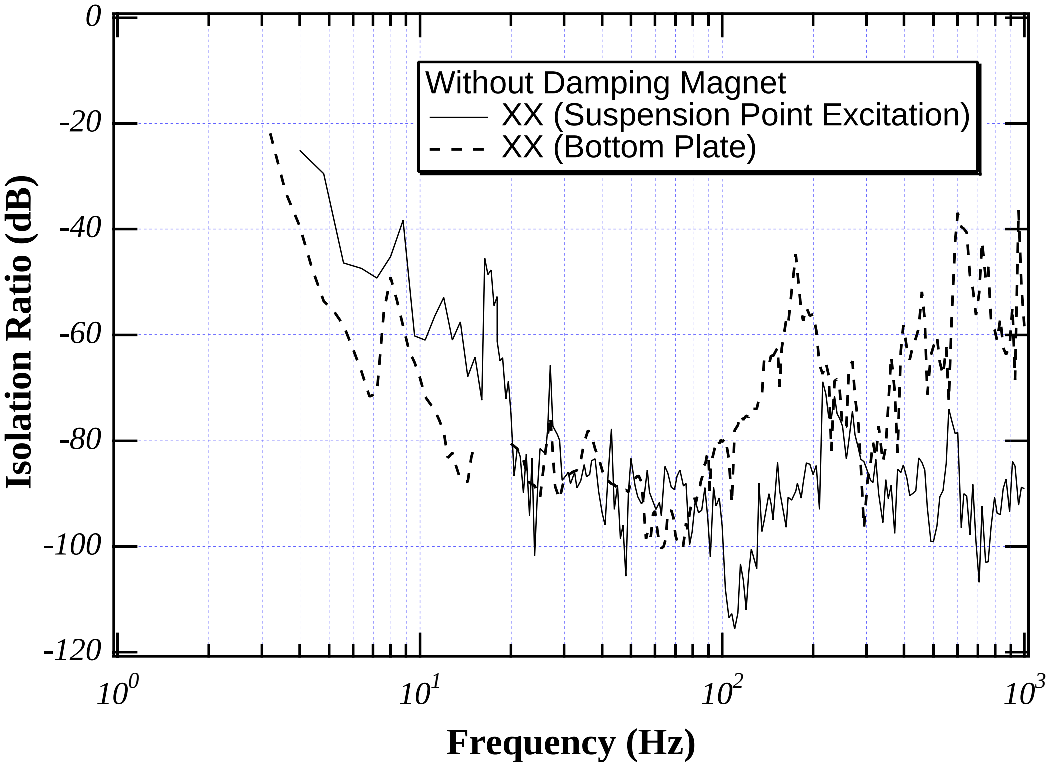


図 6.28　サスペンションポイント加振の場合・底板加振の場合の x-x 防振比の比較。ダンピングはかけていない。

6.6.4　加振方法の影響

加振方法により防振比の測定にどのような影響が出るかを図 6.28 に示す。ダンピングをかけていない状態で x 方向にサスペンションポイント加振したものと、底板加振したもので防振比がどう違うかを見た。

底板加振を行ったときには、100Hz を越えたあたりで大きなピークが立っている。このピークの周波数はコントロールブロックの z 方向の共振の周波数で、x 加振においても z 方向の共振が現れ、測定を妨げていると言うことが分かる。

6.7　この章の結論

東京大学理学部の加振器により加振実験を行い、各種センサーで TAMA300 用懸架システムの伝達関数を測定した。

防振比が -80dB までの領域では計算と実験がおおむね一致することがわかった。しかし、防振比が -80dB 以下になると音圧によると思われる雑音により測定が制限されることがわかった。結局、観測帯域での防振比として -80dB が上限値として得られたが、2 段振り子に弾性支持した磁石によるダンピングを施した方式が TAMA300 の懸架システムにも有効性であるということは確かめられた。

また、ベローズの共振やコントロールブロックの共振の周波数において中段マスの防振比の乱れがみられた。また、ダンピングマグネットをつけると観測帯域で中段マスの防振比が 30dB 程悪化する結果が出た。これに関しては原因を調査する必要がある。

並進方向のカップリングに関しては、測定が -80dB で制限されているため、観測帯域での議論はできないが、10~30Hz あたりでは x-x 防振比とほぼ同じくらいであるという結果が出た。

角度揺れのカップリングは非対称性の計算で示されたのと同様、z-Pitch 特性の方が、x-Pitch 特性よりも大きい、と言うことが分かった。

今後、実験に関連して、

- -80dB の壁を越えるために、真空中でサスペンション加振を行い、測定の限界を下げる。
- 非対称の計算 (5.5 節) について、計算条件の検討をおこない、実験結果との比較ができるようにする。
- Pitch 特性改善法 (5.4 節) を改善を施して、特に低周波の防振特性について測定を行う。
- 並進加振から Yaw へのカップリングについての測定を行う。
- 共振による防振比の悪化を無くすため、よりよい特性の板バネの開発する。

などの発展が考えられる。

第7章

結論

TAMA300 用懸架システムとして 2 段振り子に弾性支持した磁石によるダンピングを施す方式を採用し、試作機を設計、および製作した。試作機の防振特性を測定し、低周波域 ($\sim$ 10Hz) でモデル計算と一致させることができた。また TAMA300 の観測帯域である 150Hz $\sim$ 450Hz では上限値として -80dB を得た。

最後に全章をまとめる結論として、本論文の方式の懸架システムが TAMA300 に使用できるかどうかを検討したい。

まず、懸架システムに要求される性能は、

- **観測帯域での防振比**
- **RMS 振幅**

の 2 点であった。

まず、RMS 振幅について言うと、計算の結果と実験で測定した伝達関数を比較した結果、RMS 振幅に効いて来るような低周波の特性については本論文で扱った程度のモデル化で記述できることが分かった。ただし、現時点では、

- Yaw 方向の RMS 振幅についてのモデル化が行えない。
- 試作機の Pitch 方向の RMS は要請よりも大きい。

という問題がある。これらはそれぞれ、3 次元の非対称入りの剛体モデル計算と、本論文で提案した Pitch 揺れ RMS 振幅改善法、を導入することで解決が可能である。また懸架システムを地面振動に曝して、RMS 振幅の実測を行うのがより良い。

つぎに観測帯域での防振比の面で言うと、測定系に目標の防振比を測定するだけの性能が備わっていなかったと見ることができる。防振比が計れてこそ改善が望めるのであり、見えない防振比を相手にするのは困難なことである。集めたデータからは現在の懸架システムが測定した防振比よりもずっと良い防振比を持っていると仮定することはできない。

仮に、試作機の観測帯域での防振比が本論文で上限値として得た -80dB であるとする。TAMA300 には懸架システムを含めて 3 つの防振系が存在する。スタックは 150Hz 以上で -60dB 以上の防振比を提供するので、TAMA300 Phase I のレベルはクリアできる。X-pendulum の目標である -60dB の防振比が提供されるとすると、Phase I も Phase II も問題無くなる。

本論文で試作機の問題点が明らかにされたので、今後は実機の製作を含めて、モデル計算、実際の装置、測定方法において改良を行って行く予定である。

補遺 A

幾何単位系について

一般相対性論においては、計算の簡便のため $G=1$, $c=1$ とする幾何単位系を用いることが多い。SI 単位系では、G は $\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$ の単位を、c は $\mathrm{m}\,\mathrm{s}^{-1}$ の単位を持っているが、これらは幾何単位系では無次元量となるため、

$$\mathrm{s} = 2.99792\times 10^{8}\,\mathrm{m}$$

$$\mathrm{kg} = 7.42426\times 10^{-28}\,\mathrm{m}$$

の換算により、質量や時間も m の次元を持つ。以下に主な物理定数の SI 単位系での値、幾何単位系での値をまとめる。

参考文献 [14]

光速度	c	$2.99792\times 10^{8}\,\mathrm{m}\,\mathrm{s}^{-1}$	1
万有引力定数	G	$6.67259\times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$	1
プランク定数	$\hbar$	$1.05457\times 10^{-34}\,\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$	$2.61161\times 10^{-70}\,\mathrm{m}^2$
電子の質量	m_e	$9.10939\times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$	$6.76305\times 10^{-58}\,\mathrm{m}$
陽子の質量	m_p	$1.67262\times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$	$1.24180\times 10^{-54}\,\mathrm{m}$
太陽質量	$M_\odot$	$1.9891\times 10^{30}\,\mathrm{kg}$	$1.4768\times 10^{3}\,\mathrm{m}$
地球の質量	$M_\oplus$	$5.9742\times 10^{24}\,\mathrm{kg}$	$4.4354\times 10^{-3}\,\mathrm{m}$

補遺 B

3 次元の単振り子の剛体運動方程式

論文中ではおもに数値計算によって剛体運動を扱って来た。ここでは解析的な計算の例として、4 本のワイヤーで吊られた 1 つの剛体の 3 次元振動について運動方程式を立ててみる。

剛体の自由度として、並進 3・回転 3 の 6 つが存在するが、理想的に懸架された状態を考えるため、自由度は分離され、x と η の組み、y と ξ の組み、z、ζ に分離する。計算方法としては 3.3 節でのべた静的仮想変位を加える方法を用いている。

B.1　系の記述・静止状態の設定

パラメータは図 B.1 の通りである。吊り方は対称で理想的で、散逸もないとした。

静止状態において、重心の座標は

$$\mathrm{CM}_0 : (0,\ 0,\ -R_0 - z_0)$$

であるとする。

この時、上側のワイヤーのクランプ点は、

$$\mathrm{P}_{0\,(\mathrm{c1,c2})} : (c_1 d_1,\ c_2(y_0 - y_1),\ 0)$$

に、下側のワイヤーのクランプ点は、

$$\mathrm{Q}_{0\,(\mathrm{c1,c2})} : (c_1 d_1,\ c_2 y_0,\ -R_0)$$

になる。ここで、

- ワイヤーの x 座標が $+$ であるとき $c_1 = +1$、$-$ であるとき $c_1 = -1$
- ワイヤーの y 座標が $+$ であるとき $c_2 = +1$、$-$ であるとき $c_2 = -1$

とし、c_1, c_2 によって 4 本のワイヤーそれぞれを識別する。

静止状態においてワイヤーの長さは、c_1, c_2 によらず、

$$|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0}_{(\mathrm{c1,c2})}| = \sqrt{y_1^2 + R_0^2} \equiv l$$

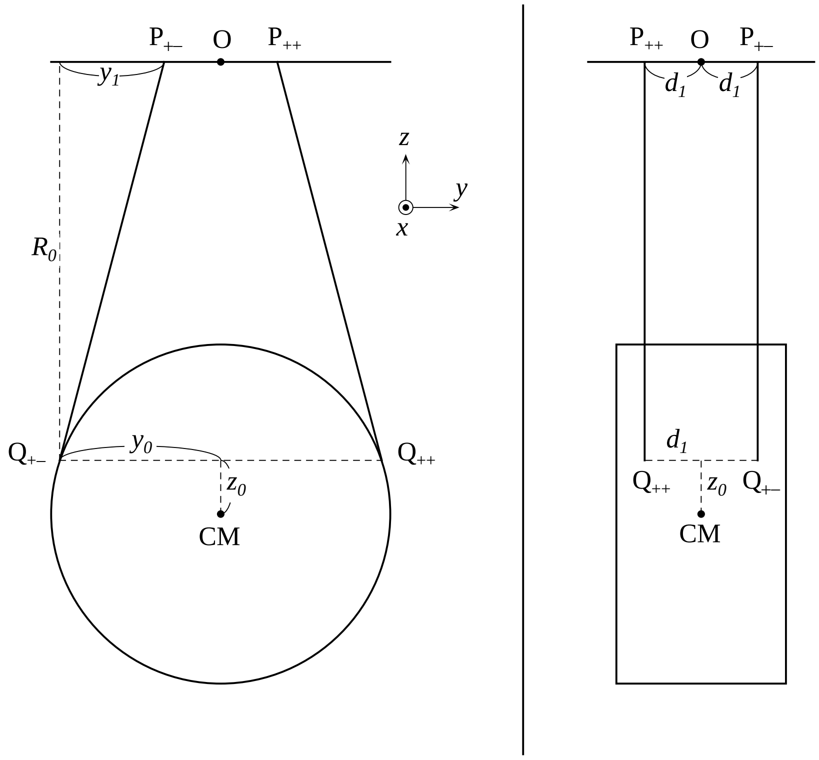


図 B.1　振り子のパラメータ

であり、また、4 本のワイヤーによって mass を支えているので、各ワイヤーが発生する張力の z 成分は $mg/4$ であるから、静止状態においてワイヤーが生じる張力の大きさは、

$$T_0 = \frac{mgl}{4R_0}$$

である。これにより、ワイヤーの自然長 l_0 は

$$l_0 = l(1 - \frac{mg}{4R_0k})$$

であることがわかる。

B.2　運動方程式の算出

B.2.1　x 並進

静止状態より、mass を x 方向に微小に変位させ、このとき各自由度に生じる復元力を求める。摂動を加えた状態では mass の重心は、

$$\mathrm{CM}: (x,\ 0,\ -R_0 - z_0)$$

になっている。

上のクランプ点は動いておらず、

$$\mathrm{P}_{(\mathrm{c1,c2})}: (c_1 d_1,\ c_2(y_0 - y_1),\ 0)$$

であり、また mass についているクランプ点は、加えた摂動の分だけ動くので、

$$\mathrm{Q}_{(\mathrm{c}1,\mathrm{c}2)} : (c_1 d_1 + x,\ c_2 y_0,\ -R_0)$$

となる。

ワイヤー両端のクランプ点の座標が決まると、静止状態からのワイヤーの伸びがわかる。x 方向の微小変位の場合

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}_{(\mathrm{c}1,\mathrm{c}2)}| - |\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0}_{(\mathrm{c}1,\mathrm{c}2)}| = O^2(x)$$

となり、1 次のオーダーでのワイヤーの伸びはない。

各ワイヤーが mass に及ぼす張力ベクトルは、

$$\overrightarrow{T}_{(c1,c2)} = T_0 \frac{\overrightarrow{\mathrm{QP}}_{(\mathrm{c}1,\mathrm{c}2)}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}_{(\mathrm{c}1,\mathrm{c}2)}|} = \frac{mg}{4R_0} \begin{pmatrix} -x \\ -c_2 y_1 \\ R_0 \end{pmatrix}$$

で与えられる。

トルクの計算の際に使用するために、重心から mass 側クランプまでの動径ベクトルも求めておくと、

$$\overrightarrow{r}_{(c1,c2)} = \begin{pmatrix} c_1 d_1 \\ c_2 y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

これらの結果より、x 並進の摂動により並進の 3 自由度に発生する復元力は、次の計算で表され[1]、

$$m\ddot{\overrightarrow{x}} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \sum \overrightarrow{T}_{(c1,c2)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{mg}{R_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x$$

という運動方程式になる。

回転に関する運動方程式は、

$$\begin{pmatrix} I_\xi \ddot{\xi} \\ I_\eta \ddot{\eta} \\ I_\zeta \ddot{\zeta} \end{pmatrix} = \sum \overrightarrow{r}_{(c1,c2)} \times \overrightarrow{T}_{(c1,c2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{mgz_0}{R_0} \\ 0 \end{pmatrix} x$$

となる。

結果から、x と η の自由度は結合しており、それ以外の自由度とは分離していることがわかる。

B.2.2 y 並進

x 並進の時の全く同じように計算をする。

y 方向へ摂動を加えた状態で、重心・上のクランプ点・mass 側のクランプ点の座標は

$$\mathrm{CM} : (0,\ y,\ -R_0 - z_0)$$

[1]総和は 4 本のワイヤについて取る。

$$\mathrm{P}_{(\mathrm{c1,c2})} : (c_1 d_1,\, c_2(y_0 - y_1),\, 0)$$

$$\mathrm{Q}_{(\mathrm{c1,c2})} : (c_1 d_1,\, c_2 y_0 + y,\, -R_0)$$

で表される。

この時のワイヤー長の変化は、

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}_{(\mathrm{c1,c2})}| - |\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}_{(\mathrm{c1,c2})}| = \frac{c_2 y_1}{l} y + O^2(y)$$

で、各ワイヤーには 1 次のオーダーで伸縮がある。

この伸縮により張力も変化するので、張力ベクトルは

$$\overrightarrow{T}_{(c1,c2)} = \left(T_0 + \frac{c_2 k y_1}{l} y\right) \frac{\overrightarrow{\mathrm{QP}}_{(\mathrm{c1,c2})}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}_{(\mathrm{c1,c2})}|}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{4ky_1^2 + mgR_0}{4l^2} y - \dfrac{c_2 m g y_1}{4R_0} \\ \dfrac{mg}{4} + \dfrac{c_2(4kR_0 - mg)y_1}{4l^2} y \end{pmatrix}$$

となる。

重心から mass 側クランプまでの動径ベクトルは、x のときと変わらず、

$$\overrightarrow{r}_{(c1,c2)} = \begin{pmatrix} c_1 d_1 \\ c_2 y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

運動方程式への y 摂動の寄与は次の通りになる。

$$m\ddot{\overrightarrow{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{4ky_1^2 + mgR_0}{l^2} \\ 0 \end{pmatrix} y$$

回転に関する運動方程式では、

$$\begin{pmatrix} I_\xi \ddot{\xi} \\ I_\eta \ddot{\eta} \\ I_\zeta \ddot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4ky_1(R_0 y_0 + y_1 z_0) + mg(R_0 z_0 - y_0 y_1)}{l^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y$$

となる。

結果から、y と ξ の自由度は結合しており、それ以外の自由度とは分離していることがわかる。

B.2.3 z 並進

z 方向へ摂動を加えた状態で、重心・上のクランプ点・mass 側のクランプ点の座標は

$$\mathrm{CM} : (0,\, 0,\, -R_0 - z_0 + z)$$

$$\mathrm{P}_{(\mathrm{c1,c2})} : (c_1 d_1,\, c_2(y_0 - y_1),\, 0)$$

$$\mathrm{Q}_{(\mathrm{c1,c2})} : (c_1 d_1,\, c_2 y_0,\, -R_0 + z)$$

この時のワイヤー長の変化は、

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}_{(\mathrm{c1,c2})}| - |\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}_{(\mathrm{c1,c2})}| = -\frac{R_0}{l} z + O^2(z)$$

で、各ワイヤーには１次のオーダーで伸縮がある。

この伸縮により張力も変化するので、張力ベクトルは

$$\overrightarrow{T}_{(c1,c2)} = \left(T_0 - \frac{kR_0}{l} z\right) \frac{\overrightarrow{\mathrm{QP}}_{(\mathrm{c1,c2})}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}_{(\mathrm{c1,c2})}|}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{c_2 m g y_1}{4R_0} + \dfrac{c_2(4kR_0 - mg)y_1}{4l^2} z \\ \dfrac{mg}{4} - \dfrac{4kR_0^3 + mgy_1^2}{4l^2 R_0} z \end{pmatrix}$$

となる。

重心から mass 側クランプまでの動径ベクトルは、x のときと変わらず、

$$\overrightarrow{r}_{(c1,c2)} = \begin{pmatrix} c_1 d_1 \\ c_2 y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

並進の運動方程式への z 摂動の影響は、

$$m\ddot{\overrightarrow{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{4kR_0^3 + mgy_1^2}{l^2 R_0} \end{pmatrix} z$$

であり、また、

$$\begin{pmatrix} I_\xi \ddot{\xi} \\ I_\eta \ddot{\eta} \\ I_\zeta \ddot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} z$$

のように、回転の運動方程式への z 摂動の影響はない。つまり、z 方向の運動は他の自由度と分離している。

B.2.4　ξ 回転

ξ 回転の摂動を加えても重心の位置は変化しない。

$$\mathrm{CM} : (0,\, 0,\, -R_0 - z_0)$$

上側クランプには摂動は加わらない。

$$\mathrm{P}_{(\mathrm{c1,c2})} : (c_1 d_1,\, c_2(y_0 - y_1),\, 0)$$

静止状態での動径ベクトルを ξ だけ回転して、新しい動径ベクトルを計算する。

$$\overrightarrow{r}_{(c1,c2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\xi & -\sin\xi \\ 0 & \sin\xi & \cos\xi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 d_1 \\ c_2 y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 d_1 \\ c_2 y_0 - z_0\,\xi \\ z_0 + c_2 y_0\,\xi \end{pmatrix} + O^2(\xi)$$

これにより、摂動後の mass 側クランプの位置は

$$\mathrm{Q}_{(\mathrm{c1,c2})} : (c_1 d_1,\, c_2 y_0 - z_0 \xi,\, -R_0 + c_2 y_0 \xi)$$

であることがわかる。

この時のワイヤー長の変化は、

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}_{(\mathrm{c1,c2})}| - |\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}_{(\mathrm{c1,c2})}| = -\frac{c_2(R_0 y_0 + y_1 z_0)}{l}\xi + O^2(\xi)$$

で、各ワイヤーには 1 次のオーダーで伸縮がある。

この伸縮により張力も変化するので、張力ベクトルは

$$\overrightarrow{T}_{(c1,c2)} = \left(T_0 - \frac{c_2 k(R_0 y_0 + y_1 z_0)}{l}\xi\right) \frac{\overrightarrow{\mathrm{QP}}_{(\mathrm{c1,c2})}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}_{(\mathrm{c1,c2})}|}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{c_2 mgy_1}{4R_0} + \dfrac{4ky_1(R_0 y_0 + y_1 z_0) + mg(R_0 z_0 - y_0 y_1)}{4l^2}\xi \\ \dfrac{mg}{4} + c_2 \dfrac{-4kR_0^2(R_0 y_0 + y_1 z_0) + mgy_1(R_0 z_0 - y_0 y_1)}{4l^2 R_0}\xi \end{pmatrix}$$

となる。

並進運動への寄与は、

$$m\ddot{\overrightarrow{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{4ky_1(R_0 y_0 + y_1 z_0) + mg(R_0 z_0 - y_0 y_1)}{l^2} \\ 0 \end{pmatrix} \xi$$

となり、回転運動への寄与は

$$\begin{pmatrix} I_\xi \ddot{\xi} \\ I_\eta \ddot{\eta} \\ I_\zeta \ddot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{mg(R_0 z_0 - y_0 y_1)(l^2 + R_0 z_0 - y_0 y_1)}{l^2 R_0} - \dfrac{4k(R_0 y_0 + y_1 z_0)^2}{l^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xi$$

となる。

B.2.5 η 回転

η 回転の摂動を加えても重心の位置・上側クランプは変化しない。

$$\mathrm{CM} : (0,\, 0,\, -R_0 - z_0)$$

$$\mathrm{P}_{(\mathrm{c1,c2})}:(c_1d_1,\,c_2(y_0-y_1),\,0)$$

静止状態での動径ベクトルを η だけ回転して、新しい動径ベクトルを計算する。

$$\overrightarrow{r}_{(c1,c2)}=\begin{pmatrix}\cos\eta & 0 & \sin\eta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\eta & 0 & \cos\eta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1d_1\\ c_2y_0\\ z_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1d_1+z_0\,\eta\\ c_2y_0\\ z_0-c_1d_1\,\eta\end{pmatrix}+O^2(\eta)$$

これにより、摂動後の mass 側クランプの位置は

$$\mathrm{Q}_{(\mathrm{c1,c2})}:(c_1d_1+z_0\,\eta,\,c_2y_0,\,-R_0-c_1d_1\,\eta)$$

この時のワイヤー長の変化は、

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}_{(\mathrm{c1,c2})}|-|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}_{(\mathrm{c1,c2})}|=\frac{c_1d_1R_0}{l}\eta+O^2(\eta)$$

で、各ワイヤーには 1 次のオーダーで伸縮がある。

この伸縮により張力も変化するので、張力ベクトルは

$$\overrightarrow{T}_{(\mathrm{c1,c2})}=\left(T_0+\frac{c_1d_1R_0}{l}\eta\right)\frac{\overrightarrow{\mathrm{QP}}_{(\mathrm{c1,c2})}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}_{(\mathrm{c1,c2})}|}$$

$$=\begin{pmatrix}-\dfrac{mgz_0\eta}{4R_0}\\ \dfrac{c_1c_2d_1(mg-4kR_0)y_1\eta}{4l^2}-\dfrac{c_2mgy_1}{4R_0}\\ \dfrac{mg}{4}+\dfrac{c_1d_1(4kR_0^3+mgy_1^2)\eta}{4l^2R_0}\end{pmatrix}$$

となる。

並進運動への寄与は、

$$m\ddot{\overrightarrow{x}}=\begin{pmatrix}-\dfrac{mgz_0}{R_0}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\eta$$

となり、回転運動への寄与は

$$\begin{pmatrix}I_\xi\ddot{\xi}\\ I_\eta\ddot{\eta}\\ I_\zeta\ddot{\zeta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{mg[z_0(R_0+z_0)l^2+d_1^2y_1^2]}{l^2R_0}-\dfrac{4kd_1^2R_0^2}{l^2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\eta$$

となる。

B.2.6 ζ 回転

ζ 回転の摂動を加えても重心の位置は変化しない。

$$\mathrm{CM}:(0,\,0,\,-R_0-z_0)$$

上側クランプに摂動は加わらない。

$$\mathrm{P}_{(\mathrm{c1,c2})}:(c_1 d_1,\, c_2(y_0-y_1),\, 0)$$

静止状態での動径ベクトルを ζ だけ回転して、新しい動径ベクトルを計算する。

$$\overrightarrow{r}_{(c1,c2)}=\begin{pmatrix}\cos\zeta & -\sin\zeta & 0\\ \sin\zeta & \cos\zeta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1 d_1\\ c_2 y_0\\ z_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1 d_1-c_2 y_0\,\zeta\\ c_2 y_0+c_1 d_1\,\zeta\\ z_0\end{pmatrix}+O^2(\zeta)$$

これにより、摂動後の mass 側クランプの位置は

$$\mathrm{Q}_{(\mathrm{c1,c2})}:(c_1 d_1-c_2 y_0\,\zeta,\, c_2 y_0+c_1 d_1\,\zeta,\, -R_0)$$

であることがわかる。

この時のワイヤー長の変化は、

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}_{(\mathrm{c1,c2})}|-|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}_{(\mathrm{c1,c2})}|=\frac{c_1c_2d_1y_1}{l}\zeta+O^2(\zeta)$$

である。

よって、張力ベクトルは次のようになる。

$$\overrightarrow{T}_{(c1,c2)}=\left(T_0+\frac{c_1c_2d_1y_1k}{l}\zeta\right)\frac{\overrightarrow{\mathrm{QP}}_{(\mathrm{c1,c2})}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}_{(\mathrm{c1,c2})}|}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{c_2 mgy_0\zeta}{4R_0}\\ -\dfrac{c_2mgy_1}{4R_0}-\dfrac{c_1d_1(4ky_1^2+mgR_0)\zeta}{4l^2}\\ \dfrac{mg}{4}-\dfrac{c_1c_2d_1(4kR_0-mg)y_1\zeta}{4l^2}\end{pmatrix}$$

結果として、

$$m\ddot{\overrightarrow{x}}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\zeta$$

並進運動への寄与は無く、回転運動への寄与は

$$\begin{pmatrix}I_\xi\ddot{\xi}\\ I_\eta\ddot{\eta}\\ I_\zeta\ddot{\zeta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -\dfrac{4kd_1^2y_1^2}{l^2}-\dfrac{mgd_1^2R_0}{l^2}-\dfrac{mgy_0(y_0-y_1)}{R_0}\end{pmatrix}\zeta$$

である。つまり ζ 方向の運動は他の自由度とは分離している。

B.3 周波数応答関数行列

いま、系は散逸を持たないと仮定しているので、減衰行列 $\mathcal{C}=0$ である。周波数応答関数行列の逆行列は、$\mathcal{H}^{-1}$ は次の対称行列のようになる。

$$\mathcal{H}^{-1}=\begin{pmatrix} K_{xx}-\omega^2 m & 0 & 0 & 0 & K_{x\eta} & 0 \\ 0 & K_{yy}-\omega^2 m & 0 & K_{y\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz}-\omega^2 m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{y\xi} & 0 & K_{\xi\xi}-\omega^2 I_\xi & 0 & 0 \\ K_{x\eta} & 0 & 0 & 0 & K_{\eta\eta}-\omega^2 I_\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\zeta\zeta}-\omega^2 I_\zeta \end{pmatrix}$$

各成分は以下の通りになる。

$$\begin{aligned} K_{xx} &= \frac{mg}{R_0} \\ K_{x\eta} &= \frac{mgz_0}{R_0} \\ K_{yy} &= \frac{4ky_1^2+mgR_0}{l^2} \\ K_{y\xi} &= -\frac{4ky_1(R_0y_0+y_1z_0)+mg(R_0z_0-y_0y_1)}{l^2} \\ K_{zz} &= \frac{4kR_0^3+mgy_1^2}{l^2R_0} \\ K_{\xi\xi} &= \frac{mg(R_0z_0-y_0y_1)(l^2+R_0z_0-y_0y_1)}{l^2R_0}+\frac{4k(R_0y_0+y_1z_0)^2}{l^2} \\ K_{\eta\eta} &= \frac{mg[z_0(R_0+z_0)l^2+d_1^2y_1^2]}{l^2R_0}+\frac{4kd_1^2R_0^2}{l^2} \\ K_{\zeta\zeta} &= \frac{4kd_1^2y_1^2}{l^2}+\frac{mgd_1^2R_0}{l^2}+\frac{mgy_0(y_0-y_1)}{R_0} \end{aligned}$$

B.3.1 外力ベクトル

これまで運動方程式への外力の影響を全く考慮しないで計算を行なってきたが、ワイヤーの張力が上側クランプと mass 側クランプの相対的な隔たりによって決定されることを考えると、

$$\vec{\tilde{f}}=\begin{pmatrix} K_{xx}\tilde{X} \\ K_{yy}\tilde{Y} \\ K_{zz}\tilde{Z} \\ K_{y\xi}\tilde{Y} \\ K_{x\eta}\tilde{X} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。この外力ベクトルを用いれば防振比を計算することができる。

参考文献

[1] J. H, Taylor, J. M. Weisberg, *Ap. J.* **345**, 434 (1989).

[2] J. H, Taylor, *Rev. Mod. Phys* **66**, 711 (1994).

[3] A. Abramovici, et al., Gravitational wave astrophysics, *Proc. 1994 Snowmass Summer Study, 'Particle And Nuclear Astrophysics And Cosmology In The Next Millennium'*, World Scientific.

[4] A. Abramovici, et al., *Science* **256** 325 (1992).

[5] A. Brillet, et al., The VIRGO project, final conceptual design (1992).

[6] K Danzmann, et al., GEO600, Proposal for a 600m Laser-Interferometric Gravitational Wave Antenna, (1994).

[7] Integration Group 編, TAMA300 PROJECT DESIGN REPORT (1996).

[8] 高橋 竜太郎, 坪野 公夫, 黒田 和明, 藤本 眞克, 新谷 昌人, 「300m 干渉計用スタック防振系の開発 II」, 日本物理学会 1996 年春の年会 (金沢大) 2pWG2.

[9] 桑原 文彦, 高橋 竜太郎, 黒田 和明, 藤本 眞克, 「300m 干渉計用スタック防振系の開発 III」, 日本物理学会 1996 年秋の分科会 (佐賀大) 9aC13.

[10] M. Barton, K. Kuroda, *Rev. Sci. Instrum.* **65**, 3775 (1994).

[11] N. Kanda, M. Barton, K. Kuroda, *Rev. Sci. Instrum.* **65**, 3780 (1994).

[12] M. Barton, N. Kanda, K. Kuroda, *Rev. Sci. Instrum.* **67**, 3994 (1996).

[13] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, "GRAVITATION", Freeman (1973).

[14] B. F. Schutz, "A first course in general relativity", Cambridge University Press (1985).

[15] 「数理科学」, サイエンス社 (1990 年 11 月).

[16] 三尾 典克, 大橋 正健編, 「重力波アンテナ技術検討書 干渉計ハンドブック」, (1992).

[17] ランダウ, リフシッツ, 「場の古典論 (原書第 6 版)」, 東京図書 (1973).

[18] A. Araya, K. Kawabe, T. Sato, N. Mio, and K. Tsubono, *Rev. Sci. Instrum.* **64**, 1337 (1993).

[19] 栃久保 邦治, 修士論文 (1996).

[20] 山元 一広, 修士論文 (1997).

[21] 日本機械学会編,「計測法シリーズ 7 振動・騒音計測技術」, 朝倉書店 (1985).

[22] 長松 昭男,「モード解析入門」, コロナ社 (1993).

[23] K. Tsubono, A. Araya, K. Kawabe, S. Moriwaki, and N. Mio, *Rev. Sci. Instrum.* **64**, 2237 (1993).

[24] K. Kawabe, S. Nagataki, M. Ando, K. Tochikubo, N. Mio, K. Tsubono, *Appl. Phys. B* **62**, 135 (1996).

[25] 山元 一広, private communications.

[26] 安東 正樹, 修士論文 (1996).

[27] 「導電形振動試験装置仕様書 E・DES-452」, 株式会社アカシ.

[28] 河邊 径太, 修士論文 (1992).

謝辞

多くの方々のおかげで 2 年間の懸架システムの研究をここにまとめることができました。深く感謝いたします。

指導教官である坪野公夫助教授は、常に研究方針の相談に乗って頂き、また実験環境の改善を行ってくださいました。特に理学部物理学科への加振器の導入が無ければ、半年という短期間に試作機を組み上げて特性を試験することはできなかったでしょう。

東京大学地震研究所の助手の新谷昌人氏は、TAMA300 懸架システムサブグループのリーダーとして、常に前向きに研究を推進激励してくださいました。また、1 年半にわたる地震研での予備実験の間には、毎日実験結果を一緒に検討してくださり、その時に得た知識が試作機の実験で役に立ちました。そのうえ同氏の地面振動データや実験装置まで快くお貸しくださいました。また、地震研の正面のドアが施錠された深夜にも、いつも非常ドアを開けてくださいました。

坪野研究室の助手である河邊径太氏には折にふれ質問を聞いて頂き、無知な私に知恵を授けてくださいました。さらに、学会や会議などがあれば御自分の時間を削ってでも必ず発表の練習に立ちあってくださいましたし、この論文のみならず計算や実験をまとめる文書を書いたときには必ず査読をしてくださいました。

同研究室の修士課程の高森昭光氏は、試作機の実験についての共同実験者であり、実験には常に責任ある態度で望んでくださいました。試作機の設計、製作、実験において氏の貢献が無ければなし得ませんでした。繊細な感覚、迅速な手さばきを持つ氏とともに、実験を行えたことは私にとって大変好運なことでありました。

同修士課程の内藤豊氏とは懸架システムの計算について共同で取り組むことができました。氏は非対称計算のさきがけであり、この論文の 2D 非対称入りモンテカルロシミュレーションは氏との議論の中から生まれたものに他なりません。

理学部物理学科の大塚茂巳氏には非常に多くの工作を手掛けて頂き、また工作の指導もしてくださいました。

同期の山元一広氏と博士課程の杤久保邦治氏とは熱雑音の観点から懸架システムのふるまいについて議論を重ねることができました。また、この論文におけるアラインメントに関する TAMA300 における要請については、全て杤久保氏から教えて頂きました。

博士課程の近藤尚人氏からは弾性体の共振について、指導をいただき、資料も提供して頂きました。

博士課程の安東正樹氏には、研究にいきづまり、先が見えなくなったときにはいつも親身になって相談に乗って頂きました。また、鏡を吊るワイヤーを調整する「ドック」の設計を手掛けてくださいました。

同期の大石奈緒子氏には試作機の鏡の保護装置の原型を設計して頂きました。この保護装置のおかげで、試作機の実験がつつがなく行えました。実際、私は地震研での振り子の実験で、鏡に保護が無かったために加速度計を壊しています。その際、坪野先生は新しい加速度計を提供してくれました。

剛体運動計算について、修士課程の佐々木愛一郎氏に手伝っていただきました。

東京大学工学部の三尾典克助教授には、会合や研究室に立ち寄られた際に厳しくも暖かい激励のお言葉を頂きました。

VIST300 グループの皆様とは月 1 度の会合の際に活発に議論を交わしたり情報を頂いたりすることができました。とくに国立天文台の助手である高橋竜太郎氏は三鷹キャンパスの地面振動データを快く提供してくださいました。

スランプに陥りがちな私を救ってくれた友人たちに感謝します。そして、この 2 年間に私を支えてくれた全ての皆様に深く感謝致します。