修士論文

Fabry-Perot 型レーザー干渉計重力波検出器の制御

理学系研究科物理学専攻　46035

安東 正樹

1996 年 1 月

目次

1　はじめに **5**

2　重力波とその検出 **7**

2.1　重力波 7
2.1.1　Einstein 方程式 7
2.1.2　Einstein 方程式の線型化 8
2.1.3　重力波 9
2.1.4　重力波の自由度 10
2.1.5　自由質点に対する重力波の影響 10
2.1.6　重力波の偏光 11
2.2　重力波の放出と重力波源 12
2.2.1　重力波の放出 12
2.2.2　重力波源 14
2.3　重力波の検出 14
2.3.1　共振型重力波検出器 15
2.3.2　レーザー干渉計重力波検出器 15
2.3.3　レーザー干渉計重力波検出器計画 17

3　レーザー干渉計による重力波の検出 **19**

3.1　原理 20
3.1.1　Michelson 干渉計による位相検出 20
3.1.2　重力波の検出 21
3.1.3　周波数応答と基線長 22
3.1.4　Delay-Line 方式と Fabry-Perot 方式 23
3.2　Fabry-Perot 共振器 25
3.2.1　透過光と反射光 25
3.2.2　フリースペクトラルレンジとフィネス 27
3.2.3　Fabry-Perot 共振器の反射率とその微分 29
3.2.4　重力波に対する応答 30
3.2.5　平均滞在時間と折り返し数 32
3.2.6　鏡の変動に対する応答 32

3.2.7 周波数雑音に対する応答 34
3.3 レーザー干渉計における雑音源 35
3.3.1 散射雑音 35
3.3.2 熱雑音 36
3.3.3 地面振動 37
3.3.4 レーザー光源による雑音 38
3.3.5 残留ガスによる雑音 40
3.3.6 制御による雑音 40

4 pre-modulation 法を用いた制御信号の取得 42
4.1 pre-modulation 法の概要 43
4.2 変調と復調 46
4.2.1 位相変調 46
4.2.2 復調 47
4.3 Fabry-Perot-Michelson 干渉計の応答 48
4.3.1 Fabry-Perot 共振器の応答 49
4.3.2 Fabry-Perot-Michelson 干渉計における carrier の電場 50
4.3.3 Fabry-Perot-Michelson 干渉計における sideband の電場 51
4.4 信号の取り出し 53
4.4.1 動作点での信号 54
4.4.2 微係数 55
4.4.3 共振器長の差動変位信号 56
4.4.4 beam splitter から front mirror までの距離の差動変位信号 56
4.4.5 共振器長の同相変位信号 57
4.4.6 周波数変動の信号 57
4.4.7 信号の混合 58
4.4.8 周波数応答 59
4.4.9 power recycling 59
4.5 pre-modulation 法を用いる為の非対称性の影響 61
4.5.1 コントラストの低下 61
4.5.2 CMRR の低下 63

5 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計 65
5.1 光学系 65
5.1.1 鏡、beam splitter 65
5.1.2 光源 66
5.1.3 位相変調器 67
5.1.4 アイソレーター 68
5.1.5 モードマッチング 68
5.1.6 その他 68

5.2 信号取得系 . . . 69
5.2.1 変調 . . . 69
5.2.2 発振器 . . . 69
5.2.3 photo detector . . . 69
5.2.4 復調器 . . . 70
5.2.5 信号検出系の雑音 . . . 70
5.2.6 得られる信号強度 . . . 71
5.2.7 shot-noise level . . . 72
5.3 フィードバック系 . . . 73
5.3.1 鏡などのアクチュエート . . . 74
5.3.2 arm cavity 長の差動制御ループ . . . 74
5.3.3 beam splitter の制御ループ . . . 75
5.3.4 arm cavity 長の同相制御ループ . . . 77
5.4 懸架系 . . . 78
5.5 真空系 . . . 79

6 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の動作 81

6.1 動作点への引き込み . . . 81
6.2 信号の校正 . . . 83
6.2.1 driver への入力電圧に対する鏡の変位の校正値 . . . 84
6.2.2 鏡の変位に対する信号出力の校正値 . . . 85
6.3 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の変位雑音 . . . 86
6.4 雑音源と制御系の解析 . . . 86
6.4.1 周波数雑音の影響 . . . 87
6.4.2 鏡のマス制御時の信号の混合による雑音 . . . 89
6.4.3 beam splitter 制御系 . . . 90
6.4.4 地面振動 . . . 92
6.4.5 検出系の雑音、shot noise . . . 93
6.4.6 強度雑音 . . . 95
6.4.7 電気回路の雑音 . . . 96
6.5 周波数安定化 . . . 97
6.5.1 周波数安定化を行なわなかった場合の変位雑音 . . . 97
6.5.2 周波数雑音の影響 . . . 98
6.5.3 鏡の同相制御時の制御の混合の影響 . . . 98
6.5.4 レーザー光源の周波数安定化 . . . 99
6.5.5 arm cavity による周波数安定度の評価 . . . 100

7 結論 103

7.1 結果 . . . 103
7.2 問題点と考察 . . . 103

7.3 今後の研究 105
7.4 TAMA300 105

A 使用した電気回路 **107**
A.1 信号検出系 107
A.1.1 photo detector 108
A.1.2 phase shifter 108
A.2 feedback 系 109
A.2.1 各 filter の回路図 110
A.2.2 driver の回路図 112

B 参考文献 **113**

第 1 章

はじめに

重力波は、光速で伝播する時空の歪みである。重力波の存在は、一般相対性理論の帰結として、1916 年に A.Einstein によって予言されている [3]。また、J.H.Taylor らの連星パルサー PSR1913+16 の観測からその存在は間接的に証明されている [4]。これは、重力波の放出によって、連星パルサーの公転軌道が変化することが確認されたことによる結論であり、J.H.Taylor らは、この功績により 1993 年にノーベル賞を受賞している。この観測結果と理論による予測とは非常に良い精度で一致しており、重力波の存在は揺るぎの無いものとなっている。重力波の発生源としては、連星中性子星の合体や、超新星爆発などがあり、その発生頻度や発生する重力波の波形などの研究が進められている。しかし、重力波と物質の相互作用は非常に微小であるため、その直接検出は未だなされていない。重力波を直接検出することによって、一般相対性理論が検証されるだけでなく、電磁波による天文学とは質の異なった、新たな天文学が拓かれる可能性を持っている。

重力波の検出器としては、主に、共振型と呼ばれるものとレーザー干渉計を用いたもの (自由質点型) がある。共振型重力波検出器は、1960 年代から研究が進められているため、多くの技術が蓄積されており、世界各地で既に稼働している。しかし、共振型重力波検出器は弾性体の固有振動周波数付近の狭い周波数帯でのみ感度を持つため、重力波の波形観測には向いていない。一方、レーザー干渉計重力波検出器は 1970 年代から研究が始められている。レーザー干渉計による重力波検出器は広い周波数帯での観測が可能であり、重力波の波形観測を行えるという利点を持っている。しかし、現在世界に存在するレーザー干渉計は、ほとんどが技術開発の為の基線長数十 m 程度のプロトタイプ干渉計であり、レーザー干渉計による本格的な重力波観測はあまり行われていない。

このような背景の元、アメリカ合衆国の LIGO 計画、イタリア・フランスの VIRGO 計画、ドイツ・イギリスの GEO 計画、オーストラリアの AIGO 計画など長基線長を持つレーザー干渉計重力波検出器計画が提案され、いくつかは既にプロジェクトがスタートしている。日本でも 1995 年度より、国立天文台三鷹キャンパスに基線長 300m のレーザー干渉計重力波検出器 (TAMA300) の建設が始まっている。TAMA300 は、将来の km クラスの大型レーザー干渉計建設のための技術開発を行う役割を持つと同時に、実際に重力波を検出する実証型重力波検出器としての機能ももつ。しかし、TAMA300 には技術的な問題も多く残されており、重要な課題の一つとして、レーザー光源や鏡などの光学系の制御の問題

がある。

レーザー干渉計の鏡は、自由質量として振る舞うように振り子によって吊るされている。この振り子は、地面の振動が鏡などを揺らさないよう防振する働きも持つが、振り子の共振周波数付近ではかえって大きく揺れてしまう。そのため、干渉計を動作させるためには、鏡の位置などを制御することが必要となる。レーザー干渉計の中でも現在世界で主流となっている Fabry-Perot 型レーザー干渉計では、直交した 2 方向に横たわる Fabry-Perot 共振器の共振器長と、干渉縞を得るための beam splitter の位置の合計 3 自由度の制御が必要となる。干渉計の感度を向上させるために power recycling と呼ばれる技術を導入した場合には制御するべき自由度は 4 つになり、また、その他にもレーザー光源の周波数の安定化や mode cleaner と呼ばれる装置の制御などを行わなくてはならない。これらの自由度の制御を行う方法としては様々なものが考案されているが、優れたものと考えられている方法として、pre-modulation 法を用いた方法がある [5,6,7,8,9]。pre-modulation 法は、power recycling まで含めた 4 つの自由度の信号を、良く分離して取り出すことのできる方法である。この方法では、重力波の信号を含む信号である 2 つの arm cavity の差動変位信号を他の信号と独立して取り出すことができるため、制御によって重力波への感度が低下する影響を受けにくくすることができる。pre-modulation 法は、TAMA300、LIGO や VIRGO で用いられる予定になっているが、この方法を用いて干渉計全体を制御する実験としては、LIGO グループ内のテーブルトップでの固定鏡による実験 [8,9] だけであり、鏡が振り子によって吊られているプロトタイプ干渉計で試されることが必要となっていた。そこで、東京大学にある基線長 3m の Fabry-Perot 型レーザー干渉計重力波検出器プロトタイプ (3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計; 3m FPMI) を用いて pre-modulation 法を用いた干渉計の制御を試みた。なお、現在は LIGO グループの基線長 40m のプロトタイプ干渉計 (Mark II) でもこの方法についての研究が進められている。

3m FPMI は干渉計を構成する beam splitter と 4 枚の鏡が全て振り子によって吊るされており、また、レーザー光源としては TAMA300 でも用いられる Nd:YAG レーザーを用いているなど、実際のレーザー干渉計重力波検出器に用いられるのと同様の要素を多く備えている。従って、3m FPMI を pre-modulation 法を用いて動作させることによって、実際に TAMA300 で必要な情報が得られることが期待される。

本論文では、pre-modulation 法を用いた 3m FPMI の制御実験について述べる。実験の目的は、pre-modulation 法を用いたプロトタイプ干渉計制御の動作の確認と、TAMA300 の制御に必要な知識の取得である。

第 2章では一般相対性理論から重力波解を導出し、その性質と発生、検出法について述べる。第 3章では重力波検出器の中でもレーザー干渉計重力波検出器を取り上げ、その原理と感度を制限する雑音源について述べる。第 4章では、pre-modulation 法による信号取得の原理について説明する。実際に行った実験については第 5章から述べる。まず第 5章では実験に用いた装置である 3m FPMI について説明している。その後、第 6章では実験で得られた結果を示し、解析を進めて、第 7章で結論を述べている。さらに、実験に使用した回路のうち、主なものは補遺 A にまとめておいた。

第 2 章

重力波とその検出

重力波とは一般相対性理論の Einstein 方程式を線型近似することによって導かれる波動解で、光速で伝搬する時空の歪みである。重力波が存在することは、連星パルサー PSR1913+16 の観測結果から間接的に証明されているが、重力波と物質との相互作用が非常に小さいため、直接には未だに検出されていない。現在、主に研究されている重力波検出器としては、共振型と呼ばれるものと、レーザー干渉計を用いたものがある。共振型は、弾性体がその固有振動の周波数と同じ周波数を持った重力波によって励起されて振動することを利用したものである。また、レーザー干渉計は、自由質点間の距離を、往復した光の位相差から読みとるものである。

この章では、Einstein 方程式を線型化することによって重力波解を導出し、重力波の放射と主な重力波源について見たのち、重力波の検出法と検出器について述べる [10,11]。

2.1　重力波

2.1.1　Einstein 方程式

一般相対性理論によると、4 次元時空内の異なる 2 点 x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ の間の線素は、メトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.1}$$

と表すことができる[1]。

重力場のない平坦な時空 (Minkowski 時空) においては、メトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ は、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

となる。ここで、$\eta_{\mu\nu}$ は、

[1] ギリシャ文字の添字 (α, β, μ, ν など) は 0,1,2,3、また、ローマ文字の添字 (i, j, k など) は 1,2,3 の数字を表すものとする。また、座標は、$x^0 = ct$、$x^1 = x$、$x^2 = y$、$x^3 = z$ とする。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

である。

重力場のある時空においては、メトリックテンソル $g_{\mu\nu}$は、Einstein 方程式

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} && (2.4) \\ G_{\mu\nu} &\equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R && (2.5) \end{aligned}$$

に従う。ここで、クリストッフェル記号 (Christoffel symbol) $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}$、リーマンテンソル (Riemann tensor) $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$、リッチテンソル (Ricci tensor) $R_{\mu\nu}$、リッチスカラー (Ricci scalar) R は、それぞれ、

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) && (2.6) \\ R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} &= \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\alpha} \Gamma^{\gamma}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\beta} \Gamma^{\gamma}{}_{\nu\alpha} && (2.7) \\ R_{\mu\nu} &\equiv R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} && (2.8) \\ R &\equiv R^{\alpha}{}_{\alpha} && (2.9) \end{aligned}$$

である。また、c は光の速度、G は重力定数、$T_{\mu\nu}$はエネルギー運動量テンソルである。

2.1.2 Einstein 方程式の線型化

重力場が弱い場合には、重力場を、平坦な時空からの摂動として考えることができる。Minkowski 時空からのずれを $h_{\mu\nu}$とすると、メトリックテンソル $g_{\mu\nu}$は、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{2.10}$$

となる。

このとき、$h_{\mu\nu}$の trace reverse tensor $\bar{h}_{\mu\nu}$を、

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &\equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h && (2.11) \\ h &\equiv h^{\alpha}{}_{\alpha} && (2.12) \end{aligned}$$

と定義すると、$\bar{h}_{\mu\nu}$の 1 次までの範囲で、

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2} (\bar{h}^{\mu}{}_{\nu,\lambda} + \bar{h}^{\mu}{}_{\lambda,\nu} - \bar{h}_{\nu\lambda}{}^{,\mu}) && (2.13) \\ G_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} (\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} + \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} - \bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha}) && (2.14) \end{aligned}$$

となる。ここで、$|\bar{h}_{\mu\nu}| \ll 1$ より、

$$\begin{aligned}\bar{h}^{\mu}{}_{\nu} &= \eta^{\mu\alpha}\bar{h}_{\alpha\nu} \\ \bar{h}^{\mu\nu} &= \eta^{\nu\alpha}\bar{h}^{\mu}{}_{\alpha}\end{aligned}$$

であることを用いている。

ここで、gauge 条件として、Lorentz gauge

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{2.15}$$

を課すと、(2.14) は、

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box\bar{h}_{\mu\nu} \tag{2.16}$$

$$(\Box \equiv -\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + \triangle)$$

となり、Einstein 方程式 (2.4) は、

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.17}$$

となる。これが、線型化された Einstein 方程式である。

2.1.3　重力波

真空中では、$T_{\mu\nu} = 0$ であるから、(2.17) は、

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{2.18}$$

となる。

(2.18) の解として、平面波

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\mathrm{exp}(ik_\alpha x^\alpha) \tag{2.19}$$

を考える。

(2.19) が、真空中での線型化された Einstein 方程式 (2.18)、Lorentz gauge の条件 (2.15) を満たすには、

$$A_{\mu\nu}k^{\nu} = 0 \tag{2.20}$$

$$k_\mu k^\mu = 0 \tag{2.21}$$

でなければならない。ここで、(2.20) は、平面波解 (2.19) が横波であることを表しており、(2.21) は、この波が光速で伝わることを表している。

この (2.19) が重力波の解である。

2.1.4 重力波の自由度

Lorentz gauge の条件を課していても、座標の取り方にはまだ任意性が残っている。そこで、Transverse Traceless gauge (TT gauge) 条件

$$
\begin{aligned}
A^{\alpha}{}_{\alpha} &= 0 &(2.22)\\
A_{\mu\nu}U^{\nu} &= 0 &(2.23)
\end{aligned}
$$

を課す。ここで、U^{ν}は、任意の時間的な単位ベクトルである。

このとき、$U^{\nu} = \delta^{\nu}{}_{0}$ (background Minkowski 時空の時間基底) とし、重力波の進行方向を z軸にとると、

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}e^{ik(ct-z)} \tag{2.24}$$

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}_{+} & \bar{h}_{\times} & 0 \\ 0 & \bar{h}_{\times} & -\bar{h}_{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

となる。ここで、$k = k_0$、$\bar{h}_{+} = A_{xx}$、$\bar{h}_{\times} = A_{xy}$としている。これは、重力波が 2 つの自由度を持っていることを意味している。

なお、重力波の角周波数ωは、$\omega = ck$である。

2.1.5 自由質点に対する重力波の影響

重力以外に力を受けてない粒子 (自由粒子) は、測地線の方程式、

$$\frac{d}{d\tau}U^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta} = 0 \tag{2.26}$$

に従う。ここで、U^{μ}は粒子の 4 元速度、τは、粒子の固有時である。

粒子が最初、静止している background Minkowski 時空を考え、この系に対する TT gauge をとる。このとき、U^{μ}の初期値は、

$$(U^{\mu})_0 = (1, 0, 0, 0) \tag{2.27}$$

式 (2.26) に、クリストッフェル記号 (2.13) と、式 (2.27) を代入し、(2.24) (2.25) より$\bar{h}_{\alpha 0} = 0$であることを考慮すると、粒子の加速度の初期値は、

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dU^{\mu}}{d\tau}\right)_0 &= -\Gamma^{\mu}{}_{00} \\
&= -\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}(\bar{h}_{\alpha 0,0} + \bar{h}_{0\alpha,0} - \bar{h}_{00,\alpha}) \\
&= 0 \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

これは、静止している質点には加速度が働かず、TT gauge の座標軸上で静止し続けることを意味している。しかし、このこと自体は何の物理的意味も持たない。

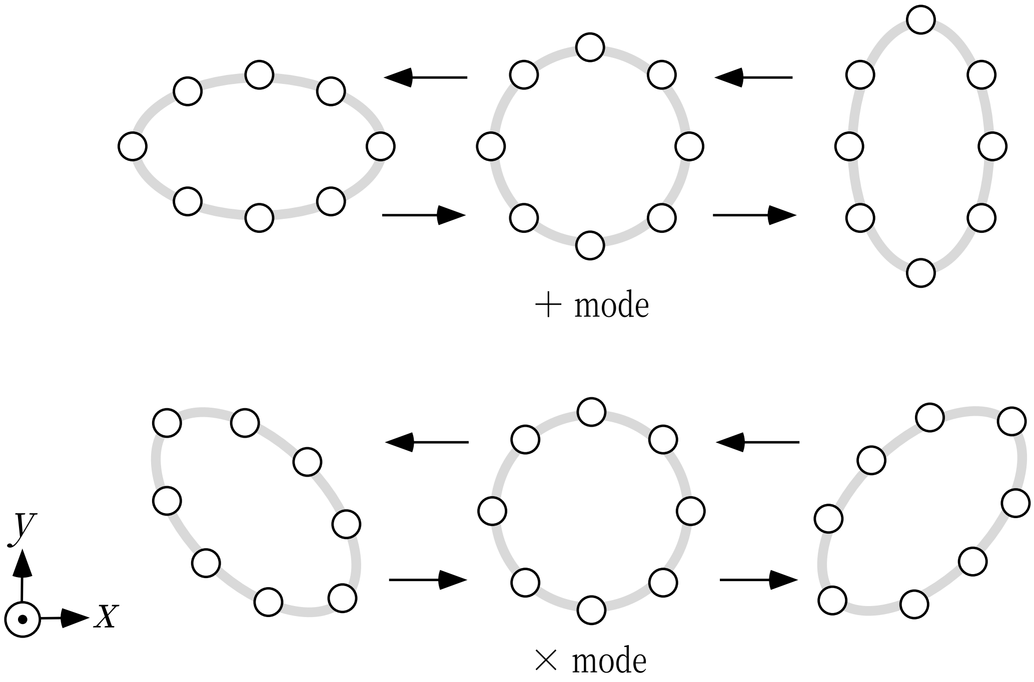

図 2.1: 重力波が入射したときの自由質点群の変位。紙面に垂直な方向から重力波が入射した時のもの。上は、+mode、下は×mode の重力波が入射した時をそれぞれ表している。

重力波の影響をみるには、2 つの近接した粒子間の固有距離を調べる必要がある。近接して互いに静止している 2 つの自由質点 (P_1、P_2とする) を考え、その TT gauge 上の座標を $(0,0,0)$ と $(\epsilon,0,0)$ ($|\epsilon| \ll 1$) とする。このとき、式 (2.24) (2.25) で表される重力波が入射すると、P_1と P_2の間の固有距離は、

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} |g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|^{\frac{1}{2}} &= \int_0^\epsilon |g_{xx}|^{\frac{1}{2}} dx \\
&\simeq |g_{xx}(\mathrm{P}_1)|^{\frac{1}{2}} \epsilon \\
&\simeq \left[1 + \frac{1}{2}\bar{h}_{xx}(\mathrm{P}_1)\right] \epsilon
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

となり、重力波の入射によって 2 質点間の固有距離が変化することが分かる。

2.1.6 重力波の偏光

さらに詳しく調べるために、互いに静止している 2 つの自由質点 P_1、P_2が、微小距離ξ^iだけ離れており、z軸方向に進む重力波が入射する場合を考える。

測地線の方程式 (2.26) より、測地線偏差の方程式

$$
\frac{d^2}{d\tau^2}\xi^i = R^i{}_{\alpha\beta j} U^\alpha U^\beta \xi^j \tag{2.30}
$$

が導かれる。
　いま、$\bar{h}_{\mu\nu}$の１次までを考慮すると、

$$\begin{aligned} U^{\alpha} &\simeq (1,0,0,0) \\ \tau &\simeq ct \end{aligned}$$

とできるので、(2.30) は、

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^i = -R^i{}_{0j0}\xi^j \tag{2.31}$$

となる。
　さらに、TT gauge では、

$$R^i{}_{0j0} = -\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 \bar{h}^i{}_j}{\partial t^2}$$

が成り立つので、(2.31) はさらに、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^i = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{h}^i{}_j}{\partial t^2}\xi^j \tag{2.32}$$

となる。$t \to \infty$ で発散しないような解を求めると、ξ^iの変化量$\delta\xi^i$は、

$$\delta\xi^i = \frac{1}{2}\bar{h}^i{}_j\xi^j \tag{2.33}$$

となる。
　ここで、$\bar{h}_{\mu\nu}$は、(2.24) (2.25) で与えられるので、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta\xi^x \\ \delta\xi^y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \bar{h}_+ & \bar{h}_\times \\ \bar{h}_\times & -\bar{h}_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^x \\ \xi^y \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)} \\ &= \frac{1}{2}\bar{h}_+\begin{pmatrix} \xi^x \\ -\xi^y \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)} + \frac{1}{2}\bar{h}_\times\begin{pmatrix} \xi^y \\ \xi^x \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)} \end{aligned} \tag{2.34}$$

となる。式 (2.34) において、第 1 項と第 2 項はそれぞれ重力波の 2 つの偏光 (+ mode と× mode) を表す。この 2 つのモード の名前は、x-y平面内で環形に配置された自由質点群の重力波が入射した時の変位の形と結びつけることができる (図 2.1)。

2.2　重力波の放出と重力波源

2.2.1　重力波の放出

　式 (2.17) の解は、重力波源が十分小さい場合には、

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t,x) = \frac{4G}{c^4}\int \frac{T_{\mu\nu}(t-\frac{r'}{c}, y)}{r'}d^3y \tag{2.35}$$

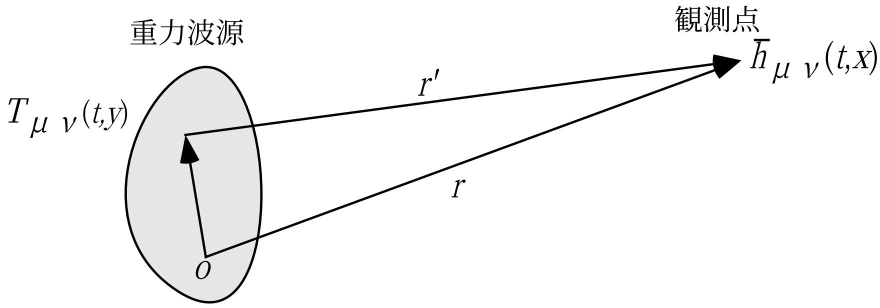

図 2.2: 重力波の放出。

となる。ただし、

$$r' = |x - y|$$

である (図 2.2)。

重力波源が放出される重力波の波長に比べて十分小さいという近似を用いると、$\rho(t, y)$ を重力波源での密度として、

$$\bar{h}_{ij}(t, x) = \frac{2G}{c^4 r}\frac{d^2}{dt^2}\int \rho(t-\tfrac{r}{c}, y) y_i y_j d^3y \tag{2.36}$$

となる。

ここで、z 方向に進む重力波を考えると、重力波源より十分遠方では、

$$\bar{h}_+(t) = \frac{2G}{c^4 r}\frac{d^2}{dt^2}\frac{D_{11}(t-\frac{r}{c}) - D_{22}(t-\frac{r}{c})}{2} \tag{2.37}$$

$$\bar{h}_\times(t) = -\frac{2G}{c^4 r}\frac{d^2}{dt^2}D_{12}(t-\tfrac{r}{c}) \tag{2.38}$$

となる。ここで、$D_{ij}(t)$ は四重極モーメント、

$$D_{ij}(t) = \int \rho(t, y)\left(y_i y_j - \frac{1}{3}\delta_{ij} y^i y^j\right) d^3y \tag{2.39}$$

である。

(2.37) (2.38) より、重力波源より距離 rだけ離れた点での重力波強度は、

$$\bar{h} \sim \frac{2G}{c^4 r}\frac{d^2 D}{dt^2} \tag{2.40}$$

と書くことができる。

また、重力波源の重力波によるエネルギー放出率は、

$$P = \frac{G}{5c^5}\sum_{i,j}\left(\frac{d^3}{dt^3}D_{ij}\right)^2 \tag{2.41}$$

となる。

重力波源	周波数	振幅 ($\bar{h}$)	頻度
連性中性子星合体 (200Mpc)	10Hz~1kHz	10^{-21}	数回/年
超新星爆発 (銀河系内)	~1kHz	10^{-18}	1 回/数 10 年
超新星爆発 (乙女座銀河団)	~1kHz	10^{-21}	数回/年
巨大ブラックホールの形成	~1mHz	10^{-17}	1 回/年
宇宙ひも	$\sim 10^{-7}$Hz	10^{-15}	背景波

表 2.1: 予想される主な重力波源。

2.2.2 重力波源

主な重力波源としては、連星中性子星の合体や超新星爆発などが予想されている (表 2.1)。

連星中性子星はその公転運動の際に重力波を放出する。そのため、連星はエネルギーを失いつつ互いに接近していき、最終的には合体してブラックホールを形成すると考えられている。この合体の際にはγ線などと共に強い重力波が放出されることが予想されている。連星パルサー PSR1913+16 が合体するのは約 3 億年も先のことであるが、地球から 200Mpc 以内に存在する連星中性子性星数を考慮すると、1 年に数回の頻度で合体が起こると予想されている。連星中性子星の合体による重力波が、その波形まで含めて観測されると、連星中性子星までの距離や質量、ハッブル定数などを求めることができる [6,7]。

連星中性子星の合体の他に主な重力波源と考えられているものに超新星爆発がある。我々の銀河系内では数 10 年に 1 回程度の頻度で超新星爆発が起こると考えられている。また、乙女座銀河団で発生した超新星爆発による重力波まで観測することができれば、1 年に数回の重力波イベントを観測できると予想されている。超新星爆発による重力波が観測されることによって、超新星爆発のメカニズムについての有益な情報が得られることが期待される。

また、その他にも巨大ブラックホールの形成時の重力波などいくつかの重力波源が予想されている。

2.3 重力波の検出

重力波は自由質点間の固有距離を変化させる。しかし、この影響は非常に微弱なものであり、その検出は困難なものである。現在研究されている重力波検出器としては、主に、弾性体の共振を用いた共振型と呼ばれるタイプと、レーザー干渉計を用いたタイプ (自由質点型) がある。共振型検出器は 1960 年代から研究が続けられており、さまざまな技術が蓄積されている。しかし、共振型検出器は弾性体の共振周波数付近でのみ感度を持つため重力波の波形観測には向いていない。それに対して、レーザーや光学部品の技術進歩から、現在はレーザー干渉計の研究が盛んになっている。

その他にもドップラートラッキング、パルサータイミングなどの重力波検出法の研究も

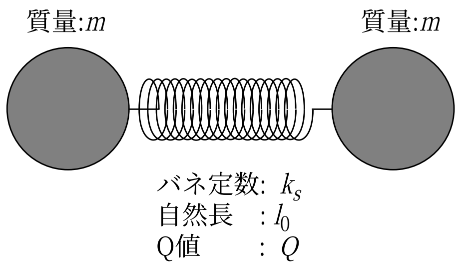

図 2.3: 共振型重力波検出器の模式図。2 つの質点をバネで結んだものとしてモデル化される。

行なわれている。

2.3.1 共振型重力波検出器

共振型重力波検出器は、重力波のエネルギーを弾性体の振動エネルギーに変換するものである。弾性体は、2 つの質点をバネで結んだものと考えることができる (図 2.3)。

質点の質量を m、バネの自然長を l_0、バネ定数を k_s、Q 値を Q として、2 質点間の固有距離のずれ$\delta\xi^\mu$を$\bar{h}_{\mu\nu}$の 1 次の効果まで考えて書くと、

$$\frac{\partial^2 \delta\xi^\mu}{\partial t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\partial \delta\xi^\mu}{\partial t} + {\omega_0}^2 \delta\xi^\mu = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{h}^\mu{}_\nu}{\partial t^2}\xi^\nu \tag{2.42}$$

となる。ここで、ω_0は、この系の固有振動数で、$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_s}{m}}$ である。

式 (2.42) は、調和振動子の強制振動の式[2]になっており、重力波が質点に力を及ぼしていると考えることができる。従って、振動子の固有振動の周波数に近い周波数を持った重力波が入射すると、振動子の固有振動が励起されることになる。この振動を振動検出器 (トランスデューサー) で検出することで、重力波の信号を読みとることができる。

重力波が入射したときに共振型検出器が受け取るエネルギーは、弾性体の質量に比例し、Q 値と長さ l_0の 2 乗に比例するため、実際の共振型重力波検出器は重さ数トンもの弾性体 (主にアルミニウム製) になる。感度を制限する雑音としては、弾性体の熱振動による雑音 (熱雑音) とトランスデューサーの雑音がある。そのため、一般に弾性体は極低温まで冷却され、また、高感度のトランスデューサーの研究も進められている。

2.3.2 レーザー干渉計重力波検出器

レーザー干渉計重力波検出器については、次章以降で詳しく述べるが、その原理について簡単にみてみる。

[2] この式において、$\omega_0 \to 0$、$Q \to \infty$ とすると、バネも減衰力もない場合になり、式 (2.32) に帰着する。

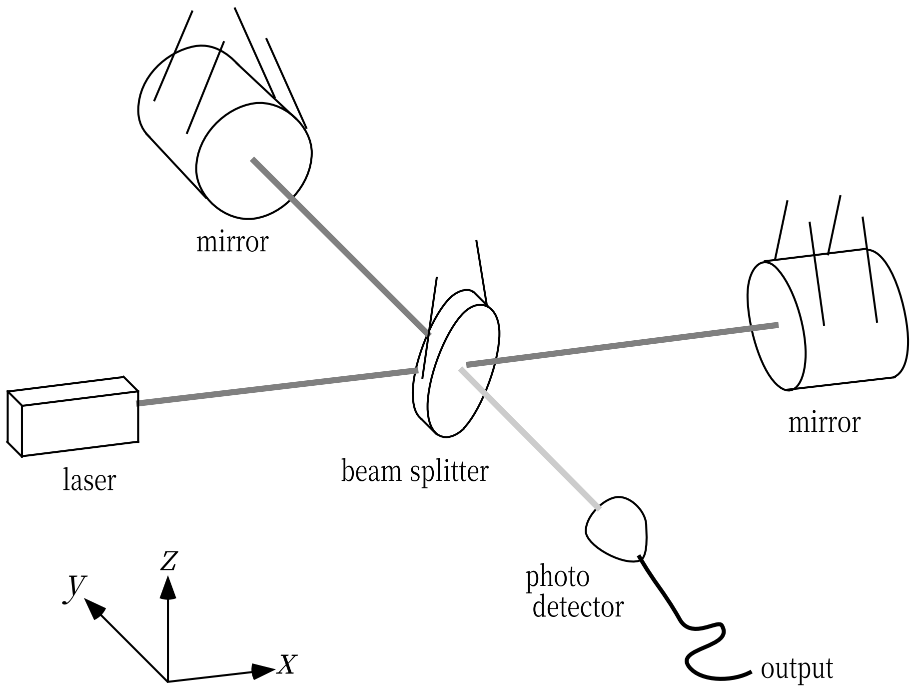

図 2.4: レーザー干渉計重力波検出器の原理。Michelson 干渉計を利用したものである。自由質量として振舞うように鏡は振り子によって吊されている。

レーザー干渉計の基本は図 2.4のような Michelson 干渉計を用いたものである。レーザー光源から出た光は、beam splitter によって直交する 2 つの方向 (図 2.4では x 軸方向と y軸方向) に分けられた後、それぞれ鏡によって反射され、beam splitter 上で再結合して干渉する。重力波が入射すると、beam splitter から鏡までの固有距離が x 軸方向と y軸方向とでは逆相で変化するため、鏡からの反射光に位相差が生じ、干渉縞が変化する。レーザー干渉計重力波検出器はこの干渉縞から重力波の信号を検出するものである。

Michelson 干渉計は 2 つに分けられた光が再結合するまでの位相差の変化を出力光の強度変化として検出するものである。入射レーザー光の強度を P_{in}、beam splitter で分かれて x 軸方向、y軸方向にに進む光が、再び beam splitter に戻ってくるまでの位相の差をϕ_-とすると、光検出器 (photo detector) に入る光の強度は、後に述べる (3.3) より

$$P_{\mathrm{out}} = \frac{1}{2} P_{\mathrm{in}} (1 - \cos \phi_-) \tag{2.43}$$

となる。

図 2.4の Michelson 干渉計に、z軸方向に進み、+ mode の偏光を持った重力波が入射する場合を考える。これは、式 (2.25) において$\bar{h}_{\times} = 0$ とした重力波が入射する場合である。ここでは、beam splitter から鏡までの距離をそれぞれξ^x、ξ^yとする。

このとき、レーザー光の角周波数をΩとし、$\bar{h}(t)$ の 1 次まで考えると、光が x 軸上を往

復するときの位相変化は、

$$\phi_x = \frac{2\xi^x\Omega}{c} + \frac{\Omega}{2}\int_{t-\frac{2\xi^x}{c}}^{t} \bar{h}(t')dt' \tag{2.44}$$

光が y 軸上を往復するときの位相変化は、第 2 項の符号が変化して、

$$\phi_y = \frac{2\xi^y\Omega}{c} - \frac{\Omega}{2}\int_{t-\frac{2\xi^y}{c}}^{t} \bar{h}(t')dt' \tag{2.45}$$

となる。

よって、基線長 $l \simeq \xi^x \simeq \xi^y$、$l_- = \xi^x - \xi^y$ とすると、(2.44) (2.45) の位相差 ϕ_- は、

$$\phi_- = \frac{2l_-\Omega}{c} + \delta\phi_{\mathrm{GR}} \tag{2.46}$$

$$\delta\phi_{\mathrm{GR}} = \Omega\int_{t-\frac{2l}{c}}^{t} \bar{h}(t')dt' \tag{2.47}$$

となる。この $\delta\phi_{\mathrm{GR}}$ が重力波の影響による位相変化を表す。

Michelson 干渉計の周波数応答関数 $H_{\mathrm{MI}}(\omega)$ は、(3.16) より、

$$H_{\mathrm{MI}}(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega}\sin\left(\frac{l\omega}{c}\right)e^{-i\frac{l\omega}{c}}$$

となる。この式より、重力波の周波数が決まっているとき、

$$\frac{l\omega}{c} = \frac{\pi}{2}$$

のとき $|H_{\mathrm{MI}}(\omega)|$ は最大になり、Michelson 干渉計の重力波に対する感度は最も良くなる。

しかし、周波数が 1kHz の重力波に対しては、この式を満たす基線長 l は、$l = 75$ [km] という地上に作るには非現実的な値になってしまう。そこで、光路長をかせぐための方法として、鏡の多重反射を利用した Delay-Line 方式 (DL 方式) と多重干渉を利用した Fabry-Perot 方式 (FP 方式) が考えられている。どちらの方式も一長一短があるが、現在、世界の大型レーザー干渉計計画では Fabry-Perot 方式が主流になっている (表 2.2)。

2.3.3 レーザー干渉計重力波検出器計画

現在、世界各国でレーザー干渉計重力波検出器の建設が計画されている (表 2.2)。

アメリカ合州国の LIGO プロジェクトでは、基線長 4km のレーザー干渉計を 2 台建設することになっている。2 台の干渉計は北アメリカ大陸の東西に配置され、他の重力波検出器と共に、重力波イベントの検証、重力波源の方向の特定、重力波の波形や偏光方向の解析に用いられる。また、イタリア、フランスが共同で研究を進めている VIRGO 計画では、基線長 3km の干渉計を建設する。この干渉計では地面振動からの防振に力を入れ、低周波数の重力波をターゲットとしている。日本でも、TAMA と呼ばれるプロジェクトが既に始まっている。基線長は 300m と短いが、早期に観測を開始することを目標としている。また、TAMA は、その後の大型干渉計のための技術開発の役割も持っている。

国	計画名	基線長	方式	観測開始予定
アメリカ合衆国	LIGO	4km × 2	FP (power recycling)	2000 年
イタリア、フランス	VIRGO	3km	FP (power recycling)	1999 年
ドイツ、イギリス	GEO	600m	DL (dual recycling)	1998 年
日本	TAMA	300m	FP (power recycling)	1998 年
オーストラリア	AIGO	3km	FP (power recycling)	?

表 2.2: 世界各国のレーザー干渉計重力波検出器計画。

第 3 章

レーザー干渉計による重力波の検出

レーザー干渉計重力波検出器は広い観測帯域を持ち、入射重力波の波形を観測できる可能性を持っている。レーザー干渉計重力波検出器は、Michelson 干渉計を基本とし、重力波によって質点間に生じた固有距離の変化を干渉縞の変化として読みとるものである。Michelson 干渉計の周波数応答関数から、重力波の周波数に対する最適な基線長を決めることができるが、それは、例えば 1kHz の重力波に対しては、75km にもなる。このような基線長は現実的に不可能なため、光子の滞在時間をのばし、実効的に基線長を長くする手段として、Delay-Line 方式と Fabry-Perot 方式が考えられている。Delay-Line 方式とは、光を、向かい合った 2 枚の鏡の間の異なる経路を何回も往復させて光路長をかせぐ方法である。それに対し、Fabry-Perot 方式とは、光を、向かい合った 2 枚の鏡の同じ場所を何回も往復させる多重干渉によって光路長をかせぐ方法である。どちらの方法にも一長一短があるが、現在は、Fabry-Perot 方式が世界の主流になっている。

レーザー干渉計は重力波という非常に微小な信号を検出する装置であるので、さまざまな原因の雑音がその感度を制限する。主な雑音源としては散射雑音 (shot noise)、熱雑音、地面振動などがある。shot noise は、干渉計に入射するレーザーのパワーを $P_{\rm in}$とすると、${P_{\rm in}}^{-\frac{1}{2}}$に比例する。レーザーパワーが増大すると、輻射揺らぎによって鏡が揺らされる効果を考えることもできるが、現実的なパワーの範囲では、レーザーパワーが大きいほど shot noise の効果は小さくなると言って良い。shot noise の影響を小さくする手段としては、レーザー光源の高出力化とともに、パワーリサイクリング (power recycling) と呼ばれる方法がある。これは、干渉計からレーザー光源に戻る光を鏡によって打ち返すことによって、干渉計内部の光のパワーを実効的に上げる方法である。熱雑音は、鏡を吊っている振り子が、熱振動によって揺らされる雑音、また、鏡自身の弾性体の熱振動による雑音である。熱雑音の影響を小さくするためには、温度を下げるか、振り子や弾性体の Q 値を上げることが考えられるが、現在は主に Q 値を上げる研究が進められている。次に地面振動であるが、地面は、地震などがなくても常に微小振動している。特に低周波数では、この振動が鏡を揺らし雑音となる。鏡は自由質点として振舞うように振り子によって吊られているが、この振り子は防振の働きも持っている。さらに、光学台をスタックに載せるなどして防振効果を高め、地面振動による雑音を抑えることになる。

この章では、レーザー干渉計一般について述べる。まず、レーザー干渉計よる重力波の検出原理について述べ、次に、Fabry-Perot 共振器の特性について述べる。また、レーザー干渉計の感度を制限する主な雑音源を見ていく。

3.1 原理

この節では、Michelson 干渉計による重力波検出の原理を見た後、干渉計の重力波に対する周波数応答を調べることにより最適な基線長を求める。さらに、光路長を稼ぎ、実効的に最適な基線長を実現する為に用いられる Delay-Line 方式と Fabry-Perot 方式について述べる。

3.1.1 Michelson 干渉計による位相検出

レーザー光源から出た光は beam splitter によって直交する 2 つの方向に分けられた後、それぞれ鏡によって反射され、beam splitter 上で再結合する (図 2.4)。このとき、2 つの光に位相差が存在すると干渉によって、光検出器 (photo detector) に入射する光の強度が変化する。

入射レーザー光の電場を

$$E_{\mathrm{in}} = E_0 e^{i\Omega t} \tag{3.1}$$

とする。分けられた 2 つの光はそれぞれϕ_x、ϕ_y だけの位相変化をして再結合する。このとき、photo detector での電場は、

$$E_{\mathrm{out}} = \frac{1}{2}E_0 e^{i(\Omega t - \phi_x)} - \frac{1}{2}E_0 e^{i(\Omega t - \phi_y)} \tag{3.2}$$

となる。よって、photo detector での強度は、

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{out}} &= |E_{\mathrm{out}}|^2 \\ &= \frac{1}{2}|E_0|^2\{1 - \cos(\phi_x - \phi_y)\} \\ &= \frac{1}{2}P_{\mathrm{in}}(1 - \cos\phi_-) \end{aligned} \tag{3.3}$$

となる。ただし、

$$\phi_- = \phi_x - \phi_y \tag{3.4}$$

である。

実際の干渉計では、鏡の反射率の違い等から、

$$P_{\mathrm{out}} = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} - \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2}\cos\phi_- \tag{3.5}$$

となる。ここで、P_{max}、P_{min}はそれぞれ強度の最大値、最小値を表し、明縞、暗縞に対応する。また、

$$C \equiv \frac{P_{\mathrm{max}} - P_{\mathrm{min}}}{P_{\mathrm{max}} + P_{\mathrm{min}}} \tag{3.6}$$

は、コントラスト (contrast) と呼ばれ、干渉縞の明瞭度を表す指標となる。

3.1.2 重力波の検出

図 2.4の Michelson 干渉計に、z軸方向に進み、$+$の偏光を持った重力波が入射する場合を考える。beam splitter から鏡までの距離をそれぞれξ^x、ξ^yとする。x 軸方向を往復する光子の世界線に沿った線素は、

$$ds^2 = -c^2dt^2 + \{1 + \bar{h}(t)\}dx^2 = 0 \tag{3.7}$$

を満たす。この式は、$\bar{h}(t) \ll 1$ より、$\frac{dx}{dt} > 0$ のとき、

$$\{1 - \frac{1}{2}\bar{h}(t)\}cdt = dx \tag{3.8}$$

となる。

光子が beam splitter と鏡の間を往復するのに要する時間をΔt_xとすると、両辺積分して、

$$\int_{t-\Delta t_x}^{t} \left\{1 - \frac{1}{2}\bar{h}(t')\right\} dt' = \frac{2\xi^x}{c}$$

よって、

$$\Delta t_x = \frac{2\xi^x}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-\Delta t_x}^{t} \bar{h}(t')dt'$$

となる。さらに、$\bar{h}(t) \ll 1$ より積分の下限を $t - \frac{2\xi^x}{c}$とすると、

$$\Delta t_x \simeq \frac{2\xi^x}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-\frac{2\xi^x}{c}}^{t} \bar{h}(t')dt' \tag{3.9}$$

となる。

よって、レーザー光の角周波数をΩとすると、光が x 軸上を往復するときの位相変化は、

$$\begin{aligned}\phi_x &= \Omega\Delta t_x \\ &= \frac{2\xi^x\Omega}{c} + \frac{\Omega}{2}\int_{t-\frac{2\xi^x}{c}}^{t} \bar{h}(t')dt'\end{aligned} \tag{3.10}$$

で表される。

同様にして、光が y軸上を往復するときの位相変化は、

$$\begin{aligned}\phi_y &= \Omega\Delta t_y \\ &= \frac{2\xi^y\Omega}{c} - \frac{\Omega}{2}\int_{t-\frac{2\xi^y}{c}}^{t} \bar{h}(t')dt'\end{aligned} \tag{3.11}$$

となる。

よって、基線長 $l \simeq \xi^x \simeq \xi^y$、$l_- = \xi^x - \xi^y$とすると、(3.10) (3.11) の位相差$\phi_-$は、

$$\phi_- = \frac{2l_-\Omega}{c} + \delta\phi_{\mathrm{GR}} \tag{3.12}$$

$$\delta\phi_{\mathrm{GR}} = \Omega \int_{t-\frac{2l}{c}}^{t} \bar{h}(t')dt' \tag{3.13}$$

となる。式 (3.12) において、第 1 項は beam splitter から 2 つの鏡までの距離の違いによる静的な位相差を表し、第 2 項の$\delta\phi_{\mathrm{GR}}$ が重力波の影響による位相変化を表している。

3.1.3　周波数応答と基線長

次に、Michelson 干渉計の周波数応答を考えてみる。$\bar{h}(t)$ を Fourier 分解して、

$$\bar{h}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{3.14}$$

とすると、式 (3.13) の$\delta\phi_{\mathrm{GR}}$は、

$$\begin{aligned}
\delta\phi_{\mathrm{GR}} &= \Omega \int_{t-\frac{2l}{c}}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(\omega)e^{i\omega t'}d\omega dt' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{l\omega}{c}\right) e^{-i\frac{l\omega}{c}} \bar{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H_{\mathrm{MI}}(\omega)\bar{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$H_{\mathrm{MI}}(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{l\omega}{c}\right) e^{-i\frac{l\omega}{c}} \tag{3.16}$$

となる。この $H_{\mathrm{MI}}(\omega)$ が角周波数ωの重力波に対する Michelson 干渉計の周波数応答関数である。式 (3.16) より、重力波の周波数が決まっているとき、$H_{\mathrm{MI}}(\omega)$ を基線長 lの関数として考えると、

$$\frac{l\omega}{c} = \frac{\pi}{2} \tag{3.17}$$

のとき $|H_{\mathrm{MI}}(\omega)|$ は最大になり、Michelson 干渉計の重力波に対する感度は最も良くなり、これ以上基線長を長くしても感度の向上はない。これは、光が往復する間に重力波の影響が積分されて、感度が低下するからである。周波数 1kHz の重力波に対して、(3.17) を満たす基線長 lを計算すると、$l = 75$ [km] という値になる。現実的には、このような長い基線長を持ったものを地上に建設することは不可能なので、光路長をかせぐための方法として、鏡の多重反射を利用した Delay-Line 方式 (DL 方式) と多重干渉を利用した Fabry-Perot 方式 (FP 方式) が考えられている。

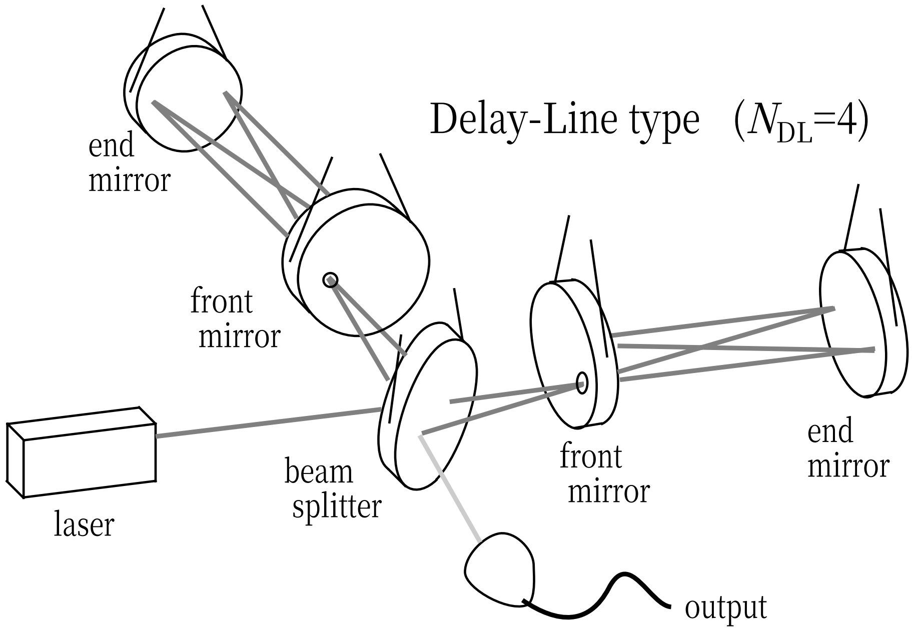

図 3.1: Delay-Line 方式。鏡の間を光が往復することで実効的に基線長を延ばしている。

3.1.4 Delay-Line 方式と Fabry-Perot 方式

Delay-Line 方式は、光を向かい合う 2 枚の鏡の間の異なる経路を何回も往復させることで光路長をかせぐ方法である。このとき、$N_{\rm DL}$を光路の折り返し数 (光軸の本数)、$l_{\rm DL}$を 2 枚の鏡の間の間隔とすると、全光路長 $L_{\rm DL}$は、$L_{\rm DL} = N_{\rm DL} l_{\rm DL}$となる。なお、Michelson 干渉計は $N_{\rm DL} = 2$ の Delay-Line と考えることもできる。

Delay-Line 型レーザー干渉計の周波数応答関数 $H_{\rm DLMI}(\omega)$ は、式 (3.16) の $H_{\rm MI}(\omega)$ において、$2l$の代わりに $L_{\rm DL}$を用いればよい。よって、

$$H_{\rm DLMI}(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega} \sin\left(\frac{N_{\rm DL} l_{\rm DL}\omega}{2c}\right) e^{-i\frac{N_{\rm DL} l_{\rm DL}\omega}{2c}} \tag{3.18}$$

となる。従って、1kHz の重力波に対して最も感度が良くなるのは、全光路長 $L_{\rm DL}$が 150km のときであり、これは、例えば実基線長 $l_{\rm DL}$を 3km、$N_{\rm DL}$を 50 にしたときに相当する。

Fabry-Perot 方式は、Michelson 干渉計の 2 つの鏡をそれぞれ Fabry-Perot 共振器に置き換えたものである。光は、Fabry-Perot 共振器を構成する 2 枚の鏡の間の同じ経路を何回も往復して多重干渉する。Fabry-Perot 型レーザー干渉計の周波数応答関数 $H_{\rm FPMI}(\omega)$ を求めると、

$$H_{\rm FPMI}(\omega) = \frac{2\alpha\Omega}{\omega} \frac{\sin\gamma}{1 - r_{\rm F} r_{\rm E} e^{-2i\gamma}} e^{-i\gamma} \tag{3.19}$$

となる。ここで、α、γは、

$$\alpha = \frac{{t_{\rm F}}^2 r_{\rm E}}{-r_{\rm F} + ({r_{\rm F}}^2 + {t_{\rm F}}^2) r_{\rm E}} \tag{3.20}$$

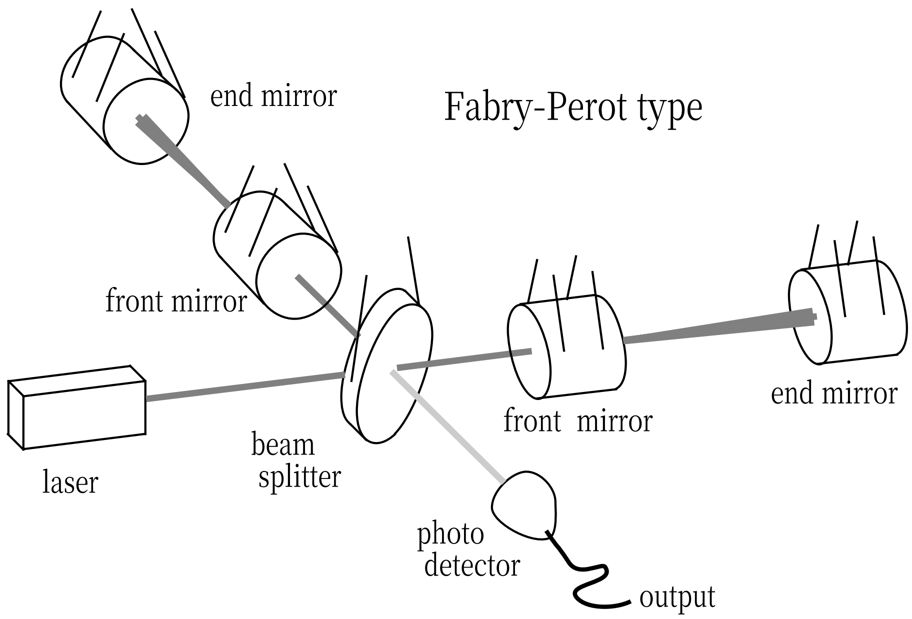

図 3.2: Fabry-Perot 方式。鏡の間で光が多重干渉することで実効的に基線長を延ばしている。

$$\gamma = \frac{L\omega}{c} \tag{3.21}$$

である (3.2.4節参照)。なお、r_{F}、r_{E}は、それぞれ Fabry-Perot 共振器の front mirror と end mirror の反射率、t_{F}は front mirror の透過率を表す。

式 (3.19) の絶対値をとると、

$$|H_{\mathrm{FPMI}}(\omega)| = \frac{2\alpha\Omega}{\omega(1-r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}})}\frac{|\sin\gamma|}{\sqrt{1+F\sin^2\gamma}} \tag{3.22}$$

$$F = \frac{4r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}}{(1-r_{\mathrm{E}}r_{\mathrm{F}})^2} = \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \tag{3.23}$$

となる。ここで、$\mathcal{F}$は、フィネスと呼ばれ、Fabry-Perot 共振器の共振の鋭さを表す値である。また、フィネスは、Fabry-Perot 共振器における光路の平均折り返し数 N_{FP}と、

$$N_{\mathrm{FP}} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \tag{3.24}$$

で関連づけられる。

Fabry-Perot 型レーザー干渉計の場合に、1kHz の重力波に対して感度が最も良くなるのは、実基線長 l_{FP}を 3km とするならば、フィネス $\mathcal{F}$は 80 のときである。

図 3.3は、Delay-Line 方式と、Fabry-Perot 方式の周波数応答関数の絶対値を計算したものである。共に、基線長は 3km で、Delay-Line の場合は折り返し数 $N_{\mathrm{DL}} = 50$、Fabry-Perot

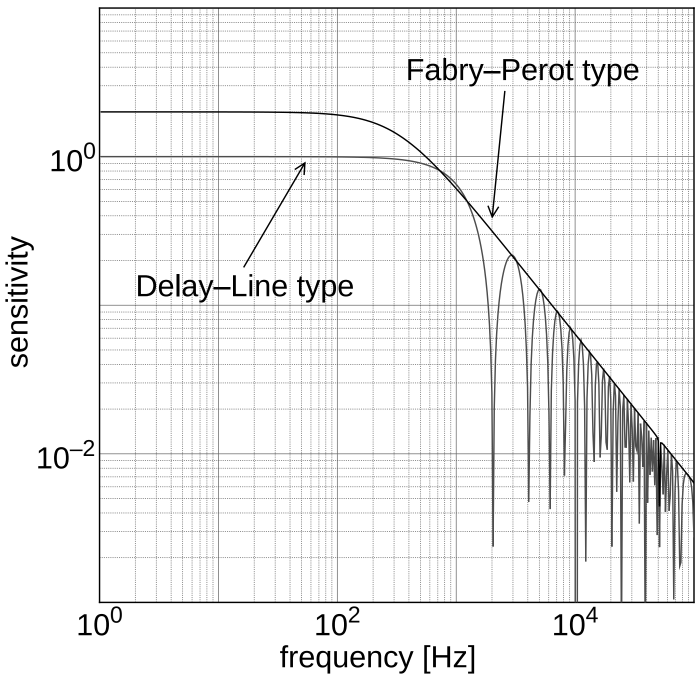

図 3.3: レーザー干渉計重力波検出器の周波数応答。縦軸は重力波に対する感度で、適当に規格化してある。基線長 3km で、1kHz の重力波に対する感度が等しくなるようにしてある。Delay-Line 方式、Fabry-Perot 方式ともに高周波数で感度が低下している。これは、光の滞在時間が長くなると、重力波の影響が積分されてしまうためである。

型の場合はフィネス $\mathcal{F} = 80$ の場合について計算したものである。どちらも高周波で感度が低下している。また、Delay-Line 方式では高周波で複雑な構造をしているのに対して、Fabry-Perot 方式ではなめらかな応答をしていることが分かる。

3.2 Fabry-Perot 共振器

レーザー干渉計重力波検出器には Delay-Line 方式と Fabry-Perot 方式があるが、現在は Fabry-Perot 方式が主流となっている。

この節では、Fabry-Perot 型重力波検出器を構成する Fabry-Perot 共振器について述べる。

3.2.1 透過光と反射光

図 3.4のような Fabry-Perot 共振器を考える。共振器長を L、光源側の鏡の反射率を r_{F}、透過率を t_{F}とする。また、光源から離れた方の鏡についても反射率を r_{E}、透過率を t_{E}と定

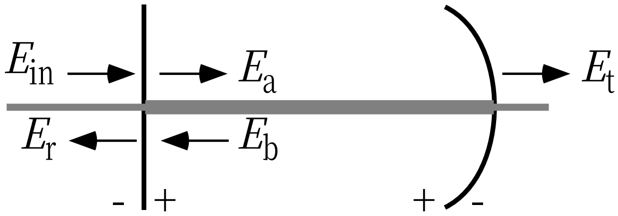

図 3.4: Fabry-Perot 共振器における電場。

義する[1]。

　このとき、光源からの光の電場を

$$E_{\mathrm{in}} = E_0 e^{i\Omega t} \tag{3.25}$$

として、Fabry-Perot 共振器からの反射電場 E_{r}、透過電場 E_{t}を考える。

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{a}} &= t_{\mathrm{F}} E_{\mathrm{in}} + r_{\mathrm{F}} E_{\mathrm{b}} \\
E_{\mathrm{b}} &= r_{\mathrm{E}} e^{-2i\frac{L\Omega}{c}} E_{\mathrm{a}} \\
E_{\mathrm{r}} &= t_{\mathrm{F}} E_{\mathrm{b}} - r_{\mathrm{F}} E_{\mathrm{in}} \\
E_{\mathrm{t}} &= t_{\mathrm{E}} e^{-i\frac{L\Omega}{c}} E_{\mathrm{a}}
\end{aligned}$$

なお、E_{a}、E_{b}は共振器内での front mirror 付近での電場を表すものとする。

　上の 4 つの式より、

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{a}} &= \frac{t_{\mathrm{F}}}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}} E_{\mathrm{in}} \\
E_{\mathrm{b}} &= \frac{t_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}} E_{\mathrm{in}} \\
E_{\mathrm{r}} &= \left(-r_{\mathrm{F}} + \frac{{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}} \right) E_{\mathrm{in}} && (3.26) \\
E_{\mathrm{t}} &= \frac{t_{\mathrm{F}} t_{\mathrm{E}} e^{-i\frac{\Phi}{2}}}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}} E_{\mathrm{in}} && (3.27)
\end{aligned}$$

が得られる。ここで、Φは光が共振器内を往復するときの位相変化

$$\Phi = \frac{2L\Omega}{c} \tag{3.28}$$

である。

[1] ここでの反射率、透過率は振幅反射率、振幅透過率を表す。また、反射率は共振器内側を正の実数と考える (図 3.4)。

式 (3.26) (3.27) より Fabry-Perot 共振器の反射率 $r_{\mathrm{cav}}(\Phi)$ と透過率 $t_{\mathrm{cav}}(\Phi)$ が定義でき、

$$r_{\mathrm{cav}}(\Phi) \equiv \frac{E_{\mathrm{r}}}{E_{\mathrm{in}}} = -r_{\mathrm{F}} + \frac{{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}} \tag{3.29}$$

$$t_{\mathrm{cav}}(\Phi) \equiv \frac{E_{\mathrm{t}}}{E_{\mathrm{in}}} = \frac{t_{\mathrm{F}} t_{\mathrm{E}} e^{-i\frac{\Phi}{2}}}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}} \tag{3.30}$$

となる。

また、式 (3.26) より反射光強度 P_{r}は、

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{r}} &= |E_{\mathrm{r}}|^2 \\ &= \frac{\{({t_{\mathrm{F}}}^2 + {r_{\mathrm{F}}}^2) r_{\mathrm{E}} - r_{\mathrm{F}}\}^2 + 4 r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} ({t_{\mathrm{F}}}^2 + {r_{\mathrm{F}}}^2) \sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)}{(1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}})^2 \left\{1 + F \sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)\right\}} |E_{\mathrm{in}}|^2 \end{aligned} \tag{3.31}$$

また、式 (3.27) より透過光強度 P_{t}は、

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{t}} &= |E_{\mathrm{t}}|^2 \\ &= \frac{(t_{\mathrm{F}} t_{\mathrm{E}})^2}{(1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}})^2} \frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)} |E_{\mathrm{in}}|^2 \end{aligned} \tag{3.32}$$

となる。ここで、Fは、

$$F \equiv \frac{4 r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}}}{(1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}})^2} \tag{3.33}$$

で定義される値である。

透過光強度が最大になるとき、共振器内部の光の強度も最大となり、入射レーザー光と Fabry-Perot 共振器が共振しているという。共振条件は、

$$\Phi = 2\pi n \quad (n : \text{自然数}) \tag{3.34}$$

となる。

3.2.2 フリースペクトラルレンジとフィネス

式 (3.32) より、Φを横軸、透過光強度を縦軸をとしてグラフをかくと図 3.5のようになる。

$\Phi = 2L\Omega/c$ において、共振器長 L を固定して考えると、透過光強度はΩの周期関数となっており、この基本周期をフリースペクトラルレンジ (Free Spectral Range; FSR) と呼ぶ。すると、

$$\frac{2L\Omega_{\mathrm{FSR}}}{c} = 2\pi$$

より、

$$\nu_{\mathrm{FSR}} = \frac{\Omega_{\mathrm{FSR}}}{2\pi} = \frac{c}{2L} \tag{3.35}$$

となる。

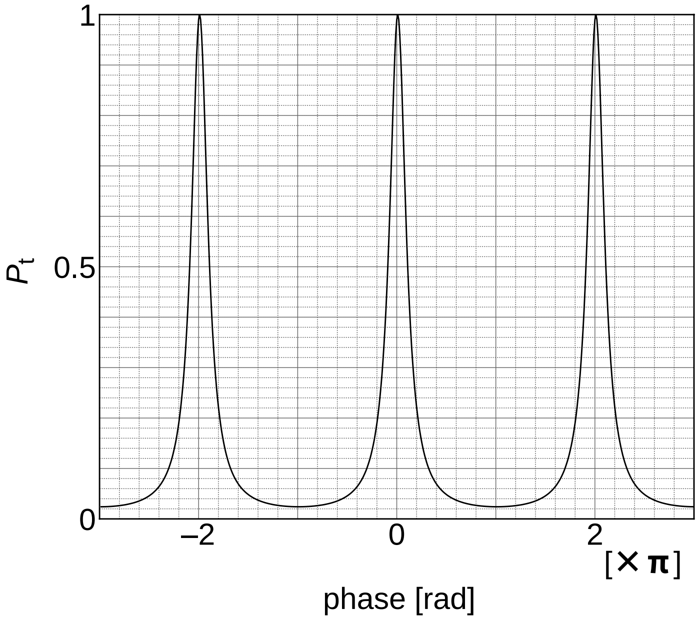

図 3.5: Fabry-Perot 共振器の透過光強度。縦軸は適当に規格化してある。Fabry-Perot 共振器がバンドパス特性を持つことが分かる。この図ではフィネスが 10 の場合について描いてある。

また特に、Fabry-Perot 共振器を構成する鏡の反射率 (r_{F} と r_{E}) が 1 に近いとき、透過光強度は周波数ν_{FSR}間隔で鋭いピークを持つ。このピークの半値全幅をν_{FWHM}とすると、

$$\frac{1}{1+F\sin^2\frac{\pi L\nu_{\mathrm{FWHM}}}{c}}=\frac{1}{2}$$

ここで、$\nu_{\mathrm{FWHM}} \ll \nu_{\mathrm{FSR}}$ならば、

$$\begin{aligned}\nu_{\mathrm{FWHM}} &= \frac{c}{\pi\sqrt{F}L} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1-r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}}{\sqrt{r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}}}\frac{c}{L} \qquad (3.36)\end{aligned}$$

となる。ν_{FSR}とν_{FWHM}の比はフィネスと呼ばれ、共振の鋭さを表す。計算すると、フィネス $\mathcal{F}$ は、

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \frac{\nu_{\mathrm{FSR}}}{\nu_{\mathrm{FWHM}}} \\ &= \frac{\pi\sqrt{r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}}}{1-r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}} \qquad (3.37)\end{aligned}$$

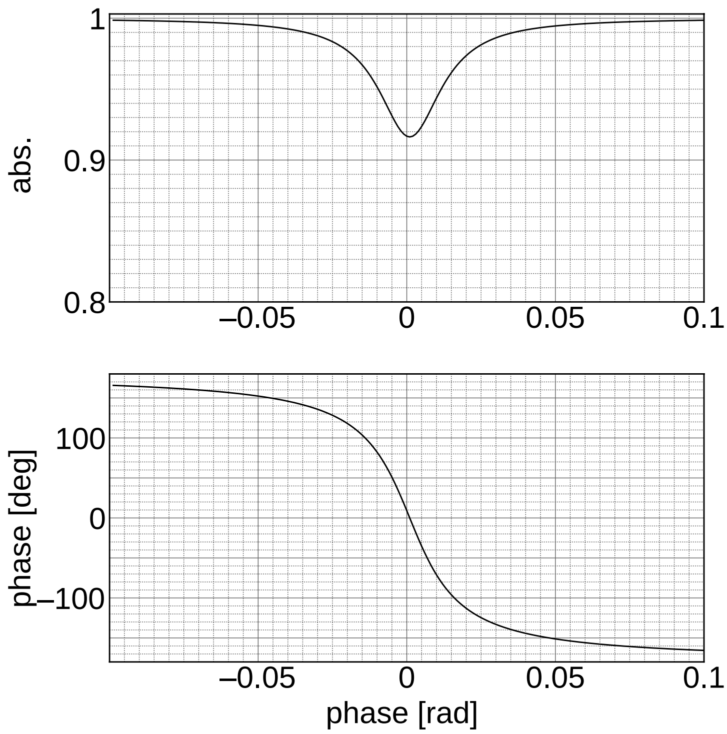

図 3.6: Fabry-Perot 共振器の反射率の絶対値と位相。横軸は位相変化Φである。鏡の反射率等のパラメータは 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計のものを用いてある。

となり、鏡の反射率のみで決定される値となる。

3.2.3 Fabry-Perot 共振器の反射率とその微分

Fabry-Perot 型レーザー干渉計重力波検出器では、Fabry-Perot 共振器からの反射光を干渉させ、信号を取り出す。そこで、Fabry-Perot 共振器の反射光についてさらに考えておく。式 (3.29) より、Fabry-Perot 共振器の反射率は、

$$r_{\mathrm{cav}}(\Phi) = -r_{\mathrm{F}} + \frac{{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}} \tag{3.38}$$

である。この絶対値と位相をグラフにすると、図 3.6のようになる。

さらに、反射率 r_{cav}を微分して考えてみる。r_{cav}をΦで微分すると、

$$r'_{\mathrm{cav}}(\Phi) = \frac{-i{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}}{(1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi})^2} \tag{3.39}$$

となり、$|r'_{\mathrm{cav}}(\Phi)|$ は、共振時に最大になる。

共振条件$\Phi = 2\pi n$ (n : 自然数) を代入すると、反射率 $r_{\rm reso}$と微分 $r'_{\rm reso}$は、

$$r_{\rm reso} = -r_{\rm F} + \frac{{t_{\rm F}}^2 r_{\rm E}}{1 - r_{\rm F} r_{\rm E}} \tag{3.40}$$

$$r'_{\rm reso} = \frac{-i{t_{\rm F}}^2 r_{\rm E}}{(1 - r_{\rm F} r_{\rm E})^2} \tag{3.41}$$

となる。

$r'_{\rm reso}$は純虚数であり、共振点付近での微少なΦの変化に対しては、反射波の振幅はほとんど変化しないのに対して、反射波の位相は大きく変化することが分かる。このことは、図3.6の振る舞いにも現れている。

3.2.4 重力波に対する応答

ここでは、Fabry-Perot 共振器の重力波に対する応答を考える。

重力波が入射している時、光が共振器内を往復するのに要する時間は式 (3.7) から式 (3.9) までと同様にして、

$$\Delta t \simeq \frac{2L}{c} + \frac{1}{2}\int_{t-\frac{2L}{c}}^{t} \bar{h}(t')dt'$$

となる。よって、光が共振器内を n 回往復するのにかかる時間をΔt_nとすると、x 軸方向に横たわる Fabry-Perot 共振器に+の偏光の重力波が入射したときには、

$$\Delta t_n \simeq \frac{2L}{c}n + \frac{1}{2}\int_{t-\frac{2L}{c}n}^{t} \bar{h}(t')dt' \tag{3.42}$$

とできる。

ここで、式 (3.14) で与えられている Fourier 変換

$$\bar{h}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

を行うと、

$$\Delta t_n \simeq \frac{2L}{c}n + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(\omega)\frac{1 - e^{-2i\frac{L\omega}{c}n}}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega \tag{3.43}$$

となる。

このとき、入射光を $E_{\rm in} = E_0 e^{i\Omega t}$とすると、Fabry-Perot 共振器からの反射光 $E_{\rm r}$は、

$$E_{\rm r} = E_0 e^{i\Omega t}\left\{ -r_{\rm F} + {t_{\rm F}}^2 r_{\rm E}\sum_{n=1}^{\infty}(r_{\rm F} r_{\rm E})^{n-1} e^{-i\Omega\Delta t_n}\right\} \tag{3.44}$$

と表すことができる。この式に (3.43) のΔt_nを代入し、$|\bar{h}| \ll 1$ として計算すると、

$$\frac{E_{\rm r}}{E_{\rm in}} \simeq -r_{\rm F} + {t_{\rm F}}^2 r_{\rm E}\sum_{n=1}^{\infty}(r_{\rm F} r_{\rm E})^{n-1} e^{-2i\frac{L\Omega}{c}n}\left\{1 - \frac{1}{2} i\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(\omega)\frac{1 - e^{-2i\frac{L\omega}{c}n}}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= -r_{\mathrm{F}} + \frac{{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}} \\
&\quad -{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega}{2\omega} \bar{h}(\omega) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}})^{n-1} e^{-i\Phi n} \left(1 - e^{-2i\gamma n}\right) \right\} e^{i\omega t} d\omega \\
&= -r_{\mathrm{F}} + \frac{{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}} \\
&\quad - \frac{{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega}{2\omega} \bar{h}(\omega) \frac{1 - e^{-2i\gamma}}{1 - r_{\mathrm{E}} r_{\mathrm{F}} e^{-i\Phi} e^{-2i\gamma}} e^{i\omega t} d\omega
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

となる。

ただし、

$$
\gamma \equiv \frac{L\omega}{c} \tag{3.46}
$$

である。

ここで、入射レーザー光と Fabry-Perot 共振器が共振しているときを考えると、$\Phi = 2\pi n$ （n : 自然数) とできるので、

$$
\frac{E_{\mathrm{r}}}{E_{\mathrm{in}}} = \frac{-r_{\mathrm{F}} + ({r_{\mathrm{F}}}^2 + {t_{\mathrm{F}}}^2) r_{\mathrm{E}}}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}}} \left[1 - i \int_{-\infty}^{\infty} H_{\mathrm{FP}}(\omega) \bar{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \tag{3.47}
$$

とできる。ここで、$H_{\mathrm{FP}}(\omega)$ は、重力波に対する Fabry-Perot 共振器の周波数応答関数で、

$$
H_{\mathrm{FP}}(\omega) = \frac{\alpha\Omega}{\omega} \frac{\sin\gamma}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-2i\gamma}} e^{-i\gamma} \tag{3.48}
$$

また、

$$
\alpha = \frac{{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}}}{-r_{\mathrm{F}} + ({r_{\mathrm{F}}}^2 + {t_{\mathrm{F}}}^2) r_{\mathrm{E}}} \tag{3.49}
$$

である。

周波数応答関数 $H_{\mathrm{FP}}(\omega)$ の絶対値をとると、

$$
|H_{\mathrm{FP}}(\omega)| = \frac{\alpha\Omega}{\omega(1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}})} \frac{|\sin\gamma|}{\sqrt{1 + F \sin^2\gamma}} \tag{3.50}
$$

となる。

さらに、光が共振器内を動くのに要する時間内では重力波の時間変化が十分小さい ($\gamma = \frac{\omega L}{c} \ll 1$) とき、

$$
\begin{aligned}
|H_{\mathrm{FP}}(\omega)| &\simeq \frac{\alpha\Omega}{\omega(1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}})} \frac{\gamma}{\sqrt{1 + F\gamma^2}} \\
&= \frac{\alpha\Omega L}{c(1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}})} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{F}L}{c}\omega\right)^2}} \\
&= \frac{\alpha\Omega L}{c(1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}})} \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

とでき、1 次のローパス特性を持つことが分かる。
　ここでτは、

$$\tau = \frac{\sqrt{F}L}{c} = \frac{2L}{c}\frac{\sqrt{r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}}}{(1-r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}})} \tag{3.52}$$

である。τは、光の共振器内での平均滞在時間 (storage time) を表し、

$$\nu_{\mathrm{c}} = \frac{\omega_{\mathrm{c}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau} \tag{3.53}$$

は、遮断周波数 (cut-off frequency) を与える。

3.2.5　平均滞在時間と折り返し数

　式 (3.52) のτは、(3.37) より、フィネスを用いて、

$$\tau = \frac{2L}{\pi c}\mathcal{F} \tag{3.54}$$

とすることができる。τは共振器内での平均滞在時間と考えることができるので、Fabry-Perot 共振器においても Delay-Line と同様の折り返し数 N_{FP}を定義できる。これは、

$$\tau = N_{\mathrm{FP}}\frac{L}{c} \tag{3.55}$$

より、

$$N_{\mathrm{FP}} = \frac{c\tau}{L} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} = \frac{2\sqrt{r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}}}{1-r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}} \tag{3.56}$$

となる。
　なお、この N_{FP}は、式 (3.33) の Fと、

$$F = {N_{\mathrm{FP}}}^2 \tag{3.57}$$

の関係にある。

3.2.6　鏡の変動に対する応答

　ここでは、Fabry-Perot 共振器の鏡が変動した時の反射光の応答を考える。
　光が共振器内を n 回往復するのにかかる時間をΔt_nとすると、$\delta L(t) \ll 1$ のときには、

$$\Delta t_n \simeq \frac{2L}{c}n + \frac{2}{c}\sum_{m=1}^{n}\delta L\left(t-\tfrac{1}{c}(2m-1)L\right) \tag{3.58}$$

とできる [13]。
　ここで、Fourier 変換

$$\delta L(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta L(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

を行うと、

$$\Delta t_n \simeq \frac{2L}{c}n + \frac{2}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \delta L(\omega)\frac{1-e^{-2i\gamma n}}{e^{i\gamma}-e^{-i\gamma}}e^{i\omega t}d\omega \tag{3.59}$$

となる。

このΔt_nを、入射光を $E_{\mathrm{in}} = E_0 e^{i\Omega t}$としたときの、Fabry-Perot 共振器からの反射光 E_{r} の式、

$$E_{\mathrm{r}} = E_0 e^{i\Omega t}\left\{-r_{\mathrm{F}} + {t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}} \sum_{n=1}^{\infty}(r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}})^{n-1}e^{-i\Omega\Delta t_n}\right\}$$

に代入し、$\delta L(\omega) \ll 1$ として計算すると、

$$\begin{aligned}
\frac{E_{\mathrm{r}}}{E_{\mathrm{in}}} &\simeq -r_{\mathrm{F}} + {t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}} \sum_{n=1}^{\infty}(r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}})^{n-1}e^{-2i\frac{L\Omega}{c}n}\left\{1 - i\frac{2\Omega}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\delta L(\omega)\frac{1-e^{-2i\gamma n}}{e^{i\gamma}-e^{-i\gamma}}e^{i\omega t}d\omega\right\} \\
&= -r_{\mathrm{F}} + \frac{{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}}{1-r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}e^{-i\Phi}} \\
&\quad -i{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\Omega}{c}\delta L(\omega)\frac{1}{e^{i\gamma}-e^{-i\gamma}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}})^{n-1}e^{-i\Phi n}\left(1-e^{-2i\gamma n}\right)\right\}e^{i\omega t}d\omega \\
&= -r_{\mathrm{F}} + \frac{{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}}{1-r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}e^{-i\Phi}} \\
&\quad -i\frac{{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}}{1-r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}e^{-i\Phi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\Omega}{c}\delta L(\omega)\frac{e^{-i\gamma}}{1-r_{\mathrm{E}}r_{\mathrm{F}}e^{-i\Phi}e^{-2i\gamma}}e^{i\omega t}d\omega
\end{aligned} \tag{3.60}$$

となる。

ここで、入射レーザー光と Fabry-Perot 共振器が共振しているときを考えると、$\Phi = 2\pi n$ (n : 自然数) とできるので、

$$\frac{E_{\mathrm{r}}}{E_{\mathrm{in}}} = \frac{-r_{\mathrm{F}} + ({r_{\mathrm{F}}}^2 + {t_{\mathrm{F}}}^2)r_{\mathrm{E}}}{1-r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}}\left[1 - i\int_{-\infty}^{\infty}H_{\mathrm{FP}}^{(\mathrm{L})}(\omega)\delta L(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right] \tag{3.61}$$

とできる。ここで、$H_{\mathrm{FP}}^{(\mathrm{L})}(\omega)$ は、共振器長変動に対する Fabry-Perot 共振器の周波数応答関数で、

$$H_{\mathrm{FP}}^{(\mathrm{L})}(\omega) = \frac{2\alpha\Omega}{c}\frac{e^{-i\gamma}}{1-r_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{E}}e^{-2i\gamma}} \tag{3.62}$$

である。

この $H_{\mathrm{FP}}^{(\mathrm{L})}(\omega)$ は、重力波に対する周波数応答関数と、

$$\begin{aligned}
H_{\mathrm{FP}}^{(\mathrm{L})}(\omega) &= \frac{2\omega}{c\sin\gamma}H_{\mathrm{FP}}(\omega) \\
&\simeq \frac{2}{L}H_{\mathrm{FP}}(\omega)
\end{aligned} \tag{3.63}$$

という関係にある。つまり、共振器長がδL だけ変動した時の応答は、振幅 $2\delta L/L$ の重力波に対する応答と等しくなる。このことは、Fabry-Perot-Michelson 干渉計では、2 つの arm cavity 長がδL_-だけ差動変動したときの応答が、

$$\bar{h}(t) = \frac{\delta L_-(t)}{L} \tag{3.64}$$

の重力波が入射したときの応答[2]と等しいことを意味する。

3.2.7 周波数雑音に対する応答

次に、入射レーザー光の周波数雑音に対する Fabry-Perot 共振器の応答を考える。

入射光が$\delta\phi(t)$ の位相雑音を持つ場合を考える。このとき、周波数雑音は、

$$\delta\nu(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\phi(t)}{\partial t} \tag{3.65}$$

で与えられる。

$\delta\phi(t) \ll 1$ ならば、入射光は、

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{in}} &= E_0 e^{i\{\Omega t + \delta\phi(t)\}} \\ &= E_0 e^{i\Omega t}\{1 + i\delta\phi(t)\} \end{aligned} \tag{3.66}$$

となる。

ここで、Fourier 変換

$$\delta\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

を行うと、

$$E_{\mathrm{in}} = E_0 e^{i\Omega t} + iE_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta\phi(\omega) e^{i(\Omega+\omega)t} d\omega \tag{3.67}$$

となる。

このとき、Fabry-Perot 共振器からの反射光 E_{r}は、

$$E_{\mathrm{r}} = E_0 r_{\mathrm{cav}}(\Phi) e^{i\Omega t} + iE_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta\phi(\omega) r_{\mathrm{cav}}(\Phi_\omega) e^{i(\Omega+\omega)t} d\omega \tag{3.68}$$

となる。ただし、Φ_ωは、

$$\Phi_\omega = \frac{2L(\Omega+\omega)}{c} = \Phi + 2\gamma \tag{3.69}$$

である。

Fabry-Perot 共振器の反射率 (3.38) を用いて式 (3.68) を計算すると、

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{r}} &= E_0 r_{\mathrm{cav}}(\Phi) e^{i\Omega t}\left\{1 + i\delta\phi(t) + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_{\mathrm{cav}}(\Phi_\omega) - r_{\mathrm{cav}}(\Phi)}{r_{\mathrm{cav}}(\Phi)} \delta\phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega\right\} \\ &\simeq E_0 e^{i(\Omega t + \delta\phi(t))} r_{\mathrm{cav}}(\Phi) \\ &\quad \times \left\{1 + 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t_{\mathrm{F}}{}^2 r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}}{-r_{\mathrm{F}} + (t_{\mathrm{F}}{}^2 + r_{\mathrm{F}}{}^2) r_{\mathrm{E}}} \frac{\sin\gamma}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi} e^{-2i\gamma}} e^{-i\gamma} \delta\phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega\right\} \end{aligned} \tag{3.70}$$

[2]干渉計において最も感度の良い偏光の重力波が入射したときを考えている。

となる。

ここで、共振条件より、$\Phi = 2\pi n \quad (n:$ 自然数$)$ とすると、

$$\frac{E_{\rm r}}{E_{\rm in}} = \frac{-r_{\rm F} + ({r_{\rm F}}^2 + {t_{\rm F}}^2) r_{\rm E}}{1 - r_{\rm F} r_{\rm E}} \left[1 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \frac{\sin\gamma}{1 - r_{\rm F} r_{\rm E} e^{-2i\gamma}} e^{-i\gamma} \delta\phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \tag{3.71}$$

とできる。

ここで、式 (3.65) より

$$\delta\phi(\omega) = \frac{2\pi\delta\nu(\omega)}{i\omega} \tag{3.72}$$

とできるので、

$$\frac{E_{\rm r}}{E_{\rm in}} = \frac{-r_{\rm F} + ({r_{\rm F}}^2 + {t_{\rm F}}^2) r_{\rm E}}{1 - r_{\rm F} r_{\rm E}} \left[1 - i \int_{-\infty}^{\infty} H_{\rm FP}^{(\rm F)}(\omega) \delta\nu(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \tag{3.73}$$

となる。

ここで、$H_{\rm FP}^{(\rm F)}(\omega)$ は、周波数変動に対する Fabry-Perot 共振器の周波数応答関数で、

$$H_{\rm FP}^{(\rm F)}(\omega) = \frac{4\pi\alpha}{\omega} \frac{\sin\gamma}{1 - r_{\rm F} r_{\rm E} e^{-2i\gamma}} e^{-i\gamma} \tag{3.74}$$

である。

この $H_{\rm FP}^{(\rm F)}(\omega)$ は $H_{\rm FP}^{(\rm L)}(\omega)$ と、

$$\begin{aligned} H_{\rm FP}^{(\rm L)}(\omega) &= \frac{\Omega\omega}{2\pi c \sin\gamma} H_{\rm FP}^{(\rm F)}(\omega) \\ &\simeq \frac{\nu}{L} H_{\rm FP}^{(\rm F)}(\omega) \end{aligned} \tag{3.75}$$

という関係にある。ここで、νは、レーザー光源の周波数$\nu = \Omega/2\pi$である。

3.3 レーザー干渉計における雑音源

重力波の信号は非常に微弱であるため、検出するためにはさまざまな雑音を取り除く必要がある。ここでは、干渉計の感度を制限する主な雑音源について述べる [1]。

3.3.1 散射雑音

散射雑音 (shot noise) は、光が量子であることに起因する雑音であり、レーザー干渉計の感度を制限する根本的な雑音である。光検出器 (photo detector) に強度が一定の光が入射して光電流が $i_{\rm dc}$[A] だけ流れているとき、散射雑音は、

$$i_{\rm shot} = \sqrt{2 e i_{\rm dc}} \quad \left[{\rm A}/\sqrt{\rm Hz}\right] \tag{3.76}$$

の白色雑音となる。ここで、e は、素電荷[3] である。散射雑音による、Michelson 干渉計の位相検出限界は、位相変化の信号の大きさと散射雑音の大きさが等しくなる、つまり、S/N 比 (Signal to Noise ratio) が 1 になるときである。Michelson 干渉計においては、散射雑音による位相検出限界は、

$$\delta\phi_{-\mathrm{shot}} = \sqrt{\frac{2e}{i_{\mathrm{dc}}}} \quad \left[\mathrm{rad}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right] \tag{3.77}$$

で与えられる。

信号取り出しのための変調法や、Michelson 干渉計の動作点をどのように選んでも、この値を越えることはできないため、この値は散射雑音限界と呼ばれる。実際は変調やコントラストの低下の影響などで、散射雑音の影響はこの値よりさらに悪くなる。

いま、光検出器に流れる電流 i_{dc}は、光源から干渉計に入射される光のパワー P_{in}、レーザー光の周波数ν、プランク定数 h[4]、光検出器の量子効率ηによって、

$$i_{\mathrm{dc}} = \frac{e\eta}{h\nu} P_{\mathrm{in}} \quad [\mathrm{A}] \tag{3.78}$$

とできる[5]ので、(3.77) は、

$$\delta\phi_{-\mathrm{shot}} = \sqrt{\frac{2h\nu}{\eta P_{\mathrm{in}}}} \quad \left[\mathrm{rad}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right] \tag{3.79}$$

となる。

(3.79) より、散射雑音限界は、入射されるレーザーパワー P_{in} の平方根に反比例することが分かる。散射雑音とは別に、レーザーパワーが増大すると、輻射揺らぎによって鏡が揺らされる効果も考えられているが、現実的なパワーの範囲では、この雑音の影響はない。従って、レーザーパワーが大きいほど干渉計の感度は上がるといって良い。このことが、レーザー干渉計重力波検出器に高出力のレーザー光源が必要とされる理由になっている。

散射雑音の影響を小さくする手段としては、レーザー光源の高出力化とともに、パワーリサイクリング (power recycling) と呼ばれる方法がある。これは、干渉計からレーザー光源に戻る光を鏡によって打ち返すことによって、干渉計内部の光のパワーを実効的に上げる方法である。

3.3.2 熱雑音

干渉計はある温度 (現在の干渉計では常温) の熱浴に接しているため、干渉計を構成する部品は熱振動をする。その中でも、鏡を吊る振り子の熱振動と、鏡自身の熱振動は干渉計の光路長を直接変化させてしまうために大きな問題となる。

一般に熱振動をモデル化する方法には 2 通りある。

---

[3] $e = 1.602 \times 10^{-19}$ [C]

[4] $h = 6.626 \times 10^{-34}$ [J · s]

[5] 干渉計でのロスはない場合を考えている。

1つは、減衰力が速度に比例するとする方法で、viscous damping モデルと呼ばれる。このモデルでは、角周波数をω、共振周波数をω_0、質量を m、Q 値を Q、温度を Tとすると、変位のスペクトル密度δx $\left[\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right]$は、

$$\delta x(\omega) \simeq \begin{cases} \sqrt{\dfrac{4k_BT}{m{\omega_0}^3 Q}} & (\omega \ll \omega_0) \\ \sqrt{\dfrac{4k_BT\omega_0}{m\omega^4 Q}} & (\omega \gg \omega_0) \end{cases} \tag{3.80}$$

となる。ここで k_Bはボルツマン定数[6]である。

熱雑音のもう1つのモデル化の方法は、損失が物質内部で起こるとする考え方で、structure damping モデルと呼ばれる。このモデルでは、ほぼ一定の複素バネ定数を$\phi_k(\omega)$ として、

$$\delta x(\omega) \simeq \begin{cases} \sqrt{\dfrac{4k_BT\phi_k(\omega)}{m{\omega_0}^2\omega}} & (\omega \ll \omega_0) \\ \sqrt{\dfrac{4k_BT{\omega_0}^2\phi_k(\omega)}{m\omega^5}} & (\omega \gg \omega_0) \end{cases} \tag{3.81}$$

となる。

$\phi_k(\omega)$ は共振の Q 値と、$\phi_k(\omega_o) = 1/Q$ という関係にあり、また、さまざまな実験結果から、$\phi_k(\omega)$ の周波数依存性は小さいとされている。

実際は振り子の共振周波数は数 Hz、鏡の弾性振動の共振周波数は数十 kHz、また、重力波の観測帯域は数百 Hz であるので、式 (3.80) (3.81) それぞれの上の式が鏡の熱雑音、下の式が振り子の熱雑音を表す。なお、鏡の熱雑音を考えるときは、換算質量を m とする。

熱雑音を抑えるためには、冷却するか、Q 値を上げることが考えられるが、現在は、主に Q 値を上げる研究が進められている。

3.3.3 地面振動

地面は、地震などがなくても常に微少振動している。特に低周波数では、この振動が鏡を揺らし雑音となる。

地面の常時微動のスペクトルは、地域によっても差があるが、おおよそ、

$$\delta x(f) \sim 10^{-7} \times \left(\frac{1[\mathrm{Hz}]}{f}\right)^2 \quad \left[\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right] \tag{3.82}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad [\mathrm{Hz}]$$

に従うことが知られている。

鏡は自由質点にするため振り子によって吊られているが、この振り子は防振の働きも持っている。例えば、干渉計の鏡が、共振周波数ω_0、Q 値 Q の単振り子によって吊られている

[6] $k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ [J/K]

場合には、振り子の支持点に対する鏡の変位の伝達関数 $H(\omega)$ は、

$$H(\omega) = \frac{{\omega_0}^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q}}{{\omega_0}^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q} - \omega^2} \tag{3.83}$$

となる。

従って、$\omega_0 \ll \omega$かつ $Q \gg \frac{\omega}{\omega_0}$ のときには、地面振動による鏡の変位のスペクトルは、

$$\delta x(\omega) \sim \frac{{\omega_0}^2}{\omega^2} \times \frac{10^{-7}(2\pi)^2}{\omega^2} \quad \left[\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right] \tag{3.84}$$

となり、振動が低減されることが分かる。さらに振り子を多段にすることで防振比をかせぐことができる。また、光学台はスタックに載せるなどして防振効果を高め、地面振動による雑音を抑えるよう工夫されている。

次に、振り子の共振周波数付近に注目してみる。$\omega \simeq \omega_0$、$Q \gg 1$ として (3.83) を近似すると、

$$H(\omega) \sim Q \tag{3.85}$$

となり、鏡は共振周波数付近で大きく揺れることになる。低周波でこのような大きな振動があると、干渉計の感度が低下するどころか、干渉計が動作すらしないことになる。そのため、振り子によって吊られた鏡などは、その低周波での振動を抑えるよう制御されることが必要となる。

さらに、多段振り子についてもう少し見てみる。n 段振り子では、振り子の共振周波数より十分高い周波数における防振比は、

$$H_n(\omega) \propto \omega^{-2n} \tag{3.86}$$

となる[7]。従って、高い防振比を得るには、多段振り子を用いることが有効となる。しかし、多段振り子では低周波数に多くの固有振動モードを持つために干渉計を動作点に保つことが困難になる。この低周波数での共振を抑え、干渉計を安定に動作させるために、ローカルコントロール (local control) による減衰や、永久磁石を用いたダンピング (magnet damping) が用いられている。これらは、能動的、または受動的に振り子の固有振動の Q 値を下げることで、外乱に対して振り子が大きく揺れないようにする有効な手段である。

3.3.4 レーザー光源による雑音

レーザー光源に起因する雑音としては、周波数雑音、強度雑音などがある。

光源に起因する雑音の中でも最も問題になるのが、レーザーの周波数が揺らぐことによる雑音である。Michelson 干渉計もしくは、Delay-Line 型干渉計において、beam splitter によって分けられた 2 つの方向の光路長に l_-だけの差があり、レーザー光源の周波数に$\delta\nu$

[7] これは、理想的な場合の話であり、実際はさまざまな共振により防振比は損なわれる。

だけの周波数雑音があるとき、2 つの腕からの反射光の位相差に含まれる周波数雑音の影響は、

$$\delta\phi^{(\mathrm{F})}_{\mathrm{MI}} = 2\pi\frac{\delta\nu(\omega)l_-}{c} \quad \left[\mathrm{rad}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right] \tag{3.87}$$

となる。従って、両方の腕の光路長を限りなく正確に等しくできれば、周波数雑音の影響を除去することができる。

次に、両腕が Fabry-Perot 共振器になった場合について考える。1 つの Fabry-Perot 共振器に入射する光に周波数雑音があるとき、その雑音は、反射光には、

$$\delta\phi^{(\mathrm{F})}_{\mathrm{FP}} = \int_{-\infty}^{\infty} H^{(\mathrm{F})}_{\mathrm{FP}}(\omega)\delta\nu(\omega)e^{i\omega t}\delta\omega$$

という形で現れる (式 (3.73))。

2 つの Fabry-Perot 共振器からの反射光が干渉するとき、

$$\delta\phi^{(\mathrm{F})}_{\mathrm{FPMI}} = \epsilon_{\mathrm{CMRR}}\int_{-\infty}^{\infty} H^{(\mathrm{F})}_{\mathrm{FP}}(\omega)\delta\nu(\omega)e^{i\omega t}\delta\omega$$

となる。

ここで、ϵ_{CMRR}は、同相雑音除去比 (Common Mode noise Rejection Ratio; CMRR) と呼ばれる量であり、$r_{\mathrm{E}} \simeq 1$ のとき、$\omega \ll \omega_{\mathrm{c}}$ の周波数帯では、次式のように近似される。

$$\epsilon_{\mathrm{CMRR}} \sim \frac{\delta L}{L} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}} \tag{3.88}$$

両腕の Fabry-Perot 共振器からの反射光を beam splitter 上で直接干渉させる理由としては、power recycling に不可欠であるというだけでなく、この CMRR を期待できるという点も大きい。CMRR は、両腕の Fabry-Perot 共振器の特性を良く合わせることで向上することができる。しかし、現実には、鏡の反射率の誤差や鏡のアラインメントのずれなどがあり、特性を良く合わせることは容易ではない。現在達成されている CMRR は、

$$\epsilon_{\mathrm{CMRR}} \sim \frac{1}{300}$$

[13] である。

周波数雑音の影響を抑えるために、光源は周波数安定化される。この周波数安定化には、一般に光源とは別に Fabry-Perot 共振器を周波数基準器として用いるが、周波数雑音に対して最も感度が高いのは主干渉計自身であるので、干渉計の信号を用いて光源を安定化することもできる。

光源の強度雑音は、レーザーからの光に位相変調をかけ、信号周波数帯を RF 帯 (10 ∼ 数 10MHz がよく用いられる) に持ち上げることによって、避けることができる。しかし、位相変調と同時に強度変調がかけられたり、干渉計が、最適な動作点からずれることによる影響で、干渉計の雑音源となり得る。強度変調がかけられてしまう影響は、光源が持つ

強度雑音を$\delta P/P \ 1/\sqrt{\mathrm{Hz}}$、強度変調度を m_{AM} とすると、復調された信号における強度雑音の影響$\delta\phi_{\mathrm{int}} \ 1/\sqrt{\mathrm{Hz}}$は、

$$\delta\phi_{\mathrm{int}} \propto m_{\mathrm{AM}}\frac{\delta P}{P} \quad \left[1/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right] \tag{3.89}$$

となる。

Fabry-Perot 型干渉計において、beam splitter の位置が、最適な動作点からδl_{rms}だけずれているとき、beam splitter の位置が、

$$\delta x_{\mathrm{int}} = \frac{\delta P}{P}\delta l_{\mathrm{rms}} \quad \left[\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right] \tag{3.90}$$

だけ変動しているのと同様の雑音となる。δl_{rms}は制御のゲインを上げることによって抑えることができる。

強度雑音の影響を避けるには、良い位相変調素子を用いること、制御のゲインを上げることとともに、当然、光源自身の強度安定度も必要である。

光源に起因する雑音としては、他に、光源からの光が高次のの空間モードを持つことによるコントラストの低下の影響や、光源の光が傾いたり、平行移動したりすることによる雑音であるビームジッター (beam jitter) 雑音などがある。これらの影響は、レーザー光源と主干渉計の間にモードクリーナー (mode cleaner) と呼ばれる装置をいれることで抑えることができる。

3.3.5 残留ガスによる雑音

光路上の気体分子が揺らぐと、屈折率が変化し、光路長が揺らぐことになる。従って、レーザー干渉計は超高真空中に置かれるが、このとき、残留ガスが存在すると雑音源となる。

この影響は、現在のプロトタイプ干渉計ではそれほど問題となっていないが、将来の基線長数 km クラスの大型レーザー干渉計では問題になることが予想されている。

3.3.6 制御による雑音

レーザー干渉計を動作させるには鏡の位置などの制御が不可欠である。しかし、S/N 比の悪い信号を用いて制御を行うと、その影響で鏡などが揺らされ、雑音となることがある。また、制御の影響で重力波の信号が打ち消されてしまう効果もある [13]。

重力波信号に対する制御の影響を抑えるためには、制御の帯域を狭くし、重力波信号が現れる周波数帯では、ほとんど制御がかかっていない状態にすることが行なわれている (loose lock)。しかし、制御帯域を狭くすることは、制御のゲインを小さくすることに繋がり、レーザー干渉計を長期間安定に動作させるという要請に反することになる。loose lock された制御系で干渉計を安定に動作させるためには、外乱の少ない静かな場所に干渉計を建設するか、防振比を大きくするなどして外乱の影響を除去することが必要となる。

本論文で試みている pre-modulation 法を用いた制御系では、重力波信号の現れる信号を用いて、重力波を検出する部分である arm cavity を差動制御することができるため、制御

の影響で重力波の信号を打ち消す影響が無く、また、制御系の電気回路の雑音の影響も混入しにくくすることができる。従って、干渉計の感度を損なうことなく観測周波数以上に制御帯域をとる (tight lock) ことができ、安定な動作を実現できる。

第 4 章

pre-modulation 法を用いた制御信号の取得

レーザー干渉型重力波検出器は自由質点間の固有距離を測定する装置である。しかし、地球上で観測を行うときには、地球の重力場の影響で、自由質点を実現することはできない。そこで、干渉計を構成する鏡やビームスプリッター (beam splitter) を振り子によって吊るしたときに、振り子の共振周波数より十分高い周波数では、これらの光学要素は自由質点とみなせることを利用する。また、この振り子は地面振動による外乱によって鏡などが揺らされる影響を高い周波数で抑える効果も持っている。

しかし逆に、振り子の共振周波数付近の外乱に対しては、振り子は大きく揺れてしまう。Fabry-Perot 型レーザー干渉計重力波検出器によって、高い感度を保ったまま観測を行うためには、入射レーザー光が 2 つの Fabry-Perot 共振器 (arm cavity) と常に共振しており、かつ、干渉縞が静止していることが不可欠である。したがって、光学要素を吊るす振り子が大きく揺れると、Fabry-Perot 共振器内の光路長が変化して共振条件からはずれたり、干渉縞が大きく揺らいだりなどして干渉計による観測はできないことになる。また、一般に干渉計はその光学要素の変動に対して、複雑な非線型の応答をするため、光学要素が大きく変動すると信号の解析は困難になる。そこで、干渉計を動作させるときには、それぞれの光学要素の位置を制御し、その変動に対して干渉計が線型応答をする範囲内に収めることが必要となる。さらに、干渉計がその最高感度を保って観測を続けるには、光学要素の変動が線型応答の範囲内に収まっているだけでは不十分であり、感度を保てるだけの強い制御をしつつも重力波の信号は打ち消さないことと、長期観測を続けることのできる安定性が必要となる。実際には、光学要素位置の制御なしでは干渉計の動作は不可能であり、干渉計を動作させることは制御をかけること同じと言って良い。

制御は大きく 2 つの段階に分けられる。1 つは制御に必要な信号の取り出しであり、もう 1 つは適当な信号処理とフィードバック (feedback) である。

信号の取り出しや feedback の方法としては、さまざまなものが考えられているが、現在有力視されているものとして、信号の取り出しに pre-modulation 法 (プレ変調法、frontal modulation 法) [1]を用いた制御系がある。これは、入射レーザー光に位相変調をかけ、かつ、beam splitter から 2 つの front mirror までの距離に差をつけることで、干渉計の光路長制御に必要な全ての信号を取り出すことができる方法である。この方法では、パワーリサイクリング (power recycling) のために必要な信号も取り出すことができる。また、重力波の信号取得系 (δL_-) の制御を、他の自由度の制御と独立に行うことができるため、重力波の信号を打ち消すことなく制御帯域を広くとることができ、干渉計の安定な動作を実現できるため、優れた制御系であると考えられている。

この章では、pre-modulation 法を用いた信号の取り出し原理について述べる [8]。

4.1 pre-modulation 法の概要

pre-modulation 法とは、入射レーザー光に位相変調をかけ、かつ、beam splitter から 2 つの front mirror までの距離に差をつけることで、干渉計の光路長制御に必要な全ての信号を取り出すことができる方法である。

power recycling をしない Fabry-Perot 型レーザー干渉計 (Fabry-Perot-Michelson 干渉計) の場合、制御すべき自由度は、2 つの arm cavity 長変動 ($\delta L_{\rm P}$、$\delta L_{\rm I}$) と beam splitter から front mirror までの距離の差動変動 ($\delta l_- = \delta l_{\rm P} - \delta l_{\rm I}$) の 3 つである (図 4.1参照)。pre-modulation 法では、この 3 つの自由度を、arm cavity の差動変動信号 ($\delta L_- = \delta L_{\rm P} - \delta L_{\rm I}$) と同相変動信号 ($\delta L_+ = \delta L_{\rm P} + \delta L_{\rm I}$)、beam splitter から front mirror までの距離の差動変動信号 (δl_-) として取り出す。さらに、beam splitter から front mirror までの距離の同相変動信号 ($\delta l_+ = \delta l_{\rm P} + \delta l_{\rm I}$) も取り出すことが可能であり、power recycling を行なう場合にもそのまま用いることができる (図 4.2)。

レーザー光源からの光には、干渉計に入射する前に変調角周波数$\omega_{\rm m}$で位相変調がかけられる。この変調によって、変調前のレーザー光と同じ角周波数をもつ搬送波 (carrier) と、それより$\omega_{\rm m}$だけ高い角周波数と$\omega_{\rm m}$だけ低い角周波数を持つ 2 つの側波帯 (sideband) が生じる[2]。この際、変調角周波数$\omega_{\rm m}$は、この sideband が arm cavity とほぼ反共振になるように選ばれる[3]。すると、carrier が arm cavity と共振しているとき、sideband は、ほとんど front mirror で反射されることになる。

干渉計に入射され、beam splitter で直交する 2 つの方向に分けられた光は、それぞれ arm cavity で反射され、beam splitter 上で再結合して干渉する。干渉した光は、干渉計の外に出ていく方向 (antisymmetric port) と、レーザー光源の方向 (symmetric port) に進む。この際、arm cavity から戻ってきた 2 つの carrier は、antisymmetric port では打ち消し合い (暗縞)、symmetric port では強め合う (明縞) ようにされる。もし、beam splitter から 2 つ

[1] これと同様の方法は、power recycling を行った Michelson 干渉計での信号取得法として L.Schnupp によって示されたため、Schnupp 法とも呼ばれる (L.Schunupp, talk at '*European Collaboration Meeting on Interferometric Detection of Gravitational Waves*', Sorrento, 1988)。その後、R.W.P.Drever や S.Whitcomb がこの方法を recycling を行った Fabry-Perot-Michelson 干渉計の信号取得法に応用することを考案した [8]。

[2] 変調度が低い場合を考えている。

[3] ちょうど反共振にすると変調の高調波が共振してしまうため、実際には反共振からずらされる。

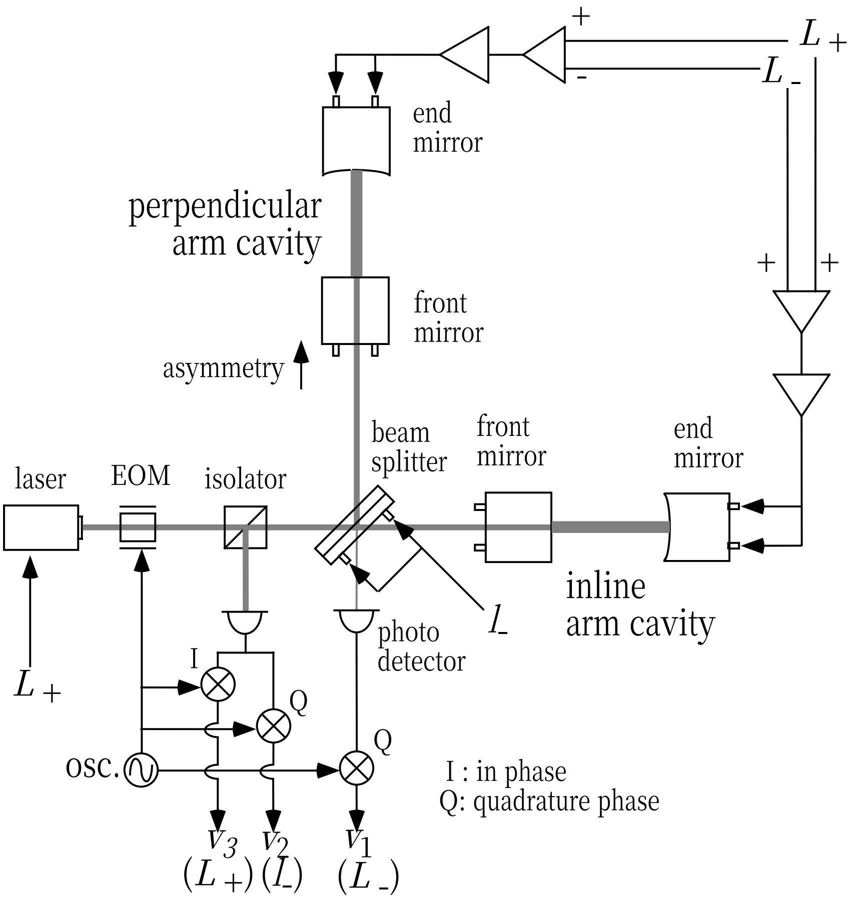

図 4.1: pre-modulation 法による Fabry-Perot-Michelson 干渉計の制御。beam splitter から 2 つの front mirror までの距離に差 (l_-) がつけられており、入射レーザー光には位相変調がかけられている。なお、beam splitter によって分けられた 2 方向を区別するために、それぞれ perpendicular 方向 (反射側)、inline 方向 (透過側) と呼ぶ。

の front mirror までの距離が等しければ、antisymmetric port では sideband も打ち消し合うが、この距離に差 (l_-) があると sideband の一部は antisymmetric port にも漏れ出てくる。このとき、2 つの arm cavity からの反射光の位相が差動で変化し、干渉縞が変化すると、干渉縞の動きによって漏れ出てきた carrier とこの sideband がうなり (beat) を起こし、変調周波数ω_m 付近の信号となって現れる。この信号を適当な位相 (この場合は quadrature phase) で復調する[4]ことにより (図 4.1の v_1) arm cavity の差動制御に必要な信号 (δL_-) を得ると同時に、重力波を検出することができる。antisymmetric port を暗縞にするのは、この重力波検出用の信号に含まれる shot-noise level を小さくするためである。

[4]実際は、復調に用いる信号の位相は、発振器の信号の位相からみて in phase もしくは quadrature phase ではなく、得られる信号の強度や信号の混合に応じて調整される (4.4.7節)。しかし、本論文では、復調に用いる信号の位相を区別する都合上、in phase、quadrature phase という用語を用いている。

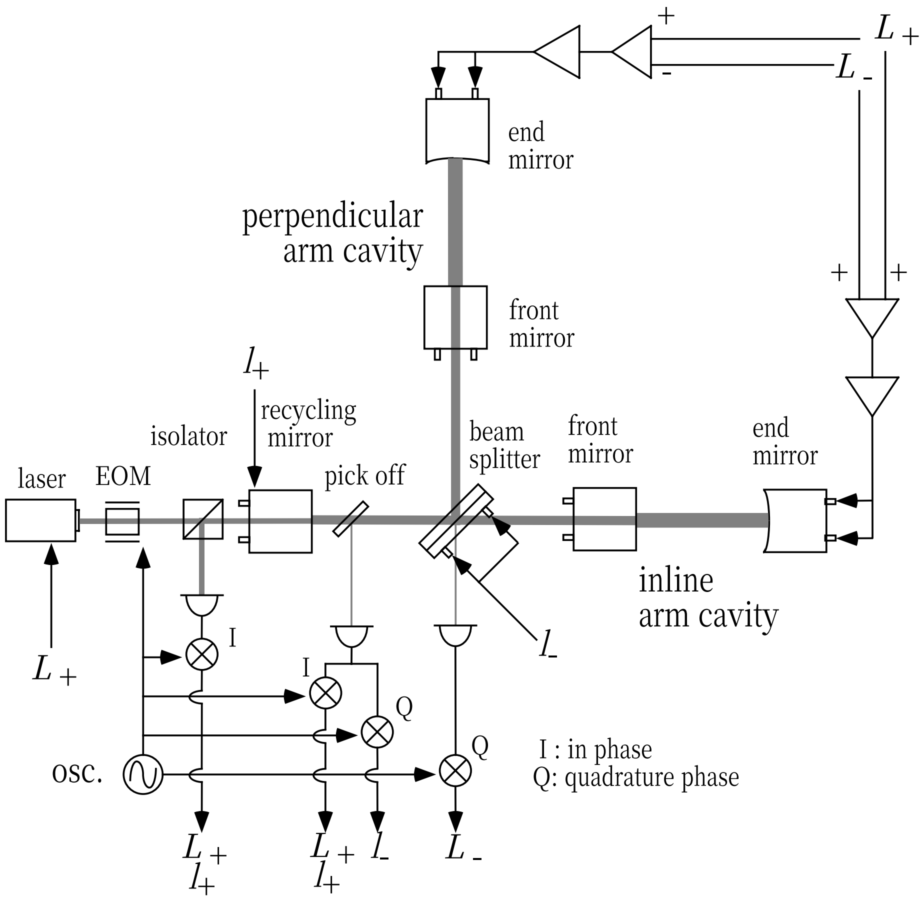

図 4.2: pre-modulation 法による recycled Fabry-Perot-Michelson 干渉計の制御。recycling mirror が加わったことにより制御すべき自由度が 1 つ増えている。feedback の方法は他に様々なものを考えることができる。l_+の信号には L_+の信号が多く混入する。

antisymmetric port が暗縞にされているので、ほとんどの光は symmetric port に戻っていくことになる。この光を検出し、それぞれ適当な位相で復調することで arm cavity 長の同相変動信号 (δL_+、in phase で復調、図 4.1の v_3) と、beam splitter から front mirror までの距離の差動変動信号 (δl_-、quadrature phase で復調、図 4.1の v_2) が含まれる。また、symmetric port に戻ってきたこの光を鏡 (recycling mirror) で反射して再び干渉計に入射し干渉計内部の実効パワーをあげて、干渉計の shot-noise level を下げることができる (power recycling) が、この際には、制御すべき自由度が 1 つ増え、beam splitter(もしくは recycling mirror) から 2 つの front mirror までの距離の同相変動信号 (δl_+) も必要となる。その場合にも、この symmetric port の光から信号を得ることができる。ただ、このδl_+の信号には、δL_+の信号も多く混入することになる。

4.2 変調と復調

重力波の信号や制御に必要な信号は光の位相に現れる。しかし、実際にレーザー干渉計に用いられる光は数百 THz の電磁波であり、この速さの振動を直接検出できるような光検出器 (photo detector) は存在しない。実際に光検出器で検出することのできる信号は強度の時間平均であり、この際に光の位相の情報は失われてしまう。

そこで、光の位相情報を取り出すためには変調法が用いられることが多く、pre-modulation 法もその中の 1 つである。この節では、位相変調による側波帯の生成と、復調による位相情報の取り出しについて述べる。

4.2.1 位相変調

レーザー光源から出た光を、

$$E_{\mathrm{l}} = E_0 e^{i\Omega t} \tag{4.1}$$

とする。

この光は、変調指数 m_{m}、変調角周波数ω_{m}で位相変調をかけた後、干渉計に入射される。その光は、

$$E_{\mathrm{inc}} = E_{\mathrm{l}} e^{i m_{\mathrm{m}} \cos \omega_{\mathrm{m}} t} = E_0 e^{i(\Omega t + m_{\mathrm{m}} \cos \omega_{\mathrm{m}} t)} \tag{4.2}$$

となる。

ここで、ベッセル関数 (Bessel function) $J_n(m_{\mathrm{m}})$ によって、

$$\begin{aligned} e^{i m_{\mathrm{m}} \cos \omega_{\mathrm{m}} t} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_{\mathrm{m}}) i^n e^{i n \omega_{\mathrm{m}} t} \\ J_{-n}(m_{\mathrm{m}}) &= (-1)^n J_n(m_{\mathrm{m}}) \\ J_n(m_{\mathrm{m}}) &\simeq \frac{1}{n!} \left(\frac{m_{\mathrm{m}}}{2} \right)^n \quad (m_{\mathrm{m}} \ll 1) \end{aligned}$$

とできることを用いて、式 (4.2) を書き換え、変調指数が小さいとして近似すると、

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{inc}} &= E_{\mathrm{l}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_{\mathrm{m}}) i^n e^{i n \omega_{\mathrm{m}} t} \\ &\simeq E_{\mathrm{l}} \left\{ J_0(m_{\mathrm{m}}) + i J_1(m_{\mathrm{m}}) e^{i \omega_{\mathrm{m}} t} + i J_1(m_{\mathrm{m}}) e^{-i \omega_{\mathrm{m}} t} \right\} \\ &= E_0 \left\{ J_0(m_{\mathrm{m}}) e^{i\Omega t} + i J_1(m_{\mathrm{m}}) e^{i(\Omega + \omega_{\mathrm{m}}) t} + i J_1(m_{\mathrm{m}}) e^{i(\Omega - \omega_{\mathrm{m}}) t} \right\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる。つまり、位相変調によって角周波数Ωの光が$\Omega - \omega_{\mathrm{m}}$、$\Omega$、$\Omega + \omega_{\mathrm{m}}$ の 3 つの角周波数の光に分けられたことになる。これらのうち、変調前と同じ角周波数の光を搬送波 (carrier)、それよりω_{m}だけ高い角周波数の光とω_{m}だけ低い角周波数の光を、側波帯 (それぞれ upper sideband、lower sideband) と呼ぶ。また、この論文中では以後、この 3 つの光を区別するために、角周波数$\Omega - \omega_{\mathrm{m}}$、$\Omega$、$\Omega + \omega_{\mathrm{m}}$ に対応する添字としてそれぞれ、'$_{-1}$'、'$_0$'、'$_1$' を用いる。

この添字を用いて、

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{inc}0} &\equiv J_0(m_{\mathrm{m}})E_{\mathrm{l}} &(4.4)\\
E_{\mathrm{inc}1} &\equiv iJ_1(m_{\mathrm{m}})E_{\mathrm{l}} &(4.5)\\
E_{\mathrm{inc}-1} &\equiv iJ_1(m_{\mathrm{m}})E_{\mathrm{l}} &(4.6)
\end{aligned}
$$

とおくと、E_{inc}は、

$$E_{\mathrm{inc}} = E_{\mathrm{inc}0} + E_{\mathrm{inc}1}e^{i\omega_{\mathrm{m}}t} + E_{\mathrm{inc}-1}e^{-i\omega_{\mathrm{m}}t} \tag{4.7}$$

と書き直すことができる。

光検出器で検出するとき、その出力は光の強度に比例する。
電場 Eを、

$$E = E_0 + E_1e^{i\omega_{\mathrm{m}}t} + E_{-1}e^{-i\omega_{\mathrm{m}}t}$$

とするとき、その強度 Pは、

$$
\begin{aligned}
P &= |E|^2\\
&= |E_0|^2 + |E_1|^2 + |E_{-1}|^2\\
&\quad +2Re\left\{(E_0^*E_1 + E_0E_{-1}^*)e^{i\omega_{\mathrm{m}}t}\right\}\\
&\quad +2Re\left\{E_1E_{-1}^*e^{2i\omega_{\mathrm{m}}t}\right\} &(4.8)
\end{aligned}
$$

となる。つまり、DC 付近の信号と変調周波数付近の信号、変調周波数の倍の周波数付近の信号が混合されて得られる。この章では便宜上、光を photo detector で検出したときの、強度から photo detector 出力への変換係数を 1 として話を進める。

4.2.2 復調

変調された光を photo detector で検出すると、DC 付近の信号と変調周波数付近の信号、さらに、変調周波数の高調波付近の信号が現れる。このとき、光検出器からの信号と、角周波数ω_{m}の局部発振波 (local oscillator) をミキサー (mixer) によってかけ合わせ、さらに適当なフィルターを介して余分な周波数成分を除去することで、photo detector の信号のうち、変調周波数付近の信号のみを DC 付近の信号として取り出すことができる。また、この復調を行う際、局部発振波の位相 (in phase と quadrature phase) によって 2 つの独立した情報を取り出すことができる。

photo detector に入る光を $E = E_0 + E_1e^{i\omega_{\mathrm{m}}t} + E_{-1}e^{-i\omega_{\mathrm{m}}t}$とし、局部発振波として $\cos\omega_{\mathrm{m}}t$(in phase) を用いると、その出力は、

$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{I}} &= Re(E_0^*E_1 + E_0E_{-1}^*)\\
&= Re\{E_0(E_1 + E_{-1})^*\} &(4.9)
\end{aligned}
$$

また、局部発振波として $\sin\omega_{\rm m}t$(quadrature phase) を用いると、

$$
\begin{aligned}
v_{\rm Q} &= -Im(E_0^* E_1 + E_0 E_{-1}^*) \\
&= Im\{E_0(E_1 - E_{-1})^*\}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

となる。

つまり、photo detector の出力信号 (式 (4.8)) のうち、角周波数$\omega_{\rm m}$の振幅成分の実部と虚部を分離して取り出していることになる。

なお、photo detector に入る光として式 (4.7) の $E_{\rm inc}$を用いると、

$$
v_{\rm I} = v_{\rm Q} = 0
$$

となることを補記しておく。

4.3 Fabry-Perot-Michelson 干渉計の応答

この節では、Fabry-Perot-Michelson 干渉計の光学要素が動作点にあるための条件と、そのときの電場について調べる。

なお、Φは光が Fabry-Perot 共振器内を往復するときの位相変化、ϕは光が beam splitter から front mirror までを往復するときの位相変化を表している。また、添字'$_{\rm P}$'、'$_{\rm I}$' はそれぞれ perpendicular 方向、inline 方向を意味する。

また、位相変化を 2 つの方向での差動成分、同相成分に分け、2 つの arm cavity について、

$$
\Phi_- \equiv \Phi_{\rm P} - \Phi_{\rm I} \tag{4.11}
$$

$$
\Phi_+ \equiv \Phi_{\rm P} + \Phi_{\rm I} \tag{4.12}
$$

また、beam splitter から front mirror までの距離について、

$$
\phi_- \equiv \phi_{\rm P} - \phi_{\rm I} \tag{4.13}
$$

$$
\phi_+ \equiv \phi_{\rm P} + \phi_{\rm I} \tag{4.14}
$$

とする。

Fabry-Perot 共振器長 L、beam splitter から front mirror までの距離 lについても、

$$
L_- = L_{\rm P} - L_{\rm I} \tag{4.15}
$$

$$
L_+ = L_{\rm P} + L_{\rm I} \tag{4.16}
$$

$$
l_- = l_{\rm P} - l_{\rm I} \tag{4.17}
$$

$$
l_+ = l_{\rm P} + l_{\rm I} \tag{4.18}
$$

とする。

入射光の角周波数がΩのとき、位相変化は、

$$\Phi_{\mathrm{x}} = \frac{2L_{\mathrm{x}}\Omega}{c} \tag{4.19}$$

$$\phi_{\mathrm{x}} = \frac{2l_{\mathrm{x}}\Omega}{c} \tag{4.20}$$

となる。ここで、添字'$_{\mathrm{x}}$' には'$_{\mathrm{P}}$'、'$_{\mathrm{I}}$'、'$_{-}$'、'$_{+}$' が入る。

4.3.1 Fabry-Perot 共振器の応答

干渉計全体の応答を考える前に、まず Fabry-Perot 共振器の応答を整理しておく。

3.2節で求めた Fabry-Perot 共振器の応答より、

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{cav}}(\Phi) &\equiv \frac{E_{\mathrm{r}}}{E_{\mathrm{in}}} \\ &= -r_{\mathrm{F}} + \frac{{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}} \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} r'_{\mathrm{cav}}(\Phi) &\equiv \frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\frac{E_{\mathrm{r}}}{E_{\mathrm{in}}}\right) \\ &= \frac{-i{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi}}{(1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}} e^{-i\Phi})^2} \end{aligned} \tag{4.22}$$

となる。

入射光が Fabry-Perot 共振器と共振するための条件は、

$$\Phi = \frac{2L\Omega}{c} = 2\pi n \quad (n : \text{自然数})$$

となり、Fabry-Perot 共振器での反射率 r_{reso}とその微係数 r'_{reso}は、

$$r_{\mathrm{reso}} = -r_{\mathrm{F}} + \frac{{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}}}{1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}}} \tag{4.23}$$

$$r'_{\mathrm{reso}} = \frac{-i{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}}}{(1 - r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}})^2} \tag{4.24}$$

となる。

また、反共振になる条件は、

$$\Phi = \frac{2L\Omega}{c} = -\pi + 2\pi n \quad (n : \text{自然数})$$

であり、そのときの Fabry-Perot 共振器の反射率 r_{anti}とその微係数 r'_{anti}は

$$r_{\mathrm{anti}} = -r_{\mathrm{F}} - \frac{{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}}}{1 + r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}}} \tag{4.25}$$

$$r'_{\mathrm{anti}} = \frac{i{t_{\mathrm{F}}}^2 r_{\mathrm{E}}}{(1 + r_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{E}})^2} \tag{4.26}$$

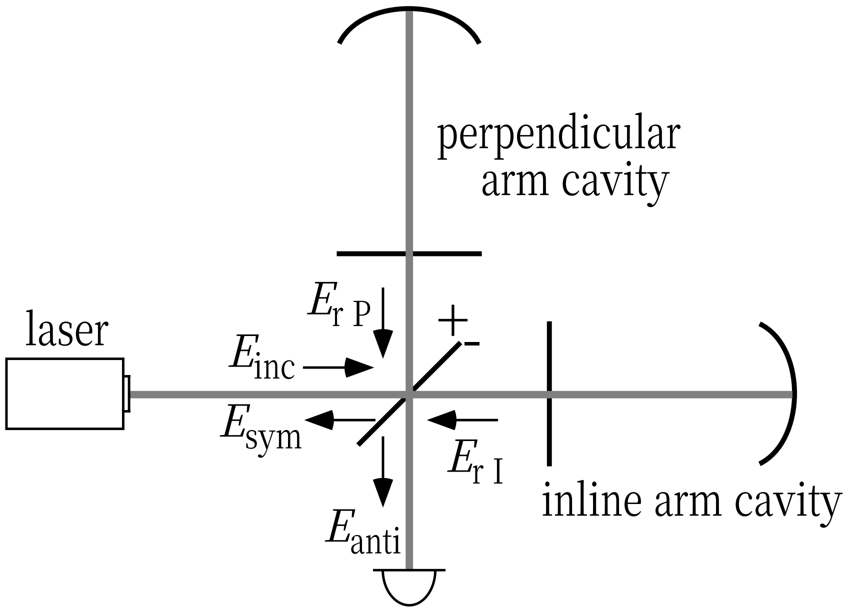

図 4.3: Fabry-Perot-Michelson 干渉計内の beam splitter 付近での電場。

となる。

実際は、干渉計で用いられる鏡は高反射率、低透過率であるので、$r_{\mathrm{F}} \simeq r_{\mathrm{E}} \simeq 1$、$t_{\mathrm{F}} \simeq 0$ となり、

$$
\begin{aligned}
r_{\mathrm{anti}} &\simeq -r_{\mathrm{F}} \\
r'_{\mathrm{anti}} &\simeq 0
\end{aligned}
$$

となる。つまり、反共振の光はほとんど front mirror で反射され、Fabry-Perot 共振器長の変化などによる位相変化の影響をほとんど受けないことになる。

4.3.2 Fabry-Perot-Michelson 干渉計における carrier の電場

干渉計からの出力光を、まず carrier について調べる。

2 本の arm cavity からの反射光は beam splitter 上で再結合し干渉する。このときの beam splitter 付近での電場を考える。

なお、beam splitter の振幅反射率 r_{BS}、振幅透過率 t_{BS}は、

$$r_{\mathrm{BS}} = t_{\mathrm{BS}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4.27}$$

としている[5]。

[5]beam splitter の反射率はレーザーが入射する側を正の実数としている (図 4.3)。

carrier については、arm cavity からの反射波はそれぞれ beam splitter の直前で、

$$\begin{aligned}\frac{E_{\mathrm{rP0}}}{E_{\mathrm{inc0}}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{P0}}) e^{-i\phi_{\mathrm{P0}}} \\ \frac{E_{\mathrm{rI0}}}{E_{\mathrm{inc0}}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{I0}}) e^{-i\phi_{\mathrm{I0}}}\end{aligned}$$

となるので、干渉後の電場は、

$$\frac{E_{\mathrm{anti0}}}{E_{\mathrm{inc0}}} = \frac{1}{2}\left\{r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{P0}}) e^{-i\phi_{\mathrm{P0}}} - r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{I0}}) e^{-i\phi_{\mathrm{I0}}}\right\} \quad (4.28)$$

$$\frac{E_{\mathrm{sym0}}}{E_{\mathrm{inc0}}} = \frac{1}{2}\left\{r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{P0}}) e^{-i\phi_{\mathrm{P0}}} + r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{I0}}) e^{-i\phi_{\mathrm{I0}}}\right\} \quad (4.29)$$

となる。ここで、$\frac{E_{\mathrm{anti}}}{E_{\mathrm{inc}}}$、$\frac{E_{\mathrm{sym}}}{E_{\mathrm{inc}}}$ はそれぞれ Fabry-Perot-Michelson 干渉計の透過率、反射率と考えることができる。

いま、入射光と arm cavity は共振しているので、

$$r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{P0}}) = r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{I0}}) = r_{\mathrm{reso}}$$

となり、さらに antisymmetric port が暗縞 (dark fringe) となるように、

$$\phi_{\mathrm{P0}} - \phi_{\mathrm{I0}} = 2\pi n \ (n : \text{自然数}) \quad (4.30)$$

とすると、

$$\frac{E_{\mathrm{anti0}}}{E_{\mathrm{inc0}}} = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{E_{\mathrm{sym0}}}{E_{\mathrm{inc0}}} = r_{\mathrm{reso}} e^{-i\theta} \quad (4.32)$$

となる。ただし、θは、

$$\theta = \phi_{\mathrm{I0}} \quad (4.33)$$

であり、残った位相の自由度である。θの値は動作点の条件から定めることができないが、光の強度や取り出された信号にはこの影響は現れない。また、power recycling を行う場合には、このθの値は、式 (4.39) のβとともに定めることができる (4.4.9節を参照)。

4.3.3 Fabry-Perot-Michelson 干渉計における sideband の電場

次に、upper sideband について考える。

carrier の場合と同様に、beam splitter で干渉した後の電場は、

$$\frac{E_{\mathrm{anti1}}}{E_{\mathrm{inc1}}} = \frac{1}{2}\left\{r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{P1}}) e^{-i\phi_{\mathrm{P1}}} - r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{I1}}) e^{-i\phi_{\mathrm{I1}}}\right\} \quad (4.34)$$

$$\frac{E_{\mathrm{sym1}}}{E_{\mathrm{inc1}}} = \frac{1}{2}\left\{r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{P1}}) e^{-i\phi_{\mathrm{P1}}} + r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{I1}}) e^{-i\phi_{\mathrm{I1}}}\right\} \quad (4.35)$$

となる。

sideband は arm cavity に対してほぼ反共振になるように変調周波数が選ばれているので、

$$r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{P}1}) = r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{I}1}) = r_{\mathrm{anti}}$$

となり、また、

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathrm{P}1} &= \frac{2l_{\mathrm{P}}(\Omega+\omega_{\mathrm{m}})}{c} = \frac{2l_{\mathrm{P}}\Omega}{c} + \frac{l_{+}\omega_{\mathrm{m}}}{c} + \frac{l_{-}\omega_{\mathrm{m}}}{c} \\
&= \phi_{\mathrm{P}0} + \beta + \alpha \qquad (4.36) \\
\phi_{\mathrm{I}1} &= \frac{2l_{\mathrm{I}}(\Omega+\omega_{\mathrm{m}})}{c} = \frac{2l_{\mathrm{I}}\Omega}{c} + \frac{l_{+}\omega_{\mathrm{m}}}{c} - \frac{l_{-}\omega_{\mathrm{m}}}{c} \\
&= \phi_{\mathrm{I}0} + \beta - \alpha \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\alpha &\equiv \frac{l_{-}\omega_{\mathrm{m}}}{c} \qquad (4.38) \\
\beta &\equiv \frac{l_{+}\omega_{\mathrm{m}}}{c} \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

であることと、dark fringe 条件 (4.30) を用いると、

$$\begin{aligned}
\frac{E_{\mathrm{anti}1}}{E_{\mathrm{inc}1}} &= -ir_{\mathrm{anti}}e^{-i(\theta+\beta)}\sin\alpha \qquad (4.40) \\
\frac{E_{\mathrm{sym}1}}{E_{\mathrm{inc}1}} &= r_{\mathrm{anti}}e^{-i(\theta+\beta)}\cos\alpha \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

となる。

なお、式 (4.39) で定義されるαは、変調角周波数ω_{m}と、beam splitter から front mirror までの距離の差 l_{-}に依存する量で、$\sin\alpha$は、sideband が antisymmetric port に出てくる割合を表す。この量は、得られる信号の大きさに大きく関係し、$m_{\mathrm{m}}\sin\alpha$は実効変調指数と呼ばれる。

lower sideband についても同様にして、arm cavity に対して反共振であるので、

$$r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{P}-1}) = r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{I}-1}) = r_{\mathrm{anti}}$$

とし、また、

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathrm{P}-1} &= \frac{2l_{\mathrm{P}}(\Omega-\omega_{\mathrm{m}})}{c} = \frac{2l_{\mathrm{P}}\Omega}{c} - \frac{l_{+}\omega_{\mathrm{m}}}{c} - \frac{l_{-}\omega_{\mathrm{m}}}{c} \\
&= \phi_{\mathrm{P}0} - \beta - \alpha \qquad (4.42) \\
\phi_{\mathrm{I}-1} &= \frac{2l_{\mathrm{I}}(\Omega-\omega_{\mathrm{m}})}{c} = \frac{2l_{\mathrm{I}}\Omega}{c} - \frac{l_{+}\omega_{\mathrm{m}}}{c} + \frac{l_{-}\omega_{\mathrm{m}}}{c} \\
&= \phi_{\mathrm{I}0} - \beta + \alpha \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

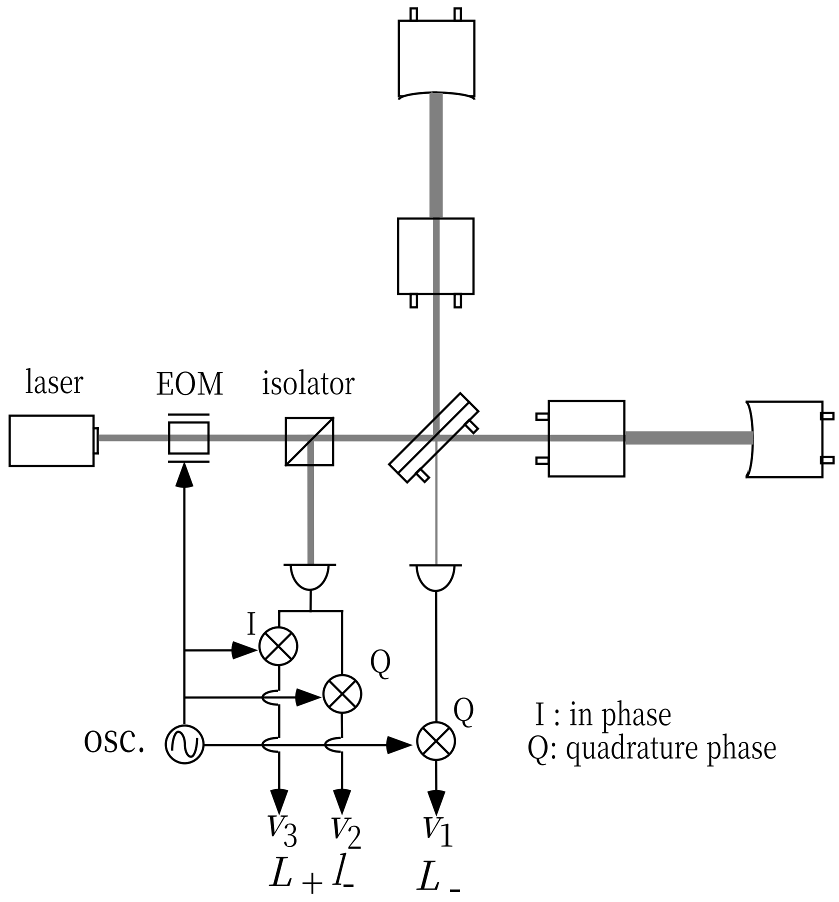

図 4.4: photo detector と mixer によって取り出される信号。

であることと、dark fringe 条件 (4.30) を用いると、

$$\frac{E_{\mathrm{anti-1}}}{E_{\mathrm{inc-1}}} = i r_{\mathrm{anti}} e^{-i(\theta-\beta)} \sin\alpha \tag{4.44}$$

$$\frac{E_{\mathrm{sym-1}}}{E_{\mathrm{inc-1}}} = r_{\mathrm{anti}} e^{-i(\theta-\beta)} \cos\alpha \tag{4.45}$$

となる。

4.4 信号の取り出し

beam splitter 上で干渉した光はそれぞれ photo detector で検出され、mixer によって復調されることで信号に変換される。この節では、4.3節で求めた電場の式を用いてどのような信号が取り出されるのか調べる。

power recycling をしない Fabry-Perot-Michelson 干渉計の場合、制御すべき自由度は 3 つある。これに対応して 3 つの信号が必要となる (図 4.4)。1 つ目は、arm cavity の差動変動信号であり、重力波の信号もここに含まれる。この信号は、antisymmetric port の光を quadrature phase で復調することによって得られる (v_1)。2 つ目は、beam splitter から front mirror までの距離の差動変動信号であり、この信号は、symmetric port の光を quadrature phase で復調することによって得られる (v_2)。3 つ目は、arm cavity の同相変動信号であり、この信号は、symmetric port の光を in phase で復調することによって得られる。

4.4.1 動作点での信号

まず、動作点での信号について見てみる。動作点では、2 つの arm cavity がそれぞれ入射光と共振しており、antisymmetric port が dark fringe になっている。

antisymmetric port の光は、

$$E_{\rm anti} = E_{\rm anti0} + E_{\rm anti1} e^{i\omega_{\rm m} t} + E_{\rm anti-1} e^{-i\omega_{\rm m} t} \tag{4.46}$$

であり、これを photo detector で検出し、quadrature phase で復調した信号 v_1 は、

$$v_1 = Im \left\{ E_{\rm anti0} (E_{\rm anti1} - E_{\rm anti-1})^* \right\} \tag{4.47}$$

となる。ここで、干渉縞は暗縞 (dark fringe) になっており、

$$E_{\rm anti0} = 0$$

であるので、動作点では、$v_1 = 0$ となる。

symmetric port の光は、

$$E_{\rm sym} = E_{\rm sym0} + E_{\rm sym1} e^{i\omega_{\rm m} t} + E_{\rm sym-1} e^{-i\omega_{\rm m} t} \tag{4.48}$$

であり、これを検出し、quadrature phase で復調した信号 v_2 は、

$$\begin{aligned} v_2 &= Im \left\{ E_{\rm sym0} (E_{\rm sym1} - E_{\rm sym-1})^* \right\} \\ &= Im \left\{ \frac{E_{\rm sym0}}{E_{\rm inc0}} E_{\rm inc0} \left(\frac{E_{\rm sym1}}{E_{\rm inc1}} E_{\rm inc1} - \frac{E_{\rm sym-1}}{E_{\rm inc-1}} E_{\rm inc-1} \right)^* \right\} \\ &= Im \left\{ -iJ_0(m_{\rm m}) J_1(m_{\rm m}) |E_{\rm l}|^2 r_{\rm reso} r_{\rm anti} \cos\alpha \left(e^{-i\beta} - e^{i\beta} \right)^* \right\} \\ &= Im \left\{ 2J_0(m_{\rm m}) J_1(m_{\rm m}) |E_{\rm l}|^2 r_{\rm reso} r_{\rm anti} \cos\alpha \sin\beta \right\} \end{aligned}$$

となり、{ } 内は実数であるから、動作点では $v_2 = 0$ となる。

symmetric port の光を検出し、in phase で復調した信号 v_3 は、

$$\begin{aligned} v_3 &= Re \left\{ E_{\rm sym0} (E_{\rm sym1} + E_{\rm sym-1})^* \right\} \\ &= Re \left\{ \frac{E_{\rm sym0}}{E_{\rm inc0}} E_{\rm inc0} \left(\frac{E_{\rm sym1}}{E_{\rm inc1}} E_{\rm inc1} + \frac{E_{\rm sym-1}}{E_{\rm inc-1}} E_{\rm inc-1} \right)^* \right\} \\ &= Re \left\{ -iJ_0(m_{\rm m}) J_1(m_{\rm m}) |E_{\rm l}|^2 r_{\rm reso} r_{\rm anti} \cos\alpha \left(e^{-i\beta} + e^{i\beta} \right)^* \right\} \\ &= Re \left\{ -2iJ_0(m_{\rm m}) J_1(m_{\rm m}) |E_{\rm l}|^2 r_{\rm reso} r_{\rm anti} \cos\alpha \cos\beta \right\} \end{aligned}$$

となり、{ } 内は純虚数であるから、動作点では $v_3 = 0$ となる。

以上より、動作点では v_1、v_2、v_3 の全ての信号が 0 となることが分かる。

4.4.2 微係数

干渉計の信号は、最適な動作点からのずれとして得られる。変動が微小である場合には、線型応答として考えることができ、変動量に比例した信号が得られる。そのとき信号は、変動量に動作点での微係数をかけたものになる。したがって、動作点での微係数を求める必要がある。

まず、式 (4.11) から式 (4.14) までより、arm cavity 長の差動変動成分、同相変動成分を、

$$\begin{aligned} \delta\Phi_- &= \delta\Phi_\mathrm{P} - \delta\Phi_\mathrm{I} && (4.49) \\ \delta\Phi_+ &= \delta\Phi_\mathrm{P} + \delta\Phi_\mathrm{I} && (4.50) \end{aligned}$$

また、beam splitter から front mirror までの距離の差動変動成分、同相変動成分を

$$\begin{aligned} \delta\phi_- &= \delta\phi_\mathrm{P} - \delta\phi_\mathrm{I} && (4.51) \\ \delta\phi_+ &= \delta\phi_\mathrm{P} + \delta\phi_\mathrm{I} && (4.52) \end{aligned}$$

とする。
このとき、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\Phi_-} &= \frac{\partial\Phi_\mathrm{P}}{\partial\Phi_-}\frac{\partial}{\partial\Phi_\mathrm{P}} + \frac{\partial\Phi_\mathrm{I}}{\partial\Phi_-}\frac{\partial}{\partial\Phi_\mathrm{I}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\Phi_\mathrm{P}} - \frac{\partial}{\partial\Phi_\mathrm{I}}\right) && (4.53) \\ \frac{\partial}{\partial\Phi_+} &= \frac{\partial\Phi_\mathrm{P}}{\partial\Phi_+}\frac{\partial}{\partial\Phi_\mathrm{P}} + \frac{\partial\Phi_\mathrm{I}}{\partial\Phi_+}\frac{\partial}{\partial\Phi_\mathrm{I}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\Phi_\mathrm{P}} + \frac{\partial}{\partial\Phi_\mathrm{I}}\right) && (4.54) \end{aligned}$$

同様にして、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\phi_-} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_\mathrm{P}} - \frac{\partial}{\partial\phi_\mathrm{I}}\right) && (4.55) \\ \frac{\partial}{\partial\phi_+} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_\mathrm{P}} + \frac{\partial}{\partial\phi_\mathrm{I}}\right) && (4.56) \end{aligned}$$

となる。

4.4.3 共振器長の差動変位信号

重力波の信号は 2 つの Fabry-Perot 共振器長の差動信号として現れる。この信号は、anti-symmetric port の光を quadrature phase で復調した信号から得られる。

まず、準備として、動作点における $\frac{\partial}{\partial\Phi_-}\left(\frac{E_{\rm anti0}}{E_{\rm inc0}}\right)$ を計算する。

式 (4.28) (4.53) より、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\Phi_-}\left(\frac{E_{\rm anti0}}{E_{\rm inc0}}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\Phi_{\rm P}} - \frac{\partial}{\partial\Phi_{\rm I}}\right)\frac{1}{2}\left\{r_{\rm cav}(\Phi_{\rm P})e^{-i\phi_{\rm P}} - r_{\rm cav}(\Phi_{\rm I})e^{-i\phi_{\rm I}}\right\} \\
&= \frac{1}{2}r'_{\rm reso}e^{-i\theta}
\end{aligned}
$$

これを用いて v_1 の Φ_- 変動に対する微係数を計算すると、動作点では、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial\Phi_-} &= Im\left\{\frac{\partial E_{\rm anti0}}{\partial\Phi_-}\left(E_{\rm anti1} - E_{\rm anti-1}\right)^*\right\} \\
&= Im\left\{\frac{\partial\left(\frac{E_{\rm anti0}}{E_{\rm inc0}}\right)}{\partial\Phi_-}E_{\rm inc0}\cdot\left(\frac{E_{\rm anti1}}{E_{\rm inc1}}E_{\rm inc1} - \frac{E_{\rm anti-1}}{E_{\rm inc-1}}E_{\rm inc-1}\right)^*\right\} \\
&= Im\left\{J_0J_1|E_{\rm l}|^2 r'_{\rm reso}r_{\rm anti}\cos\beta\sin\alpha\right\} \\
&= -J_0(m_{\rm m})J_1(m_{\rm m})|E_{\rm l}|^2|r'_{\rm reso}|r_{\rm anti}\cos\beta\sin\alpha \qquad (4.57)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$r'_{\rm reso}$ は純虚数であることを用いている。なお、$r_{\rm anti} \simeq -r_{\rm F}$ である。また、この式より、得られる信号は入射レーザー光のパワー $|E_{\rm l}|^2$ に比例することが分かる。

4.4.4 beam splitter から front mirror までの距離の差動変位信号

まず、$\frac{\partial}{\partial\phi_-}\left(\frac{E_{\rm sym1}}{E_{\rm inc1}}\right)$ などを求める。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\phi_-}\left(\frac{E_{\rm sym1}}{E_{\rm inc1}}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_{\rm P}} - \frac{\partial}{\partial\phi_{\rm I}}\right)\frac{1}{2}\left\{r_{\rm cav}(\Phi_{\rm P})e^{-i\phi_{\rm P}} + r_{\rm cav}(\Phi_{\rm I})e^{-i\phi_{\rm I}}\right\} \\
&= -\frac{1}{2}r_{\rm anti}e^{-i(\theta+\beta)}\sin\alpha \\
\frac{\partial}{\partial\phi_-}\left(\frac{E_{\rm sym1}}{E_{\rm inc1}}\right) &= \frac{1}{2}r_{\rm anti}e^{-i(\theta-\beta)}\sin\alpha
\end{aligned}
$$

と求めることができる。

よって、v_2 の ϕ_- に対する微係数は、動作点では、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_2}{\partial\phi_-} &= Im\left\{E_{\rm sym0}\frac{\partial\left(E_{\rm sym1} - E_{\rm sym-1}\right)^*}{\partial\phi_-}\right\} \\
&= Im\left[\left(\frac{E_{\rm sym0}}{E_{\rm inc0}}\right)E_{\rm inc0}\cdot\left\{\frac{\partial\left(\frac{E_{\rm sym1}}{E_{\rm inc1}}\right)}{\partial\phi_-}E_{\rm inc1} - \frac{\partial\left(\frac{E_{\rm sym-1}}{E_{\rm inc-1}}\right)}{\partial\phi_-}E_{\rm inc-1}\right\}^*\right] \\
&= Im\left\{iJ_0J_1|E_{\rm l}|^2 r_{\rm reso}r_{\rm anti}\cos\beta\sin\alpha\right\} \\
&= J_0(m_{\rm m})J_1(m_{\rm m})|E_{\rm l}|^2 r_{\rm reso}r_{\rm anti}\cos\beta\sin\alpha \qquad (4.58)
\end{aligned}
$$

となる。

4.4.5 共振器長の同相変位信号

まず、$\frac{\partial}{\partial \Phi_+}\left(\frac{E_{\mathrm{sym}0}}{E_{\mathrm{inc}0}}\right)$などを求める。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \Phi_+}\left(\frac{E_{\mathrm{sym}0}}{E_{\mathrm{inc}0}}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \Phi_{\mathrm{P}}}+\frac{\partial}{\partial \Phi_{\mathrm{I}}}\right)\frac{1}{2}\left\{r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{P}})e^{-i\phi_{\mathrm{P}}}+r_{\mathrm{cav}}(\Phi_{\mathrm{I}})e^{-i\phi_{\mathrm{I}}}\right\} \\
&= \frac{1}{2}r'_{\mathrm{reso}}e^{-i\theta}
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \Phi_+}\left(\frac{E_{\mathrm{sym}1}}{E_{\mathrm{inc}1}}\right) &= \frac{1}{2}r'_{\mathrm{anti}}e^{-i(\theta+\beta)}\cos\alpha \\
\frac{\partial}{\partial \Phi_+}\left(\frac{E_{\mathrm{sym}-1}}{E_{\mathrm{inc}-1}}\right) &= \frac{1}{2}r'_{\mathrm{anti}}e^{-i(\theta-\beta)}\cos\alpha
\end{aligned}
$$

よって、v_3のΦ_+に対する微係数は、動作点では、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_3}{\partial \Phi_+} &= Re\left\{\frac{\partial E_{\mathrm{sym}0}}{\partial \Phi_+}\left(E_{\mathrm{sym}1}+E_{\mathrm{sym}-1}\right)^* + E_{\mathrm{sym}0}\frac{\partial (E_{\mathrm{sym}1}+E_{\mathrm{sym}-1})^*}{\partial \Phi_+}\right\} \\
&= Re\left[\frac{\partial\left(\frac{E_{\mathrm{sym}0}}{E_{\mathrm{inc}0}}\right)}{\partial \Phi_+}E_{\mathrm{inc}0}\cdot\left\{\left(\frac{E_{\mathrm{sym}1}}{E_{\mathrm{inc}1}}\right)E_{\mathrm{inc}1}+\left(\frac{E_{\mathrm{sym}-1}}{E_{\mathrm{inc}-1}}\right)E_{\mathrm{inc}-1}\right\}^*\right. \\
&\qquad \left. +\frac{E_{\mathrm{sym}0}}{E_{\mathrm{inc}0}}E_{\mathrm{inc}0}\cdot\left\{\frac{\partial\left(\frac{E_{\mathrm{sym}1}}{E_{\mathrm{inc}1}}\right)}{\partial \Phi_+}E_{\mathrm{inc}1}+\frac{\partial\left(\frac{E_{\mathrm{sym}-1}}{E_{\mathrm{inc}-1}}\right)}{\partial \Phi_+}E_{\mathrm{inc}-1}\right\}^*\right] \\
&= Re\left\{-iJ_0J_1|E_{\mathrm{l}}|^2\left(r'_{\mathrm{reso}}r_{\mathrm{anti}}+r_{\mathrm{reso}}{r'_{\mathrm{anti}}}^*\right)\cos\beta\cos\alpha\right\} \\
&= -J_0(m_{\mathrm{m}})J_1(m_{\mathrm{m}})|E_{\mathrm{l}}|^2\left(|r'_{\mathrm{reso}}|r_{\mathrm{anti}}+r_{\mathrm{reso}}|r'_{\mathrm{anti}}|\right)\cos\beta\cos\alpha
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

となる。この式において、括弧内の第 2 項は、第 1 項に比べて十分小さいとみなすことができるので、

$$
\frac{\partial v_3}{\partial \Phi_+} = -J_0(m_{\mathrm{m}})J_1(m_{\mathrm{m}})|E_{\mathrm{l}}|^2|r'_{\mathrm{reso}}|r_{\mathrm{anti}}\cos\beta\cos\alpha \tag{4.60}
$$

となる。

4.4.6 周波数変動の信号

次に、入射レーザー光の周波数が変動したときに現れる信号について考える。レーザー光の周波数をν $(\nu=\Omega/2\pi)$ とするとき、

$$
\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_+}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial \Phi_+}+\frac{\partial \phi_+}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial \phi_+}
$$

$$= \quad \frac{4\pi L_+}{c}\frac{\partial}{\partial\Phi_+} + \frac{4\pi l_+}{c}\frac{\partial}{\partial\phi_+}$$

となる。v_3のνに対する微係数を求めると、$\frac{\partial v_3}{\partial\phi_+} = 0$ より、

$$\frac{\partial v_3}{\partial\nu} = \frac{4\pi L_+}{c}\frac{\partial v_3}{\partial\Phi_+} \tag{4.61}$$

となる。つまり、周波数変動による信号は、arm cavity 長の同相変動信号と同様に扱うことができる。

4.4.7 信号の混合

これまで、v_1から$\delta\Phi_-$、v_2から$\delta\phi_-$、そして v_3から$\delta\Phi_+$の信号を取り出すことを考えてきたが、実際には信号は完全に分離されていない。ここでは。v_1、v_2、v_3それぞれをΦ_-、ϕ_-、Φ_+で微分した時の微係数の計算結果を列挙しておく。

$$\frac{\partial v_1}{\partial\Phi_-} = -J_0J_1|E_\mathrm{l}|^2|r'_\mathrm{reso}|r_\mathrm{anti}\cos\beta\sin\alpha \tag{4.62}$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial\phi_-} = -J_0J_1|E_\mathrm{l}|^2 r_\mathrm{reso}r_\mathrm{anti}\cos\beta\sin\alpha \tag{4.63}$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial\Phi_+} = 0 \tag{4.64}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial\Phi_-} = -J_0J_1|E_\mathrm{l}|^2 r_\mathrm{reso}|r'_\mathrm{anti}|\cos\beta\sin\alpha \tag{4.65}$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial\phi_-} = J_0J_1|E_\mathrm{l}|^2 r_\mathrm{reso}r_\mathrm{anti}\cos\beta\sin\alpha \tag{4.66}$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial\Phi_+} = -J_0J_1|E_\mathrm{l}|^2|r'_\mathrm{reso}|r_\mathrm{anti}\sin\beta\cos\alpha \tag{4.67}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial\Phi_-} = J_0J_1|E_\mathrm{l}|^2 r_\mathrm{reso}|r'_\mathrm{anti}|\sin\beta\sin\alpha \tag{4.68}$$
$$\frac{\partial v_3}{\partial\phi_-} = -J_0J_1|E_\mathrm{l}|^2 r_\mathrm{reso}r_\mathrm{anti}\sin\beta\sin\alpha \tag{4.69}$$
$$\frac{\partial v_3}{\partial\Phi_+} = -J_0J_1|E_\mathrm{l}|^2|r'_\mathrm{reso}|r_\mathrm{anti}\cos\beta\cos\alpha \tag{4.70}$$

実際に信号を得るために復調する際には、信号強度が最大になるように local oscillator の位相を合わせる。これは、βによる位相のずれを補うことに相当する。そのため、上の式において$\beta \to 0$ として考えて良い。また逆に、βを local oscillator の位相のずれと考えることもでき、その影響で、得られる信号の減少や信号の混合が起こることが分かる。

4.4.8 周波数応答

この節では、これまで DC 付近の信号について考えてきたが、ここではその周波数依存性について考える。

3.2節で見たように、Fabry-Perot 共振器は、重力波、鏡の変動、レーザーの周波数雑音に対して同様の周波数応答を示し、低周波数での近似では、1 次のローパス特性

$$|H_{\mathrm{FP}}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}$$

となる。ここで、τは Fabry-Perot 共振器内での光の平均滞在時間である。arm cavity からの反射光の中で、cavity 内の位相の情報を含む r'_{reso}はこの周波数特性を持つ。従って、δL_-の信号 ($\frac{\partial v_1}{\partial \Phi_-}$) と$\delta L_+$の信号 ($\frac{\partial v_3}{\partial \Phi_+}$) はこの周波数特性を持ち、

$$\left|\frac{\partial v_1}{\partial \Phi_-}(\omega)\right| = \left|\frac{\partial v_1}{\partial \Phi_-}\right|_{\mathrm{DC}} \times \frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \tag{4.71}$$

$$\left|\frac{\partial v_3}{\partial \Phi_+}(\omega)\right| = \left|\frac{\partial v_3}{\partial \Phi_+}\right|_{\mathrm{DC}} \times \frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \tag{4.72}$$

となり、高周波数において感度が低下することになる。この周波数特性は図 3.3に表されている。

なお、δl_-の信号 ($\frac{\partial v_2}{\partial \phi_-}$) は、問題となる周波数帯では周波数特性を持たないとして良い。

4.4.9 power recycling

動作点では antisymmetric port は dark fringe になっているためほとんどの光は symmetric port へ戻っていくことになる。そこで、この光を鏡 (recycling mirror) で反射し、再び干渉計に入射することで干渉計内部の実効的なパワーを上げることができる。これがパワーリサイクリング (power recycling) である [14]。これまで見てきたように、得られる信号強度は光のパワーに比例するのに対して、shot noise はパワーの平方根に比例するため、power recycling を行なうことによって干渉計の感度を制限する shot-noise level を下げることができる。

power recycling を行うときにはレーザー光源からの光と recycling mirror で反射された光に含まれる carrier と sideband がそれぞれ強め合わなくてはならない。この動作点についての条件により、θとβについて条件が加わる。

また、この条件を満たし続けるために、制御すべき自由度が 1 つ増え、l_{P} と l_{I}を recycling mirror から front mirror までの距離と定義し直したときの、同相変動信号$\delta\phi_+$についても考えなくてはならない。与えられる条件は、carrier と sideband が共に recycling mirror とこれまで見てきた (recycling mirror を含まない)Fabry-Perot-Michelson 干渉計の間で共振するというものである。

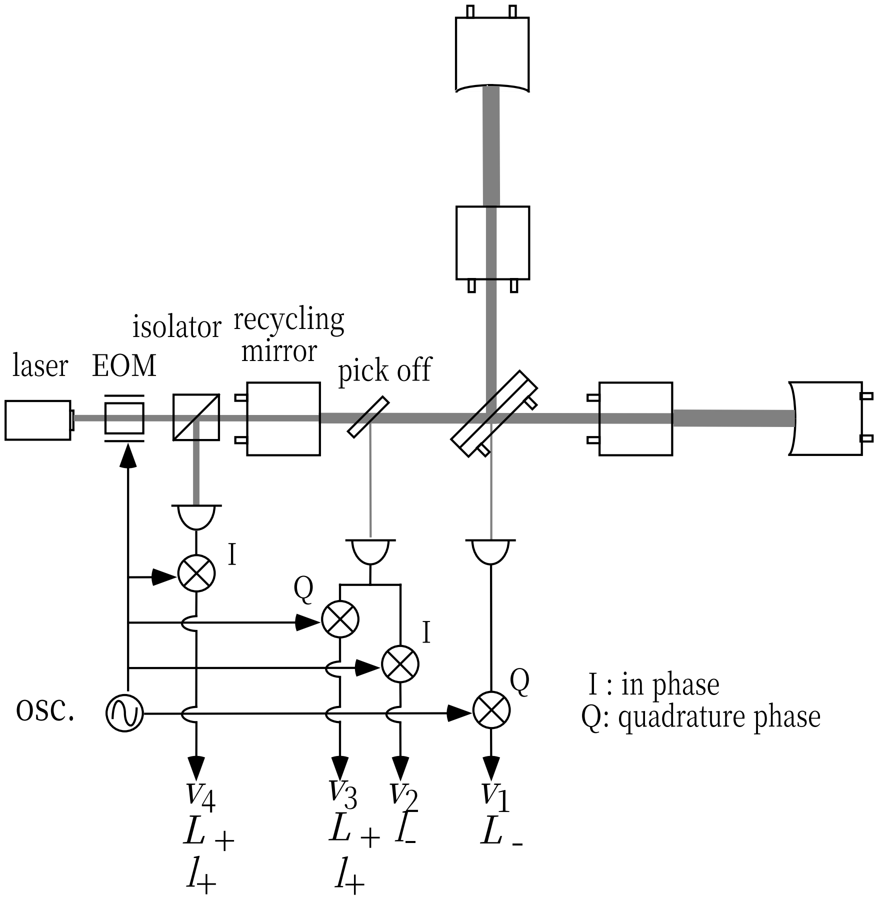

図 4.5: power recycling 時に photo detector と mixer によって取り出される信号。

$\frac{E_{\rm sym}}{E_{\rm inc}}$は Fabry-Perot-Michelson 干渉計の反射率と考えることができ、これまでの計算より、

$$
\begin{aligned}
\frac{E_{\rm sym0}}{E_{\rm inc0}} &= r_{\rm reso} e^{-i\theta} \\
\frac{E_{\rm sym1}}{E_{\rm inc1}} &= r_{\rm anti} e^{-i(\theta+\beta)} \cos\alpha \\
\frac{E_{\rm sym-1}}{E_{\rm inc-1}} &= r_{\rm anti} e^{-i(\theta-\beta)} \cos\alpha
\end{aligned}
$$

が得られている。

このとき、$r_{\rm reso}$は正の実数、$r_{\rm anti}$は負の実数であることに注意すると、共振条件は、

$$\theta = \phi_{\rm I0} = 2\pi n \quad (n : 自然数) \tag{4.73}$$

$$\beta = \frac{l_+ \omega_{\rm m}}{c} = -\pi + 2\pi m \quad (m : 自然数) \tag{4.74}$$

となる。

式 (4.74) より、l_+の最小値を求めることができ、

$$l_+ = \frac{c}{2\nu_{\mathrm{mod}}} \tag{4.75}$$

$$\nu_{\mathrm{mod}} = \frac{\omega_{\mathrm{m}}}{2\pi} \tag{4.76}$$

となる。

pre-modulation 法では、$\delta\phi_+$についての信号も取り出すことが可能である (図 4.5)。

ただ、取り出される$\delta\phi_+$の信号には大きな$\delta\Phi_+$の信号も混入することになる [8,9]。これを解決する方法として、2 つの周波数で変調をかけ, 信号を取り出す方法が考案されている [15]。

4.5 pre-modulation 法を用いる為の非対称性の影響

pre-modulation 法を用いる為には beam splitter から 2 つの front mirror までの距離に差をつけなくてはならない。この非対称性の影響でコントラストが低下したり、CMRR が悪化することが考えられる。ここでは、その影響について調べる。

4.5.1 コントラストの低下

pre-modulation 法のためにコントラストが低下する要因としては、変調をかけたために生じる sideband の影響と、2 つの方向でレーザービームのモードが違うことの影響が考えられる。

まず、変調による sideband の影響を考える。明縞、暗縞のときの photo detector に入射するパワーは、それぞれ、

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{max}} &= \left|E_0^{(\mathrm{bright})}\right|^2 + \left|E_1^{(\mathrm{bright})}\right|^2 + \left|E_{-1}^{(\mathrm{bright})}\right|^2 \\ &= (J_0 r_{\mathrm{reso}})^2 \left|E_{\mathrm{l}}\right|^2 + 2(J_1 r_{\mathrm{anti}} \cos\alpha)^2 \left|E_{\mathrm{l}}\right|^2 \qquad (4.77) \\ P_{\mathrm{min}} &= \left|E_1^{(\mathrm{dark})}\right|^2 + \left|E_{-1}^{(\mathrm{dark})}\right|^2 \\ &= 2(J_1 r_{\mathrm{anti}} \sin\alpha)^2 \left|E_{\mathrm{l}}\right|^2 \qquad (4.78) \end{aligned}$$

となる。

よって、コントラストの低下は、

$$\begin{aligned} 1 - C &= 1 - \frac{P_{\mathrm{max}} - P_{\mathrm{min}}}{P_{\mathrm{max}} + P_{\mathrm{min}}} \\ &= \frac{4(J_1 r_{\mathrm{anti}} \sin\alpha)^2}{(J_0 r_{\mathrm{reso}})^2 + 2(J_1 r_{\mathrm{anti}})^2} \qquad (4.79) \end{aligned}$$

となる。

次に、beam splitter によって分けられた 2 つの方向でビームのモードが違ってくることによる影響を考える。以下は carrier についてのみ考える。まず、beam splitter から front mirror までの距離が違うために入射レーザー光と arm cavity のモードマッチングにずれが生じる影響を考える。

入射レーザー光のウエストの位置が、l_{P} と l_{I}の中間にあるようにし、ウエストサイズは arm cavity のものと合っている場合には、モードマッチ率 M (入射光のモードと Fabry-Perot 共振器のモードの結合強度) は、

$$
\begin{aligned}
M &= M_{\mathrm{P}} = M_{\mathrm{I}} \\
&= \left| \frac{kw_0^2}{kw_0^2 + i\left(\frac{l_-}{2}\right)} \right|^2 \\
&= \frac{1}{1 + \left(\frac{l_-}{2kw_0^2}\right)^2}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、w_0は、ビームウエストでのビーム径 (ウエストサイズ)、kはレーザー光の波数である。

2 つの arm cavity でモードのミスマッチにより front mirror で反射された光が、全て photo detector に入射した場合[6]には、

$$
\begin{aligned}
P_{\max} &\simeq |E_{\mathrm{I}}|^2 \\
P_{\min} &\simeq (1-M)|E_{\mathrm{I}}|^2
\end{aligned}
$$

とできる。

よって、

$$
\begin{aligned}
1-C &= \frac{2(1-M)}{2-M} \\
&= \frac{2\left(\frac{l_-}{2kw_0^2}\right)^2}{1 + 2\left(\frac{l_-}{2kw_0^2}\right)^2}
\end{aligned}
\tag{4.80}
$$

となる。

さらに、2 つの arm cavity 内からの反射光のモードが異なることによる干渉の不完全性も考えなくてはならない[7]。

2 つの arm cavity 内から出てきた光の電場をそれぞれ E_{P}、E_{I} とし、その強度が等しい ($|E_{\mathrm{P}}|^2 = |E_{\mathrm{I}}|^2 = |E|^2$) とすると、

$$
P_{\max} = |E_{\mathrm{P}} + E_{\mathrm{I}}|^2
$$

[6] ミスマッチによる影響の上限を与える。

[7] 厳密にはモードのミスマッチの影響と干渉の不完全性の影響は分けて考えることはできないが、モードマッチングが十分にとれる場合 (l_-が小さい場合) には、分けて考えても大きな違いはない。

$$
\begin{aligned}
&= 2|E|^2 + 2Re(E_\mathrm{P}E_\mathrm{I}^*) \\
P_\mathrm{min} &= |E_\mathrm{P} - E_\mathrm{I}|^2 \\
&= 2|E|^2 - 2Re(E_\mathrm{P}E_\mathrm{I}^*)
\end{aligned}
$$

となる。

ここで、$Re(E_\mathrm{P}E_\mathrm{I}^*)$ は、ビームウエストの位置がビーム進行方向に l_- だけずれた 2 つのビームの結合振幅を表すので、

$$
Re(E_\mathrm{P}E_\mathrm{I}^*) = \frac{1}{1+\left(\frac{l_-}{kw_0^2}\right)^2}|E|^2
$$

とできる。

よって、コントラストの低下は、

$$
\begin{aligned}
1 - C &= 1 - \frac{Re(E_\mathrm{P}E_\mathrm{I}^*)}{|E|^2} \\
&= \frac{\left(\frac{l_-}{kw_0^2}\right)^2}{1+\left(\frac{l_-}{kw_0^2}\right)^2} \qquad (4.81)
\end{aligned}
$$

となる。

4.5.2 CMRR の低下

2 つの arm cavity からの反射光を beam splitter 上で干渉させることによって、同相雑音である周波数雑音の影響を除去することができる。しかし、beam splitter によって分けられた 2 つの方向で非対称性があると、この除去比 (CMRR) が損なわれることになる。pre-modulation 法を用いるには 2 つの front mirror までの距離に意図的に差をつけることになるため、CMRR の低下を考えなくてはならない。ここでは、2 つの arm cavity を構成する鏡の特性や、共振器長は全く等しいとして、front mirror までの距離の差の影響のみを考える。

まず、片方の arm cavity の周波数雑音に対する応答を見ておく。

式 (3.68) より、片方の arm cavity からの反射光の電場は、

$$
E_\mathrm{r}(t) = E_0 r_\mathrm{cav}(\Phi)e^{i\Omega t} + iE_0\int_{-\infty}^{\infty}\delta\phi(\omega)r_\mathrm{cav}(\Phi_\omega)e^{i(\Omega+\omega)t}d\omega
$$

となる。この式より、

$$
E_\mathrm{r}(t) = E_0 r_\mathrm{cav}(\Phi)e^{i(\Omega t+\delta\phi(t))} + iE_0\int_{-\infty}^{\infty}\delta\phi(\omega)\left\{r_\mathrm{cav}(\Phi_\omega) - r_\mathrm{cav}(\Phi)\right\}e^{i(\Omega+\omega)t}d\omega \qquad (4.82)
$$

が得られる。この第 2 項が入射光の周波数雑音による影響を表している。

次に、干渉後の光の電場を考える。antisymmetric port では、片方の arm cavity からの反射光の電場と、それより時間

$$\Delta t = \frac{2l_-}{c}$$

だけ遅れた電場の差を考えることになり、

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{r}}(t) - E_{\mathrm{r}}(t - \tfrac{2l_-}{c}) &= E_0 r_{\mathrm{cav}}(\Phi)\left(1 - e^{-i\frac{2l_-\Omega}{c}}\right) e^{i(\Omega t + \delta\phi(t))} \\ &\quad + iE_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta\phi(\omega) r_{\mathrm{cav}}(\Phi_\omega)\left(1 - e^{-i\frac{2l_-(\Omega+\omega)}{c}}\right) e^{i(\Omega+\omega)t} d\omega \end{aligned}$$

となる。

ここで、2 つの arm cavity が共に入射光と共振しており、antisymmetiric port が dark fringe になっているとすると、

$$r_{\mathrm{cav}}(\Phi) = r_{\mathrm{reso}}$$

$$r_{\mathrm{cav}}(\Phi_\omega) = r_{\mathrm{cav}}(2\gamma)$$

$$\frac{2l_-\Omega}{c} = \phi_- = 2\pi n \ (n : \text{自然数})$$

とできるので、(ただし、γは、$\gamma = \frac{L\omega}{c}$である。)

$$E_{\mathrm{r}}(t) - E_{\mathrm{r}}(t - \tfrac{2l_-}{c}) = iE_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta\phi(\omega) r_{\mathrm{cav}}(2\gamma)\left(1 - e^{-i\frac{2l_-\omega}{c}}\right) e^{i\omega t} d\omega \tag{4.83}$$

となる。この式が、干渉後に現れる周波数雑音の影響である。式 (4.82) (4.83) の周波数雑音の影響の大きさの比が CMRR となる。よって、pre-modulation 法を用いるための非対称性の影響による CMRR の値$\epsilon_{\mathrm{CMRR,pre}}$は、

$$\epsilon_{\mathrm{CMRR,pre}} = \left| \frac{r_{\mathrm{cav}}(2\gamma)\left(1 - e^{-i\frac{2l_-\omega}{c}}\right)}{r_{\mathrm{cav}}(2\gamma) - r_{\mathrm{reso}}} \right|$$

となる。

この式において、end mirror の反射率がほぼ 1 であるとすると、

$$\epsilon_{\mathrm{CMRR,pre}} \sim r_{\mathrm{reso}} \frac{l_-}{N_{\mathrm{FP}} L} \quad (\omega \to 0) \tag{4.84}$$

となる。

レーザー干渉計重力波検出器では、一般に Fabry-Perot 共振器長 L、もしくは実基線長 $N_{\mathrm{FP}} L$ は、beam splitter から front mirror までの距離の差 l_-に比べて十分大きいため、pre-moduletion 法を用いることによる CMRR の低下はほとんど無視できる。

第 5 章

3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計

pre-modulation 法による信号の取り出しと制御について調べるために、東京大学理学部にある基線長 3m の Fabry-Perot 型重力波検出器プロトタイプ (3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計; 3m FPMI) を用いて実験を行った。

この節ではこの 3m FPMI の各部で用いられている機器や、設計などについて述べる。

5.1 光学系

3m FPMI も光学要素は図 5.1の様に配置されている。この節では、レーザー光が干渉計に入射するまでに用いられている機器について述べる。

5.1.1 鏡、beam splitter

arm cavity となる２つの Fabry-Perot 共振器はともに同じスペックにされている。共振器長は 2.95m、front mirror の強度反射率は 97.5%、end mirror の強度反射率は 99.9%である (ともにカタログ値)。この値から計算すると、フィネスは約 240 となる。

また、beam splitter から front mirror までの距離は、$l_{\mathrm{P}} = 0.40$ [m]、$l_{\mathrm{I}} = 0.25$ [m] であり、その差 l_{-}は $l_{-} = 0.15$ [m] である。

front mirror と end mirror はアルミニウム製のミラーホルダー (マス) に貼り付けられており、マスは振り子によって吊られている。また、マスには制御のためのアクチュエータを構成する磁石が貼りつけられている。

beam splitter は、beam splitter 面を 2 つのガラス基盤で挟み込んだものになっている。ガラス基盤面は AR コート (Anti-Reflection coat) が施されており、AR 面での強度反射率は約 0.6%程度である。S 偏光の光に対するこの beam splitter の強度透過率、強度反射率の比は 49.2:50.8 である。この beam splitter も鏡のマスと同様に振り子によって吊られており、また、アクチュエーター用の磁石が貼り付けられている。

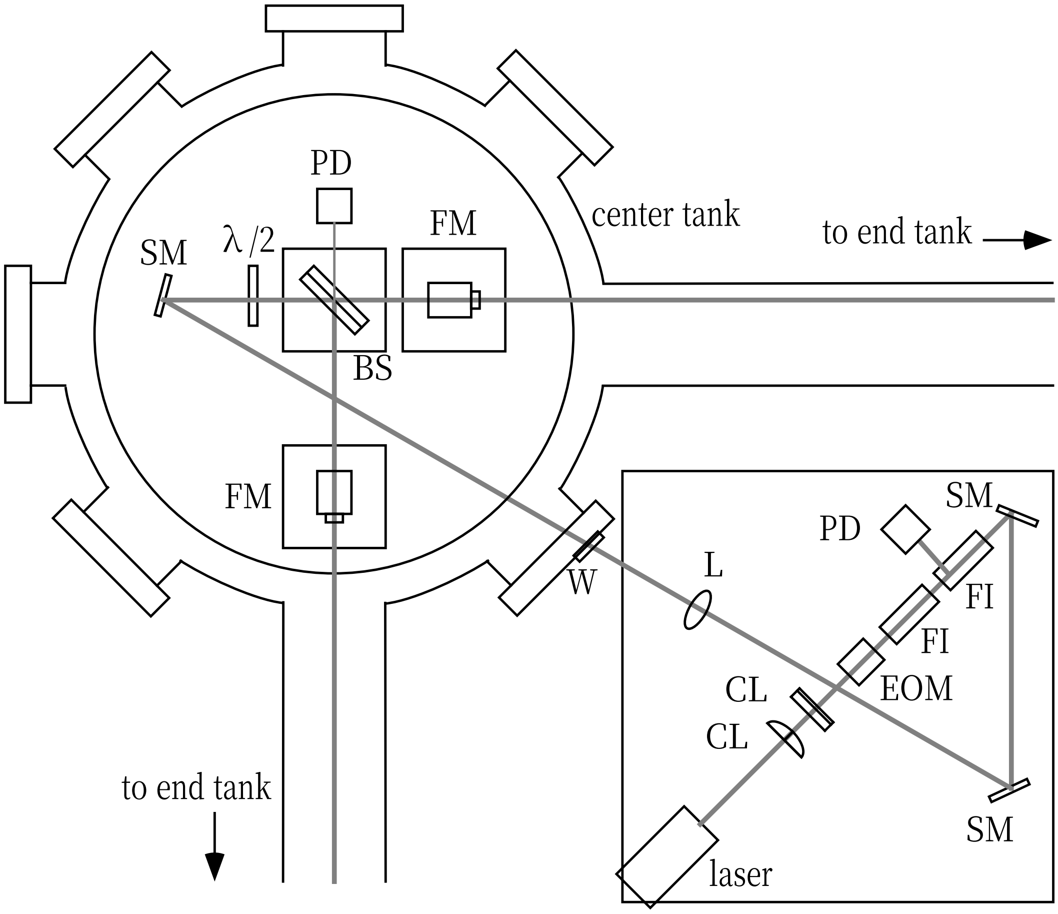

図 5.1: 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の光学要素。CL : Cylindrical Lens、FI : Faraday Isolator、L : Lens、SM : Steering Mirror、PD : Photo Detector、W : Window、FM : Front Mirror & suspension、BS : Beam Splitter & suspension。動作点への引き込み時に用いる photo detector などは省略してある。

5.1.2 光源

光源としては、LIGHTWAVE 社製の MISER(Model:124-1064-050) を用いている。これは、半導体レーザー励起の Nd:YAG レーザーであり、波長は 1064nm、出力は約 50mW である。しかし、光学要素を通過するときにロスがあるため、干渉計に実際に入射されているパワーは、約 35mW である。

レーザー媒質である Nd:YAG 結晶には PZT(PieZo-electric Transducer) が取り付けられており、周波数変調や周波数安定化に用いることができるようになっている。

YAG レーザーの光は、その結晶の形のために、一般にやや楕円形に歪んだビーム断面を持つ。これは、レーザー光が Hermite-Gaussian モードの高次の光を含むことを意味する。干渉計の動作時には、高次モードの光は Fabry-Perot 共振器と共振しないため無駄になる

項目	記号	値
レーザー光源の波長	λ	1064 nm
共振器長	L	2.95 m
front mirror の強度反射率	${r_\mathrm{F}}^2$	0.975
end mirror の強度反射率	${r_\mathrm{E}}^2$	0.999
front mirror の曲率半径		∞
end mirror の曲率半径		4.5 m
ウエストサイズ	w_0	848 μm
フィネス	$\mathcal{F}$	239
free spectral range	ν_FSR	50 MHz
cut-off 周波数	ν_c	106 kHz
arm cavity の共振時の振幅反射率	r_reso	0.924
arm cavity の反共振時の振幅反射率	r_anti	$\simeq$-1
arm cavity の共振時の振幅反射率の微分	$\lvert r'_\mathrm{reso}\rvert$	146
arm cavity の共振時の振幅反射率の微分	$\lvert r'_\mathrm{anti}\rvert$	6.33×10^{-3}

表 5.1: arm cavity として用いられる Fabry-Perot 共振器のパラメータ。計算値は鏡でのロスが無いものとして求めている。

だけでなく、干渉計のコントラストを損なう原因ともなる。この影響は、モードクリーナー (mode cleaner) や光ファイバーを通すことによって除去できるが、3m FPMI では、2 枚の円筒面レンズ (cylindrical lens) を用いて光の断面が円形になるよう整形し、高次モードの光を減少させている。

5.1.3 位相変調器

レーザー光源からの光には干渉計に入射する前に位相変調をかける。そのための EOM(Electro Optic Modulator) としては、New Focus 社製の Model 4003 を用いた。変調周波数$\frac{\omega_\mathrm{m}}{2\pi}$は、15MHz であり、変調指数 m_mは、約 0.69rad である。変調指数は、変調前の光のパワーと変調後の carrier のパワーの比 0.78 から、

$$\left(\frac{J_0(m_\mathrm{m})}{J_0(0)}\right)^2 = 0.78$$

を用いて求めた。この製品のカタログ値は、$> 0.2\mathrm{rad/V_{p-p}}$であり、$5\mathrm{V_{p-p}}$の電圧 (発振器の表示による) をかけて使用している。実際に EOM にかかっている電圧は、信号を分岐している影響などにより、発振器の表示電圧よりも小さくなっている。

項目	記号	値
front mirror までの距離の差	l_-	0.15 m
変調角周波数	ω_{m}	15 MHz
変調指数	m_{m}	0.69 rad
実効変調指数	$m_{\mathrm{m}}\sin\alpha$	0.032 rad
0 次の Bessel 関数	$J_0(m_{\mathrm{m}})$	0.88
1 次の Bessel 関数	$J_1(m_{\mathrm{m}})$	0.32

表 5.2: 変調に関するパラメータ。

5.1.4 アイソレーター

pre-modulation 法では、干渉計からレーザー光源の方向へ戻ってくる光を photo detector で検出し、信号を取り出す必要がある。そのために Faraday isolator を用いる。

また、干渉計からの光がレーザー光源に戻ると、レーザー発振が不安定になるが、Faraday isolator はこれを防ぐという役割も持つ。Faraday isolator は 2 つ入れられており、戻り光の影響を減らしている。Faraday isolator の除去比は 1 つにつき 80dB(カタログ値) であり、2 つの Faraday isolator を入れることにより 160dB の除去比となる。ただし、実際には偏光方向のずれなどの影響があり、この値通りの除去比が得られているかどうかは不明である。

5.1.5 モード マッチング

レーザー光を Fabry-Perot 共振器に入射するときには、モード マッチング (mode matching) を欠かすことはできない。モード マッチングには、5.1.2節で述べた円筒面レンズ 2 枚と球面レンズ 1 枚を用いている。beam splitter から front mirror までの距離に差があるが、2 つの Fabry-Perot 共振器に対して同じようにモード マッチングを行うために l_{P} と l_{I}のほぼ中間にビームのウエストができるようにした。モード マッチ率 Mはそれぞれ 98%以上であり、十分マッチングが取れていると言える。

5.1.6 その他

レーザー光源からの光を、干渉計に入射するときには、何枚かの鏡 (ステアリングミラー、steering mirror) によって、ビームの方向を調整する。3m FPMI では、3 枚のステアリングミラーを用いている。この鏡の反射率は 99.9%であり、反射によるパワーのロスを抑えている。

beam splitter は、S 偏光の光を半分に分割するようになっている。そこで、入射光の偏光を S 偏光にするために、$\lambda/2$ 板を用いて偏光の方向を合わせている。

レーザー光源の光を真空タンク内に入射するときには、ガラス基盤に AR コートを施した窓板を通す。このとき、基盤内で干渉が起きないように基盤にはウェッジが付けてある。

5.2　信号取得系

干渉計の beam splitter 上で干渉した光を、photo detector で検出して、DBM で復調し、その後に続くバッファーアンプで増幅することで信号が得られる。

この節では、この信号検出系に用いられる機器と、得られる信号について述べる。

5.2.1　変調

pre-modulation のための変調周波数$\omega_{\mathrm{m}}/2\pi$は約 15MHz であり、変調指数 m_{m}は、約 0.69rad である。また、beam splitter から front mirror までの距離の差 l_{-}は 15cm である。この l_{-}の値は、鏡などを懸架する振り子支持台の大きさと、真空槽の大きさによって制限されており、これ以上大きくするのは難しい。そのため、実効変調指数 $m_{\mathrm{m}}\sin\alpha$は、

$$m_{\mathrm{m}}\sin\alpha = 0.032$$

とやや小さい値となっている。

beam splitter から front mirror までの距離に差をつけることにより干渉計が非対称になるが、その影響によるコントラストの低下は約 0.19%、また、antisymmetric port に出てくる sideband によるコントラストの低下は約 0.18% であり、ほぼ無視できる。

5.2.2　発振器

レーザー光に位相変調をかけるための EOM に入力する信号は、信号発信器 (function synthesizer) によってつくられる。この信号は、信号分割器によって分けられ、信号の復調のための DBM の LO(Local Oscillator) 信号としても用いられる。

5.2.3　photo detector

干渉計の beam splitter 上で干渉した光は、photo detector によって検出される。この photo detector の雑音は直接、信号に対する感度を制限するため、非常に良い性能が要求される。

3m FPMI では、コイルとコンデンサーを並列につなぎ、変調周波数$\omega_{\mathrm{m}}/2\pi = 15$ [MHz] 付近の信号に対して共振する回路 (LC tank circuit) を内蔵した photo detector を製作し、使用している。

図 5.2にこの photo detector の周波数応答を示す。共振周波数は約 15MHz であり、共振の Q 値は約 6 である。なお、回路図は、補遺 Aに掲載しておく。

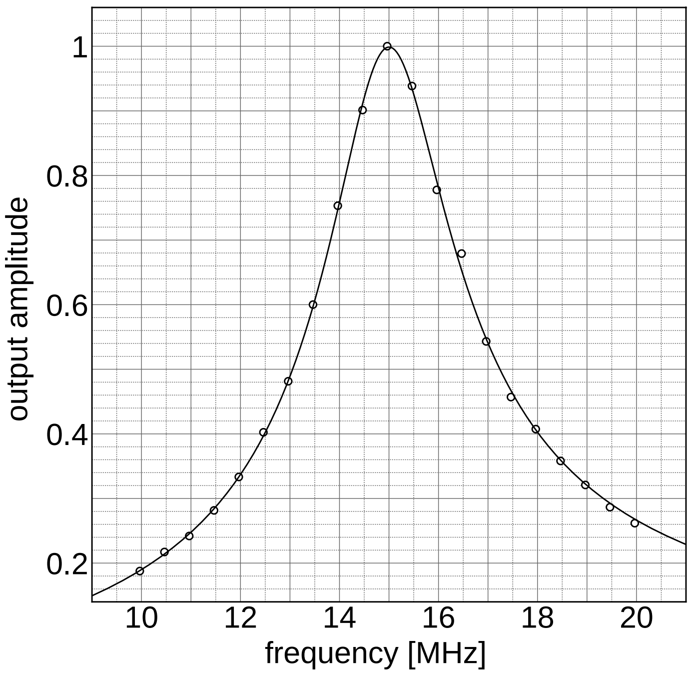

図 5.2: photo detector の周波数特性。縦軸は信号強度を表し、適当な値で規格化してある。点は測定値、実線はフィッティングにより求めた理論値である。

5.2.4 復調器

photo detector で検出された信号の中から制御に必要な信号のみを取り出すために復調することが必要である。

3m FPMI では DBM(Double Balanced Mixer) を用いている。用いている DBM は、R&K 社製の M-1 型であり、外部電源を必要としない passive な復調器である。

復調に用いる local oscillator 信号は、レーザー光の位相変調用の発振器の信号から得る。その位相は phase shifter によって得ようとしている信号強度が最大になるように調整する。この位相にずれがあると、信号強度が小さくなるのみならず、他の信号の混入を招くことになる。

5.2.5 信号検出系の雑音

DBM の出力をバッファーアンプで増幅することで、復調された信号が得られる。

ここで、復調された shot-noise level と、photo detector に流れる光電流の関係から、信号検出系の雑音を、等価な光電流 i_{det} として定義することができる。

図 5.3は、photo detector に入射する光量を変え、光電流と、雑音のフロアレベルの関係を測定した結果である。雑音レベルは、光量の平方根に比例する shot noise と、光量に関

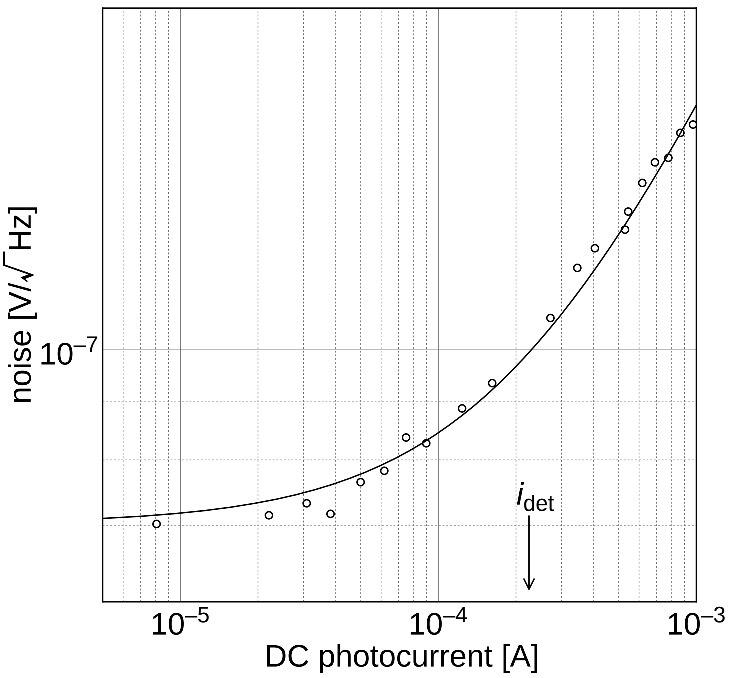

図 5.3: photo detector に流れる光電流とノイズレベルの関係。点は測定値、実線はフィッティングにより求めた理論値である。i_{det}より大きな光電流が流れている時、shot noise が主なノイズとなる。

係なく存在する検出系の雑音が合わされたものである[1]。従って、測定された点を、

$$v_{\mathrm{noise}} = R_{\mathrm{demod}}\sqrt{2e(i_{\mathrm{dc}} + i_{\mathrm{det}})} \tag{5.1}$$

でフィットすることで、i_{det}を求めることができる。

測定結果より求められるi_{det}の値は、$i_{\mathrm{det}} = 0.22$ [mA]、また、photo detector に流れる電流を復調し、電圧信号として得る際の変換係数 (実効的な抵抗値とみなすことができる) は、$R_{\mathrm{demod}} = 8.3$ [kΩ] となる。このi_{det}より大きな光電流が photo detector に流れてるとき、shot noise による雑音が支配的であると言うことができる。

5.2.6 得られる信号強度

前章の計算結果より各信号の大きさは、

$$\left|\frac{\partial v_1}{\partial \Phi_-}\right| = J_0 J_1 |E_l|^2 |r'_{\mathrm{reso}}| \sin\alpha$$

[1] 無相関な雑音の和であるから、2 乗平均になる。

	$\frac{\partial}{\partial\Phi_-}$	$\frac{\partial}{\partial\phi_-}$	$\frac{\partial}{\partial\Phi_+}$
v_1	1	1/158	0
v_2	1/12500	1/158	0
v_3	0	0	21

表 5.3: 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計で得られる信号強度。この値は鏡の反射率等から計算したものである。$\frac{\partial v_1}{\partial\Phi_-}$ の大きさを 1 として規格化してある。

$$\left|\frac{\partial v_2}{\partial\phi_-}\right| = J_0 J_1 |E_\mathrm{l}|^2 r_\mathrm{reso}\sin\alpha$$

$$\left|\frac{\partial v_3}{\partial\Phi_+}\right| = J_0 J_1 |E_\mathrm{l}|^2 |r'_\mathrm{reso}|\cos\alpha$$

などとなる。ただし、ここでは$\beta = 0$ とし、また、$r_\mathrm{anti} = -1$、$r'_\mathrm{anti} = 0$ としている。

表 5.3は、これらの式に鏡の反射率等を代入して得られる信号の大きさを比較したものである。この表で、復調に用いる local oscillator の位相のずれ (β) の影響は含まれていない。また、鏡等でのロスは無いものとしている。

この表の対角成分が制御に用いる信号の大きさを表し、その他が混合する信号を表している。表より、ϕ_-の信号が小さく、他の信号の混合の影響も大きいことが分かる。

5.2.7 shot-noise level

photo detector に入射する光のパワーと、信号の大きさから、shot-noise level を求めることができる。

photo detector に流れる DC の光電流が i_dc [A] であるとき、photo detector での shot noise は

$$i_\mathrm{shot} = \sqrt{2ei_\mathrm{dc}} \quad \left[\mathrm{A}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right] \tag{5.2}$$

となる。ここで、e は素電荷である。

この shot noise を mixer によって復調すると、その大きさは半分になり[2]、また、角周波数ω_mと$-\omega_\mathrm{m}$の 2 つの無相関な雑音の混合として現れるため、結局、信号に含まれる雑音としては、

$$n_\mathrm{shot} = \sqrt{ei_\mathrm{dc}} \tag{5.3}$$

となる。

まず、Φ_-についての shot-noise level を求める。

bright fringe の時に photo detector に流れる電流を i_maxとし、dark fringe での電流を i_minとする。このとき、動作時には dark fringe になっていることに注意して、shot noise の大

[2]式 (4.8) から (4.10) より、信号の大きさもω_m成分の振幅の半分になっていることが分かる。

きさと信号の大きさを考えると、

$$
\begin{aligned}
N_{\text{shot}} &= \sqrt{e i_{\min}} && (5.4)\\
S_{\Phi_-} &= \frac{\partial v_1}{\partial \Phi_-} \times \delta\Phi_- \\
&= J_0 J_1 i_{\max} |r'_{\text{reso}}| \sin\alpha \times \delta\Phi_- && (5.5)
\end{aligned}
$$

となる[3]。ここで、コントラストを C とすると、$i_{\max}$ と $i_{\min}$ は、

$$
i_{\min} = \frac{1-C}{1+C} i_{\max} \tag{5.6}
$$

という関係にある。

信号の大きさと、雑音の大きさが等しくなる (S/N が 1 になる) ような $\delta\Phi_-$ の値が shot-noise level となり、コントラストは 99%とすると、

$$
\delta\Phi_{-\text{shot}} = 2.4 \times 10^{-10} \quad \left[\text{rad}/\sqrt{\text{Hz}}\right] \tag{5.7}
$$

となる。また、この値から、

$$
\delta L_{-\text{shot}} = 2.0 \times 10^{-17} \quad \left[\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}\right] \tag{5.8}
$$

と計算できる。ただし、実際には干渉縞の動きによるコントラストの低下により、この値よりは多少悪くなる。

同様にして、ϕ_- については、

$$
\begin{aligned}
\delta\phi_{-\text{shot}} &= 4.1 \times 10^{-7} \quad \left[\text{rad}/\sqrt{\text{Hz}}\right] && (5.9)\\
\delta l_{-\text{shot}} &= 3.5 \times 10^{-14} \quad \left[\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}\right] && (5.10)
\end{aligned}
$$

また、L_+ についても

$$
\begin{aligned}
\delta\Phi_{+\text{shot}} &= 1.2 \times 10^{-10} \quad \left[\text{rad}/\sqrt{\text{Hz}}\right] && (5.11)\\
\delta L_{+\text{shot}} &= 1.0 \times 10^{-17} \quad \left[\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}\right] && (5.12)
\end{aligned}
$$

となる。この値より、$\delta\phi_-$ は比較的大きな shot-noise level を持つことが分かる。

5.3 フィードバック系

この節では、得られた信号のフィードバックの方法とデザインについて述べる。

3m FPMI では、制御系は図 5.4のようになっている。

pre-modulation 法によって得られた信号のうち、δL_- の信号を用いて arm cavity 長を差動制御し、また、δl_- を用いて beam splitter の位置の制御をしている。δL_+ の信号は arm cavity 長の同相制御と同時に、レーザー光源の周波数安定化にも用いている。

[3] ここでは、復調時のゲイン R_{demod} は、信号とノイズの両方にかかるため省略してある。

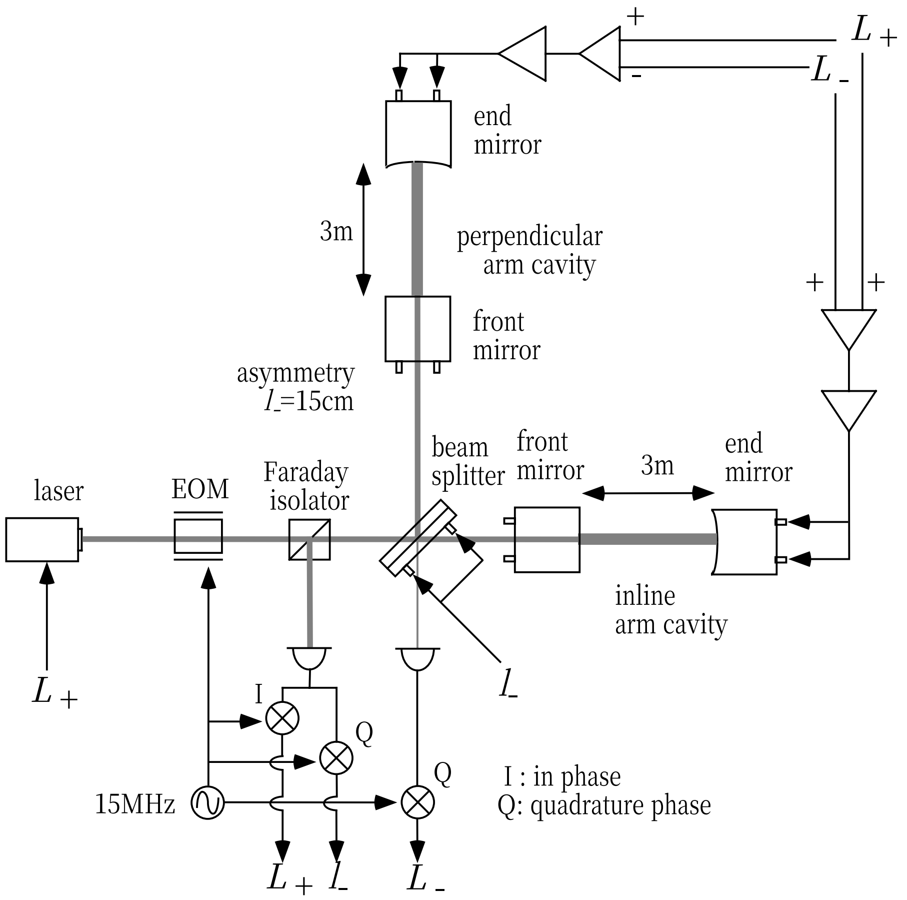

図 5.4: 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の制御系。変調周波数$\omega_m/2\pi = 15$ [MHz]、front mirror までの距離の差 $l_- = 15$ [cm]。実効変調指数は 0.032 となる。

5.3.1　鏡などのアクチュエート

鏡や beam splitter は振り子によって吊られている。これらの位置を制御するために、永久磁石とコイルによるアクチュエーターを用いる。

鏡が貼り付けられているマスや、beam splitter には永久磁石が貼り付けられている。その近くにはコイルが配置されており、このコイルに電流を流し、磁場を発生させることで鏡などに力を加えてその位置を動かす。

また、レーザー光源については、レーザー結晶に貼り付けられている PZT に電圧を加えることによって、その発振周波数を変えることができる。

5.3.2　arm cavity 長の差動制御ループ

まず、arm cavity の差動制御ループ (L_- loop) について述べる。

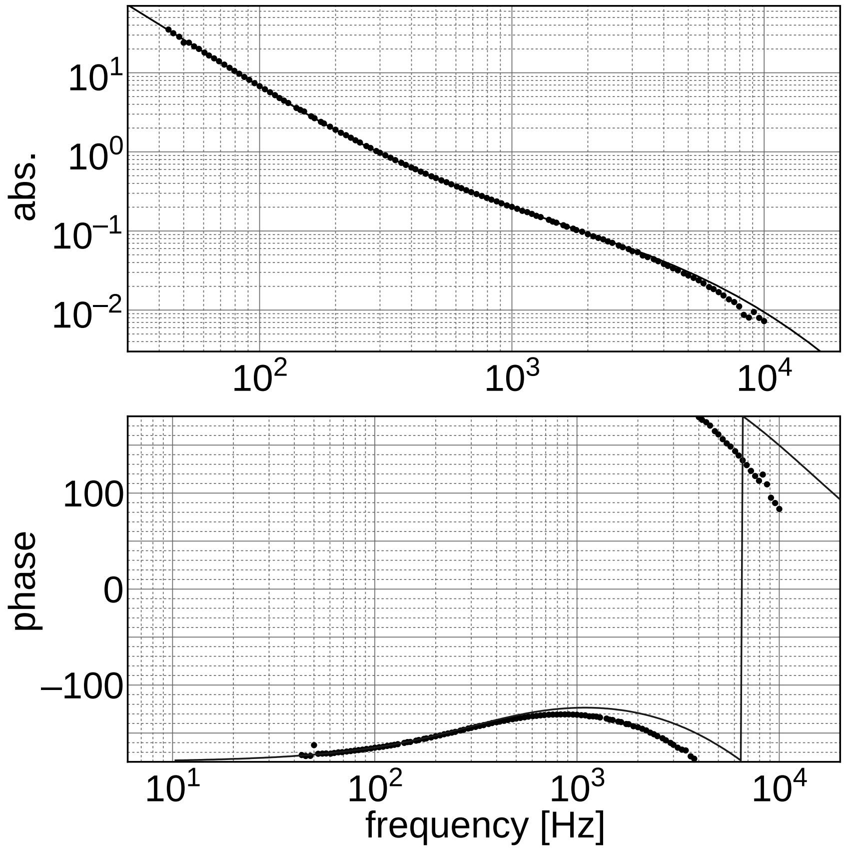

図 5.5: L_- loop の open loop 伝達関数。点は実測値、実線はフィッティングにより求めた理論値である。UGF での位相余裕を得るために積分回路によって位相を戻している。

arm cavity の差動変動信号δL_-は重力波の信号を含む信号であり、干渉計で最も重要な信号である。このループの open loop 伝達関数 G_{L_-}を図 5.5に示す。

振り子によって吊られている鏡を制御するときには、振り子の共振周波数で位相が 180 度遅れてしまうため、電気回路によってその位相を戻すことが必要となる。

図 5.5よりユニティゲイン周波数 (Unity Gain Frequency; UGF) は、約 300Hz、位相余裕は約 40 度である。

5.3.3 beam splitter の制御ループ

次に、beam splitter の制御ループ (l_- loop) について述べる。

5.2.7節で述べたように、δl_-の信号は大きな shot-noise level を持つ。従って、この信号を beam splitter に feedback することで、beam splitter が揺らされ、δL_-の感度を損なってしまうことが起こり得る。beam splitter の揺れの信号が、δL_-の信号に混入する割合は、

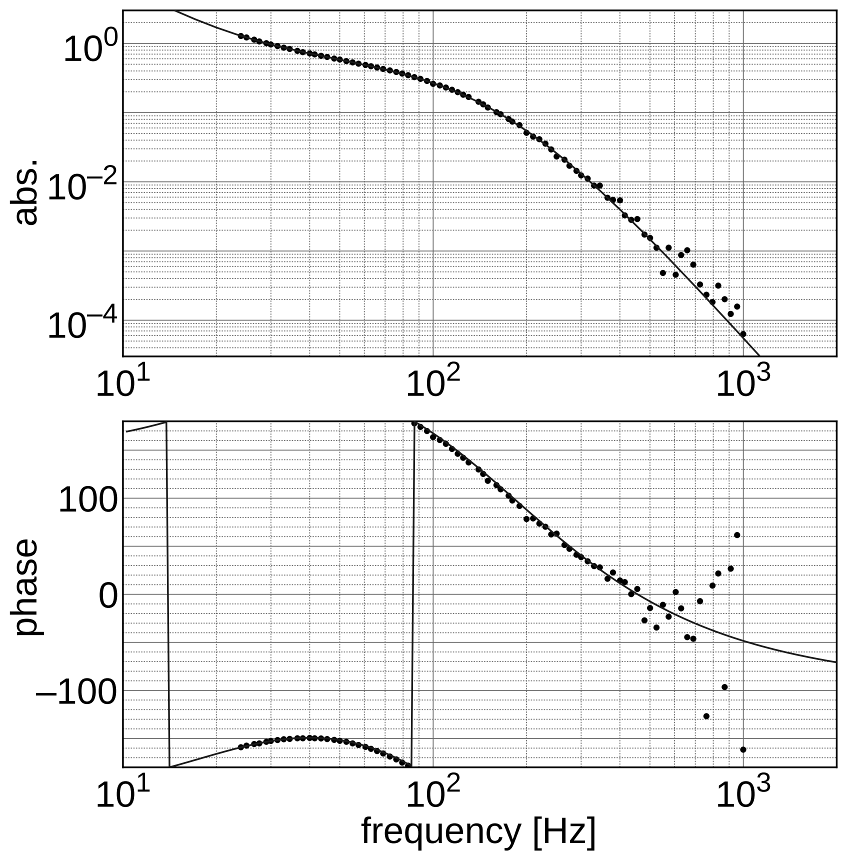

図 5.6: l_- loop の open loop 伝達関数。点は測定値、実線はフィッティングにより求めた理論値である。DC 付近では制御ゲインを保ちつつ、高い周波数では急峻にゲインを落とすように設計されている。

表 5.3の$\frac{\partial v_1}{\partial \phi_-}$ で与えられているように小さいものであるが、δl_-信号に含まれる shot-noise level が大きいために、この影響を無視することはできない。

この $deltal_-$信号に含まれる shot noise がδL_- の感度を損なう影響は、

$$\delta L_{l_-} = \epsilon_{\mathrm{BS}} \frac{G_{l_-}}{1 + G_{l_-}} \times \delta l_{-\mathrm{shot}} \tag{5.13}$$

と表すことができる。ここで、G_{l_-}は、l_- loop の open loop 伝達関数、ϵ_{BS}は、beam splitter 変動が、arm cavity の差動変動信号として混入する比を表す比例定数である。この式より、l_-loop の制御帯域を狭くすることで、δl_-信号に含まれる比較的大きな shot noise がδL_-信号に及ぼす影響を小さくできることが分かる。また、制御帯域外の周波数では、ゲインを急激に落とすことでその影響を避けることができる。ただし、制御帯域を狭くすることにより、制御のゲインが足りないために干渉縞が揺らぎ、余分な shot noise が引き起こされ

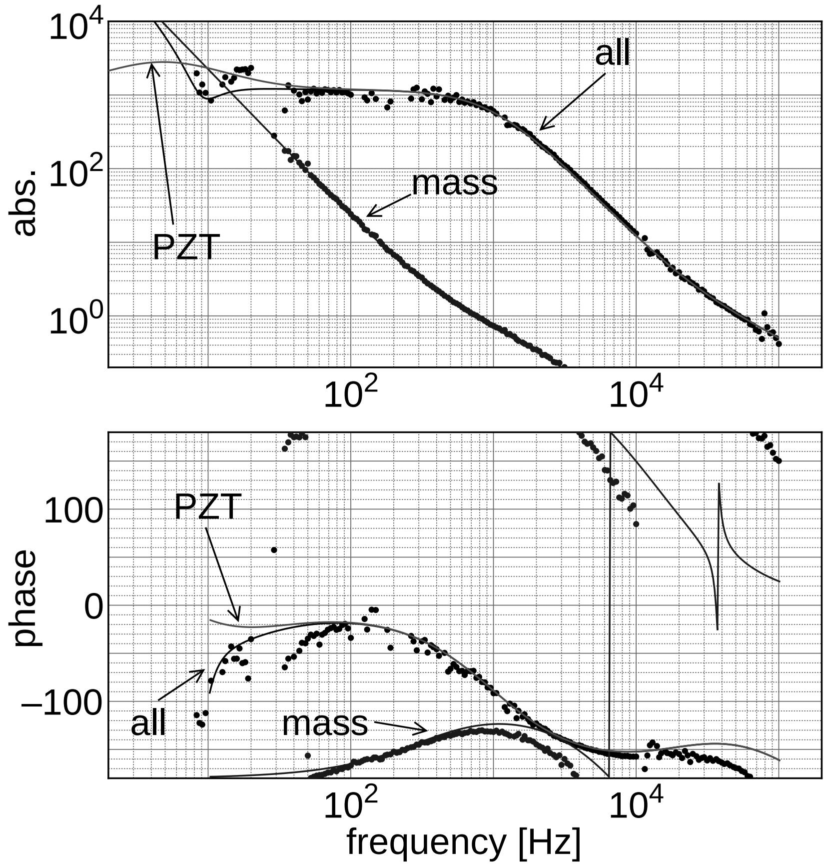

図 5.7: L_+ loop の open loop 伝達関数。点は実測値、実線は測定値をもとに求められた理論値である。低周波数の信号は鏡に、高周波数の信号はレーザー光源の PZT に feedback している。

たり、レーザーの強度雑音の影響を受け易くなるなどの悪影響があるため、UGF の設定には注意する必要がある。

3m FPMI では、beam splitter 制御の UGF を約 30Hz に設定している。図 5.6に l_- loop の open loop 伝達関数を示す。

5.3.4 arm cavity 長の同相制御ループ

arm cavity 長の同相制御ループ (L_+ loop) は、2 つのループから成っている。高い周波数帯の信号は、レーザー光源に取り付けられている PZT に feedback し、レーザーの周波数安定化を行う。一方、低い周波数の信号は、arm cavity の鏡の同相制御に用い、地面振動の影響による cavity 長の変動を抑える。このように 2 つの制御ループがあるとき、全体の open loop 伝達関数は、それぞれのループの open loop 伝達関数の和で表される。つまり、レーザーの周波数安定化ループ (PZT loop) の open loop 伝達関数を $G_{L_+\mathrm{PZT}}$、arm cavity

の鏡の同相制御ループ (mass loop) の open loop 伝達関数を $G_{L_+\mathrm{mass}}$ とすると、L_+ loop 全体の open loop 伝達関数 G_{L_+} は、

$$G_{L_+} = G_{L_+\mathrm{PZT}} + G_{L_+\mathrm{mass}} \tag{5.14}$$

となる。

この 2 つの制御ループのゲインが重なる周波数を crossover 周波数と呼び、crossover 周波数以下では主に arm cavity の鏡に制御がかけられており、crossover 周波数より高い周波数では、レーザーの周波数安定化が行われていることになる。PZT loop の帯域、周波数安定化安定化ゲインは、レーザーに貼り付けられた PZT の共振によって制限されている。

arm cavity の鏡の同相変動制御をする際には、制御のためのアクチュエーターの特性の違いから差動で鏡を動かしてしまう影響があるため、mass loop で広い制御帯域をとることはできない。しかし、干渉計を安定に動作させるためには地面振動を抑えるだけの十分なゲインが必要であり、mass loop の制御帯域をあまり狭くすることはできない。そのため、mass loop では、低周波数領域で大きなゲインを持ちつつ、crossover 周波数以上では、急激にゲインを落とすことが必要となる。

また、crossover 周波数付近で、2 つの制御ループの位相が 180 度近くずれていると、その周波数で制御ゲインが低下することになるため、注意を要する。

図 5.7に L_+ loop の open loop 伝達関数 G_{L_+} と $G_{L_+\mathrm{PZT}}$、$G_{L_+\mathrm{mass}}$ を示す。

crossover 周波数は約 10Hz であり、crossover 周波数から約 1kHz までの周波数安定化ゲインは約 60dB になっている。

5.4 懸架系

鏡や beam splitter は、振り子によって吊られている。振り子によって吊るされた鏡は、振り子の共振周波数より高い周波数では自由質点として振る舞う。さらに、この懸架系は地面振動からの防振の働きも持っている。

3m FPMI で用いられている防振懸架用の振り子は、図 5.8 のような 2 段振り子になっている [17]。

1 段目の振り子のマス (upper mass) は銅製であり、その近くに強力な永久磁石を配置することで、磁石を用いたダンピング (magnet damping) が実現されている。また、この永久磁石を支持するコの字型の支持板もまた、板バネによって固定されており、磁石が揺れることによる振動の混入を避けている。このような magnet damping による受動的なダンピングを用いることで、ローカルコントロールを用いた能動的なダンピングをする場合に比べ、単純で安定な 2 重振り子が実現されている。

また、縦方向の地面振動が水平方向の振動に変換され、鏡を揺らす影響を避けるために、振り子の支持部には板バネ (bending flap) が入れられており、また、upper mass はコイルバネ (coil spring) によって吊るされている。

振り子はマイクロメータによって動かすことのできる XZ ステージによって支持されており、アラインメント調整ができるようになっている。アラインメント調整としては、振

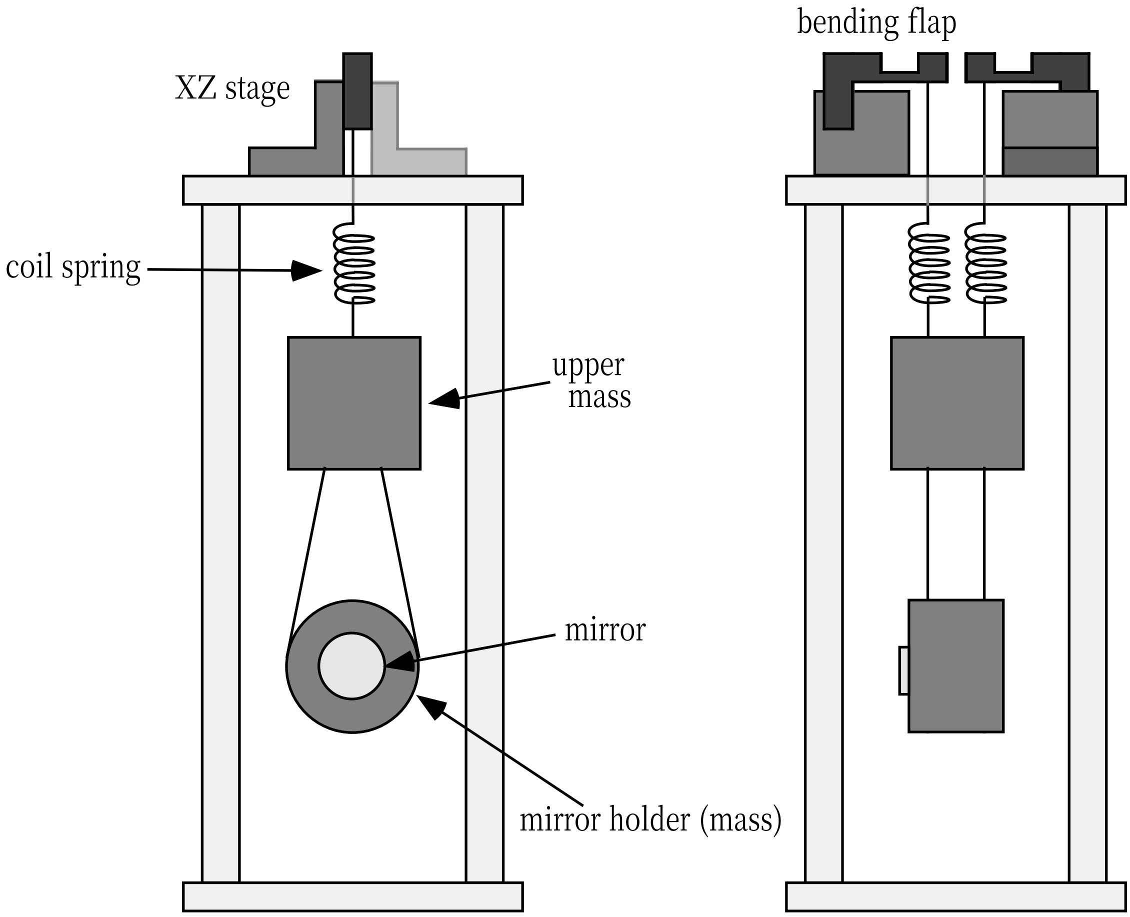

図 5.8: 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計で用いられている振り子。upper mass のダンピング用磁石とアラインメント用、制御用のアクチュエーターは省略してある。

り子の支持部の板バネ付近の磁石とコイル、マイクロメーターの代わりに取り付けられたモータードライブ (motor drive) また、鏡のマスに直接貼り付けられた磁石とそれをアクチュエートするコイルを真空中での微調節用として用いることができるようになっている。

5.5 真空系

干渉計は、音の影響や光路上の空気の影響を避けるために真空容器内に収められている(図 5.9)。この真空容器は、大きく分けて 3 つのタンクからなり、真ん中のタンク (center tank) には、beam splitter と 2 つの front mirror が収められ、center tank から離れて置かれている 2 つのタンク (end tank) には、それぞれ end mirror が収められている。center tank の中心から end tank の中心までの距離は 3m で、これらのタンクは、内径約 15cm のパイプで繋がれている。タンク内の光学台は、タンクとは独立に地面に固定されており、真空度の変化で真空容器が変形しても光学台は動かないようになっている。この光学台の直径

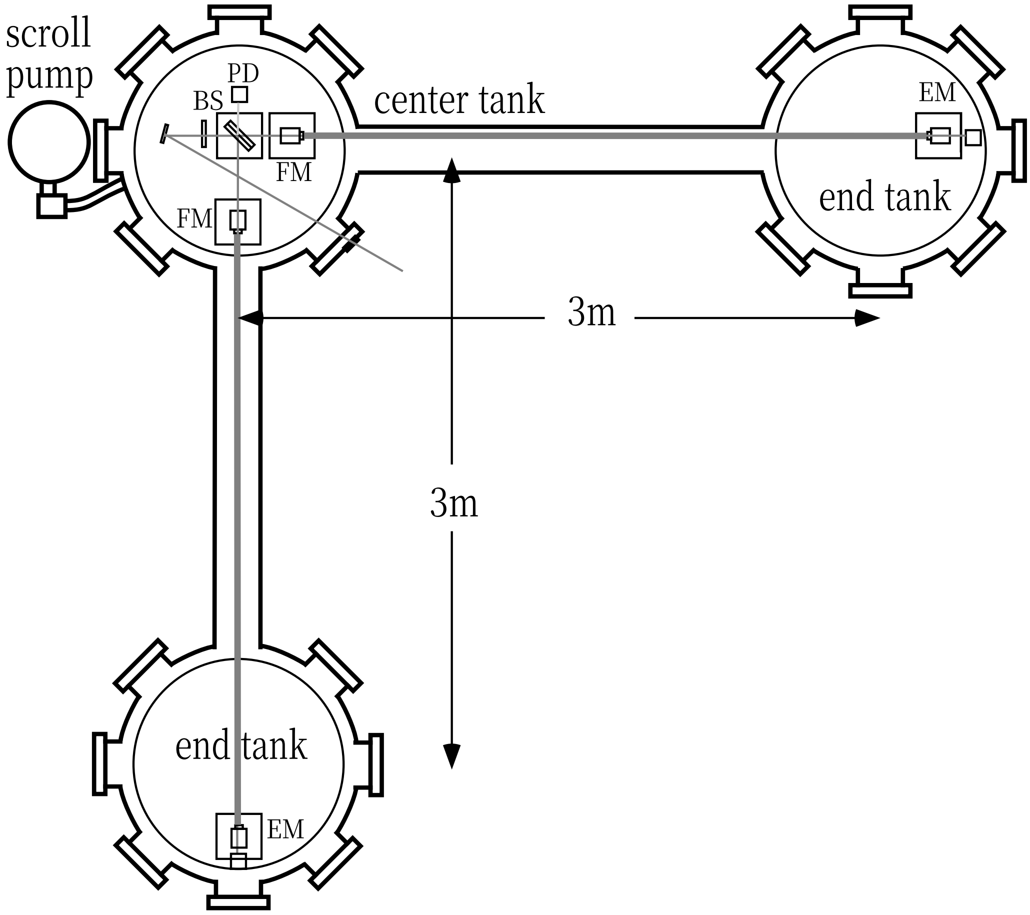

図 5.9: 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の真空容器。中に配置される光学要素と光軸も描いてある。

は 1m であり、このサイズによって beam splitter から front mirror までの距離差 l_- は制限されている。

排気は、center tank 底に取り付けられたスクロールポンプで行う。干渉計動作時には、真空度は、約 10^{-2} から 10^{-1}torr (約 10^{-4} から 10^{-3}Pa) 程度である。

第 6 章

3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の動作

第 4章で述べたように、pre-modulation 法によって Fabry-Perot-Michelson 干渉計の光路長制御に必要な全ての信号を取り出すことができる。この方法では、power recycling を組み込んだ干渉計の制御にもそのまま用いることができ、また、重力波の信号取得系 (δL_-) の制御を、他の自由度の制御と独立に行うことができるため、優れた制御系であると考えられている。pre-modulation を用いた制御系は、現在国立天文台三鷹キャンパスに建設が進められている基線長 300m レーザー干渉計重力波検出器 (TAMA300) でも用いられることになっているが、国内では、これについての実験は行われていなかった。
そこで、東京大学理学部にある基線長 3m の Fabry-Perot 型重力波検出器プロトタイプ (3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計; 3m FPMI) を実際に pre-modulation 法を用いて制御して、鏡が吊られた系での動作を確認すると共に、この制御系についての知識を得、TAMA300 や将来の大型干渉計計画の制御系設計に役立てることを目的に、実験を行った。

この章では、得られた変位感度と、その雑音源や今後問題となり得る雑音についての解析結果を示す。

6.1　動作点への引き込み

第 4章で見たように、pre-modulation による信号は、干渉計の各自由度が動作点にある時には正しく得られる。しかし、干渉計が動作点からはずれているときには、得られる信号は様々な自由度の信号が入り混じった非線型の複雑なものとなり、容易に動作点に引き込むことはできない。
そこで、より単純な制御系で動作点に引き込み、その後、制御系を切り替える方法を用いた (図 6.1)。これにより、素早く、確実に動作点に引き込み、制御をかける (ロックする) ことができた。実際には、この制御系の切替による引き込みを行なわないでロックするこ

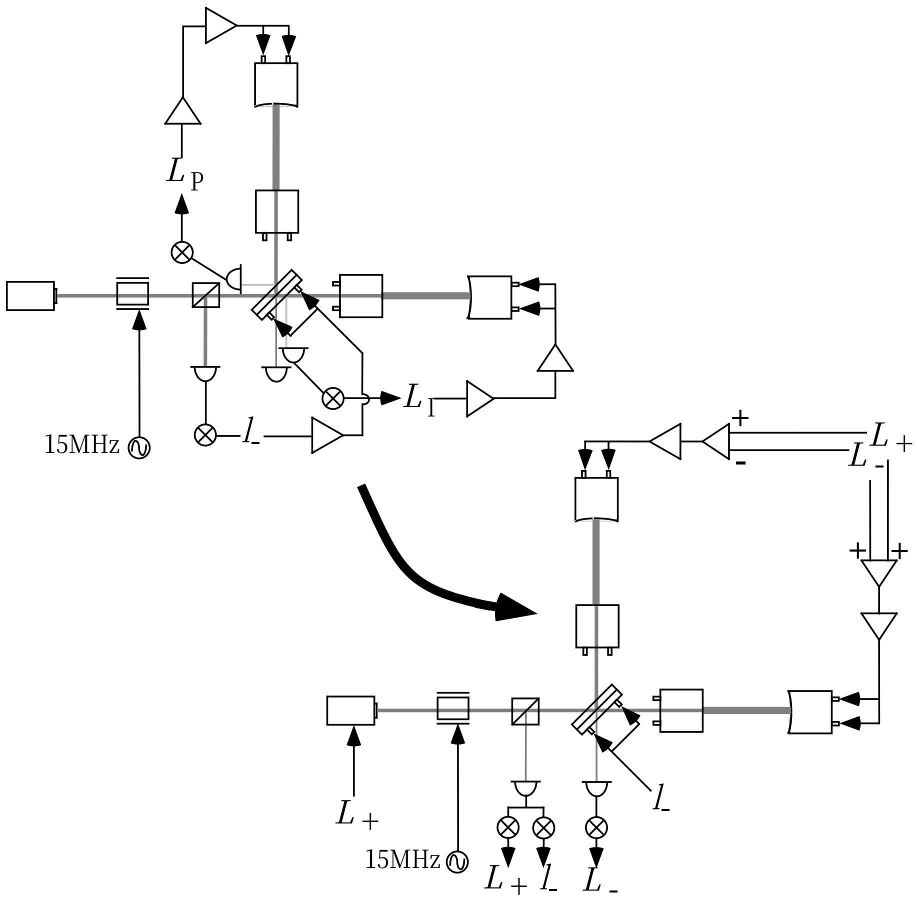

図 6.1: 制御系の切替えによる動作点への引き込み。

とはなかった[1]。

この節では、動作点への引き込みの手順に従って話を進めていく。

まず、2 つの arm cavity をそれぞれ動作点 (入射光と共振する状態) に引き込む。その為には、Pound-Drever 法と呼ばれる信号取得法を用いる。この方法は、Fabry-Perot 共振器の制御を行う一般的なものであり、その原理は pre-modulation 法における L_+信号の取り出しと同様の方法である [16]。

この方法では、Fabry-Perot 共振器長という 1 つの自由度を 1 ループの制御系で制御するので、比較的容易に動作点に引き込むことができる。

なお、信号を得るためには Fabry-Perot 共振器からの反射光が必要となるが、これには beam splitter の AR 面で反射された光を用いる。

2 つの arm cavity がロックされ、入射光と共振した状態になると、v_2の信号が、beam

[1]LIGO グループの 40m プロトタイプ干渉計では、制御のスイッチを入れた状態でしばらく待てば、ロックしたという報告がある。

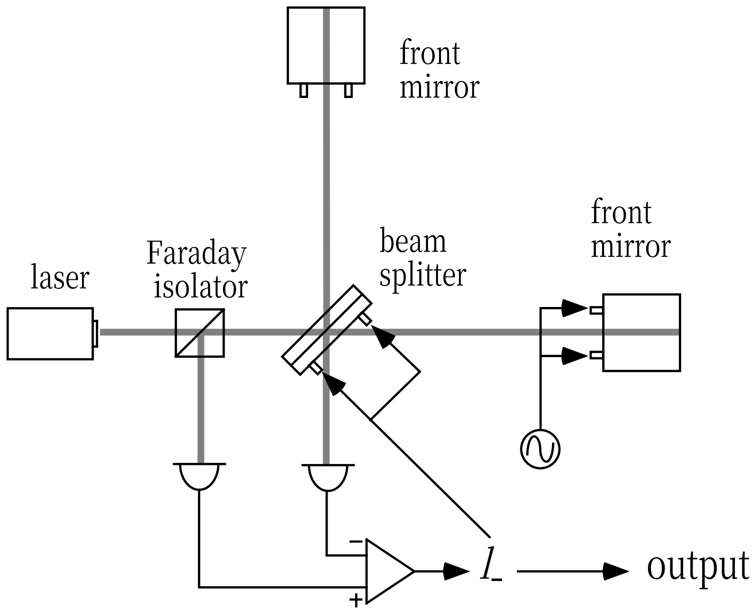

図 6.2: front mirror の driver に加える電圧に対する鏡の変位の測定。beam splitter と front mirror から成る Michelson 干渉計を差動法でロックし測定する。

splitter の位置 (δl_-) に対して正しく現れるようになる。そこで、この信号を用いて、anti-symmetric port が dark fringe になるよう制御をかける。これにより、全ての自由度が動作点に引き込まれたことになる。

beam splitter がロックされ、干渉縞がほぼ静止すると、初めて v_1にδL_-の信号、また、v_3にδL_+の信号が正しく現れるようになる。そこで、これらの信号を用いて、arm cavity の差動、同相制御、また、レーザーの周波数安定化の制御を行う。

この時点では、arm cavity には、まだ Pound-Drever 法による制御がかけられており、制御系が混在していることになる。しかし、ロックが外れるといったことは特に無い。

最後に、Pound-Drever 法による制御系を切り、完全に pre-modulation 法による制御系だけで動作している状態にする。以上で、動作点への引き込みが完了する。

6.2　信号の校正

干渉計の出力は電圧 ([V] 又は$\left[\mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right]$) である。そのため、この電圧値を、鏡や beam splitter の変位 ([m] 又は$\left[\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right]$) などに変換するための係数が必要となる。この係数を求める為に校正 (calibration) を行う。

6.2.1 driver への入力電圧に対する鏡の変位の校正値

まず beam splitter と 2 枚の front mirror から成る Michelson 干渉計を差動法 (DC 法) でロックすることで、front mirror の driver にかける電圧に対する鏡の変位の大きさを測定する。

校正値の測定の設定を図 6.2に示す。差動法では、beam splitter で干渉したとき、anti-symmetric port と symmetric port の 2 つの方向に進む光を photo detector で検出し、その差を制御信号として用いる。差動法で取りだした Michelson 干渉計の出力は、

$$v_{\mathrm{MI_{dc}}} = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{2} \sin \frac{4\pi \delta l_{-}}{\lambda} \quad [\mathrm{V}] \tag{6.1}$$

となる。ここで、λは光の波長、$v_{\max}$と $v_{\min}$は、それぞれ干渉縞が変化するときの差動法出力電圧の最大値と最小値、また、δl_{-}は、front mirror の差動変動を表す。

この出力信号が 0 になるように beam splitter を制御すると、beam splitter で干渉後、2 つの方向に進む光の強度は等しくなる。このとき、動作点付近での微少変位に対しては

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{\mathrm{MI_{dc}}} \simeq \frac{2\pi (v_{\max} - v_{\min})}{\lambda} \quad [\mathrm{V/m}] \tag{6.2}$$

となる。よって、制御をかけないときの出力電圧 $v_{\max}$、$v_{\min}$と、レーザー光の波長λから、front mirror の変動量から差動法での信号出力への変換係数が求められる。

3m FPMI では、この値は、

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{\mathrm{MI_{dc}}} = 1.39 \times 10^{8} \quad [\mathrm{V/m}] \tag{6.3}$$

と求められた。

次に、差動法で制御をかけた状態で、片方の front mirror の driver に一定の電圧、周波数の信号を入力し、そのときの差動法出力信号の大きさから、driver 入力信号の大きさから front mirror 変位量への変換係数を求める。

このとき、差動法で制御されている影響が出力信号に現れてしまうため、制御の影響を補正する必要がある、ということに注意しなければならない。この補正を考慮に入れると、

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{\mathrm{FM}} = \frac{v_{\mathrm{MI_{dc}}} \times |1 + G_{\mathrm{MI_{dc}}}|}{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{\mathrm{MI_{dc}}} \times v_{\mathrm{driver}}} \quad [\mathrm{m/V}] \tag{6.4}$$

となる[2]。

[2]一般に負のフィードバックがかけられている系では、制御される量 Xは、制御系の open loop 伝達関数 G を用いて、

$$X' = \frac{X}{|1 + G|}$$

となる。

ここで、$v_{\mathrm{MI_{dc}}}$は差動法出力信号の大きさ、$G_{\mathrm{MI_{dc}}}$は、差動法制御系の open loop 伝達関数、v_{driver}は、driver に加える電圧である。

3m FPMI では、この値は、

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{\mathrm{FM}} = 4.63 \times 10^{-12} \quad [\mathrm{m/V}] \tag{6.5}$$

と求められた。この値は周波数 3kHz の信号を driver に加えたときのものである。

6.2.2 鏡の変位に対する信号出力の校正値

front mirror の driver に信号を加えたときの変動を基準変位として各信号の変位に対する感度を求めることができる。つまり、front mirror の変動量が既知であるので、それに対応する信号の大きさを測定することで、front mirror の変動量から信号の大きさへの変換係数を求めることができるわけである。この変換係数を用いることで、逆に、得られた信号から、鏡の変動量を求めることができる。

この変換係数を求めるときにも、やはり、制御の影響を考慮して open loop 伝達関数による補正が必要となる。

このことに注意して arm cavity の差動変動量を v_1信号の電圧に変換する変換係数を求める[3]。

L_- loop の open loop 伝達関数を G_{L_-}とすると、その変換係数は、

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial L_-}\right) = \frac{v_1 \times |1 + G_{L_-}|}{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{\mathrm{FM}} \times v_{\mathrm{driver}}} \quad [\mathrm{V/m}] \tag{6.6}$$

となる。

同様にして、L_+ loop の open loop 伝達関数 G_{L_+} を用いて、

$$\left(\frac{\partial v_3}{\partial L_+}\right) = \frac{v_3 \times |1 + G_{L_+}|}{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{\mathrm{FM}} \times v_{\mathrm{driver}}} \quad [\mathrm{V/m}] \tag{6.7}$$

とできる。

l_- loop については、干渉計全体を動作させた状態では他の信号の混合が大きく、正確な校正が行えない。従って、beam splitter と front mirror のみの Michelson 干渉計で校正を行う。この Michelson 干渉計での l_- loop の open loop 伝達関数を $G_{l'_-}$とすると、

$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial l'_-}\right) = \frac{v_2 \times |1 + G_{l'_-}|}{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{\mathrm{FM}} \times v_{\mathrm{driver}}} \quad [\mathrm{V/m}] \tag{6.8}$$

と求めることができる。

[3]一方の front mirror の driver に信号を加え、変動させるとき、その振幅が十分大きければ、他方の front mirror の変動や、beam splitter の変動は無視できる。また、v_1に含まれる信号はほとんど arm cavity の差動変動成分のみとなる。

変動量	信号	校正値
δL_-	v_1	2.04×10^9 [V/m]
δl_-	v_2	9.55×10^6 [V/m]
δL_+	v_3	2.11×10^{10} [V/m]

表 6.1: 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の校正値。すべて、3kHz で front mirror を変動させることで測定した値である。

両腕を Fabry-Perot 共振器にし、Fabry-Perot-Michelson 干渉計にしたときには、carrier に対する反射率が約 r_{reso}倍になり、photo detector に入射する光量が減少する。そのため、v_2の l_-に対する感度は減少することになる。よって、両腕が front mirror のみの Michelson 干渉計のときに photo detector に入射されるパワー P_{MI}と、両腕を Fabry-Perot 共振器にしたときに photo detector に入射されるパワー P_{FPMI}の比を用いて、

$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial l_-}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{l'_-} \times \sqrt{\frac{P_{\mathrm{FPMI}}}{P_{\mathrm{MI}}}} \quad [\mathrm{V/m}] \tag{6.9}$$

とできる。表 6.1に測定された校正値をまとめておく。

6.3 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の変位雑音

3m FPMI を pre-modulation 法による制御系で動作させ、得られた変位雑音は図 6.3のようになった。このグラフを Fabry-Perot 共振器長 2.95m で割ったものが、重力波に対する感度となる。

このグラフは v_1で得た信号に $|1 + G_{L_-}|$ をかけることで制御による影響の補正を施し、校正値$\left(\frac{\partial v_1}{\partial L_-}\right)$で割ったものである。コントラストは最高時で 99.1%であったが、干渉縞は変動しており、平均では 97.2%であった。

なお、L_-loop の open loop 伝達関数 G_{L_-}は、図 5.5 に示されている。

得られた変位雑音レベルは、約 2kHz から 20kHz までの周波数帯で、5×10^{-17} $\left[\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right]$ であった。このレベルは、検出系の雑音と shot noise によって制限されている。変位感度を制限する他の主な雑音源としては、低い周波数帯から順に、地面振動、l_-信号検出系の雑音、レーザー光源の周波数雑音であると考えられる。

これらの影響については、6.4節の解析の部分で述べる。

6.4 雑音源と制御系の解析

この節では、変位雑音を制限する雑音、また、問題となり得る雑音について解析する。

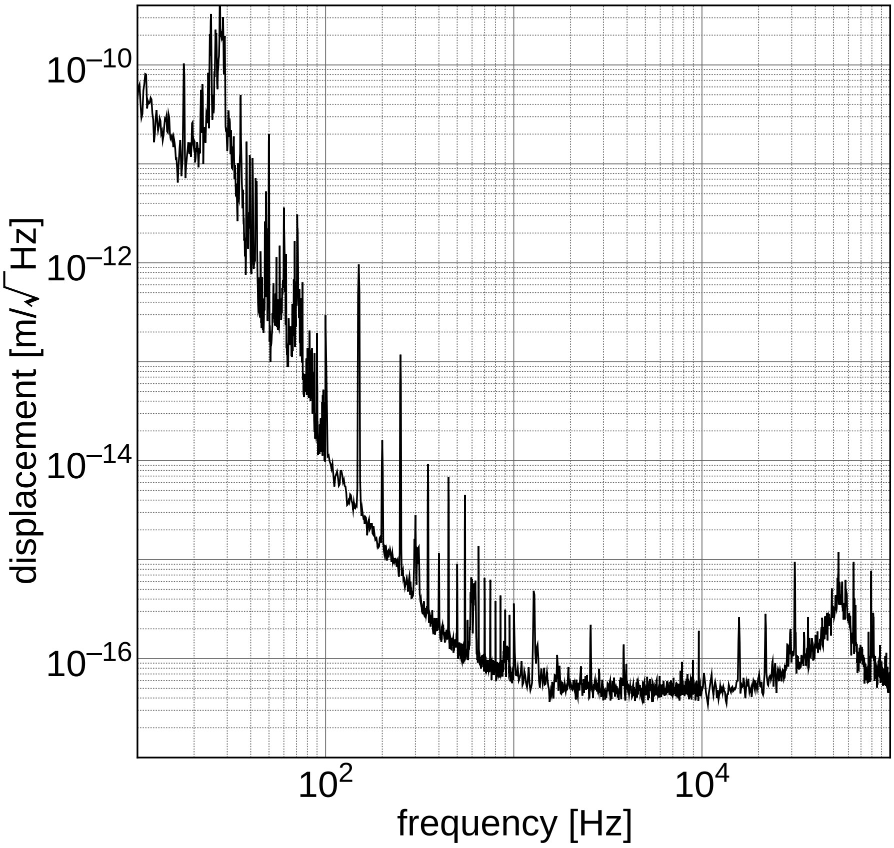

図 6.3: 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の変位雑音。

6.4.1 周波数雑音の影響

周波数雑音の影響を見るためには同相雑音除去比を測定しなければならない。同相雑音除去比は CMRR(Common Mode noise Rejection Ratio) と呼ばれ、2 つの特性の良く揃った Fabry-Perot 共振器からの反射光を beam splitter 上で直接干渉させることによって、周波数雑音など両方の共振器に同相で働く雑音の影響を除去する比率のことである。

CMRR を測定するためには、レーザー光源の PZT に正弦波信号などを入力することでレーザー光に疑似的な周波数雑音を付加して、その信号がδL_-、δL_+の信号にどう現れるかを調べればよい。

ある周波数の正弦波信号を PZT に加えたとき、この周波数でδL_-、δL_+に現れる信号の大きさをそれぞれ v_{L_-}、v_{L_+}とする。このとき、δL_+信号について、

$$\delta L = \frac{v_{L_+}}{2\left(\frac{\partial v_3}{\partial L_+}\right)} \quad [\mathrm{m}]$$

は、周波数雑音の影響で片方の arm cavity に現れる変位雑音を表す。ここで、δL_+信号は

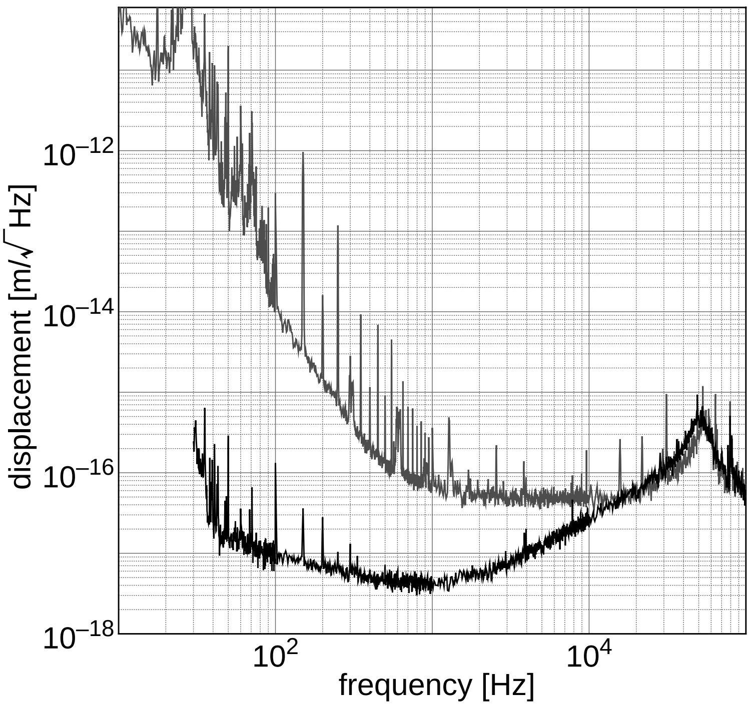

図 6.4: 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の変位雑音における周波数雑音の影響。網線はFPMI 変位雑音、実線はレーザー光源の周波数雑音の影響を表す。20kHz 以上の周波数帯で 2 つのグラフがほぼ重なっており、レーザーの周波数雑音の影響が干渉計の変位感度を制限していることが分かる。

両方の arm cavity 変位の和であるため、1 つの arm cavity に対する影響を求める為に、2 で割っている。

さらに、δL_-信号については、

$$\delta L_- = \frac{v_{L_-}}{2\left(\frac{\partial v_1}{\partial L_-}\right)} \quad [\mathrm{m}]$$

という変位雑音として現れている。これらのδL、δL_-を用いて、CMRR は、

$$\epsilon_{\mathrm{CMRR}} = \frac{\delta L_-}{\delta L} \tag{6.10}$$

と計算できる。

実際に 10kHz の正弦波信号を PZT に加え、CMRR を測定したところ、

$$\epsilon_{\mathrm{CMRR}} = \frac{1}{30}$$

という値が得られた。

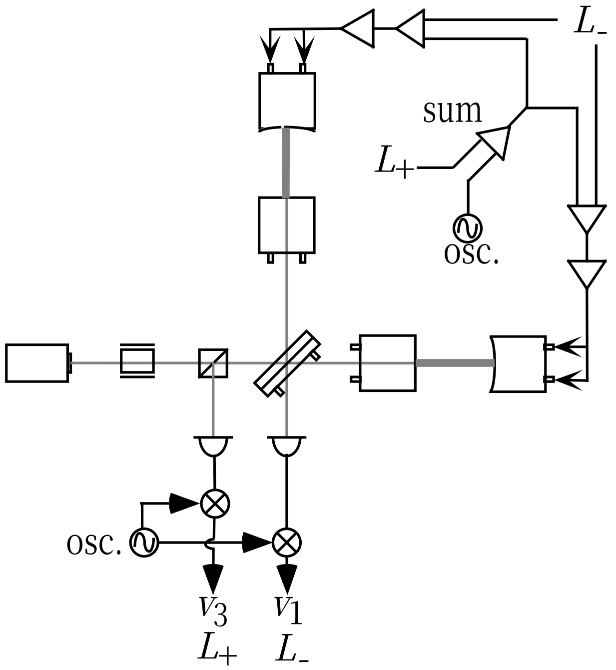

図 6.5: driver における信号の混合比の測定。

測定されたδL_-変位雑音と、δL_+変位雑音に上で求めた CMRR をかけ、2 で割った雑音を同時にプロットしたものが、図 6.4である。このグラフより約 20kHz より高い周波数帯で、変位感度はレーザーの周波数雑音によって制限されていることが分かる。

なお、周波数雑音のスペクトルが 50KHz 付近で盛り上がっているのは、L_+制御ループの UGF 付近での位相余裕が小さいためである。

6.4.2 鏡のマス制御時の信号の混合による雑音

arm cavity の同相変動信号δL_+は、レーザー光源の周波数安定化に用いられると同時に、低周波数領域では鏡のマスを同相制御し地面振動に由来する振動を抑えている。しかし、このとき、2 つの arm cavity 長制御のための driver やアクチュエーターの特性に違いがあると、同相で制御するときに差動で鏡を動かしてしまうことが起こり得る。

ここでは、差動で動かす効果の大きさと、その効果が変位雑音に与える影響を見積もる。

2 つの鏡を同相で動かそうとするとき、差動で動く割合を$\epsilon_{\mathrm{driver}}$とする。この$\epsilon_{\mathrm{driver}}$を測定するための設定は図 6.5のようになる。$\delta L_+$の信号に発信器の信号を加え、鏡を同相で動かしている。このとき、レーザー光源の周波数安定化は行なっていない。また、図では省略してあるが、v_2の信号を用いて beam splitter の制御を行なっている。この図の v_1と v_3の比 (伝達関数) を測定し、制御の影響を考慮して補正することで、$\epsilon_{\mathrm{driver}}$の値を求めることができる。

測定された$\epsilon_{\mathrm{driver}}$の値は、約 1/10 であった。

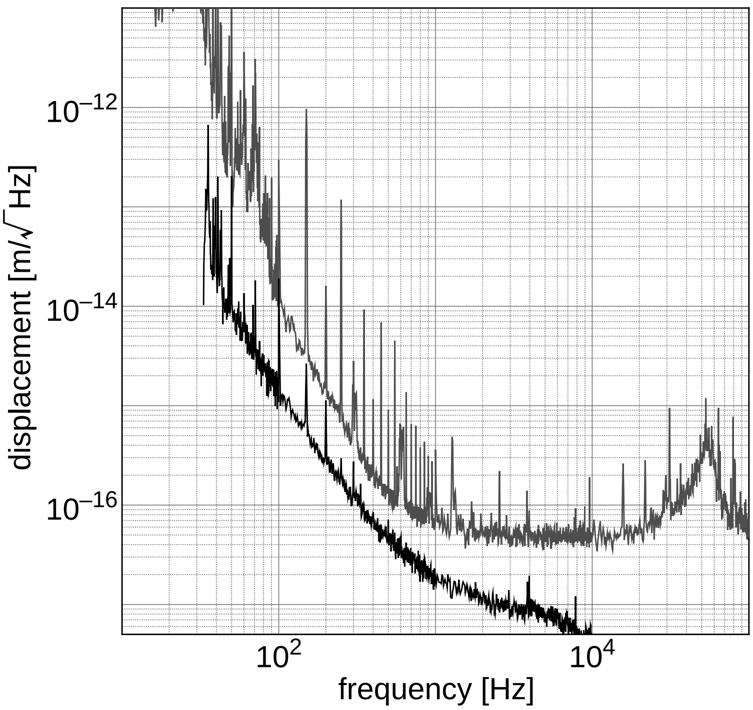

図 6.6: 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の変位雑音におけるマス制御時の信号の混合の影響。網線は FPMI 変位雑音、実線はマス制御時の信号の混合に起因する雑音の影響を表す。

このとき、δL_+の信号を用いて鏡のマスを同相制御することによる雑音の混入の影響は、

$$\delta L_- = |G_{L_+\mathrm{mass}}\epsilon_{\mathrm{driver}}| \times \delta L_+ \quad \left[\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right] \tag{6.11}$$

となる。この式より、同相変動信号をマスに feedback するループの帯域を狭くするか、もしくは、レーザ光源の PZT に feedback するループのゲインを大きくして同相雑音自体を小さくすることでこの雑音の影響を小さくできることが分かる。

この雑音が変位感度に与える影響を見るために描いたグラフが図 6.6である。このグラフより、いま考えている雑音は直接には変位雑音に影響を与えていないことが分かる。

6.4.3 beam splitter 制御系

beam splitter 制御に用いる v_2の信号は、信号レベルが小さい上に、大きな shot noise を持ち、また、復調の際の位相のずれがあると他の信号の多くの混合を受ける。そのため、δl_-信号の S/N 比は良くない。従って、この信号を用いて beam splitter を制御することにより、beam splitter が揺らされて、δL_-の変位感度を損なうことが考えられる。ここでは、beam splitter 制御系について解析する。

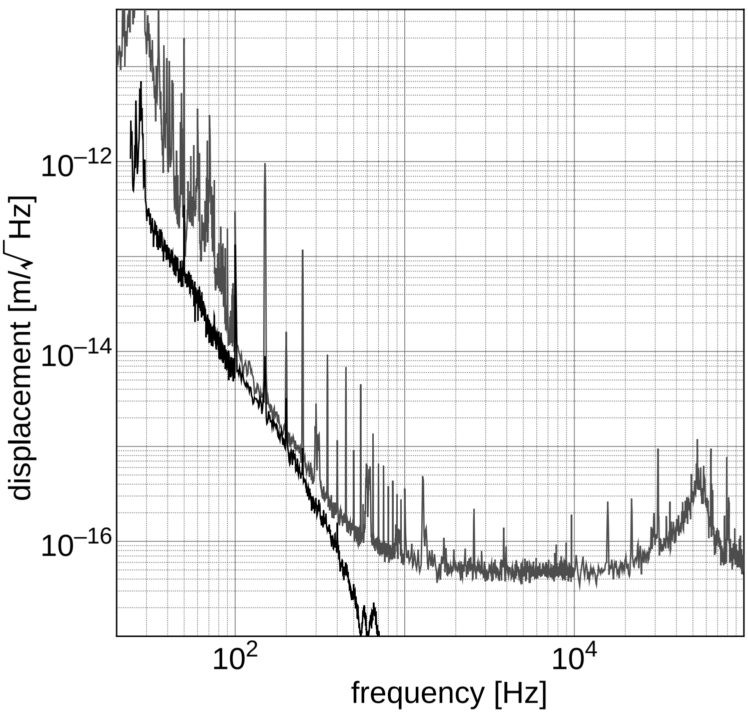

図 6.7: v_2に含まれる雑音が l_-制御系を介して beam splitter を揺らす雑音の影響。網線が FPMI 変位雑音、実線が今、考えている雑音の影響を表す。

v_2に含まれる shot noise 等の雑音 (n_{v_2}) が、l_-制御系を介して beam splitter を揺らす影響は、

$$\delta l_- = \left|\frac{G_{l_-}}{1+G_{l_-}}\right| \frac{1}{\left(\frac{\partial v_2}{\partial l_-}\right)} \times n_{v_2} \quad \left[\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right]$$

で表される。

よって、この beam splitter 変動の影響が v_1信号に現れるときの大きさは、

$$v_1 = \left(\frac{\partial v_1}{\partial l_-}\right) \times \delta l_- = \left|\frac{G_{l_-}}{1+G_{l_-}}\right| \frac{\left(\frac{\partial v_1}{\partial l_-}\right)}{\left(\frac{\partial v_2}{\partial l_-}\right)} \times n_{v_2} \quad \left[\mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right] \tag{6.12}$$

となる。式 (6.12) において、$\left(\frac{\partial v_1}{\partial l_-}\right) / \left(\frac{\partial v_2}{\partial l_-}\right)$ は、1.5 程度になり[4]、また、コントラストが 99%のとき n_{v_2}は、v_1信号に含まれる shot noise (n_{v_1}) の約 10 倍になる。従って、v_2に含まれる shot noise 等がδL_-の変位雑音に与える影響を抑えるためには beam splitter 制御の帯域を狭くする必要があることになる。

[4]光が symmetric port の photo detector に到達するまでに通過する光学部品でのロスの影響で 1 にはなっていない。

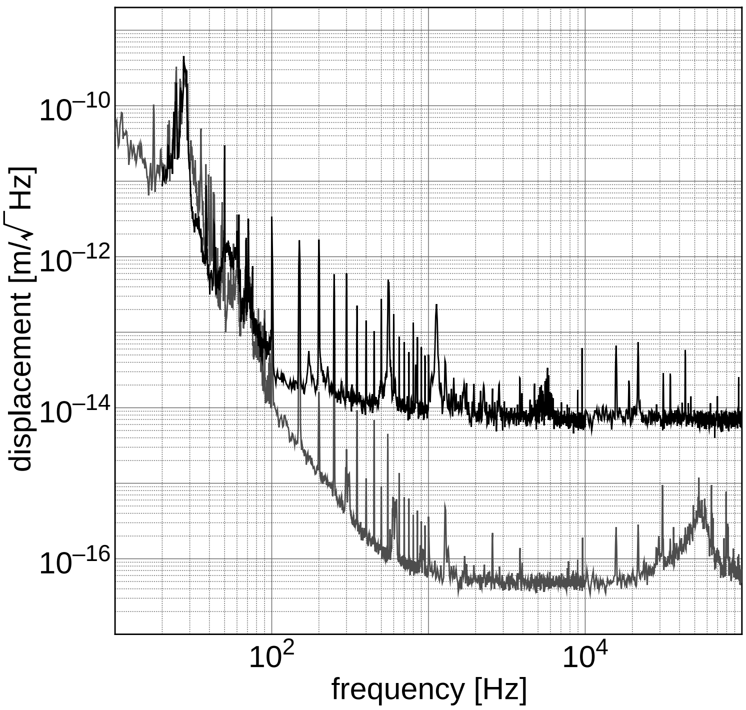

図 6.8: 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の変位感度における地面振動による雑音の影響。網線は FPMI 変位雑音、実線は Michelson 干渉計の変位雑音である。

式 (6.12) より、n_{v_2}がδL_-の変位雑音に与える影響は、

$$\delta L_- = \left|\frac{G_{l_-}}{1+G_{l_-}}\right| \frac{\epsilon_{\rm BS}}{\left(\frac{\partial v_2}{\partial l_-}\right)} \times n_{v_2} \quad \left[{\rm m}/\sqrt{\rm Hz}\right] \tag{6.13}$$

となる。

ここで、$\epsilon_{\rm BS}$は、beam splitter 変動がδL_-信号 (v_1) に混入する比率を表しており、測定より、

$$\epsilon_{\rm BS} = \frac{\left(\frac{\partial v_1}{\partial l_-}\right)}{\left(\frac{\partial v_1}{\partial L_-}\right)} = \frac{1}{143}$$

と得られている。$\epsilon_{\rm BS}$は、表 5.3の$\left(\frac{\partial v_1}{\partial \phi_-}\right)$に相当し、ほぼ近い値となっている。

n_{v_2}として v_2自身を用いて計算したものが、図 6.7である。図より、v_2に含まれる雑音が変位雑音に影響を与えていることが分かる。信号 v_2に含まれるこの雑音は、shot-noise level より 1 桁程度大きいものであり、その原因についてははっきりとは分かっていない。

6.4.4　地面振動

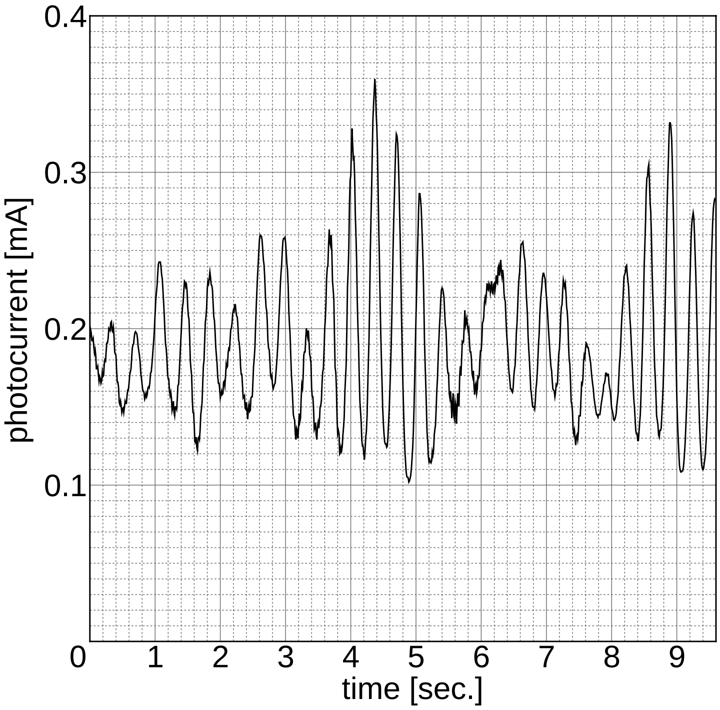

図 6.9: antisymmetric port の photo detector に流れる光電流の時間変動。干渉縞の揺らぎを表している。この変動により shot-noise level が悪化し、レーザー強度雑音の影響を受けやすくなる。

地面振動の影響を調べる為に、beam splitter と front mirror のみで Michelson 干渉計を構成し、その雑音を測定した。

図 6.8は、3m FPMI の変位雑音と、front-mirror-Michelson 干渉計の変位雑音を重ねて描いたものである。

Michelson 干渉計の変位雑音は、antisymmetric port の光を quadrature phase で復調した信号 (FPMI での v_1に相当する信号) を用いて beam splitter を制御し、dark fringe にロックした時に得られたものである。約 100Hz 以上で変位雑音レベルが平坦になっているが、これは、shot-noise level であると考えられる (6.4.5節参照)。

図 6.8において、約 100Hz 以下の周波数帯では 2 つののグラフはほぼ一致している。このことから、約 100Hz までは、3m FPMI の変位雑音は地面振動によって制限されていると考えられる。

6.4.5 検出系の雑音、shot noise

図 6.9は、antisymmetric port の photo detector に流れる光電流 ($i_{\rm dc}$) の時間変動である。図 6.9より、photo detector に流れる平均光電流は、0.19mA となる。この値は、信号検出系

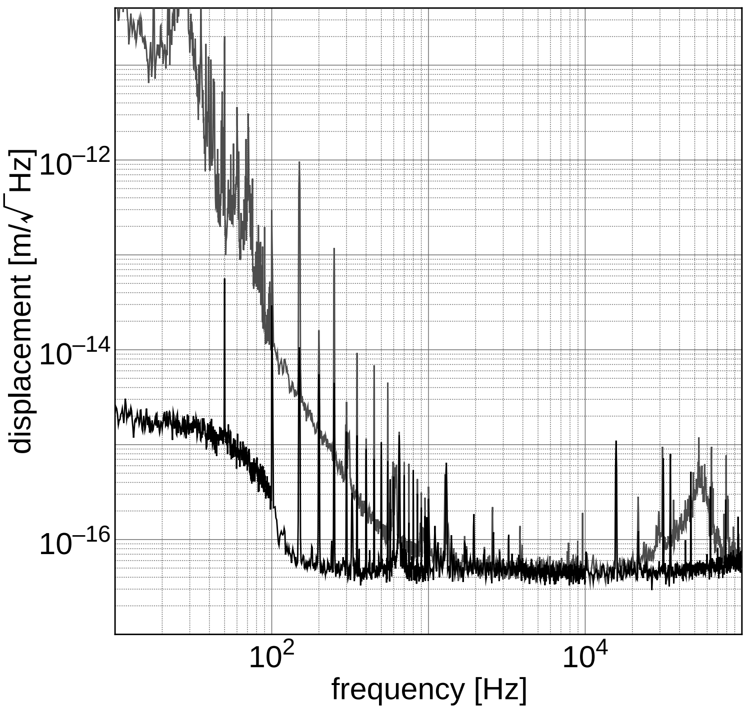

図 6.10: 検出系の雑音、shot noise の影響。網線は FPMI 変位雑音、実線は信号検出系の雑音と shot noise の影響を表す。

の雑音の等価電流値 i_{det} とほぼ同程度の大きさである。この値と式 (5.1) より、shot-noise level は、$4.7\times10^{-17}\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$となる。

この平均光電流に相当する光を photo detector に直接入射したときの L_-信号検出系 (v_1) の雑音と、3m FPMI の変位感度を重ねて描いたものが図 6.10である。

2kHz から 20kHz の間の周波数帯で 2 つのグラフは、良く一致しており、変位雑音を制限しているのは検出系の雑音と shot noise の影響であることが分かる。

検出系の雑音の影響と shot-noise の影響は、ほぼ同程度であるが、3m FPMI の変位雑音は、ほぼ shot-noise level に達していると言える。

検出系の雑音は、photo detector の雑音に由来するものと考えられるが、干渉計に入射される光のパワーが小さいことと、実効変調指数が小さい影響で信号レベルが小さいため、現在以上に S/N 比を良くすることは困難である。

なお、図 6.9の変動を FFT 解析すると、約 2.7Hz にピークが見られた。これは、懸架系の共振に由来するものと考えられる。

また、図 6.10において 100Hz 以下で検出系の雑音レベルが大きくなっているが、これは、位相変調時に強度変調もかけられてしまう影響で、強度雑音が混入しているためである、という可能性が考えられる。

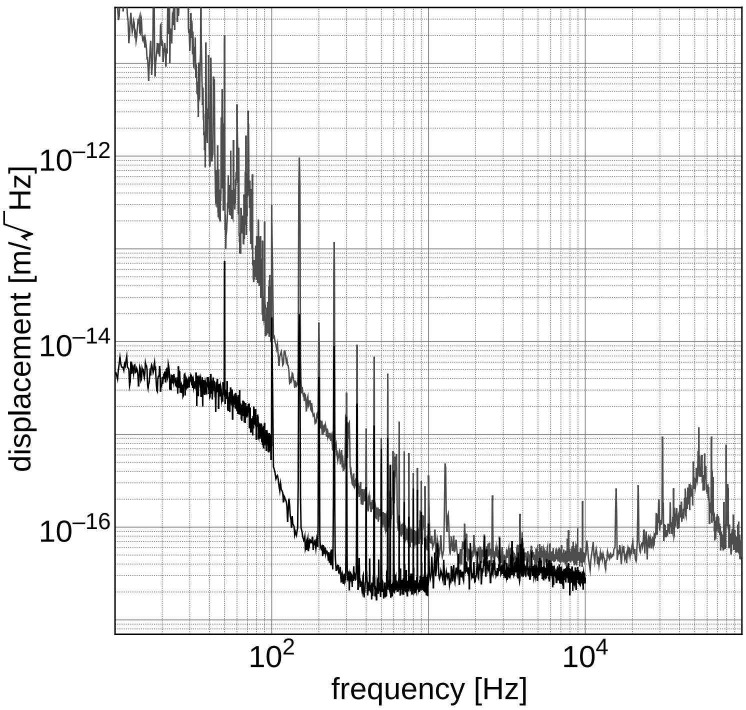

図 6.11: 強度雑音の影響。網線は FPMI 変位雑音、実線が強度雑音の影響を表す。

6.4.6　強度雑音

制御のゲインが足りないために干渉縞が揺らぐとレーザー光源の強度雑音の影響が現れる。

最適な動作点から$\delta l_{\rm rms}$だけずれているとき、beam splitter の位置が、

$$\delta x_{\rm int} = \frac{\delta P}{P}\delta l_{\rm rms} \quad \left[{\rm m}/\sqrt{\rm Hz}\right] \tag{6.14}$$

だけ変動しているのと同様の雑音となる。

図 6.9より、beam splitter 位置の最適動作点からのずれを見積もる。beam splitter が動くことによって、干渉光が強度変化を起こした時の photo detector の DC 出力変化は、

$$\begin{aligned} \delta v &= v_{\rm min} + \frac{v_{\rm max} - v_{\rm min}}{2}\left(1 - \cos\frac{4\pi\delta l}{\lambda}\right) \\ &= v_{\rm min} + (v_{\rm max} - v_{\rm min})\sin^2\frac{2\pi\delta l}{\lambda} \quad [{\rm V}] \end{aligned}$$

となるので、動作点付近の微少変化 ($\delta l \ll 1$) については、

$$\delta l \simeq \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{\delta v - v_{\rm min}}{v_{\rm max} - v_{\rm min}}} \quad [{\rm m}]$$

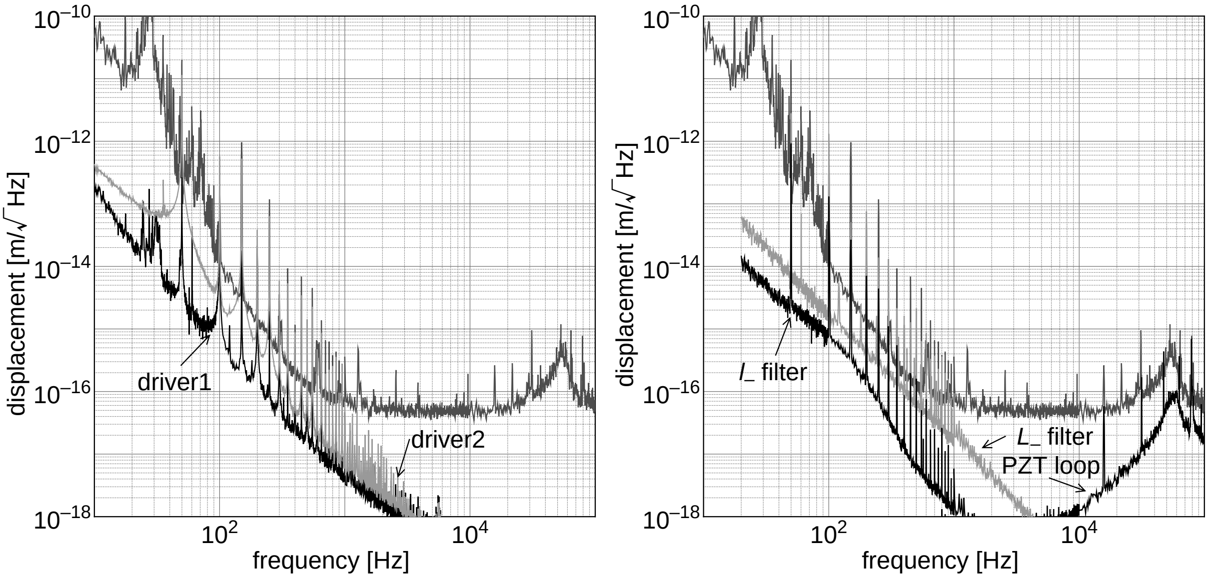

図 6.12: 電気回路の雑音の影響。driver1,driver2 : arm cavity 制御用の coil driver の雑音、L_-filter : L_- loop の filter の雑音、l_-filter : l_- loop の filter の雑音、PZT : L_+ loop のうちの PZT 用の filter と PZT driver の雑音のそれぞれの影響が描いてある。

とできる。

この式と図 6.9より、動作点からのずれの 2 乗平均値は、

$$\delta l_{\mathrm{rms}} = \sqrt{<\delta l^2>} = 1.3 \times 10^{-8}\ [\mathrm{m}]$$

となる。

レーザー光源からの光を直接 photo detector で検出して測定した強度雑音$\frac{\delta P}{P}$ $1/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ のデータを用いて、干渉計の変位雑音に及ぼす影響

$$\delta L_- = \epsilon_{\mathrm{BS}} \frac{\delta P}{P} \delta l_{\mathrm{rms}}\ \left[\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}\right] \tag{6.15}$$

を計算したものが、図 6.11である。

このグラフより、強度雑音の影響は検出系の雑音、shot-noise level より小さいことが分かる。

6.4.7 電気回路の雑音

制御に用いる電気回路の雑音も干渉計の雑音となる。この影響を計算したものが図 6.12 である。

L_- loop の filter の雑音の影響は、制御がかけられていない状態で、filter の雑音と、その雑音から arm cavity の鏡の差動変位への伝達関数を測定することで見積もることができ

る。また、driver の雑音の影響は、driver の雑音がどれだけ鏡を変動させるかを計算すれば良い。

l_- loop の電気回路の雑音の影響を調べるためには、まず、制御がかかっていない状態で、l_- loop の電気回路の雑音とその雑音から beam splitter 変動への伝達関数を測定し、それらから、電気回路の雑音が beam splitter を変動させる量を見積もる。制御がかけられているときの beam splitter 変動量は、制御がかけられていないときの beam splitter 変動量を $|1+G_{l_-}|$ で割ることによって計算できる。δL_-変位雑音に与える影響は、さらにϵ_{BS} をかけることによって求めることができる。

L_+ loop の電気回路の雑音の効果についても l_- loop と同様に計算することができる。低周波数帯では L_+ loop は、大きなゲインを持つため、L_+ loop の mass loop 用 filter の雑音の影響は十分小さくなる。

図 6.12より、鏡の制御に用いている回路の雑音が beam splitter 制御系の影響 (6.4.3節) ほどは 3m FPMI 変位雑音に大きな影響は与えていないことが分かる。

ただ、今後、変位雑音レベルが改善された時には、これらの回路の雑音が問題となる可能性もあるが、その場合にも、L_- loop の filter や coil driver の影響は feedback 信号を測定することで低減できるだろう。具体的には、両腕に用いている 2 つの coil driver の出力の差を取ることになるが、その際に同相変動信号が混入する可能性も考え得る。

もしくは、現在は同相信号と差動信号を足し合わせてから coil driver に入力しているが、coil driver を同相制御用と差動制御用に別々に用意し、それぞれの driver の出力を coil の直前で直接足し合わせる方法なども考えられる。

6.5 周波数安定化

前節では 3m FPMI の変位雑音について調べてきたが、この節では、レーザー光源の周波数安定化についてさらに調べてみる。まず、周波数安定化を行なわない時の FPMI 変位雑音を示し、その雑音源について調べる。その後、周波数安定化が正しく行なわれているかどうかを調べる。

6.5.1 周波数安定化を行なわなかった場合の変位雑音

3m FPM 干渉計を動作させる時には、arm cavity 長変動の同相変位信号 (δL_+) は、低周波数成分は end mirror の同相制御、高周波数成分はレーザー光源の周波数制御に用いられる。しかし、信号の高周波数成分を用いた周波数安定化を行なわない状態で干渉計を動作させることも可能であり、この場合には制御系がやや簡単になり、解析も容易になる。

図 6.13は、レーザー光源の周波数安定化を行なった時と行なわない時の変位雑音を比較したものである。最大で約 50dB 雑音が低減していることが分かる。

また、100Hz 以下の周波数帯では 2 つのグラフは共に地面振動による雑音レベルで一致している。

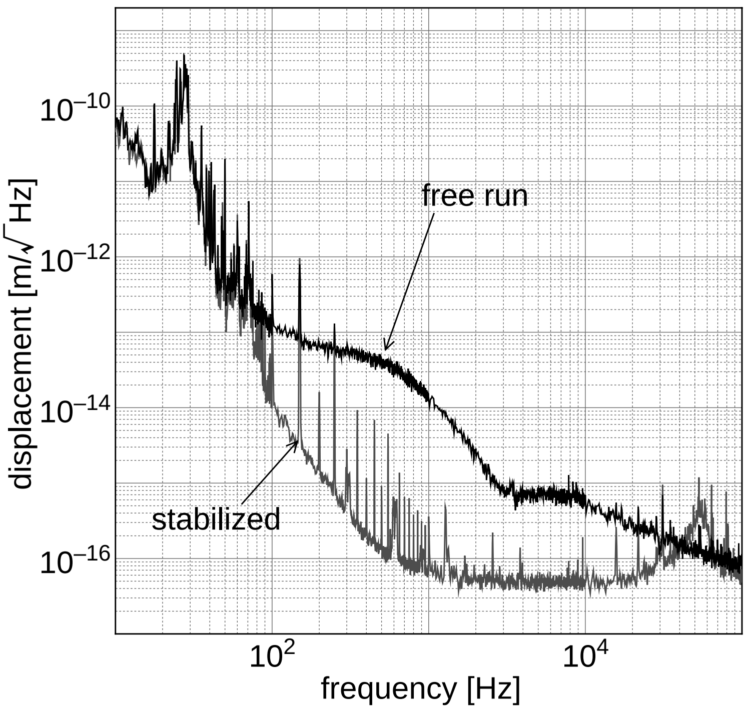

図 6.13: 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の変位雑音。レーザー光源の周波数安定化を行なった時と行なわない時の比較。網線が周波数安定化を行なった時の FPMI 変位雑音、実線は周波数安定化を行なわなかった時の FPMI 変位雑音である。

6.5.2　周波数雑音の影響

レーザーの周波数安定化をしないときのδL_-変位雑音と、δL_+変位雑音に CMRR をかけ、2 で割った雑音を同時にプロットしたものが、図 6.14である。CMRR の値は、周波数安定化を行なった時に測定したものを用いた。

数 kHz 以上の周波数帯では 2 つのグラフがほぼ一致していることが分かる。よって、この周波数帯では、変位雑音は周波数雑音によって制限されていると言える。完全に一致していないのは、CMRR の値がややずれているためと考えられる。

これは、この変位雑音の測定が、CMRR の測定からかなり時間がたってから行なったものであるためと考えられる。

6.5.3　鏡の同相制御時の制御の混合の影響

レーザー光源の周波数安定化を行っていない時についても、鏡を同相制御するときにアクチュエーターの特性の違いによって差動で動かしてしまう影響 (式 (6.11)) を考える。これを計算したものが図 6.15である。約 100Hz から 1kHz までの間の周波数帯で 2 つのグラフがほぼ重なっており、driver の特性の違いによる制御の混合の影響が、変位雑音に現れ

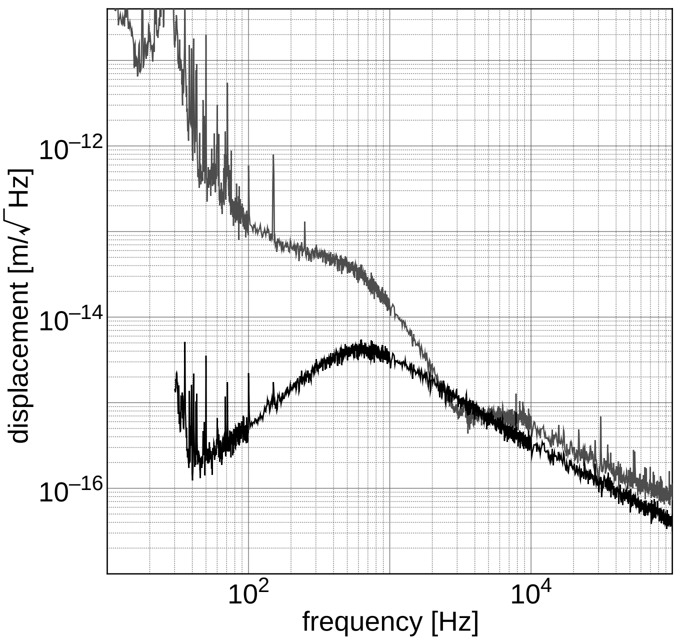

図 6.14: 周波数雑音安定化を行なわない時の 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の変位雑音における周波数雑音の影響。網線は FPMI 変位雑音、実線はレーザー光源の周波数雑音の影響を表す。数 kHz 以上の周波数帯で 2 つのグラフがほぼ重なっており、レーザーの周波数雑音の影響が変位感度を制限していることが分かる。

ていることが分かる。

この雑音の影響と、周波数雑音の影響、低周波では地面振動によって、周波数安定化を行なわない時の FPMI 変位雑音のスペクトルは、ほぼ全て説明できる。ただ、制御の混合による雑音の影響と周波数雑音の影響が重なる周波数帯では FPMI 変位雑音がやや下がる効果が見られる。これは、この 2 つの雑音が共に同相雑音に由来しており、相関を持っている影響であると考えられる。これについては、2 つの雑音が混入する位相を調べることで確かめられるだろう。

6.5.4 レーザー光源の周波数安定化

次に、レーザー光源の周波数安定化が設計通りに働いているかを調べる。そのために、周波数安定化を行わないときの error 信号を基に、L_+制御系の open loop 伝達関数で補正して周波数安定化したときの予想 error 信号を計算し、実際に周波数安定化を行った時の error 信号と比較する。open loop 伝達関数での補正は、

$$\delta L_{+\mathrm{st}} = \frac{|1 + G_{L_{+}\mathrm{no}}|}{|1 + G_{L_{+}\mathrm{st}}|}\delta L_{+\mathrm{no}}$$

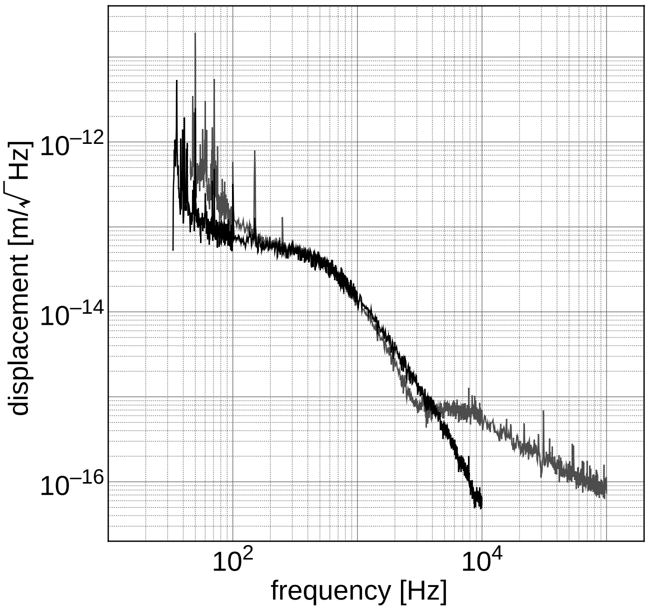

図 6.15: 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の変位雑音におけるマス制御時の信号の混合の影響。周波数安定化を行わない場合のもの。網線は FPMI 変位雑音、実線はマス制御時の信号の混合に起因する雑音の影響を表す。

で計算される。ここで、添字の$'_{\mathrm{no}}'$、$'_{\mathrm{st}}'$は、それぞれレーザー光源の周波数安定化をしない時、周波数安定化をした時を表す。

実測値と計算値を図 6.16に示す。実測した error 信号の値と、計算から求めた値はほぼ一致しており、レーザーの周波数安定化が働いていることが分かる。

6.5.5 arm cavity による周波数安定度の評価

上で述べているのは、error 信号を調べた結果に過ぎず、図 6.16に現れているような周波数安定化度が実際に達成されているかどうかを調べるには、別の周波数基準が必要となる。しかし、全く別の周波数基準を用いることはできなかったため、周波数安定化を行なった状態で片方の arm cavity のエラー信号から周波数安定度を考えてみる。この信号は、制御に対して全く独立なものではないが、検出系が別のため、δL_+信号検出系に起因する雑音の影響で周波数安定度が損なわれている影響は調べることができる。

3m FPMI では動作点への引き込み時に両腕 arm cavity からそれぞれの誤差信号を取りだし、それぞれ独立にロックする方式を取っている。pre-modulation 法で干渉計を動作させている時には、この信号は制御に用いられていないが、この信号を測定することで片方の arm cavity のみの変動信号を取り出すことができる。

測定された結果が図 6.17である。図には、FPMI 変位雑音と共に、片方の arm cavity の

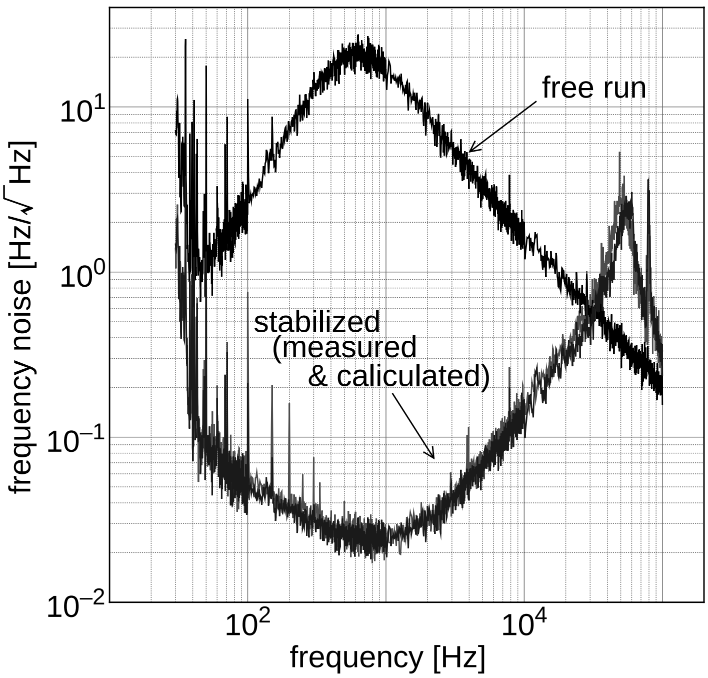

図 6.16: レーザー光源の周波数安定化。周波数安定化しないときの error 信号から周波数安定化時の error 信号を計算した値と、周波数安定化したときに実測した error 信号がほぼ一致している。

変位雑音に CMRR をかけたものと、δL_+変位雑音に CMRR をかけ、2 で割ったものが描かれている。周波数雑音が FPMI 変位雑音に与える影響を表している。このグラフより、10kHz 以上で周波数雑音の影響が、δL_+変位雑音信号と片方の arm cavity の変位雑音信号で一致していることが分かる。それ以下の周波数帯では、片方の arm cavity 変位雑音信号の方が悪くなっているが、これはこの信号検出系の雑音である。従って、少なくともこのレベルまでは L_+ loop の信号検出系の雑音の影響は無いことが分かる。

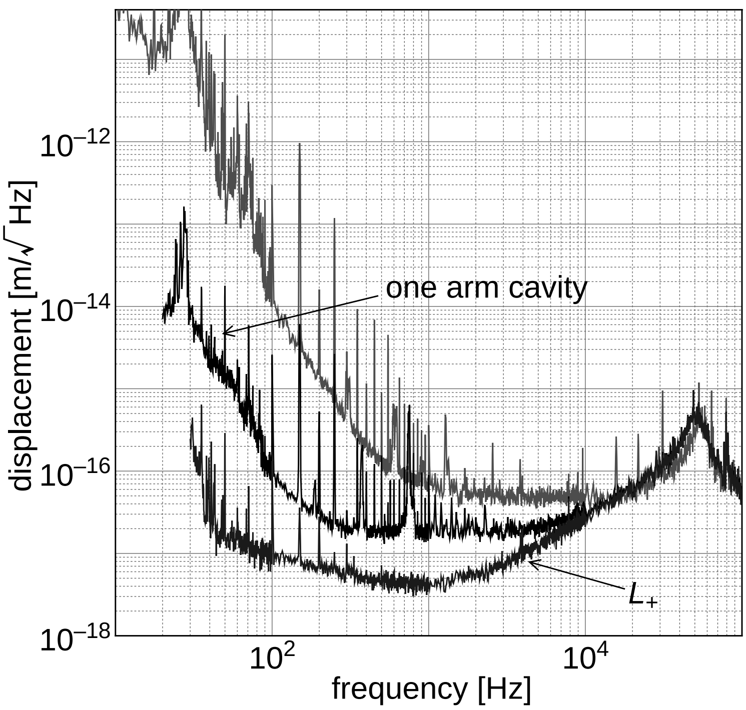

図 6.17: 周波数安定化時の片方の arm cavity の変位雑音。網線が安定化時 FPMI 変位雑音、実線が片方の arm cavity の変位雑音に CMRR をかけたもの。一番下の線が、δL_+変位雑音に CMRR をかけ、2 で割ったもの。

第 7 章

結論

7.1 結果

制御信号取りだし法として pre-modulation 法を用いた制御系で 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計を動作させることにより、次のような結果が得られた。

- 制御信号取得法として pre-modulation 法を用いて 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計を安定に動作させることに成功した。この結果、鏡が振り子によって吊られている干渉計においても、この方法が有効であることが確かめられた。
- 得られた変位感度は、2kHz から 20kHz の周波数帯で、$5 \times 10^{-17}\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$であった。
- 変位感度を制限する雑音はほぼ特定できており、地面振動、l_- loop の雑音、検出系の雑音と shot noise、周波数雑音がある (図 7.1)。また、強度雑音、電気回路の雑音も問題となっている可能性もある。
- 素早く、確実に動作点に引き込む為の制御系の切替手順を考案し、その有効性を実験で確認した。
- 光源のパワーと実効変調指数が小さいため、検出系の雑音を受け易くなっている。

以上より、改善の余地は残されているものの、鏡が振り子によって吊られているプロトタイプ干渉計を pre-modulation 法によって取り出された信号のみで制御する、という当初の目的は達成されたと言える。

7.2 問題点と考察

L_- loop のゲインを大きくし、UGF を 3kHz 程度にすると、変位雑音レベルが上がるという現象があり、L_- loop の帯域はそれほど広くできていない。観測帯域よりも制御帯域を広くできる (tight lock できる) 事は、pre-modulation 法の大きなメリットの 1 つであるが、

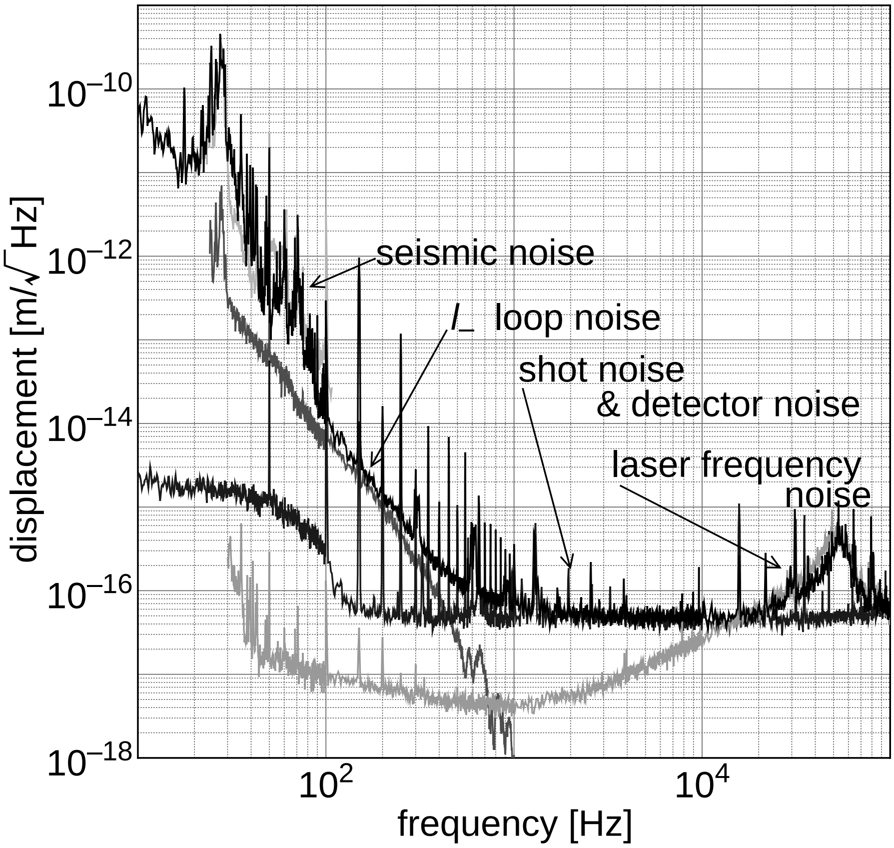

図 7.1: 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計の変位雑音とその雑音源。

その確認をすることはできなかった。これは、電気回路がまだ最適化されていないためか、もしくは、信号間の混合の影響である可能性もある。tight lock した場合には L_- loop の feedback 信号から信号を得ることになるが、この信号の良い取り出し方法についても考察する必要もあるだろう。

また、l_- loop のゲインが小さいため干渉縞が安定せず、shot-noise level が悪化している影響が見られた。しかし、これ以上 l_- loop のゲインを上げることは、δl_-信号に含まれる比較的大きな shot noise の影響を受けることになる。これを解決するためには、l_- loop 用 filter をより改良するか、もしくは防振系を改良することが考えられる。このことは、大型干渉計においても問題となる可能性があり、低周波数での防振、制御系の設計には注意を要する。

本実験では、δl_-信号には大きな雑音が混入している。これは、復調信号の位相のずれの影響であると思われる。δl_-信号に限らず、復調する位相のずれは信号間の混合を招く原因となるため、初期調整はもちろん、その時間変化についても考慮する必要があるだろう。

検出系の雑音については、高出力の光源と大きな実効変調指数を持つ大型干渉計では問

題とならないであろう。しかし、symmetric port の photo detector には、ほぼ全ての光が入射することになるため、高出力用の photo detector が必要となるであろう。
本実験では CMRR は約 1/30 であった。この値は以前に 3m FPMI で得られている値よりも約 10 倍大きい値である。これが、制御系を変更したことによる影響なのかどうかは不明であり、調査していく必要がある。

7.3 今後の研究

3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計における、本研究の延長としては、

- photo detector の改良により、検出系の雑音レベルを下げる。
- l_-信号に混入する雑音源を特定し、除去する。もしくは、filter 回路を改良し、この雑音が FPMI 変位雑音に影響を与えない様にする。
- CMRR を含めた信号の混合についての研究を進め、改善していく。
- 電気回路を最適化するなどして、tight lock 状態での動作を行ない、解析を行なう。

などの研究がある。

7.4 TAMA300

この研究の背景には、TAMA300 や将来の大型干渉計の制御系についての知識を得るという目的があった。TAMA300 の光学設計はおおよそ図 7.2のようになると考えられる[1]。基線長は 300m、レーザー光源としては、出力 10W の Nd:YAG レーザーを用いる。このレーザーは、注入同期を用いた高出力・安定な光源となる。また、mode cleaner として長さ 10m の ring 型のものを用いる。ring 型の利点は、主干渉計からの戻り光の影響を受けにくい点にある。また、主干渉計の制御信号の取り出しのための位相変調器は、この mode cleaner の前に置かれ、生成された side band も carrier と共に mode cleaner を透過するように設計されている。これによって、位相変調器によるレーザー波面の乱れの影響を小さくすることができる。また、長さ 300m の arm cavity では、鏡の傾きによる光軸のずれが問題となり得るため、phase front sensing 法と呼ばれる方法を用いて、鏡の傾きを制御することになっている。さらに、phase II(第 2 段階) では power recycling が組み込まれる予定である。その制御信号の取り出しは、pre-modulation を用いることになっている。
防振系としては、スタックと共に、低周波での防振として X-pendulum と呼ばれる振り子が用いられる。これは、長周期の振り子をコンパクトな大きさで実現することができるもので、TAMA300 の大きな特徴の 1 つとなっている。鏡の懸架は、現在 3m FPMI で用

[1]未定の部分もある。

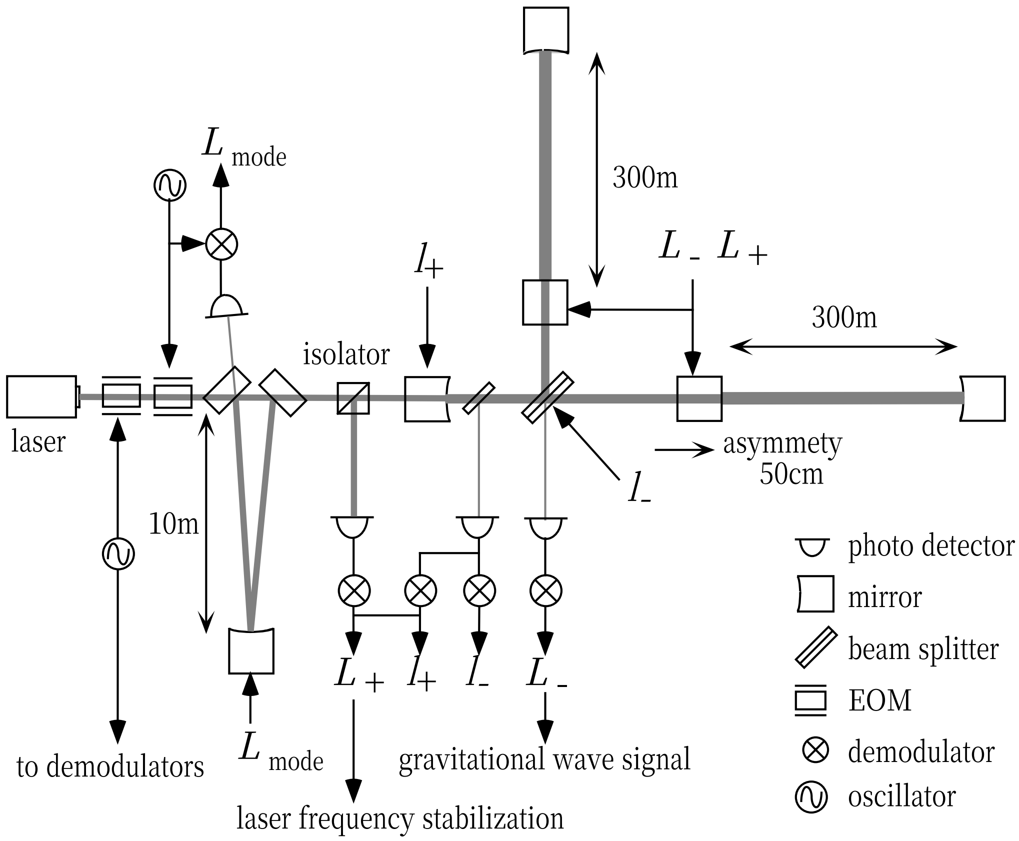

図 7.2: TAMA300 の光学設計。

いられるものを基に設計されることになっている。干渉計は真空槽内に収められ、真空度は 10^{-6}Pa 以下に保たれる。

これらにより、TAMA300 では、周波数 300Hz、バンド幅 300Hz の観測帯域で、最終的に、重力波の振幅で $\bar{h} \sim 3 \times 10^{-21}$の感度を持つことになる。

この TAMA300 では信号の取り出しに pre-modulation 法を用いることになっているが、この際には、3m FPMI で行った本実験のものとほぼ同じ制御系を用いることができる。ただ、power recycling まで含めた Fabry-Perot-Michelson 干渉計の制御についての研究や、干渉計が大型化したことによる各種の問題、データーの取得・解析法などの問題もあり、今後の課題として残されている。

補遺 A

使用した電気回路

ここでは、実験で主に使用した回路を示す。

A.1　信号検出系

図 A.1は、信号取得系で用いた電気回路を表したものである。発振器によって作られた 15MHz の信号は EOM へ入力されてレーザー光の位相変調に用いられると同時に、復調にも用いられる。そのため、信号を分割する分波器が入れてある。

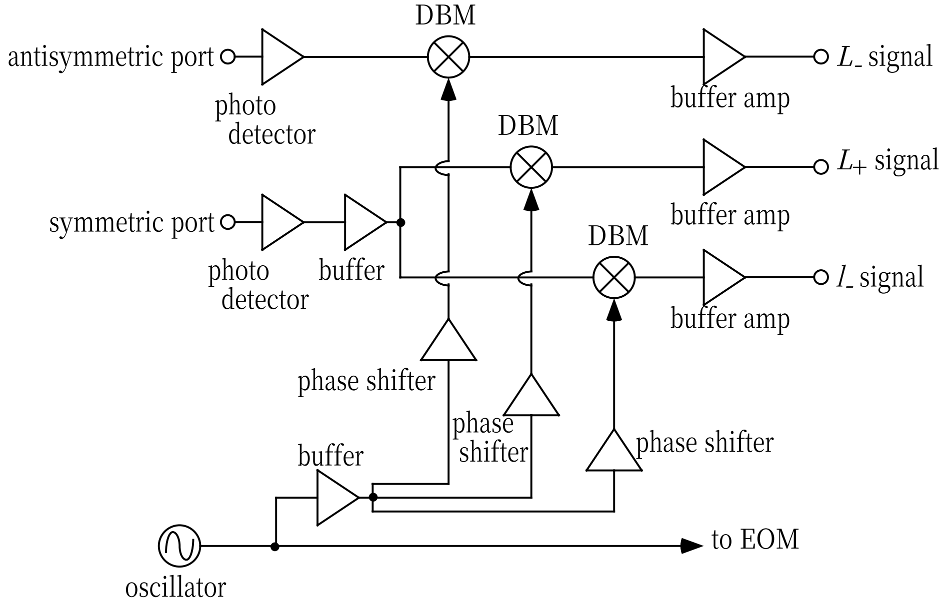

図 A.1: 信号取得系に用いた回路。動作点への引き込みのための電気回路は省略してある。

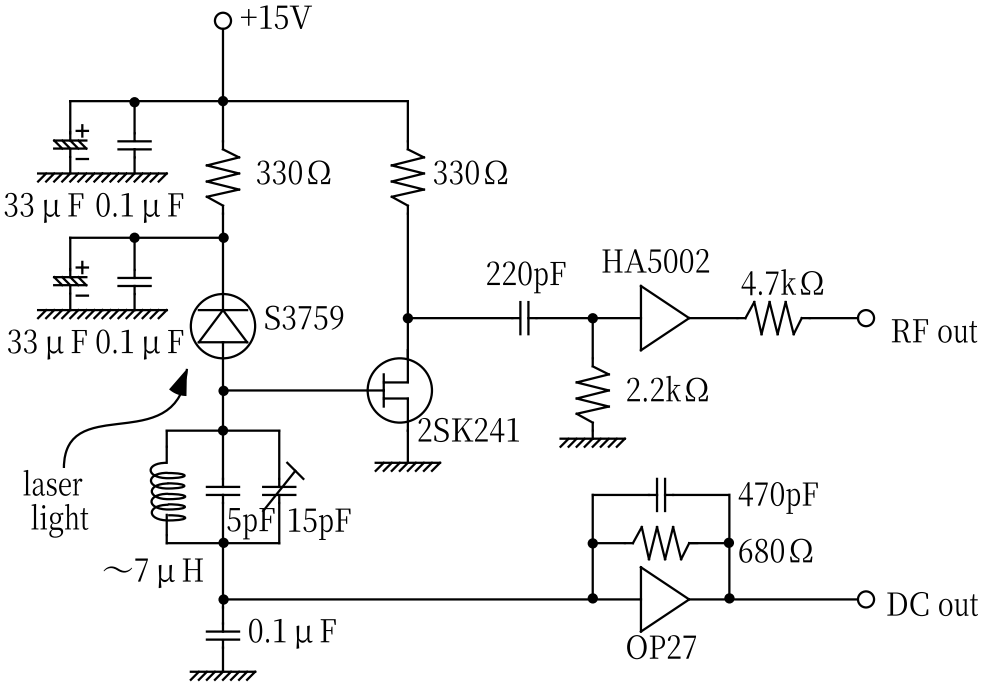

図 A.2: photo detector の回路図。図は antisymmetric port で用いられているもの。入射する光量や信号強度が違うため、symmetric port で用いられているものは抵抗値などが多少変えてある。

A.1.1　photo detector

レーザー光の強度を電気信号に変換する為の photo detector としては、図 A.2に示した回路を用いた。15MHz の変調信号のみを効率良く取り出すためにコイルとコンデンサーを並列結合した共振回路を組み込んでいる。また、DC 付近の光強度も取り出せるようになっており、差動法でのロックや shot-noise level の測定などに用いることができるようになっている。photo diode には浜松ホトニクス社製の S3759 を用いている。受光面がϕ5mm と大きく、15MHz の信号を検出するには十分高速で、比較的低接合容量 (約 20pF) である。また、放射効率は、波長 1064nm の光に対して約 0.43A/Wである。

なお、antisymmetric port 用のものと、symmetric port 用のものでは入射光量の違いに対応して抵抗値などが多少変えてある。

A.1.2　phase shifter

復調し、信号を取り出す際には局部発振波が必要となるが、その際、位相を in phase と quadrature phase にしなければばならない。そこで、発振器からの信号の位相を変化させるために phase shifter を用いる。phase shifter の回路図を図 A.3に示す。

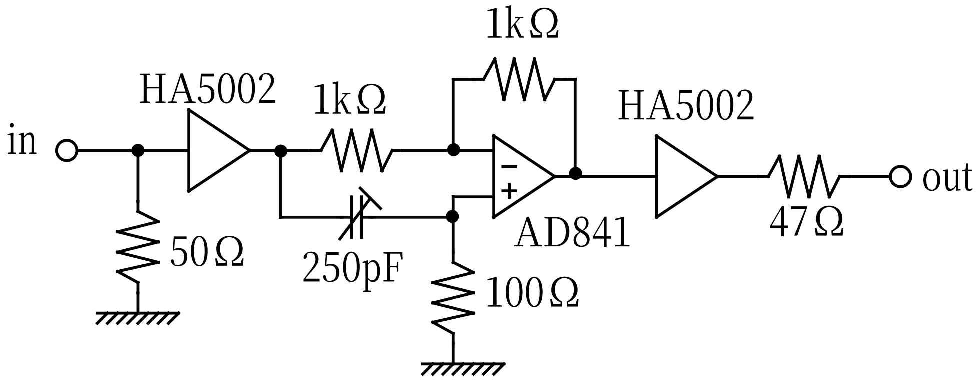

図 A.3: phase shifter の回路図

A.2 feedback 系

図 A.4に feedback 系で用いた電気回路を示す。notch filter は mass や beam splitter、PZT の共振を抑えるために入れてある。

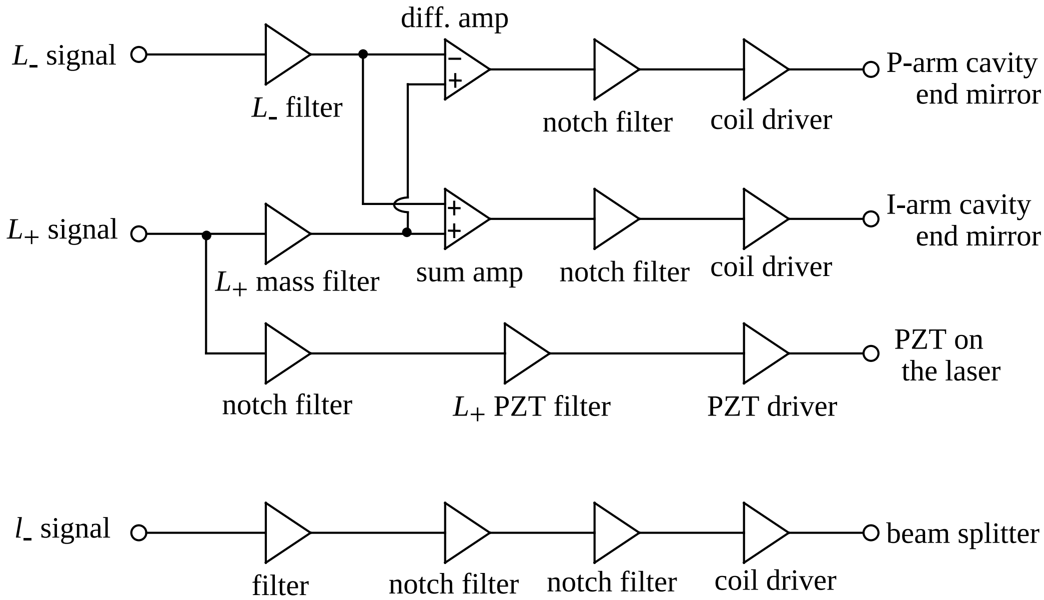

図 A.4: feedback 系に用いた回路。動作点への引き込みのための電気回路は省略してある。

A.2.1 各 filter の回路図

以下に各制御ループで用いた filter の回路図を示す。

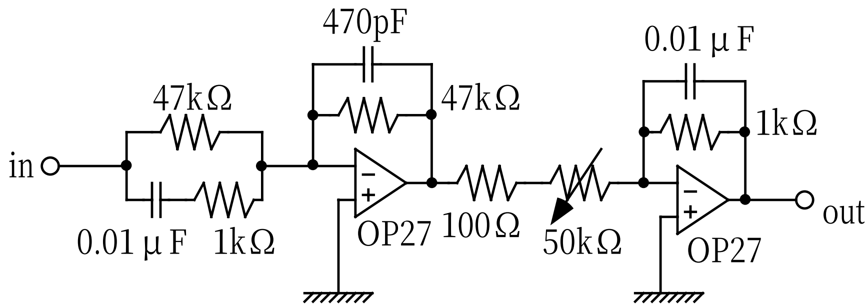

図 A.5: L_loop の filter の回路図

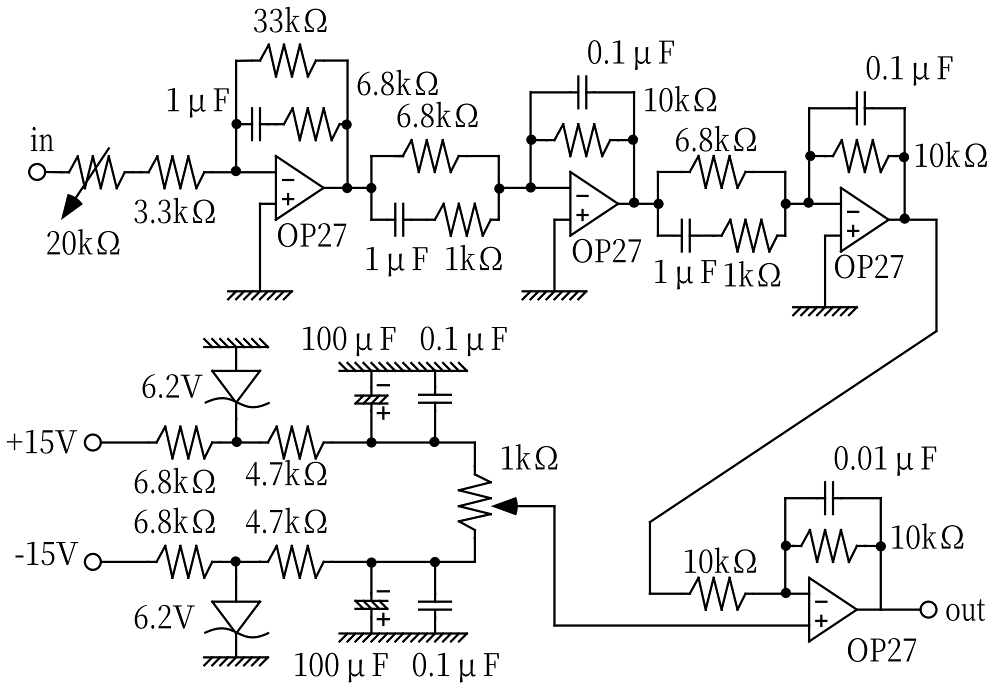

図 A.6: l_loop の filter の回路図

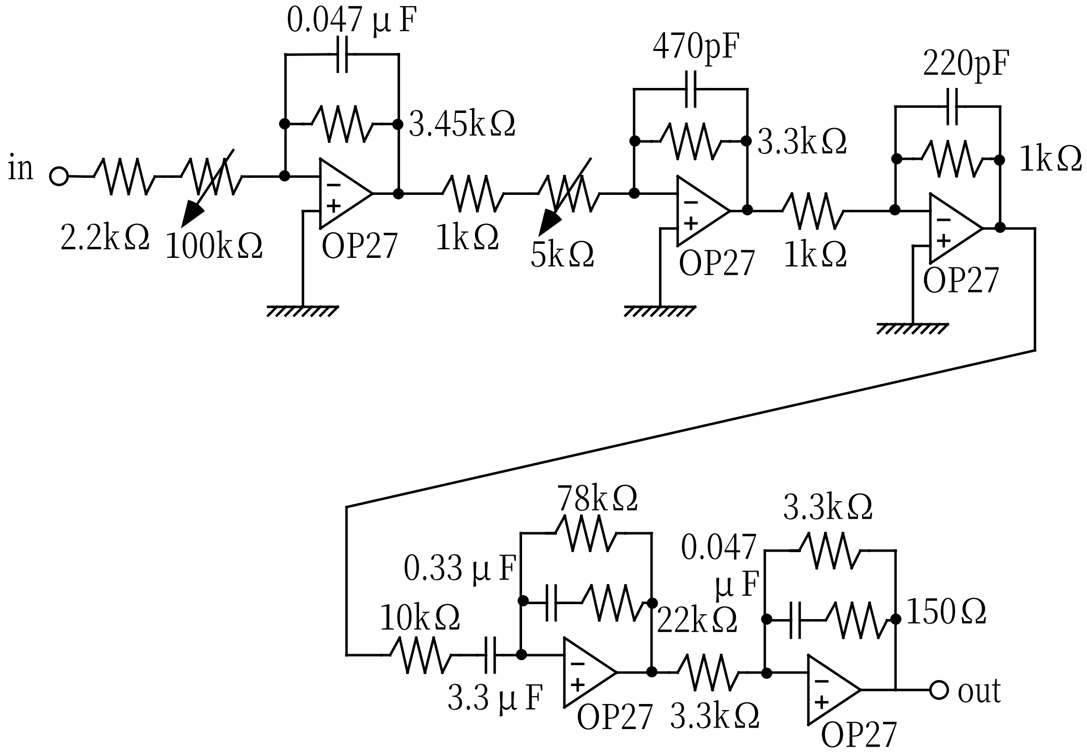

図 A.7: L_{+}loop の PZT 用 filter の回路図

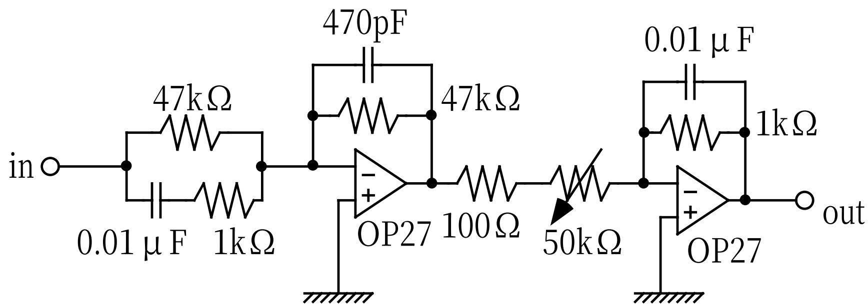

図 A.8: L_{+}loop の mass 用 filter の回路図

A.2.2 driver の回路図

以下に coil driver、PZT driver の回路図を示す。

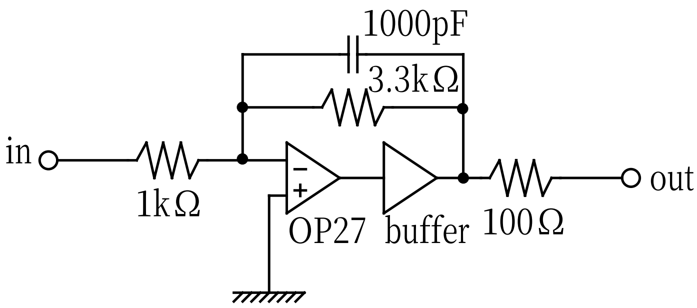

図 A.9: coil driver の回路図

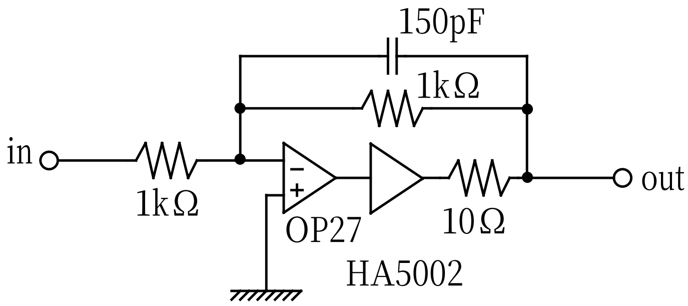

図 A.10: PZT driver の回路図

補遺 B

参考文献

[1] 三尾典克, 大橋正健編, ' 重力波アンテナ技術検討書 – 干渉計ハンドブック –', (1992)

[2] A.Giazotto, '*Interferometric detection of gravitational waves*', Physics Report **182**,365 (1989)

[3] A.Einstein, '*Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstheorie*', Annalen der Physik, 49 (1916)

[4] J.H.Taylor, J.M.Weisberg, '*Further experimental tests of relativistic gravity using the binary pulsar PSR1913+16*', Astrophys.J.**345**,434 (1989)

[5] R.Takahashi, J.Mizuno, S.Miyoki, N.Kawashima, '*Control of a 10m delay-line laser interferometer using the pre-modulation method*', Physics Letters A **187**,157 (1994)

[6] 大橋正健, ' ファブリーペロー方式レーザー干渉計型重力波検出器の開発', 東京大学博士論文 (1994)

[7] A.Araya, '*Optical Mode Cleaner for the Interferometric Gravitational Wave Detector*', University of Tokyo Ph.D Thesis (1994)

[8] M.W.Regehr, '*Signal Extraction and Control for an Interferometric Gravitational Wave Detector*', California Institute of Technology Ph.D. Thesis (1994)

[9] M.W.Regehr, F.J.Raab, S.E.Whitcomb, '*Demonstration of a power-recycled Michelson interferometer with Fabry-Perot arms by frontal modulation*', Optics Letters **20**,1507 (1995)

[10] B.F.Schutz, '*A first course in general relativity*', Cambridge University Press (1985)

[11] 平川浩正, ' 相対論', 共立出版 (1971)

[12] K.Kawabe, S.Nagataki, M.Ando, K.Tochikubo, N.Mio,K,Tsubono, '*Demonstration of a Recombined Fabry-Perot-Michelson Interferometer With Suspended Mirrors*', Physical Review B **62**,135 (1996)

[13] K.Kawabe, University of Tokyo Ph.D Thesis (preparing)

[14] R.W.P.Drever, '*Gravitation Radiation*', editted by N.Deruelle, T.Piran, North-Holland, Amsterdam (1983)

[15] 三尾典克, 'FP-MI 型干渉計のリサイクリングの制御系について', 平成 6 年度「重力波天文学」研究報告書 (1995)

[16] R.W.P.Drever, J.L.Hall, F.V.Kowalski, J.Hough, G.M.Ford, A.J.Munley, H.Ward, '*Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator*', Applied Physics B **31**,97 (1983)

[17] K.Tsubono, A.Araya, K.Kawabe, S.Moriwaki, N.Mio, '*Triple-pendulum vibration isolation system for a laser interferometer*', Rev. Sci. Instrum. **64**,2237 (1993)

[18] H.Kogelnik, T.Li, '*Laser Beam and Resonators*', Proceedings of the IEEE, **54**,1312 (1966)

[19] 河邊径太, 'Fabry-Perot 型重力波検出器の制御', 東京大学修士論文 (1992)

[20] 近藤尚人, ' 銀河系内モニター用共振型重力波検出器の開発', 東京大学修士論文 (1994)

[21] 白土昌孝, ' 結合光共振器の制御', 東京大学修士論文 (1994)

[22] 長滝重博, ' 高反射率鏡の評価', 東京大学修士論文 (1995)

[23] 日野幹雄, ' スペクトル解析', 朝倉書店 (1977)

[24] 柏木濶, ' 自動制御', 朝倉書店 (1983)

謝辞

本実験を行なうにあたって、非常に多くの方々のお世話になりました。

東京大学理学部の坪野公夫助教授には本実験というテーマを与えていただき、暖かく指導・支援していただきました。また、私を重力波検出器の開発という意欲あふれる研究分野に迎えて下さったことに関しては感謝の言葉もありません。

坪野研究室助手である河邊径太氏には、この実験の最初から最後までお世話になりました。また、この実験に限らず、私がこの研究室に来て以来、氏にはあらゆる方面のさまざまな知識や考え方を教示していただきました。また、本実験を行なった 3m Fabry-Perot-Michelson 干渉計は河邊氏が数年にわたって開発を続けてきたものであり、まがりなりにも本論文を仕上げることができたのは氏が築き上げてきた装置・環境や知識、データーの蓄積があったおかげです。

博士過程の近藤尚人氏には、電気回路について細部にわたって教示していただきました。修士過程同期の栃久保邦治氏の存在は、共に学び、気軽に相談できる相手がいたという意味で、非常に大きなものでした。また、修士過程の新井宏二氏、大石奈緒子氏、山元一広氏にはさまざまな助言や知識を与えていただきました。新井氏には特に、計算機関係で多くのことを教えていただきました。

東京大学工学部の三尾典克助教授、同研究室助手の森脇成典氏には折りに触れ励ましていただき、また、一部の光学部品を快く貸して下さいました。東京大学地震研究所の新谷昌人氏には私の気軽な質問に対しても非常に親切に答えていただきました。また、東京大学佐藤研究室の長滝重博氏には励ましの言葉とともに様々な面で有益な知識を与えていただきました。

また、国立天文台、東京大学宇宙線研究所、宇宙科学研究所、電気通信大学の重力波研究グループの皆様には、訪問した折には快く施設を見学させていただきました。また、技術検討会などの会合や電子メール上で、多岐にわたる有益な議論を行ない、多くのことを学ぶことができました。

本論文は、ここに述べた方々を含め、多くの方々の協力があったからこそ形になったものであり、ここに深くお礼申し上げます。

最後ながら、全ての面において両親に感謝の意を表したいと思います。